# PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Požadavky ke zkoušce z PDR 3. ročník MI – 2017/18

## I. Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

1. **ODR prvního řádu**
   - (a) Počáteční úloha, řešení úplné, obecné, singulární, partikulární, graf řešení, směrové pole.
   - (b) Věta o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy.
   - (c) Metody řešení rovnic: separace proměnných, exaktní rovnice, substituce, záměna proměnných.
   - (d) Lineární ODR: globální existence a jednoznačnost, struktura řešení, výpočet řešení (metoda variace konstanty).
2. **Lineární ODR $n$-tého řádu**
   - (a) Počáteční úloha pro (nelineární) rovnici, existence a jednoznačnost řešení.
   - (b) Struktura řešení lineární rovnice — fundamentální řešení, Wronského matice a nezávislost funkcí, partikulární a obecné řešení, princip skládání řešení.
   - (c) Rovnice s konstantními koeficienty — fundamentální řešení: charakteristický polynom, řešení pro libovolné kořeny.
   - (d) Výpočet partikulárního řešení — metoda variace konstant.
   - (e) Výpočet partikulárního řešení — metoda neurčitých koeficientů pro rovnici s konstantními koeficienty.
3. **Soustavy lineárních ODR prvního řádu (SLODR1)**
   - (a) Počáteční úloha pro soustavu (nelineárních) ODR, existence a jednoznačnost řešení, vektorový zápis, graf řešení a trajektorie, převod ODR$n$ na soustavu ODR1.
   - (b) SLODR1, maticový zápis, struktura řešení, fundamentální řešení, partikulární a obecné řešení.
   - (c) Eliminační metoda řešení: převedení SLODR1 na ODR$n$.
   - (d) SLODR1 s konstantními koeficienty — fundamentální řešení (charakteristický polynom, řešení pro jednoduché i násobné, reálné i komplexní kořeny).
   - (e) Hledání partikulárního řešení — metoda variace konstant.
   - (f) Hledání partikulárního řešení — metoda neurčitých koeficientů pro soustavu s konstantními koeficienty.
4. **Další vlastnosti řešení ODR**
   - (a) Věty o existenci a jednoznačnosti řešení počátečních úloh pro ODR1 (Peanova a Picardova věta) a jejich důkazy. Zobecnění vět a jejich důkazů pro SODR1 a ODRn.
   - (b) Okrajové úlohy – specifika. Formulace okrajových podmínek pro ODR2 a ODR4. Řešitelnost okrajových úloh, vícebodové úlohy.
   - (c) Definice stabilního a atraktivního řešení ODR1, SODR1 a ODRn. Stabilita a atraktivnost řešení lineárních rovnic. Kritéria stability a atraktivnosti pro SLODR1 a LODRn s konstantními koeficienty.
   - (d) Autonomní systémy, trajektorie, 3 druhy trajektorií, klasifikace singulárních řešení (uzly, ohniska, sedlo, střed), fázový portrét řešení. Trajektorie řešení rovnic druhého (vyššího) řádu.

## II. Parciální diferenciální rovnice (PDR) — úvodní část

1. **Rovnice prvního řádu**

   (a) Homogenní lineární rovnice v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^N$, charakteristická soustava, charakteristiky, počáteční úloha, Věta o existenci řešení.

   (b) Kvazilineární rovnice v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^N$, převedení na homogenní lineární rovnici v $\mathbb{R}^{N+1}$, počáteční úloha a její řešitelnost.

2. **Cauchyova úloha pro rovnice $k$-tého řádu**

   (a) Formulace Cauchyovy úlohy v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^N$.

   (b) Analytické funkce, definice, příklady analytické a neanalytické funkce.

   (c) Věta Cauchyova-Kovalevské, idea důkazu.

   (d) Zobecněná Cauchyova úloha, charakteristické rovnice, směry a body.

3. **Klasifikace rovnic druhého řádu**

   (a) Transformace lineárních rovnic na kanonický tvar v okolí bodu v $\mathbb{R}^2$ a jejich klasifikace (hlavní část operátoru).

   (b) Kanonický tvar lineární rovnice s konstantními koeficienty v $\mathbb{R}^2$ a se všemi členy nižších řádů.

   (c) Transformace rovnic na kanonický tvar v bodě v $\mathbb{R}^N$ (transformace kvadratických forem) a jejich klasifikace, transformace rovnic s konstantními koeficienty.

## III. Rovnice matematické fyziky

1. Odvození rovnice vedení tepla v tyči a v tělese (tepelná bilance, konstituční vztahy), Cauchyova úloha, počáteční a okrajové podmínky (Dirichletova, Neumanova, Robinova (Newtonova) okrajová podmínka). Rovnice difuze.
2. Odvození rovnice kmitání struny (silová bilance), počáteční a okrajové podmínky. Rovnice podélných kmitů tyče, kmitání vzduchového sloupce, 2D a 3D vlnová rovnice a její fyzikální interpretace.
3. Rovnice pro stacionární (ustálené) řešení evolučních rovnic, okrajová úloha. Odvození rovnice pro deformaci tenké membrány z variačního principu.
4. Fyzikální interpretace eliptických, parabolických a hyperbolických rovnic.

## IV. Klasické metody řešení PDR

1. **Metoda charakteristik**

   (a) Řešení rovnice kmitání nekonečné struny, odvození d'Alembertova vzorce, Duhamelův princip, vlastnosti řešení.

   (b) Řešení úlohy na polopřímce, úsečce, podmínky souladu.

2. **Fourierova metoda řad**

   (a) Řešení počáteční okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla v tyči, konvergence řady, řešení nehomogenní úlohy.

   (b) Řešení počáteční okrajové úlohy pro rovnici kmitání struny, konvergence řady, řešení nehomogenní úlohy.

3. **Metoda integrální transformace**

   (a) Fourierova integrální transformace, řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla v nekonečné tyči, vlastnosti řešení.

4. **Metoda Greenovy funkce**
   (a) Elementární řešení Laplaceovy rovnice, Greenovy identity, Lemma o třech potenciálech, řešení okrajové úlohy s Dirichletovou nebo Neumanovou podmínkou.
   (b) Určení Greenovy funkci pro speciální oblasti: poloprostor, polorovina, koule, vnějšek koule, kvadrant, oktant a pod.
5. **Principy maxima a jednoznačnost úloh**
   (a) Vlastnosti průměru.
   (b) Harmonické funkce na omezené a neomezené oblasti.
   (c) Princip maxima pro harmonické funkce.
   (d) Jednoznačnost eliptických úloh na omezené a neomezené oblasti.
   (e) Princip maxima a jednoznačnost parabolických okrajových úloh.
6. **Vlastnosti řešení parabolických, hyperbolických a eliptických rovnic**
   (a) Formulace počátečních a okrajových úloh.
   (b) Oblast závislosti.
   (c) Hladkost řešení.
   (d) Principy maxima.
   (e) Metody řešení.

## Zkouška:

1. **Příklady z ODR** (*Probíhá během semestru*)
   (a) Rovnice prvního řádu
   (b) Lineární rovnice n-tého řádu
   (c) Soustava lineárních rovnic
2. **Příklady z PDR**
   (a) Řešení kvazilineární rovnice prvního řádu s počáteční podmínkou.
   (b) Rovnice 2. řádu v $\mathbb{R}^2$. Klasifikace a převod na kanonický tvar.
   (c) Formulace úlohy pro vedení tepla v tyči nebo kmitání struny z fyzikálního zadání, příp. převedení na homogenní úlohu a výpočet jejího řešení Fourierovou metodou řad (včetně konvergence řady).
3. **Teoretická část**

   Po jedné otázce z části I4, II, III, IV.

*Literatura:*

J. Franců: Parciální diferenciální rovnice, skripta FSI VUT, CERM 2011.
J. Franců: Obyčejné diferenciální rovnice, učební text ÚM FSI VUT.

V Brně 4. prosince 2017 Jan Franců