

Doc. RNDr. Libor Čermák, CSc.

# Výpočtová dynamika tekutin

# Obsah

<b>1</b>	<b>Rovnice proudění</b>	<b>5</b>
1.1	Základní pojmy . . . . .	5
1.2	Zákony zachování . . . . .	9
1.3	Konstitutivní vztahy . . . . .	13
1.4	Termodynamické stavové rovnice . . . . .	16
1.5	Počáteční a okrajové podmínky . . . . .	21
1.6	Bezrozměrný tvar rovnic proudění . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Základní poznatky z teorie Eulerových rovnic</b>	<b>27</b>
2.1	Hyperbolický systém . . . . .	27
2.2	Příklady hyperbolických systémů . . . . .	28
2.3	Klasické řešení hyperbolického systému . . . . .	31
2.4	Slabé řešení hyperbolického systému . . . . .	35
2.5	Riemannův problém . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Řešení Eulerových rovnic metodou konečných objemů</b>	<b>50</b>
3.1	Eulerovy rovnice . . . . .	50
3.2	Metoda konečných objemů . . . . .	54
3.2.1	Diskretizace . . . . .	56
3.2.2	Vlastnosti diskretizace . . . . .	58
3.2.3	Godunovova metoda . . . . .	64
3.2.4	Okrajové podmínky . . . . .	73
3.2.5	Metody druhého řádu . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Řešení Eulerových rovnic nespojitou Galerkinovou metodou</b>	<b>79</b>
4.1	Prostorová diskretizace nespojitou Galerkinovou metodou . . . . .	79
4.2	Časová diskretizace užitím Rungových-Kuttových metod . . . . .	90
4.3	Potlačení nežádoucích oscilací . . . . .	91
4.4	1D Eulerovy rovnice . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Řešení Navierových-Stokesových rovnic pro stlačitelné proudění nespojitou Galerkinovou metodou</b>	<b>99</b>
<b>6</b>	<b>Řešení Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění metodou konečných objemů</b>	<b>106</b>
6.1	Algoritmus SIMPLE na pravidelné obdélníkové síti . . . . .	108
6.1.1	Diskretizace první pohybové rovnice . . . . .	109
6.1.2	Diskretizace druhé pohybové rovnice . . . . .	114
6.1.3	Diskretizace rovnice kontinuity . . . . .	115
6.2	Algoritmus SIMPLE na obecné čtyřúhelníkové síti . . . . .	122
6.2.1	Diskretizace pohybových rovnic . . . . .	124
6.2.2	Diskretizace rovnice kontinuity . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Řešení Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění metodou konečných prvků</b>	<b>129</b>
	<b>Literatura</b>	<b>134</b>

# Předmluva

Skripta jsou věnována *výpočtové dynamice tekutin*, což je český ekvivalent pro Computational Fluid Dynamics, stručně CFD.

V úvodní kapitole jsou odvozeny základní rovnice proudění, Eulerovy pro neviskózní proudění a Navierovy-Stokesovy pro proudění viskózní. Eulerovy rovnice pro stlačitelné proudění jsou soustavou hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic. Proto jsou do druhé kapitoly zařazeny základní teoretické poznatky o řešení hyperbolických problémů. Třetí a čtvrtá kapitola je věnována numerickému řešení Eulerových rovnic pro stlačitelné proudění, třetí kapitola metodou konečných objemů a čtvrtá kapitola nespojitou Galerkinovou metodou. Pátá kapitola se zabývá řešením Navierových-Stokesových rovnic pro stlačitelné proudění nespojitou Galerkinovou metodou. Šestá a sedmá kapitola je věnována numerickému řešení Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění, šestá kapitola metodou konečných objemů a sedmá kapitola metodou konečných prvků.

Skripta jsou zaměřena především na numerické metody a algoritmizaci. Z matematického pohledu jde o efektivní postupy pro řešení soustav nelineárních nestacionárních parciálních diferenciálních rovnic doplněných o počáteční a okrajové podmínky. Pro větší srozumitelnost uvažujeme jen dvoudimenzionální proudění, takže nezávisle proměnné jsou dvě prostorové souřadnice a čas.

Pro prostorovou diskretizaci Eulerových rovnic se nejčastěji používá *metoda konečných objemů*, stručně FVM podle Finite Volume Method. Skvělým zdrojem informací jsou monografie [17], [18], [52], [33], [34]. Pro prostorovou diskretizaci Eulerových rovnic je velmi vhodná také *nespojité Galerkinova metoda*, stručně DGM podle Discontinuous Galerkin Method, viz monografie [26] a [14]. Prostorová diskretizace Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění se nejčastěji provádí metodou konečných objemů, viz monografie [42], [55], [19], [37]. Hojně se používá také *metoda konečných prvků*, stručně FEM podle Finite Element Method, viz monografie [21], [15], z časopisecké literatury lze doporučit článek [50] a další práce z tam uvedeného seznamu literatury.

Pro řešení úloh proudění je k dispozici celá řada softwarových produktů. Mezi nejznámější patří komerční *ANSYS Fluent*, *CD-adapco STAR-CD* a volně dostupný *OpenFoam*.

# 1. Rovnice proudění

V této kapitole odvodíme základní rovnice popisující proudění tekutin. Chování tekutin se řídí zákony zachování hmotnosti, hybnosti, momentu hybnosti a energie. Pomocí Reynoldsovy transportní věty tyto zákony zapíšeme jako rovnici kontinuity, pohybové rovnice a rovnici energie. Užitím konstitučních vztahů a stavových rovnic zredukujeme počet neznámých na hustotu, vektor rychlosti a energii. Nakonec doplníme okrajové a počáteční podmínky. Závěr kapitoly je věnován bezrozměrnému tvaru rovnic proudění, Reynoldsovu číslu a stručné zmínce o turbulentním proudění.

## 1.1. Základní pojmy

Proudění budeme zkoumat v oblasti  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . Nechť  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  je bod oblasti  $\Omega$  a  $t \in [0, t_{max}]$  je čas. Základní fyzikální veličiny, se kterými budeme pracovat, jsou hustota  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , vektor rychlosti  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), \dots, v_d(\mathbf{x}, t))^T$ , celková energie  $E(\mathbf{x}, t)$ , tlak  $p(\mathbf{x}, t)$  a teplota  $T(\mathbf{x}, t)$ .

V dalším textu budeme občas používat *Einsteinovu sumační konvenci*, tj. sčítáme automaticky přes všechny indexy, které se v daném výrazu vyskytnou právě dvakrát.

**Značení.** Symbolem  $\nabla$  označíme operátor

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)^T.$$

Gradientem funkce  $f$  rozumíme vektor

$$\text{grad } f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right)^T.$$

Je-li  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_d)^T$  vektorová funkce, pak Jacobiho matice a gradient funkce  $\mathbf{f}$  jsou

$$\frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1} & \frac{\partial f_d}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{f} = \left( \frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{x}} \right)^T = (\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_d).$$

Laplaceův operátor  $\Delta$  je definován předpisem

$$\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Zápisem  $\Delta f$  resp.  $\Delta \mathbf{f}$  pak rozumíme

$$\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \Delta \mathbf{f} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_d)^T.$$

Divergence  $\mathbf{f}$  je definována předpisem

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Pro matici  $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_d)$  definujeme

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = (\operatorname{div} \mathbf{f}_1, \operatorname{div} \mathbf{f}_2, \dots, \operatorname{div} \mathbf{f}_d)^T.$$

Skalární součin vektorů  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)^T$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_d)^T$  je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^d a_i b_i,$$

$|\mathbf{a}| = (\mathbf{a}, \mathbf{a})^{\frac{1}{2}}$  je délka vektoru. Pro  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  definujeme vektorový součin

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)^T.$$

Zápisem  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  označujeme tenzorový součin

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_d \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_d \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_d b_1 & a_d b_2 & \dots & a_d b_d \end{pmatrix}.$$

Pro matice  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$ ,  $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^d$  definujeme *Frobeniův skalární součin*

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} b_{ij}.$$

Pro matici  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d)$  a vektor  $\mathbf{b}$  definujeme

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_d)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Definujme ještě prostory spojitých funkcí na intervalu  $I$  s hodnotami v prostoru  $X$ :

$$C(I; X) = \{f : I \rightarrow X; f \text{ je ohraničená a spojitá v každém bodě } I\}.$$

**Popis proudění.** Budeme si představovat, že tekutina vyplňující oblast  $\Omega$  se skládá z částic, a budeme předpokládat, že každým bodem  $\mathbf{x} \in \Omega$  v každém čase  $t \in [0, t_{max}]$  prochází právě jedna částice tekutiny. K popisu tekutiny se používají dva základní přístupy.

a) *Lagrangeovský popis* proudění zkoumá pohyb každé jednotlivé částice tekutiny. Dráhu částice, tzv. *trajektorii*, popíšeme rovnicí

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t),$$

kde  $\mathbf{X}$  je *referenční poloha* uvažované částice. Detailnější zápis

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t_0; t)$$

nám říká, že v čase  $t$  je v místě  $\mathbf{x}$  ta částice tekutiny, která v čase  $t_0$  zaujímala referenční pozici  $\mathbf{X}$ . Referenční polohou  $\mathbf{X}$  je částice jednoznačně identifikovaná, lze tedy zjednodušeně hovořit o částici  $\mathbf{X}$ . Složky  $X_1, X_2, \dots, X_d$  referenčního bodu  $\mathbf{X}$  jsou *Lagrangeovy souřadnice* částice  $\mathbf{X}$ , zatímco složky  $x_1, x_2, \dots, x_d$  bodu  $\mathbf{x}$  jsou *Eulerovy souřadnice* té částice  $\mathbf{X}$ , která se v čase  $t$  nachází v bodu  $\mathbf{x}$ . Je dobré si uvědomit, že pevným bodem  $\mathbf{x}$  procházejí v různých časech různé částice tekutiny.

Rychlost  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  v bodu  $\mathbf{x}$  a v čase  $t$  definujeme jako rychlost té částice tekutiny, která v čase  $t$  bodem  $\mathbf{x}$  prochází, tedy

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad \text{pro } \mathbf{X} \text{ takové, že } \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t).$$

Vztah mezi Lagrangeovými a Eulerovými souřadnicemi lze popsat prostřednictvím rychlostního pole  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Jestliže částice tekutiny zaujímá v čase  $t_0$  referenční pozici  $\mathbf{X}$ , tj. má Lagrangeovy souřadnice  $\{X_i\}_{i=1}^d$ , a v čase  $t$  zaujímá pozici  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ , tj. má Eulerovy souřadnice  $\{x_i\}_{i=1}^d$ , pak  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  je řešením počáteční úlohy

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}. \quad (1.1)$$

Křivka  $\mathbf{x}(t)$  se nazývá *trajektorie* (částice tekutiny, která v čase  $t_0$  byla v pozici  $\mathbf{X}$ ).

Ke grafickému znázornění rychlostního pole ve zvoleném čase se používají *proudnice*. Pro zvolený čas  $\bar{t}$  a bod  $\bar{\mathbf{x}}$  definujeme proudnici jako křivku  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ , která je řešením počáteční úlohy

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), \bar{t}), \quad \mathbf{x}(s_0) = \bar{\mathbf{x}} \quad (1.2)$$

pro nějaké  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Částice tekutiny má tedy v každém bodu proudnice rychlost, která je k proudnici tečná. Nebo jinak: rychlost částice v libovolném místě proudu je tečnou k proudnici, která tímto místem prochází.

Zatímco trajektorie je dráhou jedné částice v čase, proudnici tvoří částice tekutiny, z nichž každé dvě jsou navzájem různé. Proudnice a trajektorie, které v čase  $\bar{t}$  procházejí bodem  $\bar{\mathbf{x}}$ , jsou obecně různé křivky. Splývají jen v případě stacionárního proudění, tj. když rychlost  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  nezávisí na čase, jak je zřejmé z (1.1) a (1.2).

**Materiálová derivace**  $D F(\mathbf{x}, t)/Dt$  funkce  $F(\mathbf{x}, t)$  je totální derivace  $dF(\varphi(\mathbf{X}, t), t)/dt$ . Podle pravidla o derivování složené funkce dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{D F(\mathbf{x}, t)}{Dt} &= \frac{dF(\varphi(\mathbf{X}, t), t)}{dt} = \frac{\partial F(\varphi(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^d v_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \text{grad } F(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Operátor  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}$

nazveme *materiálovou derivací* (někdy používáme také termín *totální derivace* nebo *substanční derivace*). Parciální derivace  $\partial/\partial t$  se nazývá *lokální derivace* a člen  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})$  se nazývá *konvekční derivace*. Lokální derivace  $\partial F(\mathbf{x}, t)/\partial t$  vyjadřuje časovou změnu  $F$  v bodu  $\mathbf{x}$ , konvekční derivace  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \text{grad} F(\mathbf{x}, t) = [dF(\mathbf{x}(t), \xi)/dt]_{\xi=\mathbf{x}}$  vyjadřuje prostorovou změnu  $F$  v čase  $t$  a materiálová derivace  $DF(\mathbf{x}, t)/Dt$  vyjadřuje změnu  $F$  na časoprostorové trajektorii  $[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t]$ .

**Transportní věta.** Uvažujme soustavu částic tekutiny, které v čase  $t$  vyplňují omezenou oblast  $\sigma(t)$ , tak zvaný *kontrolní objem*. Předpokládejme, že v průběhu času kontrolní objem obsahuje pořád tytéž částice. Nechť  $\sigma_0 = \sigma(t_0)$  je kontrolní objem v referenčním čase  $t_0$ . Funkce  $\boldsymbol{\varphi}$  každé částici  $\mathbf{X} \in \sigma_0$  přiřazuje bod  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \in \sigma(t)$ . Protože částice tekutiny kontrolní objem beze zbytku vyplňují a jejich trajektorie se neprotínají, lze  $\boldsymbol{\varphi}$  považovat za vzájemně jednoznačné zobrazení referenční oblasti  $\sigma_0$  a oblasti  $\sigma(t)$ .

Nechť funkce  $F(\mathbf{x}, t)$  reprezentuje nějakou fyzikální veličinu. Celkové množství  $\mathcal{F}(t)$  veličiny  $F$  v kontrolní objemu  $\sigma(t)$  je integrál

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\sigma(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

V dalším nás bude zajímat, jak se celkové množství  $\mathcal{F}(t)$  veličiny  $F$  na částicích kontrolního objemu mění v čase, tedy čemu se rovná derivace

$$\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

V následující Reynoldsově větě ukážeme, jak lze tuto derivaci vyjádřit.

**Věta 1.1.** (*Reynoldsova transportní*). Nechť  $F$  a  $\boldsymbol{\varphi}$  jsou dostatečně hladké funkce. Pak

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\sigma(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \text{grad} F(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t) \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\sigma(t)} \left[ \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \text{div}(F\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x}. \quad \square \end{aligned} \quad (1.3)$$

*Důkaz* včetně přesné formulace předpokladů Reynoldsovy věty lze najít v [17]. Zde si uveďme jen náčrt důkazu. Pomocí transformace  $\boldsymbol{\varphi} : \sigma_0 \rightarrow \sigma(t)$  přejdeme z časově závislé oblasti  $\sigma(t)$  na oblast  $\sigma_0$ , která již na čase nezávisí. Jestliže  $J(\mathbf{X}, t)$  je jakobián zobrazení  $\boldsymbol{\varphi}$ , tj.  $J(\mathbf{X}, t) = \det \{\partial \varphi_i(\mathbf{X}, t)/\partial X_j\}_{i,j=1}^d$ , pak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \int_{\sigma_0} \frac{d}{dt} \left[ F(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) |J(\mathbf{X}, t)| \right] d\mathbf{X} = \\ &= \int_{\sigma_0} \left[ \frac{dF(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)}{dt} |J(\mathbf{X}, t)| + F(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \frac{\partial |J(\mathbf{X}, t)|}{\partial t} \right] d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Zřejmě

$$\frac{dF(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)}{dt} = \frac{\partial F(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t}.$$

Dá se dokázat, viz [17], že

$$\frac{\partial |J(\mathbf{X}, t)|}{\partial t} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right] |J(\mathbf{X}, t)|.$$

Poslední dva vztahy dosadíme do (1.4<sub>2</sub>), využijeme toho, že  $\partial \varphi_i(\mathbf{X}, t)/\partial t = v_i(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)$ , a zpětným přechodem z referenční oblasti  $\sigma_0$  na oblast  $\sigma(t)$  dostaneme (1.3<sub>2</sub>).  $\square$

Pomocí Greenovy věty lze transportní větu ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} = \int_{\sigma(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\sigma(t)} F(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS,$$

kde  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  je jednotkový vektor vnější normály hranice  $\partial\sigma(t)$  v bodě  $\mathbf{x}$ . První integrál na pravé straně vyjadřuje časovou změnu veličiny  $F$  v kontrolním objemu  $\sigma(t)$ . Skalární součin  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_n$  je rychlost ve směru  $\mathbf{n}$ , takže druhý integrál

$$\int_{\partial\sigma(t)} F(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_{\partial\sigma(t)} F(\mathbf{x}, t) v_n(\mathbf{x}, t) dS$$

vyjadřuje tok veličiny  $F$  ven z kontrolního objemu  $\sigma(t)$  ve směru vnější normály.

## 1.2. Zákony zachování

Ve fyzice se jako zákon zachování označuje tvrzení, že určitá měřitelná veličina fyzikálního systému se během vývoje tohoto systému nemění. V dynamice tekutin jde o zákon zachování hmotnosti, hybnosti, momentu hybnosti a energie. V této kapitole budeme opakovaně používat termín kontrolní objem pro označení objemu části tekutiny tvořené stále stejnými částicemi tekutiny. Kontrolní objem může měnit svůj tvar a proto bývá někdy také označován jako *tekutý objem*, viz [7].

**Zákon zachování hmotnosti** zní:

*hmotnost tekutiny v kontrolním objemu se nemění.*

Nechť  $\varrho(\mathbf{x}, t)$  je hustota tekutiny v bodu  $\mathbf{x}$  a v čase  $t$ . Hmotnost  $\mathcal{M}(\sigma(t))$  tekutiny v kontrolním objemu  $\sigma(t)$

$$\mathcal{M}(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Zákon zachování hmotnosti tvrdí, že hmotnost se v čase nemění, tj. že

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.5)$$



Podle Reynoldsovy transportní věty proto

$$\int_{\sigma(t)} \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x} = 0,$$

a protože  $\sigma(t)$  může být libovolný kontrolní objem, dostáváme *rovnici kontinuity*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.6)$$

*Nestlačitelné proudění* je takové proudění, při kterém se hustota částic tekutiny v čase nemění, tj.

$$\frac{D\varrho}{Dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0.$$

Odtud a z rovnice kontinuity dostaneme

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Pro nestlačitelné proudění tedy rovnice kontinuity nabývá tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.7)$$

Připomeňme, že pod pojmem *nestlačitelná tekutina* rozumíme tekutinu s konstantní hustotou. Proudění nestlačitelné tekutiny je zřejmě nestlačitelné proudění.

**Zákon zachování hybnosti.** Hybností rozumíme součin hmotnosti a vektoru rychlosti. Zákon zachování hybnosti říká, že *hybnost izolované soustavy těles se zachovává*. Částice kontrolního objemu ale izolovanou soustavu netvoří, neboť na částice působí obklopující prostředí. V proudění se zákonem o zachování hybnosti rozumí *druhý Newtonův zákon*, který říká, že *časová změna hybnosti tělesa se rovná síle, která na těleso působí*. Jestliže za takové těleso považujeme kontrolní objem, zákon zachování hybnosti zní:

*časová změna hybnosti tekutiny v kontrolním objemu je rovna síle, která na kontrolní objem působí.*

Jestliže hybnost tekutiny v kontrolním objemu

$$\mathcal{H}(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

a  $\mathcal{F}(\sigma(t))$  je síla působící na kontrolní objem  $\sigma(t)$ , pak zákon zachování hybnosti říká, že

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \mathcal{F}(\sigma(t)). \quad (1.8)$$

Výraz na levé straně rovnice (1.8) představuje setrvačnou sílu tekutiny kontrolního objemu. Zákon zachování hybnosti lze tedy vyjádřit také takto: setrvačná síla tekutiny kontrolního objemu je rovna výslednici sil, které na kontrolní objem působí. Rozlišujeme dvě základní síly působící na kontrolní objem.

a) *Objemové síly* působící na částice uvnitř kontrolního objemu

$$\mathcal{F}_v(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

kde  $\mathbf{f}$  je *hustota objemových sil* vytažená na jednotku hmotnosti.

b) *Povrchové síly*, kterými obklopující tekutina působí na povrch  $\partial\sigma(t)$  kontrolního objemu  $\sigma(t)$ ,

$$\mathcal{F}_s(\sigma(t)) = \int_{\partial\sigma(t)} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{x})) dS,$$

kde  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{x}))$  je *vektor napětí*. Označme

$$\sigma_{ji} = T_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, \dots, d,$$

kde  $\mathbf{e}_j$  je jednotkový vektor v kladném směru osy  $x_j$ . Veličiny  $\sigma_{ji} = \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t)$  jsou složky *tenzoru napětí*  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^d$ . Složky vektoru napětí lze vyjádřit pomocí složek tenzoru napětí, viz [17]:

$$T_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.9)$$

kde  $n_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , je  $j$ -tá složka vektoru  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  vnější normály v bodu  $\mathbf{x}$ . V tomto zápisu jsme použili Einsteinovu sčítací konvenci, tj. sčítá se přes index  $j$ .

Zákon zachování hybnosti (1.8) zapíšeme po složkách a pomocí Reynoldsovy transportní věty dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(t)} \left[ \frac{\partial(\varrho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t))}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right] d\mathbf{x} = \\ \int_{\sigma(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) f_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\sigma(t)} \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}) dS, \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Pomocí Greenovy věty nakonec obdržíme pohybové rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j) = \varrho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.10)$$

Vektorově lze pohybovou rovnici zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \varrho \mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.11)$$

Se zákonem zachování hybnosti úzce souvisí

**Zákon zachování momentu hybnosti**, který říká, že

*časová změna momentu hybnosti tekutiny v kontrolním objemu je rovna momentu síly, která na kontrolní objem působí,*

tedy, pro  $d = 3$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \mathbf{x} \times (\varrho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\sigma(t)} \mathbf{x} \times \mathcal{F}(\sigma(t)) d\mathbf{x}. \quad (1.12)$$

Dá se ukázat, viz [17], že zákon zachování momentu hybností je splněn, právě když je tenzor napětí  $\sigma$  symetrický, tj. když

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

**Zákon zachování energie** ve fyzikálním smyslu znamená, že *energie izolovaného soustavy zůstává konstantní*. Izolovanou soustavou přitom rozumíme soustavu, která je od svého okolí oddělena: okolí neovlivňuje soustavu a soustava neovlivňuje okolí. V termodynamice je *izolovaný systém* takový systém, který si s okolím nevyměňuje hmotu ani energii, což v případě tekutiny vyplňující kontrolní objem zřejmě neplatí. Tekutina kontrolního objemu představuje tzv. *uzavřený systém*: s okolím si nevyměňuje hmotu, výměnu energie však připouští. Pro uzavřený systém lze vyslovit *první termodynamický zákon*, podle kterého *změna vnitřní energie uzavřeného systému je součtem práce, kterou na systému vykoná jeho okolí, a tepla, které je do systému dodáno*. Vnitřní energie je přitom souhrn energií (kinetické, potenciální, elektrické, chemické atd.) všech částic (molekul, atomů), z nichž se systém skládá. Vnitřní energie tedy představuje makroskopický popis souhrnu energií na molekulární a atomové úrovni, kinetická a potenciální energie, kterou má soustava jako celek, se do vnitřní energie nezapočítává.

Pro formulaci zákona zachování energie v dynamice tekutin použijeme kombinaci fyzikálního a termodynamického přístupu: vyjdeme z prvního termodynamického zákona, uzavřený systém pro nás bude kontrolní objem s částicemi tekutiny, místo vnitřní energie ale dosadíme *celkovou energii*, kterou budeme rozumět součet vnitřní energie částic tekutiny a kinetické energie kontrolního objemu jako celku, viz (1.15). Uvážíme-li, že časová změna práce i tepla je výkon, můžeme zákon zachování energie formulovat takto:

*časová změna celkové energie tekutiny v kontrolním objemu je součtem výkonu sil, kterými obklopující prostředí na tekutinu v kontrolním objemu působí, a výkonu tepla, které je tekutině v kontrolním objemu dodáno.*

Nechť  $\mathcal{E}(\sigma(t))$  je celková energie tekutiny v kontrolním objemu  $\sigma(t)$ ,  $\mathcal{W}(\sigma(t))$  je výkon sil působících na kontrolní objem a  $\mathcal{Q}(\sigma(t))$  výkon tepla dodaného do kontrolního objemu. Zákon zachování energie tvrdí, že

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\sigma(t)) = \mathcal{W}(\sigma(t)) + \mathcal{Q}(\sigma(t)). \quad (1.13)$$

Energie tekutiny v kontrolním objemu

$$\mathcal{E}(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} E(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (1.14)$$

kde  $E$  je *celková energie*,

$$E = \varrho \left( e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right), \quad (1.15)$$

$e$  je měrná vnitřní energie a  $\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \equiv \frac{1}{2}v_i v_i$  je měrná kinetická energie. Poznamenejme, že slůvkem „měrná“ vyjadřujeme, že jde o veličinu vztaženou na jednotku hmotnosti.

Připomeňme, že výkon  $W$  síly  $\mathbf{F}$  působící na částici tekutiny v bodu  $\mathbf{x}$  a v čase  $t$ , je  $W(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Proto

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\sigma(t)) &= \int_{\sigma(t)} \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\sigma(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_{\sigma(t)} \varrho f_j v_j \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\sigma(t)} \sigma_{ji} n_j v_i \, dS = \\ &= \int_{\sigma(t)} \left[ \varrho f_j v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} v_i) \right] d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Výkon tepla na kontrolním objemu lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathcal{Q}(\sigma(t)) = \int_{\sigma(t)} \varrho q \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\sigma(t)} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS = \int_{\sigma(t)} \left[ \varrho q - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right] d\mathbf{x}, \quad (1.17)$$

kde  $q$  je měrná objemová hustota tepelného zdroje a  $\mathbf{q}$  je plošná hustota tepelného toku. Znaménko mínus u vektoru  $\mathbf{n}$  vnější normály znamená, že jde o tok tepla dovnitř kontrolního objemu. Dosadíme-li (1.14), (1.16) a (1.17) do (1.13) a použijeme Reynoldsovu transportní větu, dostaneme

$$\int_{\sigma(t)} \left[ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (E v_j) \right] d\mathbf{x} = \int_{\sigma(t)} \left[ \varrho f_j v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} v_i) + \varrho q - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right] d\mathbf{x},$$

a odtud rovnice energie

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (E v_j) = \varrho f_j v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} v_i) + \varrho q - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (1.18)$$

maticově

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} (E \mathbf{v}) = \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) + \varrho q - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.19)$$

### 1.3. Konstitutivní vztahy

Rovnice kontinuity, pohybové rovnice a rovnice energie představují  $d + 2$  rovnic pro  $d + 2$  neznámých: hustotu  $\varrho$ , složky  $\{v_i\}_{i=1}^d$  vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$  a celkovou energii  $E$ . V rovnicích proudění ale najdeme také složky  $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^d$  symetrického tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  a složky  $\{q_i\}_{i=1}^d$  vektoru tepelného toku  $\mathbf{q}$ , celkem  $\frac{1}{2}d(d+3)$  doposud neurčených veličin. Pomocí konstitutivních vztahů počet neurčených veličin zredukujeme na pouhé dvě, tlak  $p$  a absolutní teplotu  $T$ .

**Neviskózní proudění** je proudění bez vnitřního tření. Ve skutečnosti každá reálná tekutina nějaké vnitřní tření má, je-li však velmi malé, jako třeba v plynech, můžeme je v praktických výpočtech zanedbat. Vnitřní tření v tekutině charakterizuje fyzikální veličina, které říkáme *viskozita* nebo také *vazkost*. Její hodnota závisí především na přitažlivých silách mezi částicemi tekutiny. Kapaliny s větší přitažlivou silou mají větší viskozitu. Větší viskozita se projevuje větší odolností vůči změně tvaru, tj. bržděním pohybu.

V nevazké tekutině je tenzor napětí určen výhradně pomocí tlaku,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (1.20)$$

kde  $p$  je *tlak* a  $\delta_{ij}$  je *Kroneckerovo delta*, tj.  $\delta_{ij} = 1$  pro  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ . Znaménko mínus v rovnici (1.20) znamená, že vektor napětí  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = p(-\mathbf{n})$ , tj. kladný tlak obklopující tekutiny kontrolní objem stlačuje.

Dosadíme-li (1.20) do pohybových rovnic (1.10), dostaneme *Eulerovy pohybové rovnice* v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j) = \varrho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.21)$$

maticově

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \varrho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (1.22)$$

Užitím rovnice kontinuity (1.6) můžeme Eulerovy rovnice zapsat v nekonzervativním tvaru

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.23)$$

**Viskózní proudění** je proudění reálné tekutiny s vnitřním třením. Za předpokladu platnosti Newtonovy hypotézy o lineární závislosti tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  na *tenzoru rychlosti deformace*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=1}^d, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

dostáváme, viz [17], následující vyjádření:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau_{ij} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \end{aligned} \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (1.24)$$

Zde  $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{ij}\}_{i,j=1}^d$  je *vazká (deviatorická) část* tenzoru napětí. Vazkost tekutiny reprezentují dva koeficienty:  $\mu$  je první koeficient viskozity známější jako *koeficient dynamické viskozity* a  $\lambda$  je druhý koeficient viskozity. V kinetické teorii plynů jsou odvozeny podmínky

$$\mu \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0. \quad (1.25)$$

Pro jednoatomové plyny platí

$$3\lambda + 2\mu = 0. \quad (1.26)$$

Tato podmínka je většinou používána i v případě složitějších plynů a také kapalin. Člen  $3\lambda + 2\mu = 3\kappa$ , kde  $\kappa$  je *objemová viskozita*.

Koeficienty  $\lambda$  a  $\mu$  mohou být funkcemi termodynamických veličin. Nejvýraznější je závislost na teplotě. V kinetické teorii plynů se často se používá Sutherlandova formule

$$\mu = \frac{c_1 T^{3/2}}{T + c_2},$$

kde  $c_1, c_2$  jsou konstanty závislé na plynu, třeba pro vzduch  $c_1 \doteq 1,51 \cdot 10^{-6}$ ,  $c_2 = 120$ .

Tekutiny splňující (1.24) se nazývají *Newtonovské tekutiny*. Příkladem jsou plyny a některé tekutiny jako třeba voda, etanol nebo rtuť. Pro řadu tekutin ale relace (1.24) splněny nejsou. Takové tekutiny se nazývají *neneutronovské tekutiny*. Jako příklad lze uvést přírodní kaučuk, lávu, zubní pastu, škrobovou suspenzi nebo krev.

Jestliže v pohybové rovnici (1.10) dosadíme za  $\sigma_{ij}$  z konstitučního vztahu (1.24), dostaneme *Navierovy-Stokesovy pohybové rovnice* v konzervativním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j) = \varrho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.27)$$

maticově

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \varrho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{div}(2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})). \quad (1.28)$$

Užitím rovnice kontinuity (1.6) dostaneme nekonzervativní tvar Navierových-Stokesových rovnic

$$\varrho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varrho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \varrho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.29)$$

Pro nestlačitelné proudění, tj. když  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , a pro konstantní koeficient viskozity  $\mu$  obdržíme Navierovy-Stokesovy rovnice pro nestlačitelné proudění:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.30)$$

kde  $\nu = \mu/\varrho$  je tak zvaná *kinematická viskozita*. Skutečně, neboť

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = \mu \Delta v_i.$$

Maticově lze Navierovy-Stokesovy rovnice (1.30) zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\varrho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (1.31)$$

**Fourierův zákon.** Tepelný tok lze podle Fourierova zákona vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T, \quad (1.32)$$

kde  $k$  je *koeficient vedení tepla*. Z druhého zákona termodynamiky plyne, že  $k \geq 0$ . Vrátime-li se k vyjádření tepelného výkonu (1.17), pak tok tepla do kontrolního objemu  $\sigma(t)$  přes jeho povrch  $\partial\sigma(t)$ ,

$$\int_{\partial\sigma(t)} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS = \int_{\partial\sigma(t)} k (\mathbf{n} \cdot \nabla T) \, dS = \int_{\partial\sigma(t)} k \frac{\partial T}{\partial n} \, dS,$$

je kladný, když vektor  $(-\mathbf{n})$  je pro teplotu spádový, neboli když teplota ve směru  $\mathbf{n}$  roste.

Experimenty ukazují, že  $k = k(T)$  je funkcí teploty, často se však předpokládá, že  $k$  je konstanta.

Dosazením konstitutivních vztahů do rovnice energie (1.18) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(Ev_j) = \varrho f_j v_j - \frac{\partial}{\partial x_j}(pv_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda v_j \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu v_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) + \varrho q + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (1.33)$$

maticově

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E\mathbf{v}) = \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div}(p\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{div}(2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\mathbf{v}) + \varrho q + \operatorname{div}(k \nabla T). \quad (1.34)$$

*Rovnice zachování vnitřní energie.* Vyjádříme-li celkovou energii  $E$  podle (1.15), pak pomocí rovnice kontinuity (1.6) a Navierových-Stokesových rovnic (1.29) lze rovnice energie zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_j e) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \varrho q + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + D(\mathbf{v}), \quad (1.35)$$

kde člen

$$D(\mathbf{v}) = \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \frac{1}{2} \mu \sum_{i,j=1}^d \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1.36)$$

je *disipace* energie vyvolaná viskozními silami. Jestliže koeficienty  $\lambda$  a  $\mu$  splňují nerovnosti (1.25), pak  $D(\mathbf{v}) \geq 0$ , viz [17].

**Cvičení 1.1.** Odvoďte rovnici (1.35). Návod: v (1.33) vyjádřete celkovou energii  $E$  podle (1.15) a použijte rovnici kontinuity (1.6) a pohybové rovnice (1.30).  $\square$

## 1.4. Termodynamické stavové rovnice

V rovnici kontinuity (1.6), v Navierových-Stokesových rovnicích (1.27) a v rovnici energie (1.33) je pořád o dvě neznámé víc, než kolik máme rovnic. Skutečně, rovnic je  $d + 2$  a neznámých  $d + 4$ : hustota  $\varrho$ , vektor rychlosti  $\mathbf{v}$ , celková energie  $E$ , tlak  $p$  a teplota  $T$ . Potřebujeme proto ještě dvě další rovnice a v tom nám pomůže termodynamika.

V termodynamice se *absolutní teplota*  $T$ , hustota  $\varrho$ , *měrný objem*  $v = 1/\varrho$ , tlak  $p$ , *měrná vnitřní energie*  $e$  a některé další veličiny označují jako *stavové proměnné*. Vztahy mezi stavovými proměnnými jsou známy jako *termodynamické stavové rovnice*. *Termická stavová rovnice*

$$T = T(p, v)$$

vyjadřuje teplotu pomocí tlaku a měrného objemu a *kalorická stavová rovnice*

$$e = e(p, v)$$

vyjadřuje měrnou vnitřní energii opět pomocí tlaku a měrného objemu. Pro *termicky ideální plyn* je termická stavová rovnice tvaru

$$T = \frac{pv}{R} = \frac{p}{R\rho}. \quad (1.37)$$

$R$  je *plynová konstanta*, která může být vyjádřena ve tvaru

$$R = c_p - c_v, \quad (1.38)$$

kde  $c_p$  je *měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku* a  $c_v$  *měrná tepelná kapacita při konstantním objemu*. Z experimentů víme, že  $c_p > c_v$ , takže  $R > 0$ . Vztah (1.38) je znám jako *Mayerova rovnice*. Veličina

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.39)$$

se nazývá *adiabatický exponent*. Jen pro zajímavost, třeba pro vzduch při teplotě  $0^\circ\text{C}$  je  $\gamma = 1,4$ . Pro *kaloricky ideální plyn* je kalorická stavová rovnice tvaru

$$e = \frac{pv}{\gamma - 1} = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}. \quad (1.40)$$

Kaloricky a termicky ideální plyn se nazývá *ideální plyn*. Pro ideální plyn jsou měrné tepelné kapacity  $c_p$  a  $c_v$  konstanty. Konstantní adiabatický exponent  $\gamma$  je znám také pod názvem *Poissonova adiabatická konstanta*.

Dosadíme-li do (1.37) za  $p$  ze rovnice (1.40), pak pomocí (1.38) a (1.39) obdržíme

$$T = \frac{p}{R\rho} = \frac{(\gamma - 1)\rho e}{R\rho} = \frac{e}{c_v}. \quad (1.41)$$

Podle (1.15)  $e = \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$ , takže z (1.40) a (1.41) dostáváme

$$p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 \right), \quad (1.42)$$

$$T = \frac{1}{c_v} \left( \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \right). \quad (1.43)$$

Rovnice kontinuity (1.6), Navierovy-Stokesovy rovnice (1.27), rovnice energie (1.33) a rovnice (1.42), (1.43) představují kompletní soustavu rovnic proudění pro neznámé  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  a  $E$ .

*Teplotní tvar rovnice energie.* Jestliže  $e$  a  $p$  vyjádříme pomocí (1.41) a (1.37), rovnici energie (1.35) můžeme zapsat v teplotách:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_v \rho T) + \frac{\partial}{\partial x_j}(c_v \rho v_j T) = -R\rho T \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho q + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + D(\mathbf{v}). \quad (1.44)$$

*Rovnici energie pro nevazkou tekutinu* lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.45)$$



**Cvičení 1.2.** Odvoďte rovnici (1.45). Návod: v (1.35) položte  $q = 0$ ,  $k = 0$ ,  $D(\mathbf{v}) = 0$ ,  $\rho e$  vyjádřete z kalorické stavové rovnice (1.40) a použijte rovnici kontinuity (1.6).  $\square$

**Entropie** je významná termodynamická stavová veličina, která umožňuje matematicky vyjádřit *druhý termodynamický zákon*, viz (1.47) a (1.50). Připomeňme, že jedna ze slovních formulací druhého termodynamického zákona, pocházející od Clausiuse, zní: *teplo nemůže samovolně přecházet ze studenějšího tělesa na teplejší*.

Podle prvního termodynamického zákona je změna  $\delta e$  vnitřní energie součtem tepla  $\delta q$  dodaného do systému a práce  $\delta w$  vykonané na systému,  $\delta e = \delta q + \delta w$ . Během vratného termodynamického procesu (tj. procesu, který je v každém časovém okamžiku termodynamicky rovnovážný) je infinitezimální přírůstek práce  $\delta w = -p dv$ . Jestliže  $\delta e = de$  je infinitezimální změna vnitřní energie a  $\delta q$  je infinitezimální změna tepla (nejde o diferenciál), dostaneme rovnost

$$\delta q = de + p dv.$$

Veličina  $s$  definovaná předpisem

$$T ds = de + p dv \quad (1.46)$$

se nazývá *měrná entropie*. V případě vratného termodynamického procesu tedy platí

$$ds = \delta q / T.$$

Vratný termodynamický proces je idealizovaný, fiktivní proces. Skutečný, reálný proces je nevratný a pro něj druhý termodynamický zákon říká, že  $ds > \delta q / T$ . Vezmeme-li tedy v potaz jak vratné tak nevratné termodynamické procesy, pak

$$ds \geq \delta q / T. \quad (1.47)$$

Nerovnost (1.47) je kvantitativní vyjádření druhého termodynamického zákona. V izolované soustavě  $\delta q = 0$ , takže

$$ds \geq 0, \quad (1.48)$$

což se v termodynamice nazývá *princip růstu entropie v izolované soustavě*. Pro částice tekutiny obsažené v kontrolním objemu  $\sigma(t)$  lze druhý termodynamický zákon zapsat ve formě

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} \rho(\mathbf{x}, t) s(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \geq \int_{\sigma(t)} \frac{\rho(\mathbf{x}, t) q(\mathbf{x}, t)}{T(\mathbf{x}, t)} d\mathbf{x} - \int_{\partial\sigma(t)} \frac{\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}{T(\mathbf{x}, t)} dS. \quad (1.49)$$

Odtud pomocí Reynoldsovy transportní věty, Fourierova zákona a rovnice kontinuity dostaneme Clausiusovu–Duhemovu nerovnost

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq \frac{\rho q}{T} - \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right). \quad (1.50)$$

**Cvičení 1.3.** Odvoďte nerovnost (1.50).  $\square$

*Entropický tvar rovnice energie pro ideální plyn.* Z definiční rovnice entropie (1.46) užitím (1.41), vztahu  $dv = -d\rho/\rho^2$  a (1.37) dostaneme

$$T\rho ds = c_v\rho dT - RT d\rho.$$

Protože na trajektorii  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$  částice  $\mathbf{X}$  je

$$ds = \frac{Ds}{Dt} dt, \quad dT = \frac{DT}{Dt} dt, \quad d\rho = \frac{D\rho}{Dt} dt,$$

dostaneme

$$T\rho \frac{Ds}{Dt} = c_v\rho \frac{DT}{Dt} - RT \frac{D\rho}{Dt}.$$

Pomocí rovnice kontinuity (1.6) dále obdržíme

$$T \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + T \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j s) = \frac{\partial}{\partial t}(c_v\rho T) + \frac{\partial}{\partial x_j}(c_v\rho v_j T) + R\rho T \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Užitím (1.44) odtud dostaneme rovnici energie zapsanou pomocí entropie

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j s) = \frac{1}{T} \left( \rho q + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + D(\mathbf{v}) \right). \quad (1.51)$$

Odpovídající nekonzervativní tvar je

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\rho q}{T} - \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} + \frac{D(\mathbf{v})}{T}. \quad (1.52)$$

Z rovnice (1.52) plyne Clausiusova–Duhemova nerovnost (1.50): stačí použít vztah

$$-\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = -\frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} - k \frac{(\operatorname{grad} T)^2}{T^2} \quad (1.53)$$

a nerovnost  $D(\mathbf{v}) \geq 0$ . Protože Clausiusova–Duhemova nerovnost (1.50) je ekvivalentní s nerovností (1.49), potvrdili jsme, že pro ideální plyn druhý termodynamický zákon platí.

**Cvičení 1.4.** Odvoďte detailně (1.52), (1.53) a ověřte, že platí (1.50) a (1.49).  $\square$

*Měrná entropie ideálního plynu.* Pomocí (1.41) a vztahu  $dv = -d\rho/\rho^2$  můžeme (1.46) zapsat ve tvaru

$$T ds = c_v dT - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Odtud pomocí (1.37), (1.38) a (1.39) postupně odvodíme:

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} - \frac{p}{\rho T} \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{d(p/\rho)}{p/\rho} - R \frac{d\rho}{\rho} = c_v \left( \frac{p/p_0}{\rho/\rho_0} \right)^{-1} d \left( \frac{p/p_0}{\rho/\rho_0} \right) - R \frac{d(\rho/\rho_0)}{\rho/\rho_0} = \\ &= c_v \left[ d \left( \ln \frac{p/p_0}{\rho/\rho_0} \right) - (\gamma - 1) d \left( \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] = c_v d \left( \ln \frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma} \right), \end{aligned}$$

takže na trajektorii  $\varphi(\mathbf{X}, t)$  částice  $\mathbf{X}$  dostaneme

$$s = s(p, \varrho) = c_v \ln \frac{p/p_0}{(\varrho/\varrho_0)^\gamma} + s_0, \quad (1.54)$$

kde  $p_0$  resp.  $\varrho_0$  jsou libovolné pevně zvolené hodnoty tlaku resp. hustoty a  $s_0 = s(p_0, \varrho_0)$ .

*Nevazké adiabatické proudění.* Jestliže tekutina nepřenáší teplo, hovoříme o adiabatickém proudění. V adiabatickém proudění nemá smysl uvažovat tepelné zdroje, tj.  $q = 0$ . Také tepelný tok je nulový, tj.  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Pro nevazké proudění  $\lambda = \mu = 0$ , takže disipace energie  $D(\mathbf{v}) = 0$ . Z (1.52) a (1.54) pro nevazké adiabatické proudění dostaneme

$$s = C_1 \quad \text{na trajektorii libovolné částice tekutiny,} \quad (1.55)$$

$$p/p_0 = C_2(\varrho/\varrho_0)^\gamma \quad \text{na trajektorii libovolné částice tekutiny,} \quad (1.56)$$

kde  $C_1, C_2 = \exp((C_1 - s_0)/c_v)$  jsou konstanty, na každé trajektorii obecně jiné. Platí-li (1.55), hovoříme o *izoentropickém proudění*. Jestliže je  $s$  konstanta stejná pro celou oblast proudění, hovoříme o *homoentropickém proudění*.

Říkáme, že proudění je *barotropní*, pokud lze tlak vyjádřit jako funkci hustoty, tj.  $p = p(\varrho)$ . Z (1.56) plyne, že pro adiabatické barotropní proudění nevazkého plynu platí

$$p = \kappa \varrho^\gamma, \quad (1.57)$$

kde  $\kappa$  je společná konstanta pro celou oblast proudění. Takové proudění je homoentropické. Skutečně, podle (1.57) pro každou dvojici  $(p, \varrho)$  a libovolnou pevně zvolenou dvojici  $(p_0, \varrho_0)$  platí  $p/\varrho^\gamma = p_0/\varrho_0^\gamma = \kappa$ , takže podle (1.54)  $s(p, \varrho) = s(p_0, \varrho_0)$ .

*Rychlost zvuku.* V klasické mechanice je rychlost zvuku  $a$  definována předpisem

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s},$$

kde  $(\partial p/\partial \varrho)_s$  je parciální derivace tlaku podle hustoty za předpokladu konstantní měrné entropie. Pro ideální plyn z (1.54) dostaneme

$$p = p(\varrho, s) = \varrho^\gamma g(s), \quad \text{kde} \quad g(s) = \frac{p_0}{\varrho_0^\gamma} \exp\left(\frac{s - s_0}{c_v}\right).$$

Odtud

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s = \gamma \varrho^{\gamma-1} g(s) = \frac{\gamma}{\varrho} \varrho^\gamma g(s) = \frac{\gamma p}{\varrho},$$

takže

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}}. \quad (1.58)$$

Další důležitá charakteristika proudění plynů je *Machovo číslo*

$$M = \frac{|\mathbf{v}|}{a}. \quad (1.59)$$

Řekneme, že proudění je *podzvukové* (*subsonické*) resp. *zvukové* (*sonické*) resp. *nadzvukové* (*supersonické*) v bodu  $\mathbf{x}$  a v čase  $t$ , jestliže

$$M(\mathbf{x}, t) < 1 \quad \text{resp.} \quad M(\mathbf{x}, t) = 1 \quad \text{resp.} \quad M(\mathbf{x}, t) > 1.$$

Řekneme, že proudění je v nějaké oblasti *transsonické*, jestliže na části této oblasti je proudění podzvukové a na jiné části nadzvukové.

## 1.5. Počáteční a okrajové podmínky

Soustavu diferenciálních rovnic popisujících proudění tekutin je třeba doplnit o počáteční podmínky definující stav v počátečním čase  $t = 0$  a o okrajové podmínky, které charakterizují proudění na hranici  $\partial\Omega$ .

**Počáteční podmínky** pro stlačitelné viskózní proudění mohou být formulovány například tak, že předepíšeme

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}), \quad \varrho(\mathbf{x}, 0) = \varrho^0(\mathbf{x}), \quad T(\mathbf{x}, 0) = T^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.60)$$

pro daná počáteční data  $\mathbf{v}^0$ ,  $\varrho^0$ ,  $T^0$ . V případě stlačitelného neviskózního proudění se obvykle místo teploty předepíše počáteční hodnota tlaku, tj.  $p(\mathbf{x}, 0) = p^0(\mathbf{x})$ .

Pro nestlačitelnou tekutinu je hustota známá, předepíše se proto jen počáteční rychlost. Rovnici energie (1.44) lze řešit odděleně, předepíše se počáteční teplota.

**Okrajové podmínky** podstatně závisí na tom, zda se jedná o proudění viskózní nebo neviskózní. Svou roli hraje také to, zda jde o proudění stlačitelné nebo nestlačitelné. Připomeňme si proto, jaké rovnice jednotlivé typy proudění popisují.

*Rovnice proudění.* Rovnici kontinuity, pohybové rovnice a rovnici energie lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{r}_i(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) + \mathbf{s}, \quad (1.61)$$

kde

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho v_1 \\ \vdots \\ \varrho v_d \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \varrho v_i \\ \varrho v_i v_1 + p \delta_{i1} \\ \vdots \\ \varrho v_i v_d + p \delta_{id} \\ (E + p) v_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_i(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{i1} \\ \vdots \\ \tau_{id} \\ \tau_{ij} v_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \varrho \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_d \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + q \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Funkce  $\mathbf{f}_i(\mathbf{w})$  se nazývají *neviskózní Eulerovy toky* a  $\mathbf{r}_i(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})$  jsou *viskózní toky*. Tlak a teplotu v nich vyjádříme pomocí (1.42) a (1.43). Soustava (1.62) je *konzervativní formou Navierových-Stokesových rovnic pro stlačitelné viskózní proudění*. V případě neviskózního proudění je  $\lambda = \mu = k = 0$  a tedy  $\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ , takže *konzervativní tvar Eulerových rovnic pro stlačitelné neviskózní proudění* je tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{w}) = \mathbf{s}, \quad (1.63)$$

kde  $\mathbf{s} = \varrho(0, f_1, \dots, f_d, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v})^T$ . V případě proudění plynu lze obvykle zanedbat vliv objemových sil i tepelných zdrojů, takže pak  $\mathbf{s} = \mathbf{o}$ . K použité terminologii poznamenejme: v užším slova smyslu rozumíme pod pojmem Navierovy-Stokesovy rovnice resp. Eulerovy rovnice jen pohybové rovnice (1.27) resp. (1.21), v širším slova smyslu pak kompletní soustavu rovnic (1.61) pro vizkózní proudění resp. (1.63) pro neviskózní proudění.

Nestlačitelné proudění je specifické v tom, že hustota není neznámá. Pokud viskozita nezávisí na teplotě, můžeme řešit pohybové rovnice a rovnici kontinuity odděleně od rovnice energie (1.44). Za *Navierovy-Stokesovy rovnice nestlačitelného proudění* se proto standardně považují jen pohybové rovnice (1.27) a rovnice kontinuity (1.6), tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_i v_j) &= \varrho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (1.64)$$

*Eulerovy rovnice pro nestlačitelné neviskózní proudění* dostaneme tak, že v předchozí rovnici položíme  $\mu = 0$ .

*Okrajové podmínky.* Při řešení problémů proudění se používá celá řada okrajových podmínek. Z nich je třeba vybrat ty, které nejlépe odpovídají povaze zkoumaného problému. Rozhodování ovlivňuje především typ hranice a povaha proudění vyšetřovaného děje.

*Typy hranice.* Tři základní typy hranice jsou vtok, výtok a stěna. Vtok resp. výtok je část hranice, kterou tekutina do oblasti vtéká resp. z ní vytéká. Stěna je pak část hranice, která je pro tekutinu neprostupná. Vtok budeme označovat symbolem  $\Gamma_I$  ( $I$  jako input), výtok symbolem  $\Gamma_O$  ( $O$  jako output) a stěnu symbolem  $\Gamma_W$  ( $W$  jako wall). Jestliže  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  je jednotkový vektor vnější normály hranice  $\partial\Omega$ , pak části  $\Gamma_I$ ,  $\Gamma_O$  a  $\Gamma_W$  hranice lze charakterizovat takto:

$$\begin{aligned} \Gamma_I &= \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\}, \\ \Gamma_O &= \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0\}, \\ \Gamma_W &= \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0\}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že typy částí hranice se v čase nemění.

Při řešení úloh, které vykazují znaky symetrie případně periodičnosti, je výhodné těchto skutečností využít. Při popisu takových úloh proto pracujeme také s částmi hranice, které reprezentují osu resp. rovinu symetrie nebo představují křivky resp. plochy pro uplatnění podmínek periodičnosti.

*Okrajové podmínky pro stlačitelné viskózní proudění.* V tomto případě je soustava (1.61) hyperbolicko-parabolického typu. Rovnice kontinuity je hyperbolická pro neznámou  $\varrho$  a pohybové rovnice resp. rovnice energie jsou parabolické pro neznámé  $\mathbf{v}$  resp.  $T$ .

Pro hustotu lze zadat jen její hodnotu  $\varrho = \bar{\varrho}$  a to jen na vtoku. Okrajovou podmínku pro teplotu je třeba zadat na celé hranici. V úvahu připadá Dirichletova okrajová podmínka předepisující teplotu  $T = \bar{T}$ , tepelný tok lze předepsat prostřednictvím Neumannovy okrajové  $k\partial T/\partial n = \bar{q}$  nebo Robinovy okrajové podmínky  $-k\partial T/\partial n = h(T - T_\infty)$ , kde  $h$  je koeficient přestupu tepla a  $T_\infty$  je teplota obklopujícího prostředí.

Pohybovým rovnicím přísluší okrajové podmínky předepisující složky vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$  a složky vektoru napětí  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ . V každém bodu hranice je třeba předepsat  $d$  okrajových podmínek. V dalším budeme symbolem  $\mathbf{t}_k$ ,  $k = 1, \dots, d-1$ , značit tečný vektor, ve 2D je  $\mathbf{t} \equiv \mathbf{t}_1$  vektor kolmý k  $\mathbf{n}$ , ve 3D jsou  $\mathbf{t}_1$  a  $\mathbf{t}_2$  dva navzájem kolmé tečné vektory, tj.  $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = 0$ ,  $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$ . Označme  $v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$  normálovou složku vektoru rychlosti,  $v_{t,k} = \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{v}$  tečné složky vektoru rychlosti,  $T_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  normálovou složku vektoru napětí a  $T_{t,k} = \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{T}$  tečné složky vektoru napětí.

Na vtoku se zadává rychlost  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ . Na *pevné nekluzké stěně* předepisujeme tzv. *no-slip* okrajovou podmínku  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , tj. nulovou rychlost, a na *pevné kluzké stěně* tzv. *slip* okrajovou podmínku

$$v_n = 0, \quad T_{t,k} = 0, \quad k = 1, \dots, d-1,$$

tj. nulovou normálovou složku vektoru rychlosti a nulové tečné složky vektoru napětí. Okrajové podmínky na stěně umožňující prostupnost a tření jsou obecně tvaru

$$v_n + \alpha T_n = \bar{v}_n + \alpha \bar{T}_n, \quad v_{t,k} + \beta^{-1} T_{t,k} = \bar{v}_{t,k} + \beta^{-1} \bar{T}_{t,k}, \quad k = 1, \dots, d-1,$$

kde  $\alpha$  je parametr prostupnosti,  $\bar{v}_n$  je rychlost pohybu stěny,  $\beta$  je parametr tření,  $\bar{v}_{t,k}$  jsou zadané tečné složky vektoru rychlosti,  $\bar{T}_n$  je zadaná normálová složka vektoru napětí a  $\bar{T}_{t,k}$  jsou zadané tečné složky vektoru napětí. Zřejmě

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\implies v_n = \bar{v}_n, & \beta \rightarrow 0 &\implies T_{t,k} \rightarrow \bar{T}_{t,n}, \\ \alpha \rightarrow \infty &\implies T_n \rightarrow \bar{T}_n, & \beta \rightarrow \infty &\implies v_{t,k} \rightarrow \bar{v}_{t,k}. \end{aligned}$$

Na výtoku se předepisuje obvykle vektor napětí  $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}$ , často  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ . Pro  $\bar{\mathbf{T}} = -\bar{p}\mathbf{n}$  je  $T_n = -\bar{p}$ ,  $T_{t,k} = 0$ ,  $k = 1, \dots, d-1$ . Rovnost  $T_n = -\bar{p}$  lze ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$p = \bar{p} + 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n}. \quad (1.65)$$

Když  $2\mu |\partial v_n / \partial n| \ll |\bar{p}|$ , lze rovnici (1.65) interpretovat jako  $p \doteq \bar{p}$ .

*Okrajové podmínky pro stlačitelné neviskózní proudění.* Soustava rovnic (1.63) je hyperbolického typu. Předepisují se jen hodnoty  $\varrho$ ,  $\mathbf{v}$  a  $p$  a to jen na částech hranice. Volba okrajových podmínek je podrobně rozebrána v kapitole 3.2.4. Zde uvedeme jen přehled. Na stěně se předepisuje nulová normálová složka rychlosti, tj.  $v_n = 0$ . Na vtoku pro podzvukové proudění, tj. když  $|v_n| < a$ , předepíšeme  $\varrho = \bar{\varrho}$ ,  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ , a pro nadzvukové proudění, tj. když  $|v_n| > a$ , předepíšeme navíc ještě  $p = \bar{p}$ . Na výtoku pro podzvukové proudění předepíšeme  $p = \bar{p}$  a pro nadzvukové proudění nepředepisujeme nic.

*Okrajové podmínky pro nestlačitelné viskózní proudění.* Soustava rovnic (1.64) je elipticko-parabolického typu. Okrajové podmínky pro složky vektoru rychlosti a vektoru napětí se zadávají stejně jako v případě stlačitelného viskózního proudění.

## 1.6. Bezrozměrný tvar rovnic proudění

umožňuje posoudit reálné proudění na základě experimentu provedeného na malém modelu. Nejdříve zavedeme *referenční veličiny*: referenční délku  $L^*$ , referenční rychlost  $U^*$ , referenční hustotu  $\varrho^*$ , referenční objemovou sílu  $f^*$ , referenční dynamickou viskozitu  $\mu^*$  a referenční koeficient tepelné vodivosti  $k^*$ . Pomocí těchto referenčních veličin zavedeme *bezrozměrné veličiny*

$$x'_i = x_i/L^*, \quad t' = tU^*/L^*, \quad \varrho' = \varrho/\varrho^*, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}/U^*, \quad E' = E/(\varrho^*U^{*2}), \quad (1.66)$$

$$p' = p/(\varrho^*U^{*2}), \quad T' = \frac{c_v T}{U^{*2}}, \quad \mathbf{f}' = \mathbf{f}/f^*, \quad q' = \frac{qL^*}{U^{*3}}, \quad \mu' = \mu/\mu^*, \quad \lambda' = \lambda/\mu^*, \quad k' = k/k^*.$$

Užitím (1.66) dostaneme z (1.6) *bezrozměrnou rovnici kontinuity*

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t'} + \operatorname{div}(\varrho' \mathbf{v}') = 0, \quad (1.67)$$

která, jak je vidět, zůstává nezměněná. Z (1.28) obdržíme *bezrozměrné pohybové rovnice*

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\varrho' \mathbf{v}') + \operatorname{div}(\varrho' \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}') = \frac{1}{Fr^2} \varrho' \mathbf{f}' - \nabla p' + \frac{1}{Re} [\nabla(\lambda' \operatorname{div} \mathbf{v}') + \operatorname{div}(2\mu' \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}'))] \quad (1.68)$$

a z (1.34) *bezrozměrnou rovnici energie*

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial t'} + \operatorname{div}(E' \mathbf{v}') &= \frac{1}{Fr^2} \varrho' \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}' - \operatorname{div}(p' \mathbf{v}') + \\ &+ \frac{1}{Re} [\operatorname{div}(\lambda' \mathbf{v}' \operatorname{div} \mathbf{v}') + \operatorname{div}(2\mu' \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') \mathbf{v}')] + \varrho' q' + \operatorname{div}\left(\frac{\gamma k'}{Re Pr} \nabla T'\right), \end{aligned} \quad (1.69)$$

příčemž

$$Fr = U^*/\sqrt{L^* f^*}, \quad Re = \varrho^* L^* U^*/\mu^*, \quad Pr = c_p \mu^*/k^* \quad (1.70)$$

jsou postupně *Frouddovo*, *Reynoldsovo* a *Prandtlovo* číslo. V rovnicích (1.67)–(1.69) jsou přitom parciální derivace v operátorech  $\operatorname{div}$ ,  $\nabla$  a v tenzoru rychlosti deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$  uvažovány vzhledem k proměnným  $x'_i$ .

Bezrozměrný tvar rovnic (1.42) a (1.43) pro tlak a teplotu je

$$p' = (\gamma - 1) \left( E' - \frac{1}{2} \varrho' |\mathbf{v}'|^2 \right), \quad T' = \frac{E'}{\varrho'} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}'|^2. \quad (1.71)$$

Vidíme, že bezrozměrné rovnice proudění (1.67)–(1.69) a (1.71) obsahují tři *podobnostní parametry*  $Fr$ ,  $Re$  a  $Pr$ .

Uvažujme dvě proudění v geometricky podobných oblastech  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  takových, že „ $\Omega_1$  je  $L$ -krát větší než  $\Omega_2$ “, symbolicky  $\Omega_1 = L\Omega_2$ . Předpokládejme, že obě proudění mají stejné konstantní koeficienty viskozity  $\lambda$ ,  $\mu$  a stejný konstantní koeficient vedení tepla  $k$ . Hodnoty koeficientů  $\mu$  a  $k$  považujeme za referenční, tj.  $\mu^* = \mu$ ,  $k^* = k$ , takže  $\mu' = 1$ ,  $k' = 1$  a  $\lambda' = \lambda/\mu$ . Řekneme, že dvě taková proudění jsou *dynamicky podobná*, jestliže

mají stejná Froudova, Reynoldsova a Prandtlova čísla. Jestliže obě proudění mají stejný adiabatický exponent  $\gamma$  a stejný poměr  $\lambda/\mu$  koeficientů viskozity, pak jejich bezrozměrné rovnice kontinuity, pohybové rovnice a rovnice energie jsou identické. Jestliže jsou identické také jejich bezrozměrné počáteční a okrajové podmínky, můžeme jedno proudění popsat pomocí druhého. Skutečně, jestliže  $k$ -té proudění,  $k = 1, 2$ , je charakterizováno pomocí veličin  $\varrho^{(k)}$ ,  $v_i^{(k)}$ ,  $E^{(k)}$ ,  $L^{*(k)}$ ,  $U^{*(k)}$ , pak

$$\frac{\varrho^{(2)}}{\varrho^{(1)}} = \frac{\varrho^{*(2)}}{\varrho^{*(1)}}, \quad \frac{v_i^{(2)}}{v_i^{(1)}} = \frac{U^{*(2)}}{U^{*(1)}}, \quad \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} = \frac{\varrho^{*(2)}}{\varrho^{*(1)}} \left( \frac{U^{*(2)}}{U^{*(1)}} \right)^2.$$

*Reynoldsovo číslo* hraje významnou roli při posuzování charakteru proudění vazké nestlačitelné tekutiny. Uvažujme zjednodušenou modelovou úlohu s konstantní hustotou, konstantní viskozitou a bez objemových sil. Zvolíme-li  $\varrho^* = \varrho$ ,  $\mu^* = \mu$ , pak  $\varrho' = 1$ ,  $\mu' = 1$ , a protože  $\mu/\varrho = \nu$ ,

$$Re = \frac{\varrho^* L^* U^*}{\mu^*} = \frac{L^* U^*}{\nu}.$$

Bezrozměrné pohybové rovnice pro nestlačitelné proudění v nekonzervativním tvaru tak nabudou tvaru formálně stejného jako Navierovy Stokesovy rovnice (1.31),

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' = -\frac{1}{\varrho'} \nabla p' + \nu' \Delta \mathbf{v}', \quad \text{kde} \quad \nu' = \frac{1}{Re}. \quad (1.72)$$

Reynoldsovo číslo vyjadřuje poměr setrvačných sil, v rovnici (1.72) reprezentovaných členem  $D\mathbf{v}'/Dt' = \partial \mathbf{v}'/\partial t' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}'$  a vazkých sil reprezentovaných členem  $\nu' \Delta \mathbf{v}'$ . Populárně řečeno, pro velké Reynoldsovo číslo převažuje vliv rychlosti proudu a pro malé Reynoldsovo číslo má rozhodující vliv tření.

Pro ilustraci uveďme Reynoldsova čísla pro několik situací. Pro velké letadlo letící ve výšce 12,5 km rychlostí 900 km/h máme:  $L^* = 3,8$  m je průměrná hloubka křídla,  $U^* = 900$  km/h,  $\nu \doteq 4,9 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s, takže  $Re \doteq 3,8 \cdot 900 / 4,9 \cdot 10^{-5} \doteq 7 \cdot 10^7$ . Při přistání je rychlost letadla menší,  $U^* = 250$  km/h, viskozita je naopak vyšší, v nadmořské výšce 250 m je  $\nu \doteq 1,4 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s, takže  $Re \doteq 3,8 \cdot 250 / 1,4 \cdot 10^{-5} \doteq 6,8 \cdot 10^7$ . Jako další příklad uvažujme potrubí kruhového průřezu o průměru 50 mm, kterým protéká voda rychlostí 2 m/s při teplotě 20° C. Pak  $L^* = 0,05$  m,  $U^* = 2$  m/s a  $\nu \doteq 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, takže  $Re \doteq 0,05 \cdot 2 / 10^{-6} \doteq 10^5$ .

Další příklady jsou: tok krve v kapiláře  $\Rightarrow Re \doteq 2 \cdot 10^{-3}$ , tok krve v žíle  $\Rightarrow Re \doteq 1,4 \cdot 10^2$ , včela  $\Rightarrow Re \doteq 10^3$ , nejmenší rybka  $\Rightarrow Re \doteq 1$ , plovoucí člověk  $\Rightarrow Re \doteq 4 \cdot 10^6$ , plejtvák obrovský  $\Rightarrow Re \doteq 3 \cdot 10^8$ , malá jachta  $\Rightarrow Re \doteq 10^7$ , Boeing 747  $\Rightarrow Re \doteq 2 \cdot 10^9$ , největší loď  $\Rightarrow Re \doteq 5 \cdot 10^9$ .

*Laminární a turbulentní proudění.* Při *laminárním proudění* vytváří tekutina rovnoběžná proudová vlákna, která po sobě klouzají, takže tekutina ze sousedních proudových vláken se nepromíchává. Při *turbulentním proudění* se proudová vlákna začnou proplétat a vznikají víry. Proudění, které už není laminární a ještě není turbulentní se označuje jako *proudění přechodové*. Proudění je

- laminární pro  $Re < 2300$ ,



- přechodové pro  $2300 < Re < 4000$ ,
- turbulentní pro  $Re > 4000$ .

Kritické meze, zde  $Re_{K_1} = 2300$  a  $Re_{K_2} = 4000$ , lze v literatuře najít rovněž pro mírně pozměněné hodnoty. Třeba pro proudění v trubicích se uvádí  $Re_{K_1} = 2320$ , pro  $Re_{K_2}$  se uvádějí hodnoty mezi 4000 a 6000.

Plně vyvinuté turbulentní proudění se skládá z velkého počtu vírů různých měřítek. Víry největších rozměrů jsou charakterizovány délkovým měřítkem  $\ell_0$ , které je srovnatelné s charakteristickou délkou  $L^*$ , rychlostním měřítkem  $u_0$ , které je srovnatelné s charakteristickou rychlostí  $U^*$ , a časovým měřítkem  $\tau_0 = \ell_0/u_0$ . Nejmenší víry jsou charakterizovány *Kolmogorovovými měřítky*: délkovým měřítkem  $\eta$ , rychlostním měřítkem  $u_\eta$  a časovým měřítkem  $\tau_\eta = \eta/u_\eta$ . Dá se ukázat, že

$$\frac{\eta}{\ell_0} \approx Re^{-3/4}, \quad \frac{u_\eta}{u_0} \approx Re^{-1/4}, \quad \frac{\tau_\eta}{\tau_0} \approx Re^{-1/2}. \quad (1.73)$$

Turbulentní proudění lze modelovat numerickým řešením Navierových-Stokesových rovnic. Takový postup je znám jako *přímá numerická simulace* (stručně DNS podle anglického *direct numerical simulation*). Pro jednoduchost předpokládejme, že oblast řešení  $\Omega$  lze vykryt rovnoměrnou sítí s krokem  $h$  a nejméně  $N$  uzly ve směru každé souřadné osy. Zřejmě musí platit

$$Nh > \ell_0, \quad h < \eta, \quad \implies \quad N > \frac{\ell_0}{h} > \frac{\ell_0}{\eta} \approx Re^{3/4},$$

takže celkový počet uzlů ve třech dimenzích je řádu  $O(Re^{9/4})$ . Pro velká Reynoldsova čísla je prakticky nezbytné provést časovou diskretizaci pomocí explicitní metody. Délku kroku  $\Delta t$  je třeba zvolit tak, aby každá částice tekutiny urazila za dobu  $\Delta t$  vzdálenost menší než  $h$ , tj. aby  $u_0 \Delta t < h$ . Protože  $u_0 = \ell_0/\tau_0$ ,  $h < \eta$ , a pokud doba řešení  $t_{max} \approx \tau_0$ , dostaneme

$$\frac{\ell_0}{\tau_0} \Delta t < \eta \quad \implies \quad \frac{\ell_0}{\eta} \frac{\Delta t}{t_{max}} \approx 1 \quad \implies \quad \frac{t_{max}}{\Delta t} \approx \frac{\ell_0}{\eta} \approx Re^{3/4},$$

tj. počet kroků časové diskretizace je řádu  $O(Re^{3/4})$ . Celkový počet operací metody DNS je pak řádu  $O(Re^3)$ . Pro velká Reynoldsova čísla je takový počet operací příliš velký na to, abychom metodou DNS mohli úspěšně řešit reálné inženýrské úlohy. Pro praktické výpočty turbulentního proudění byla proto vyvinuta řada speciálních metod, mezi nimi zejména *metoda velkých vírů* (stručně LES podle anglického *large eddy simulation*) a *metoda časového středování* (stručně RANS podle anglického *Reynolds-averaged Navier-Stokes*).

## 2. Základní poznatky z teorie Eulerových rovnic

Eulerovy rovnice jsou hyperbolického typu. Nejdříve proto vysvětlíme, kdy soustava parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu je hyperbolická. Uvedeme také několik příkladů hyperbolických systémů. Vysvětlíme pojem klasického řešení, slabého řešení a slabého entropického řešení. Zavedeme jednodimenzionální Riemannův problém a popíšeme jeho řešení.

### 2.1. Hyperbolický systém

Uvažujme soustavu  $s$  parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu pro  $s$  neznámých funkcí  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_s)^T$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} = \mathbf{o}, \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{f}_j : D \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , jsou spojitě diferencovatelné funkce,  $D = \mathcal{R}(\mathbf{w})$  je obor hodnot funkce  $\mathbf{w}$ .

Pro Eulerovy rovnice  $s = d + 2$  a  $\mathbf{f}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , jsou neviskózní Eulerovy toky, viz (1.62). Protože  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{d+1}, w_{d+2}) = (\varrho, \varrho v_1, \dots, \varrho v_d, E)^T$ , platí

$$w_1 = \varrho > 0, \quad w_{d+2} = E = \varrho(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) > \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{v}|^2 = \frac{w_2^2 + \dots + w_{d+1}^2}{2w_1},$$

a tedy

$$D = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{d+2} \mid w_1 > 0, w_{d+2} > \frac{w_2^2 + \dots + w_{d+1}^2}{2w_1} \right\}.$$

Jestliže  $\mathbf{w} \in C^1(\mathbb{R}^d \times (0, t_{\max}))^s$ , pak lze soustavu (2.1) zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} = \mathbf{o}, \quad (2.2)$$

kde  $\mathbf{A}_j(\mathbf{w}) = D\mathbf{f}_j(\mathbf{w})/D\mathbf{w}$  je Jacobiho matice  $\mathbf{f}_j(\mathbf{w})$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ .

**Definice 2.1.** Řekneme, že systém (2.2) je *hyperbolický*, jestliže pro každý vektor  $\mathbf{w} \in D$  a každý vektor  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)^T \in \mathbb{R}^d$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ , má matice

$$\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{A}_j(\mathbf{w}) \quad (2.3)$$

s reálných vlastních čísel  $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , a je diagonalizovatelná, tj. existuje regulární matice  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$  taková, že

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \mathbf{D}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda_s \end{pmatrix}. \quad \square$$

Jestliže  $\mathbf{T} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s)$ , pak  $\mathbf{P}\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , tj.  $\mathbf{r}_i$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{P}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda_i$ . Vlastní vektory  $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^s$  jsou lineárně nezávislé. Lze tedy říci, že  $\mathbf{P}$  má úplný systém vlastních vektorů příslušných reálným vlastním číslům.

Jsou-li vlastní čísla matice  $\mathbf{P}$  reálná a navzájem různá, říkáme, že systém (2.2) je *ryze hyperbolický*.

## 2.2. Příklady hyperbolických systémů

**Příklad 2.1.** *Eulerovy rovnice.* Systém (2.2) Eulerových rovnic je hyperbolický. Důkaz je uveden třeba v [18]. Pro  $d = 2$  jsou matice  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{D}$  popsány vzorci (3.15) a (3.14).  $\square$

**Příklad 2.2.** *Linearizované Eulerovy rovnice* (stručně LEE) popisují šíření akustických vln. Odvodíme je z nekonzervativního tvaru Eulerových rovnic (1.6), (1.23), (1.45):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho} \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Předpokládejme, že

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad p = p_0 + p',$$

kde veličiny  $\varrho_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $p_0$  charakterizují stacionární podkladové proudění a  $\varrho'$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $p'$  jsou akustické fluktuace. Využijeme-li toho, že akustické fluktuace jsou velmi malé, dostaneme LEE,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varrho' + \varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' &= h_c, \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + \frac{1}{\varrho_0} \nabla p' &= \mathbf{h}_m, \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla p' + \gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' &= h_e, \end{aligned} \tag{2.5}$$

kde

$$\begin{aligned} h_c &= -\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varrho_0 - \varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{h}_m &= \mathbf{f} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 - \frac{1}{\varrho_0} \nabla p_0, \\ h_e &= -\mathbf{v}_0 \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

V homogenním prostředí jsou  $\varrho_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  a  $p_0$  konstantní, takže  $h_c = 0$ ,  $\mathbf{h}_m = \mathbf{f}$  a  $h_e = 0$ .

LEE lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} = \mathbf{h}, \quad (2.7)$$

kde  $\mathbf{w} = (\varrho, \mathbf{v}^T, p)^T$  je vektor akustických veličin (čárku jsme pro zjednodušení zápisu vypustili) a  $\mathbf{h} = (h_c, \mathbf{h}_m^T, h_e)^T$ . Pro  $d = 2$ , při označení  $\mathbf{v} = (u, v)^T$ ,  $\mathbf{v}_0 = (u_0, v_0)^T$ ,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \varrho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} u_0 & \varrho_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 & 1/\varrho_0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \gamma p_0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \varrho_0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & 1/\varrho_0 \\ 0 & 0 & \gamma p_0 & v_0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Systém LEE je hyperbolický. Pro  $d = 2$  vlastní čísla matice  $\mathbf{P} = n_1 \mathbf{A}_1 + n_2 \mathbf{A}_2$  jsou

$$\lambda_1 = v_{0n} - a_0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = v_{0n}, \quad \lambda_4 = v_{0n} + a_0, \quad (2.9)$$

kde  $v_{0n} = u_0 n_1 + v_0 n_2$ ,  $a_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \varrho_0}$ . Matice vlastních vektorů  $\mathbf{T}$  a matice  $\mathbf{T}^{-1}$  jsou

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \varrho_0 & 1 & 0 & \varrho_0 \\ -n_1 a_0 & 0 & -n_2 & n_1 a_0 \\ -n_2 a_0 & 0 & n_1 & n_2 a_0 \\ \varrho_0 a_0^2 & 0 & 0 & \varrho_0 a_0^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-n_1}{2a_0} & \frac{-n_2}{2a_0} & \frac{1}{2a_0^2 \varrho_0} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a_0^2} \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{2a_0} & \frac{n_2}{2a_0} & \frac{1}{2a_0^2 \varrho} \end{pmatrix}. \quad \square \quad (2.10)$$

**Cvičení 2.1.** Ověřte, že  $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{T} = \mathbf{D}$ , kde  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ .  $\square$

**Příklad 2.3.** *Vlnová rovnice.* Uvažme LEE pro  $d = 2$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ,  $u_0 = v_0 = 0$ . Podle (2.7), (2.8) dostáváme

$$u_t + \frac{1}{\varrho_0} p_x = 0, \quad v_t + \frac{1}{\varrho_0} p_y = 0, \quad p_t + \gamma p_0 (u_x + v_y) = 0.$$

První rovnici zderivujeme podle  $x$ , druhou podle  $y$ , třetí podle  $t$  a vyloučíme členy  $u_{tx}$ ,  $v_{ty}$ . Tak dostaneme

$$p_{tt} - \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} (p_{xx} + p_{yy}) = 0.$$

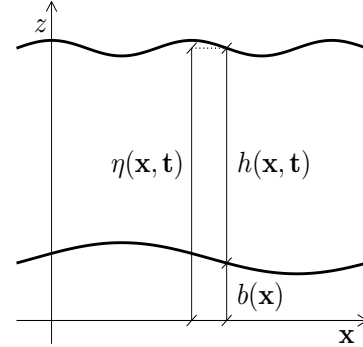
Vidíme, že tlakové fluktuace splňují vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta p. \quad \square \quad (2.11)$$

**Příklad 2.4.** *Rovnice mělké vody.* Uvažujme proudění nestlačitelné neviskózní tekutiny v oblasti, jejíž rozměr ve směru souřadné osy  $z$  je výrazně menší než rozměr ve směru

každé ze souřadných os  $x$  a  $y$ . Jako příklad uveďme proudění v mořském zálivu: hloubka nepřesahuje několik desítek metrů, zatímco plocha zálivu je třeba  $10 \text{ km}^2$ .

V takovém případě lze vliv vertikální složky rychlosti  $w$  zanedbat a předpokládat, že horizontální složky rychlosti  $u$  i  $v$  nezávisí na souřadnici  $z$ . Necht'  $\mathbf{x} = (x, y)^T$ ,  $\eta(\mathbf{x}, t)$  popisuje volnou hladinu a  $b(\mathbf{x})$  dno, viz Obr. 2.1. Pak  $h(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{x}, t) - b(\mathbf{x})$  je výška tekutiny v místě  $\mathbf{x}$  a v čase  $t$ . Pokud jde o tlak, budeme předpokládat, že je způsoben jen vlastní tíhou tekutiny, tj. že  $p = \rho g(\eta - z) + p_a$ , kde  $\rho$  je konstantní hustota,  $g$  je gravitační konstanta a  $p_a$  je atmosférický tlak na povrchu tekutiny.



Obr. 2.1: mělká voda

Z podmínky nestlačitelnosti užitím Reynoldsovy transportní věty dostaneme

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma(t)} h(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\sigma(t)} \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(h\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x} = 0.$$

Rovnice kontinuity mělké vody je tedy tvaru

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0. \quad (2.12)$$

Protože  $p_x/\rho = g\eta_x$ ,  $p_y/\rho = g\eta_y$ , pohybové rovnice pro mělkou vodu nabývají tvaru

$$u_t + uu_x + vu_y = -g\eta_x, \quad (2.13)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -g\eta_y, \quad (2.14)$$

Vynásobíme-li rovnici (2.12) rychlostí  $u$ , rovnici (2.13) výškou  $h$  a sečteme, dostaneme

$$(hu)_t + (hu^2)_x + (huv)_y = -gh\eta_x. \quad (2.15)$$

Podobně, vynásobíme-li rovnici (2.12) rychlostí  $v$ , rovnici (2.14) výškou  $h$  a sečteme, máme

$$(hv)_t + (huv)_x + (hv^2)_y = -gh\eta_y. \quad (2.16)$$

Dále využijeme toho, že

$$-gh\eta_x = -gh(b+h)_x = -ghb_x - gh h_x = -ghb_x - \frac{1}{2}g(h^2)_x.$$

Podobně obdržíme  $-gh\eta_y = -ghb_y - \frac{1}{2}g(h^2)_y$ . Dosadíme-li tato vyjádření do rovnic (2.15) a (2.16), dostaneme *pohybové rovnice mělké vody*

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + (huv)_y = -ghb_x, \quad (2.17)$$

$$(hv)_t + (huv)_x + (hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)_y = -ghb_y. \quad (2.18)$$

Rovnice mělké vody tedy jsou tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{w})}{\partial y} = \mathbf{s}(\mathbf{w}), \quad (2.19)$$

kde

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Rovnice mělké vody jsou hyperbolické. Vlastní čísla matice  $\mathbf{P}(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^2 n_j \frac{D\mathbf{f}_j(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}$  jsou

$$\lambda_1 = v_n - c, \quad \lambda_2 = v_n, \quad \lambda_3 = v_n + c, \quad (2.21)$$

kde  $v_n = un_1 + vn_2$  a  $c = \sqrt{gh}$ . Matice vlastních vektorů  $\mathbf{T}$  a matice  $\mathbf{T}^{-1}$  jsou

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u - cn_1 & n_2 & u + cn_1 \\ v - cn_2 & -n_1 & v + cn_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c + v_n}{2c} & -\frac{n_1}{2c} & -\frac{n_2}{2c} \\ n_1v - n_2u & n_2 & -n_1 \\ \frac{c - v_n}{2c} & \frac{n_1}{2c} & \frac{n_2}{2c} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

### 2.3. Klasické řešení hyperbolického systému

Formulace hyperbolického problému zahrnuje kromě diferenciální rovnice (2.1) rovněž okrajovou podmínku na hranici  $\partial\Omega$  a počáteční podmínku v čase  $t = 0$ . Korektní volba okrajových podmínek je choulostivá záležitost. V případě Eulerových rovnic budeme okrajové podmínky podrobně diskutovat v kapitole 3.2.4. Zde se pro jednoduchost omezíme na Cauchyho úlohu

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in (0, \infty), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (2.24)$$

kde  $\mathbf{f}_j : D \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , jsou spojitě diferencovatelné funkce na oboru  $D$  hodnot funkce  $\mathbf{w}$ .

**Definice 2.2.** Řekneme, že vektorová funkce  $\mathbf{w}$  je klasickým řešením Cauchyho úlohy (2.23), (2.24), jestliže

- a)  $\mathbf{w} \in C^1(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))^s \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^s$ ,
- b)  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \in D$  pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in (0, \infty)$ ,
- c)  $\mathbf{w}$  splňuje (2.23) pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in (0, \infty)$  a (2.24) pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

Řekneme, že  $\mathbf{w}$  je klasické řešení rovnice (2.23), jestliže  $\mathbf{w} \in C^1(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))^s$ ,  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \in D$  pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in (0, \infty)$  a  $\mathbf{w}$  splňuje (2.23) pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in (0, \infty)$ .  $\square$

Následuje několik jednoduchých příkladů, na nichž ukážeme některé pozoruhodné vlastnosti hyperbolických problémů.

**Příklad 2.5.** *Lineární skalární rovnice.* Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, \infty), \\ w(x, 0) &= w^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Řešení lze získat metodou charakteristik. Pro úlohu (2.25) je charakteristikou křivka  $x(t)$  splňující

$$\frac{dx(t)}{dt} = a. \quad (2.26)$$

Charakteristika je přímka, prochází-li bodem  $[x_0, t_0]$ , pak  $x(t) = x_0 + a(t - t_0)$ . Na charakteristice je  $w$  konstantní, neboť

$$\frac{dw(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial w(x(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial w(x(t), t)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} \right](x(t), t) = 0.$$

Proto

$$w(x_0, t_0) = w(x(t_0), t_0) = w(x(0), 0) = w(x_0 - at_0, 0) = w^0(x_0 - at_0).$$

Protože  $[x_0, t_0]$  může být libovolný bod, pro řešení úlohy (2.25) máme

$$w(x, t) = w^0(x - at). \quad (2.27)$$

Toto řešení se nazývá *postupná vlna*. Pro  $w^0 \in C^1(\mathbb{R})$  je  $w$  klasické řešení úlohy (2.25).  $\square$

**Příklad 2.6.** *Lineární systém.* Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} &= \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, \infty), \\ \mathbf{w}(x, 0) &= \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Předpokládejme, že  $\mathbf{A}$  je matice řádu  $s$ , která je diagonalizovatelná a má reálná vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ . Existuje tedy regulární matice  $\mathbf{T}$  taková, že

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s). \quad (2.29)$$

Jestliže  $\mathbf{T} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s)$ , pak  $\mathbf{A} \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i$ , což znamená, že  $\mathbf{r}_i$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Úlohu (2.28) zapíšeme v ekvivalentním tvaru

$$(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{w})_t + (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{w})_x = 0, \quad (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{w})(x, 0) = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{w}^0)(x).$$

Při označení  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}^0 = \mathbf{u}^0$  tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x),$$

nebo-li

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Podle předchozího příkladu  $u_i(x, t) = u_i^0(x - \lambda_i t)$ . Proto

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{T}\mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^s u_i(x, t) \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^s u_i^0(x - \lambda_i t) \mathbf{r}_i, \quad (2.30)$$

kde  $u_i^0(x - \lambda_i t) = [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}^0]_i(x - \lambda_i t)$ . Pro  $\mathbf{w}^0 \in C^1(\mathbb{R}^s)$  je  $\mathbf{w}$  klasické řešení úlohy (2.28).  $\square$

**Příklad 2.7.** *Nelineární skalární rovnice.* Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + a(w) \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, \infty), \\ w(x, 0) &= w^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

kde  $a, w^0 \in C^1(\mathbb{R})$ . Charakteristika  $x(t)$  je dána rovnicí

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(w(x(t), t)). \quad (2.32)$$

Na charakteristice je  $w$  konstantní, neboť

$$\frac{dw(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial w(x(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial w(x(t), t)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + a(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] (x(t), t) = 0.$$

Na charakteristice je tedy konstantní také  $a(w)$  a podle (2.32) je charakteristika procházející bodem  $[x_0, t_0]$  přímka

$$x(t) = x_0 + a(w(x_0, t_0))(t - t_0). \quad (2.33)$$

Proto

$$w(x_0, t_0) = w(x(t_0), t_0) = w(x_0 - a(w(x_0, t_0))t_0, 0) = w^0(x_0 - a(w(x_0, t_0))t_0).$$

Řešení úlohy (2.31) je tedy určeno implicitně prostřednictvím rovnice

$$w(x, t) = w^0(x - a(w(x, t))t). \quad (2.34)$$

Řešení úlohy (2.31) můžeme zkoumat tak, že budeme sledovat, jak se počáteční vlna reprezentovaná funkcí  $w^0$  šíří po charakteristikách vycházejících z bodů na ose  $x$ . Pro body  $[x, t]$  ležící na charakteristice  $x(t)$  vycházející z bodu  $[x_0, 0]$  platí

$$t = \frac{1}{a(w^0(x_0))}(x - x_0), \quad w(x, t) = w^0(x_0).$$



Tato charakteristika svírá s kladným směrem osy  $x$  úhel  $\alpha(x_0)$ , kde

$$\tan \alpha(x_0) = \frac{1}{a(w^0(x_0))}.$$

Prozkoumejme dva speciální případy:

I. Nechť  $a' > 0$ ,  $(w^0)' \geq 0$ . Pak

$$(\tan \alpha(x))' = -\frac{a'(w^0(x))(w^0(x))'}{[a(w^0(x))]^2} \leq 0.$$

Funkce  $\tan \alpha(x)$  je tedy nerostoucí funkce proměnné  $x$ , což znamená, že každým bodem  $[x, t]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , prochází právě jedna charakteristika, viz Obr 2.2 vlevo. Proto je  $w$  klasické řešení úlohy (2.31).

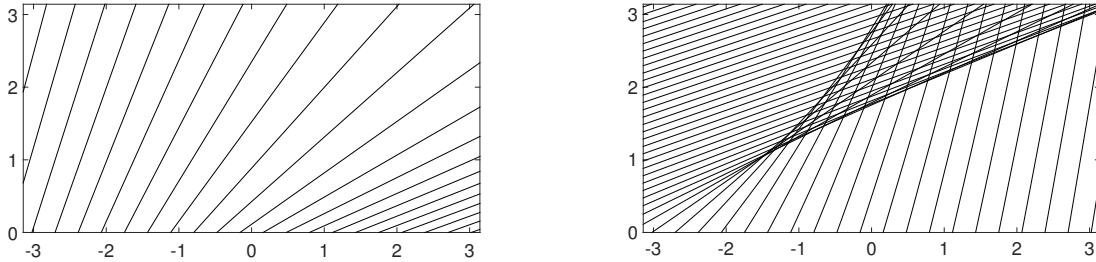
II. Jestliže  $a' > 0$ ,  $(w^0)' < 0$ , pak funkce  $\tan \alpha(x)$  je rostoucí a charakteristiky vycházející z bodů  $(x_1, 0) \neq (x_2, 0)$  se protínají v bodu  $P = (x_{12}^*, t_{12}^*)$ . Snadno spočteme, že

$$t_{12}^* = -\frac{x_2 - x_1}{a(w^0(x_2)) - a(w^0(x_1))},$$

tj. pro  $t \geq t_{12}^*$  klasické řešení neexistuje. Klasické řešení tedy existuje jen lokálně pro časový interval  $[0, t^*)$ . Dá se ukázat, že

$$t^* = -\frac{1}{\inf_{x \in \mathbb{R}} a'(w^0(x))(w^0)'(x)}.$$

Na Obr. 2.2 vlevo je ukázka neprotínajících se charakteristik, vpravo pak případ, kdy se charakteristiky protínají. □



Obr. 2.2:  $a(w) = w$ , vlevo  $w^0(x) = \frac{1}{2}\pi + \operatorname{atan}(x)$ , vpravo  $w^0(x) = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{atan}(x + \pi)$

Případ II demonstruje významnou vlastnost nelineárních hyperbolických rovnic, a sice *možný vznik nespojitých řešení v konečném čase i v případě, že data jsou hladká*. Tyto nespojitosti vznikají rovněž při řešení Eulerových rovnic nebo třeba rovnic mělké vody. Ukazuje se tedy, že požadavek na existenci klasického řešení pro nelineární hyperbolické problémy je příliš omezující. Proto se účelné zavést pojem slabého řešení, které existenci nespojitostí připouští.

## 2.4. Slabé řešení hyperbolického systému

Nejdříve zavedme několik pojmů a označení. Nechť  $M$  je měřitelná množina. Pak  $L^\infty(M)^s$  označuje prostor vektorových funkcí  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_s)^T$  se složkami  $f_i \in L^\infty(M)$  pro  $i = 1, 2, \dots, s$ . Normu v  $L^\infty(M)^s$  definujeme předpisem  $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(M)^s} = \max_{1 \leq i \leq s} \|f_i\|_{L^\infty(M)}$ . Zápisem  $\mathbf{f} \in L_{loc}^\infty(M)^s$  vyjadřujeme to, že  $\mathbf{f}|_{M \cap K} \in L^\infty(M \cap K)^s$  pro každou kompaktní množinu  $K \in \mathbb{R}^d$ . Symbolem  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$  označujeme prostor nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí  $\varphi$ , jejichž nosič  $\text{supp}(\varphi)$  je kompaktní množina v  $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ , tj.  $\text{supp}(\varphi) = \{[\mathbf{x}, t] \mid \varphi(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}\}$  je v  $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$  uzavřená ohraničená množina.

Předpokládejme, že  $\mathbf{w}$  je klasické řešení úlohy (2.23)–(2.24) a  $\varphi \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))]^s$ . Užitím Greenovy věty a toho, že  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$  pro  $[\mathbf{x}, t] \notin \text{supp}(\varphi)$ , dostaneme

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} \right) \cdot \varphi \, d\mathbf{x} \, dt = - \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{f}_j(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \, dt.$$

Vidíme tedy, že klasické řešení splňuje identitu

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{f}_j(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{w}^0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} = 0 \quad (2.35)$$

$$\forall \varphi \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))]^s.$$

Rovnost (2.35) má smysl i pro  $\mathbf{w} \in [L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))]^s$ . Proto můžeme zavést následující definici:

**Definice 2.3.** Nechť  $\mathbf{w}^0 \in [L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)]^s$ . Vektorovou funkci  $\mathbf{w}$  nazveme slabým řešením úlohy (2.23)–(2.24), jestliže  $\mathbf{w} \in [L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))]^s$ ,  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \in D$  pro skoro všechna  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$  a platí (2.35).  $\square$

Slabé řešení  $\mathbf{w}$  hyperbolického problému nemusí být spojitě. Skutečně, aby se integrály v identitě (2.35) daly spočítat, stačí, když  $\mathbf{w}$  je funkce po částech spojitá. My budeme předpokládat víc, a sice, že  $\mathbf{w}$  je funkce po částech hladká. Přesný význam tohoto pojmu objasňuje následující definice:

**Definice 2.4.** Řekneme, že funkce  $\mathbf{w}$  je po částech hladká, když existuje konečný počet hladkých hyperploch  $\Gamma$  v  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  takových, že  $\mathbf{w}$  je mimo tyto hyperplochy hladká, tj.  $\mathbf{w} \in C^1([\mathbb{R} \times [0, \infty)] \setminus \Gamma)$ , a na hyperplochách má  $\mathbf{w}$  a její první parciální derivace konečné jednostranné limity. Pro funkci  $\mathbf{w}$  jsou jednostranné limity  $\mathbf{w}^\pm(\mathbf{x}, t)$  pro  $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma$  definovány předpisem

$$\mathbf{w}^\pm(\mathbf{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{w}((\mathbf{x}, t) \pm \varepsilon \mathbf{n}), \quad (2.36)$$

kde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d, n_t)^T$  je normála k hyperploše  $\Gamma$ . Jednostranné limity pro parciální derivace  $\partial \mathbf{w} / \partial x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , a  $\partial \mathbf{w} / \partial t$  se definují obdobně.  $\square$

V následující větě uvedeme postačující a nutnou podmínku k tomu, aby po částech hladká funkce  $\mathbf{w}$  byla řešením rovnice (2.23) ve smyslu distribucí v  $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ , tj. aby

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{f}_j(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} dt = 0 \quad \forall \varphi \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))]^s. \quad (2.37)$$

Rovnici (2.37) dostaneme z (2.23) podobně, jako jsme z (2.23)–(2.24) dostali (2.35), rozdíl je jen v tom, že při odvození (2.37) uplatníme to, že  $\varphi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ .

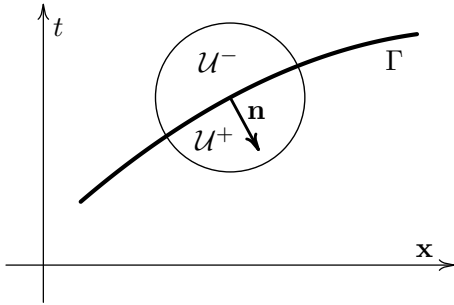
**Věta 2.1.** Nechť  $\mathbf{w} : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^s$  je po částech hladká funkce. Pak  $\mathbf{w}$  je řešením rovnice (2.23) ve smyslu distribucí, právě když jsou splněny následující dvě podmínky:

- (i)  $\mathbf{w}$  je klasické řešení v každé oblasti, v níž  $\mathbf{w}$  je třídy  $C^1$ ,
- (ii)  $\mathbf{w}$  splňuje *Rankine-Hugoniotovu* podmínku

$$[\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-]n_t + \sum_{j=1}^d [\mathbf{f}_j(\mathbf{w}^+) - \mathbf{f}_j(\mathbf{w}^-)]n_j = 0 \quad (2.38)$$

na každé hladké hyperploše nespojitosti  $\Gamma$ .

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{w}$  je po částech hladká funkce splňující (2.37). Volbou vhodné testovací funkce  $\varphi$  snadno odvodíme, že  $\mathbf{w}$  splňuje podmínku (i).



Obr. 2.3: hyperplocha nespojitosti

Věnujme se tedy podmínce (ii). Zvolme bod  $[\mathbf{x}_0, t_0] \in \Gamma$  a nechť  $\mathcal{U}$  je otevřená koule se středem  $[\mathbf{x}_0, t_0]$  a poloměrem  $\varepsilon$ , tj.  $\mathcal{U} = \{(\mathbf{x}, t) : \|(\mathbf{x}, t) - (\mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon\}$ . Zvolíme-li poloměr  $\varepsilon$  dostatečně malý, můžeme předpokládat, že  $\mathcal{U} \cap \Gamma$  rozděluje  $\mathcal{U}$  na dvě souvislé podoblasti  $\mathcal{U}^-$  a  $\mathcal{U}^+$ , takže  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^- \cup (\mathcal{U} \cap \Gamma) \cup \mathcal{U}^+$ , viz Obr.2.3. Označíme-li vnější normálu oblasti  $\mathcal{U}^-$  na hranici  $\mathcal{U} \cap \Gamma$  jako  $\mathbf{n}$ , pak vnější normála oblasti  $\mathcal{U}^+$  na hranici  $\mathcal{U} \cap \Gamma$  je  $-\mathbf{n}$ .

Nechť  $\varphi \in [C_0^\infty(\mathcal{U})]^s$ . Pomocí Greenovy věty z (2.37) obdržíme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{U}^-} \left( \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{f}_j(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{U}^+} \left( \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{f}_j(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathcal{U} \cap \Gamma} \left( n_t \mathbf{w}^- + \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{f}_j(\mathbf{w}^-) \right) \cdot \varphi dS - \int_{\mathcal{U}^-} \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} \right) \cdot \varphi d\mathbf{x} \\ &- \int_{\mathcal{U} \cap \Gamma} \left( n_t \mathbf{w}^+ + \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{f}_j(\mathbf{w}^+) \right) \cdot \varphi dS - \int_{\mathcal{U}^+} \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} \right) \cdot \varphi d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Protože  $\mathbf{w}$  je v  $\mathcal{U}^\pm$  klasické řešení, integrály přes  $\mathcal{U}^+$  a  $\mathcal{U}^-$  jsou rovny nule, takže

$$-\int_{\mathcal{U} \cap \Gamma} \left[ n_t(\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) + \sum_{j=1}^d n_j(\mathbf{f}_j(\mathbf{w}^+) - \mathbf{f}_j(\mathbf{w}^-)) \right] \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS = 0,$$

a protože koule  $\mathcal{U}$  je libovolně malá a testovací funkce  $\boldsymbol{\varphi}$  je libovolná, Rankine-Hugoniotova podmínka (2.38) platí.

Opačně lze dokázat: když je  $\mathbf{w}$  po částech hladká funkce splňující podmínky (i) a (ii), pak  $\mathbf{w}$  je řešením rovnice (2.23) ve smyslu distribucí, tj. platí (2.37).  $\square$

Jestliže ve vektoru  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d, n_t)^T$  označíme  $n_t = -s$ , pak Rankine-Hugoniotova podmínka nabude tvaru

$$s[\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-] = \sum_{j=1}^d n_j [\mathbf{f}_j(\mathbf{w}^+) - \mathbf{f}_j(\mathbf{w}^-)]. \quad (2.39)$$

Vektor  $\mathbf{n}_x = (n_1, n_2, \dots, n_d)^T$  resp. číslo  $s$  pak lze považovat za směr resp. rychlost šíření nespojitosti  $\Gamma$ . To je dobře srozumitelné v případě  $d = 1$ . Předpokládejme, že nespojitost  $\Gamma$  je popsána křivkou  $x = \xi(t)$ . Jestliže  $s = d\xi/dt$ , pak  $(s, 1)^T$  je vektor ke křivce  $\xi(t)$  tečný a tedy  $\mathbf{n} = (1, -s)^T$  je vektor ke křivce  $\xi(t)$  kolmý. Rankine-Hugoniotova podmínka pro  $d = 1$  je tvaru

$$s(\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) = \mathbf{f}(\mathbf{w}^+) - \mathbf{f}(\mathbf{w}^-). \quad (2.40)$$

V případě spojitého slabého řešení podmínka (2.39) resp. (2.40) zřejmě platí.

**Příklad 2.8.** Cauchyho úloha pro Burgersovu rovnici je úloha

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, & x \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x, 0) &= w^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Burgersovu rovnici lze zapsat v konzervativním tvaru s tokem  $f(w) = \frac{1}{2}w^2$ .

1) Uvažme počáteční podmínku

$$w^0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

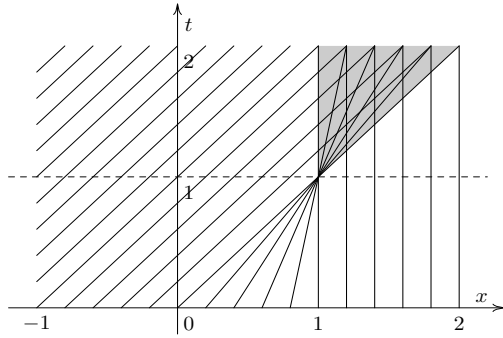
Charakteristika vycházející z bodu  $[x_0, 0]$  je přímka  $x = x_0 + w^0(x_0)t$ , viz (2.33). Proto

$$x = \begin{cases} x_0 + t, & x_0 \leq 0, \\ x_0 + t(1 - x_0), & 0 < x_0 \leq 1, \\ x_0, & x_0 > 1. \end{cases} \quad (2.43)$$

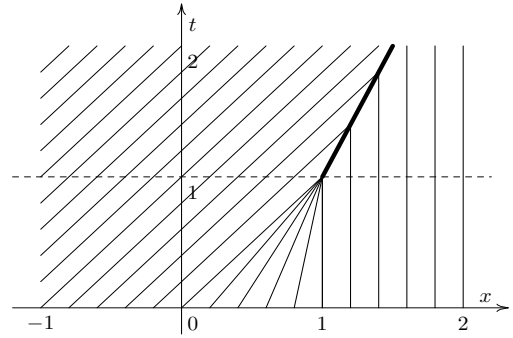
Pro  $t < 1$  se charakteristiky neprotínají, takže v  $\mathbf{R} \times (0, 1)$  máme spojitě řešení

$$w(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leq t, \\ (1-x)/(1-t), & t < x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{array} \right\} \quad \text{pro } t < 1. \quad (2.44)$$

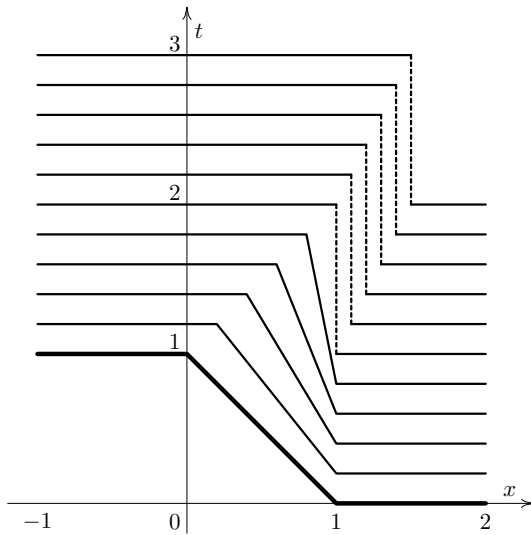
Skutečně, řešení na charakteristikách vycházejících z bodů  $[x_0, 0]$ ,  $x_0 \leq 0$ , je rovno 1, řešení na charakteristikách vycházejících z bodů  $[x_0, 0]$ ,  $x_0 \geq 1$ , je rovno 0. Na charakteristikách vycházejících z bodů  $[x_0, 0]$ ,  $0 \leq x_0 \leq 1$ , máme  $w(x, t) = 1 - x_0$ , přičemž  $x = x_0 + t(1 - x_0)$ . Odtud  $x_0 = (x - t)/(1 - t)$ , takže  $1 - x_0 = (1 - x)/(1 - t) = w(x, t)$ .



Obr. 2.4: charakteristiky, pro  $t \geq 1$  klasické řešení neexistuje



Obr. 2.5: charakteristiky slabého řešení



Obr. 2.6: slabé řešení

Všimněte si, že řešení (2.44) není řešení klasické, neboť nemá spojitě první partiální derivace, je to však řešení slabé, jak plyne z věty 2.1. Pokusme se tedy najít řešení nespojitě, které pro  $t \geq 1$  nabývá na jedné straně od křivky nespojitosti hodnotu  $w^+ = 1$  a na druhé straně hodnotu  $w^- = 0$ . Podle Rankine-Hugoniotovy podmínky (2.40) je  $s(1-0) = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2$  a odtud  $s = \frac{1}{2}$ . Tedy  $dx(t)/dt = \frac{1}{2}$ , což znamená, že křivka nespojitosti je přímka  $x = \frac{1}{2}t + c$ . Protože tato přímka má procházet bodem  $[1, 1]$ , musí být  $c = \frac{1}{2}$ , takže  $x = \frac{1}{2}(t + 1)$ . Pro  $t \geq 1$  budeme tedy definovat řešení předpisem

$$w(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x < \frac{1}{2}(t + 1), \\ 0, & x > \frac{1}{2}(t + 1), \end{array} \right\} \quad \text{pro } t \geq 1. \quad (2.45)$$

Snadno ověříme, že (2.44) – (2.45) je jediné slabé řešení úlohy (2.41) – (2.42). Situaci ilustrují obrázky Obr.2.4, Obr.2.5 a Obr.2.6.  $\square$

2) Uvažme počáteční podmínku

$$w^0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Pomocí charakteristik zjistíme, že pro  $x \leq 0$  je  $w(x, t) = 0$  a pro  $x \geq t$  je  $w(x, t) = 1$ . Zbývá určit  $w$  pro  $0 < x < t$ . Existuje několik možností, jak to udělat.

a) Nespojitosť v počáteční podmínce se šíří rychlostí  $s = \frac{1}{2}$  po přímce  $x = t/2$ . Jak se snadno přesvědčíme,

$$w(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq t/2, \\ 1, & x > t/2, \end{cases} \quad (2.47)$$

je nespojitě slabé řešení úlohy (2.41), (2.46).

b) Funkce  $u(x, t) = x/t$  vyhovuje Burgersově rovnici,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{t} = 0,$$

a přitom  $u(0, t) = 0$ ,  $u(t, t) = 1$ . Jak se lze snadno přesvědčit,

$$w(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/t, & 0 < x \leq t, \\ 1, & x > t, \end{cases} \quad (2.48)$$

je spojitě slabé řešení úlohy (2.41), (2.46).

c) Není těžké ověřit, že pro libovolné  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  je funkce

$$w(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq st, \\ 2s, & st < x \leq 2st, \\ x/t, & 2st < x \leq t, \\ 1, & x > t, \end{cases} \quad (2.49)$$

slabým řešením úlohy (2.41), (2.46). Skutečně, na přímce nespojitosti  $x = st$  platí Rankine-Hugoniotova podmínka  $s(2s - 0) = \frac{1}{2}(2s)^2 - \frac{1}{2}0^2$ .  $\square$

Na příkladu Burgersovy úlohy jsme poukázali na zajímavou skutečnost, a sice, že hyperbolická úloha může mít více slabých řešení. Nabízí se proto otázka, jak mezi slabými řešeními vybrat správné řešení, které věrohodně vystihuje fyzikální podstatu uvažované hyperbolické úlohy. K tomu nám poslouží tzv. *podmínka entropie*. Abychom ji mohli vyslovit, potřebujeme definovat entropii pro obecnou hyperbolickou rovnici (2.23).

**Definice 2.5.** Nechť  $D$  je konvexní množina. Konvexní funkci  $\eta : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\eta \in C^1(D)$ , nazveme *entropií* rovnice (2.23), jestliže k ní existují funkce  $G_1, G_2, \dots, G_d$ ,  $G_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G_j \in C^1(D)$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , takové, že

$$[\nabla_{\mathbf{w}} \eta(\mathbf{w})]^T \mathbf{A}_j(\mathbf{w}) = [\nabla_{\mathbf{w}} G_j(\mathbf{w})]^T, \quad \mathbf{w} \in D, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (2.50)$$

□

Funkce  $G_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , nazýváme *entropické toky*. Symbolem  $\nabla_{\mathbf{w}}$  rozumíme gradient vzhledem k  $\mathbf{w}$ , tj.  $\nabla_{\mathbf{w}} = (\partial/\partial w_1, \partial/\partial w_2, \dots, \partial/\partial w_d)^T$ .

**Cvičení 2.2.** Jestliže  $\mathbf{w}$  je klasické řešení rovnice (2.23), pak

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{w})}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial G_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} = 0. \quad (2.51)$$

Dokažte to!

□

Slabé řešení rovnice (2.23) podmínku (2.51) splňovat nemusí.

**Definice 2.6.** Řekneme, že slabé řešení  $\mathbf{w}$  rovnice (2.23) je *entropické*, jestliže pro každou entropii  $\eta$  rovnice (2.23) a odpovídající entropické toky  $\{G_j\}_{j=1}^d$  platí podmínka

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{w})}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial G_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} \leq 0 \quad (2.52)$$

ve smyslu distribucí v  $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ , tj.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \left( \eta(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d G_j(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} dt \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty)), \quad \varphi \geq 0. \quad (2.53)$$

□

Nerovnost (2.53) se nazývá *podmínka entropie*. Ta souvisí s podmínkou entropie (1.50) v dynamice tekutin. V [17] je dokázáno: jestliže (2.23) jsou Eulerovy rovnice, pak lze jednu konkrétní entropii  $\eta$  a odpovídající entropické toky  $G_1, G_2, \dots, G_d$  zvolit takto:

$$\eta = -\varrho s, \quad G_j = -\varrho v_j s, \quad j = 1, 2, \dots, d, \quad (2.54)$$

kde  $s$  je entropie ideálního plynu, viz (1.54). Je-li  $\mathbf{w}$  je klasické řešení Eulerových rovnic (2.23), pak podmínka entropie (2.51) je tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho s) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho v_j s) = 0, \quad (2.55)$$

což je entropická rovnice (1.51) pro adiabatické proudění ideálního plynu.

Dá se ukázat, že slabé řešení je entropické, právě když je na hyperploše nespojitosti  $\Gamma$  splněna následující analogie Rankine-Hugoniotovy podmínky (2.38): pro všechny entropie  $\eta$  a odpovídající entropické toky  $\{G_j\}_{j=1}^d$  platí

$$[\eta(\mathbf{w}^+) - \eta(\mathbf{w}^-)] n_t + \sum_{j=1}^d [G_j(\mathbf{w}^+) - G_j(\mathbf{w}^-)] n_j \leq 0, \quad (2.56)$$

kde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d, n_t)^T$  je vektor kolmý ke  $\Gamma$ ,  $\mathbf{w}^\pm$  jsou jednostranné limity  $\mathbf{w}$  na  $\Gamma$ , viz (2.36), a normála  $\mathbf{n}$  je orientována stejně jako na Obr. 2.3, tj. ve směru od  $\mathcal{U}^-$  do  $\mathcal{U}^+$ . Nerovnost (2.56) lze odvodit pomocí (2.53) podobně, jako je ve větě 2.1 odvozena Rankine-Hugoniotova podmínka (2.38) pomocí (2.37). Ověřte! Pro  $d = 1$  a  $\mathbf{n} = (1, -s)^T$  dostaneme analogii podmínky (2.40):

$$s [\eta(\mathbf{w}^+) - \eta(\mathbf{w}^-)] \geq G(\mathbf{w}^+) - G(\mathbf{w}^-), \quad (2.57)$$

kde  $s = d\xi(t)/dt$  je rychlost šíření nespojitosti  $\Gamma$  a  $\mathbf{w}^-$  resp.  $\mathbf{w}^+$  je hodnota z levé resp. pravé strany křivky nespojitosti  $\xi(t)$ .

Všimněte si: když  $\mathbf{w}$  je spojitě slabé řešení, pak  $\mathbf{w}^- = \mathbf{w}^+$  a podmínka (2.56) resp. (2.57) splněna triviálně jako rovnost. To znamená, že *spojitě slabé řešení je entropické*.

V případě skalární rovnice

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(w)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.58)$$

je každá konvexní funkce  $\eta \in C^1(D)$  entropií. Skutečně, příslušné entropické toky  $G_j$ , splňující podle (2.50) podmínky

$$G'_j = \eta' f'_j, \quad j = 1, 2, \dots, d, \quad (2.59)$$

lze získat z rovnic (2.59) integrací .

**Příklad 2.9.** Posoudíme, která řešení Burgerovy rovnice z příkladu 2.8 jsou entropická.

- 1) Nespojitě slabé řešení (2.44) – (2.45) úlohy (2.41) – (2.42) je entropické, důkaz viz [17].
- 2) Nespojitě slabé řešení (2.47) úlohy (2.41) a (2.46) není entropické. Dokažme si to. Pro  $\eta = \frac{1}{2}w^2$  pomocí (2.59) obdržíme  $G = \frac{1}{3}w^3$ . Pro  $s = \frac{1}{2}$ ,  $w^- = 0$  a  $w^+ = 1$  dostaneme

$$s [\eta(\mathbf{w}^+) - \eta(\mathbf{w}^-)] - [G(\mathbf{w}^+) - G(\mathbf{w}^-)] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(w^+)^2 - \frac{1}{2}(w^-)^2 \right] - \left[ \frac{1}{3}(w^+)^3 - \frac{1}{3}(w^-)^3 \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} < 0,$$

takže (2.57) neplatí.

- 3) Spojitě slabé řešení (2.48) úlohy (2.41) a (2.46) je entropické.

- 4) Slabé řešení (2.49) úlohy (2.41) a (2.46) je entropické jen pro  $s = 0$ , kdy je totožné se spojitým řešením (2.48).  $\square$



**Metoda umělé viskozity.** Slabé entropické řešení lze dostat také tzv. *metodou umělé viskozity*. Tato metoda, navržená Laxem v roce 1954, je založena na tom, že na pravou stranu hyperbolické rovnice (2.23) vložíme umělý viskózní (disipační) člen  $\varepsilon \Delta \mathbf{w}$ , kde  $\varepsilon > 0$  je malý parametr. Tím se hyperbolická rovnice přemění v rovnici parabolickou,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} = \varepsilon \Delta \mathbf{w}, \quad (2.60)$$

a slabé entropické řešení zkusíme získat jako limitu řešení rovnic (2.60) pro  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tato myšlenka je inspirována situací v dynamice tekutin, kdy na Eulerovy rovnice můžeme nahlížet jako na limitní případ rovnic Navierových-Stokesových, když viskozita  $\nu \rightarrow 0$ . Vzájemný vztah mezi řešeními rovnic (2.60) a (2.23) uvádí následující

**Věta 2.2.** Necht'  $\{\mathbf{w}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  jsou řešení rovnice (2.60) splňující podmínky

- (a)  $\frac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 \mathbf{w}_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}$  jsou spojité v  $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ ,
- (b)  $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{[L^\infty(K)]^s} \leq c(K) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall K \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty), K \text{ kompaktní},$
- (c)  $\mathbf{w}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{w}$  skoro všude v  $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ .

Pak  $\mathbf{w}$  je slabné entropické řešením rovnice (2.23) ve smyslu distribucí, viz (2.37).

*Důkaz:* viz [17]. □

Laxova metoda umělé viskozity je východiskem pro odvození numerických metod, které poskytují dobré aproximace slabého entropického řešení.

O existenci slabého entropického řešení existuje jen několik dílčích výsledků. Pro skalární úlohu v  $\mathbb{R}^d$ , tj. když  $s = 1, d \geq 1$ , platí následující

**Věta 2.3.** Necht'  $f_j \in C^1(\mathbb{R}), j = 1, 2, \dots, d$ . Pak pro každou funkci  $w^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  existuje slabé entropické řešení  $w \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  úlohy

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(w)}{\partial x_j} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \quad (2.61)$$

$$w(\mathbf{x}, 0) = w^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

*Důkaz* viz [17]. Větu dokázal Kružkov. Slabé entropické řešení zkonstruoval metodou umělé viskozity, tj.  $w = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon$ , kde  $w_\varepsilon$  je řešením úlohy

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(w_\varepsilon)}{\partial x_j} = \varepsilon \Delta w_\varepsilon, \quad w_\varepsilon(x, 0) = w^0(x). \quad \square$$

Jiný dílčí výsledek dokázal Glimm pro obecný hyperbolickou soustavu v jedné dimenzi, tj. když  $s \geq 1, d = 1$ . Abychom Glimmův výsledek mohli zformulovat a pochopit, musíme nejdříve zavést několik nových pojmů.

**Definice 2.7.** Nechť  $I \subset \mathbb{R}$  je interval a uvažujme množinu  $\Pi$  vzestupně uspořádaných  $N$ -tic bodů  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$  z intervalu  $I$ , tj.  $a_1 < a_2 < \dots < a_N$ ,  $a_i \in I$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , kde  $N$  je libovolné přirozené číslo. *Totální variace*  $TV_I(\mathbf{f})$  funkce  $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^s$  je definována předpisem

$$TV_I(\mathbf{f}) = \sup_{\mathbf{a} \in \Pi} \sum_{i=1}^{N-1} |\mathbf{f}(a_{i+1}) - \mathbf{f}(a_i)|. \quad \square \quad (2.62)$$

Jestliže  $TV_I(\mathbf{f}) < \infty$ , řekneme, že funkce  $\mathbf{f}$  má v intervalu  $I$  *omezenou totální variaci*. Totální variaci funkce  $\mathbf{f}$  na celé číselné ose, tj. když  $I = \mathbb{R}$ , označíme  $TV_{\mathbb{R}}(\mathbf{f})$ .

Nechť  $\mathbf{r}_i(\mathbf{w})$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , jsou vlastní vektory Jacobiho matice  $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ ,  $\mathbf{w} \in D$ , a  $\lambda_i(\mathbf{w})$  jsou odpovídající vlastní čísla.

**Definice 2.8.** Řekneme, že vlastní vektor  $\mathbf{r}_k(\mathbf{w})$  matice  $\mathbf{A}(\mathbf{w})$  je

$$\left. \begin{array}{l} \text{ryze nelineární,} \\ \text{lineárně degenerovaný,} \end{array} \right\} \quad \text{jestliže} \quad \nabla_{\mathbf{w}} \lambda_k(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{w} \in D. \quad \square$$

Všimněte si: jestliže  $\nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) \neq 0$  a  $\nabla_{\mathbf{v}} \lambda_k(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{v}) = 0$  pro nějaká  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in D$ , pak vlastní vektor  $\mathbf{r}_k$  není ani ryze nelineární ani lineárně degenerovaný.

**Věta 2.4.** Nechť  $d = 1$ , systém (2.23) je ryze hyperbolický a všechny vlastní vektory matice  $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{w})/D\mathbf{w}$  jsou ryze nelineární nebo lineárně degenerované v okolí nějakého konstantního stavu  $\bar{\mathbf{w}}$ . Pak existují dvě kladná čísla  $\delta_1$  a  $\delta_2$  taková, že pro počáteční data  $\mathbf{w}^0 \in [L_{loc}^\infty(\mathbb{R})]^s$  splňující

$$\|\mathbf{w}^0 - \bar{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})^s} \leq \delta_1, \quad TV_{\mathbb{R}} \mathbf{w}^0 \leq \delta_2,$$

má Cauchyho úloha (2.23), (2.24) slabé entropické řešení  $\mathbf{w} \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$  a platí

$$\|\mathbf{w}(\cdot, t) - \bar{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})^s} \leq C_0 \|\mathbf{w}^0 - \bar{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})^s}, \quad t \in [0, \infty),$$

$$TV_{\mathbb{R}}(\mathbf{w}(\cdot, t)) \leq C_0 TV_{\mathbb{R}}(\mathbf{w}^0), \quad t \in [0, \infty),$$

$$\|\mathbf{w}(\cdot, t_1) - \mathbf{w}(\cdot, t_2)\|_{L^1(\mathbb{R})^s} \leq C_0 |t_2 - t_1| TV_{\mathbb{R}}(\mathbf{w}^0), \quad t_1, t_2 \in [0, \infty)$$

pro nějakou konstantu  $C_0$ . Navíc  $\mathbf{w} \in C([0, \infty); L_{loc}^1(\mathbb{R}))^s$ , takže počáteční podmínka (2.24) je přirozeně splněna.

## 2.5. Riemannův problém

Řada numerických metod pro řešení vícedimenzionálních hyperbolických úloh, například Godunovy metody, viz kapitola 3.2.3, je založena na přesném nebo jen přibližném řešení jednodimenzionálních Riemannových úloh

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (2.63)$$

$$\mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & x < 0, \\ \mathbf{w}_R, & x > 0, \end{cases} \quad (2.64)$$

kde  $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R \in D$  jsou konstantní počáteční stavy.

**Věta 2.5.** Jestliže Riemannův problém (2.63)–(2.64) má jediné po částech hladké řešení  $\mathbf{w}$ , pak pro  $t > 0$  lze  $\mathbf{w}$  zapsat v ekvivalentním tvaru  $\mathbf{w}(x, t) = \tilde{\mathbf{w}}(x/t)$ , kde  $\tilde{\mathbf{w}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^s$  je po částech hladká funkce jedné proměnné.

*Důkaz.* Nejdříve ověříme, že pro každé pevné  $\alpha > 0$  je  $\mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)$  řešení (2.63)–(2.64). Dosadíme-li v (2.63)  $\alpha t$  místo  $t$  a  $\alpha x$  místo  $x$ , dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)}{\partial(\alpha t)} + \mathbf{A}(\mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)) \frac{\partial \mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)}{\partial(\alpha x)} = \mathbf{o},$$

a protože podle pravidla o derivování složené funkce

$$\frac{\partial \mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)}{\partial(\alpha t)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)}{\partial(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)}{\partial x},$$

vidíme, že  $w(\alpha x, \alpha t)$  rovnici (2.63) vyhovuje. Podobně, dosadíme-li do (2.64)  $\alpha x$  místo  $x$ , dostaneme

$$\mathbf{w}(\alpha x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & \alpha x < 0, \\ \mathbf{w}_R, & \alpha x > 0. \end{cases}$$

Protože  $\alpha x < 0 \iff x < 0$ ,  $\alpha x > 0 \iff x > 0$ ,  $\mathbf{w}(\alpha x, \alpha t)$  splňuje také počáteční podmínku (2.64).

Vzhledem k jednoznačnosti proto  $\mathbf{w}(\alpha x, \alpha t) = \mathbf{w}(x, t)$ . Jestliže pro každé pevné  $x$  a  $t$  zvolíme  $\alpha = 1/t$ , pak  $\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}(x/t, 1) =: \tilde{\mathbf{w}}(x/t)$ .  $\square$

**Lineární Riemannův problém.** Předpokládejme, že  $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \equiv \mathbf{A}$  je konstantní matice. Označme

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{w}_L, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{w}_R,$$

kde  $\mathbf{T} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s)$  je matice vlastních vektorů  $\mathbf{A}$ . Nechť  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  je diagonální matice odpovídajících vlastních čísel, tj.  $\mathbf{A} \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Stejně jako v příkladu 2.6 dostaneme pro  $\mathbf{u} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{w}$  ekvivalentní Riemannovu úlohu

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}, & x < 0, \\ \boldsymbol{\beta}, & x > 0, \end{cases}$$

nebo-li

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad u_i(x, 0) = \begin{cases} \alpha_i, & x < 0, \\ \beta_i, & x > 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Odtud

$$u_i(x, t) = u_i(x - \lambda_i t, 0) = \begin{cases} \alpha_i, & x - \lambda_i t < 0, \\ \beta_i, & x - \lambda_i t > 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Protože  $\mathbf{w} = \mathbf{T} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^s u_i(x, t) \mathbf{r}_i$ , dostaneme

$$\mathbf{w}(x, t) = \sum_{\lambda_i < x/t} \beta_i \mathbf{r}_i + \sum_{\lambda_i > x/t} \alpha_i \mathbf{r}_i, \quad (2.65)$$

přičemž v první resp. druhé sumě sčítáme přes takové indexy  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , pro které  $\lambda_i < x/t$  resp.  $\lambda_i > x/t$ . Jestliže  $-\infty \equiv \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s < \lambda_{s+1} \equiv \infty$  a  $\lambda_k < \lambda_{k+1}$  pro nějaké  $0 \leq k \leq s$ , pak  $\mathbf{w}$  je v oblasti  $\Omega_k = \{(x, t) : \lambda_k < x/t < \lambda_{k+1}\}$  konstantní,

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}_k \quad \text{pro } (x, t) \in \Omega_k, \quad (2.66)$$

kde

$$\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=k+1}^s \alpha_i \mathbf{r}_i, \quad k = 0, 1, \dots, s. \quad (2.67)$$

Řešení  $\mathbf{w}$  definované předpisem (2.66) je slabé řešení lineárního Riemannova problému. Podle věty 2.1 stačí ověřit, že na polopřímkách nespojitosti  $x/t = \lambda_k$  je splněna Rankine-Hugoniotova podmínka (2.40). Podle (2.67) zřejmě

$$\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1} = (\beta_k - \alpha_k) \mathbf{r}_k,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1}) = (\beta_k - \alpha_k) \mathbf{A} \mathbf{r}_k = (\beta_k - \alpha_k) \lambda_k \mathbf{r}_k = \lambda_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1}).$$

Rovnice

$$\lambda_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{A} \mathbf{w}_k - \mathbf{A} \mathbf{w}_{k-1} \quad (2.68)$$

představuje Rankine-Hugoniotovu podmínku (2.40), ve které  $s = \lambda_k$  je rychlost šíření nespojitosti,  $\mathbf{w}^+ = \mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{w}^- = \mathbf{w}_{k-1}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{w}^+) = \mathbf{A} \mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{w}^-) = \mathbf{A} \mathbf{w}_{k-1}$ .

**Cvičení 2.3.** Necht'

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L).$$

Ukažte, že řešení lineárního Riemannova problému lze ekvivalentně zapsat v jednom z následujících tvarů:

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}_L + \sum_{\lambda_i < x/t} \gamma_i \mathbf{r}_i, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}_R - \sum_{\lambda_i > x/t} \gamma_i \mathbf{r}_i, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{w}(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{w}_L + \mathbf{w}_R - \sum_{i=1}^s \operatorname{sgn}(\lambda_i - x/t) \gamma_i \mathbf{r}_i \right]. \quad (2.71)$$

**Nelineární Riemannův problém.** V následujícím textu ukážeme, jak vypadá řešení nelineárního Riemannova problému pro speciální dvojici stavů  $\mathbf{w}_L$  a  $\mathbf{w}_R$ . Podrobnosti včetně důkazů lze najít v [18].

*Vlna zředění* (anglicky *rarefaction wave*). Pro každý ryze nelineární vlastní vektor  $\mathbf{r}_k$  a libovolný stav  $\mathbf{w}_L \in D$  existuje jednoparametrická třída stavů  $\mathbf{w}_R$  a funkce  $\tilde{\mathbf{w}}$  s těmito vlastnostmi:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lambda_k(\mathbf{w}_L) < \lambda_k(\mathbf{w}_R), \\ \text{b) } & \tilde{\mathbf{w}}(x/t) \text{ je spojitě řešení rovnice (2.63) pro } \lambda_k(\mathbf{w}_L) \leq x/t \leq \lambda_k(\mathbf{w}_R) \text{ takové, že} \\ & \tilde{\mathbf{w}}(\lambda_k(\mathbf{w}_L)) = \mathbf{w}_L, \quad \tilde{\mathbf{w}}(\lambda_k(\mathbf{w}_R)) = \mathbf{w}_R. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Pak funkce  $\mathbf{w}$  definovaná předpisem

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & x/t \leq \lambda_k(\mathbf{w}_L), \\ \tilde{\mathbf{w}}(x/t), & \lambda_k(\mathbf{w}_L) < x/t \leq \lambda_k(\mathbf{w}_R), \\ \mathbf{w}_R, & x/t > \lambda_k(\mathbf{w}_R), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & x < 0, \\ \mathbf{w}_R, & x > 0 \end{cases}$$

je spojitým entropickým řešením nelineární Riemannovy úlohy (2.63) – (2.64) a nazývá se *k-zředňující vlna* (anglicky *k-rarefaction wave*).

Často se *k-zředňující vlnou* rozumí jen funkce  $\mathbf{w}_{rar}(x, t) = \tilde{\mathbf{w}}(x/t)$  definovaná na množině  $\Omega_{rar} = \{(x, t) \mid \lambda_k(\mathbf{w}_L) \leq x/t \leq \lambda_k(\mathbf{w}_R)\}$ . Jindy se *k-zředňující vlnou* označuje množina  $\Omega_{rar}$ , které se rovněž říká *vějíř zředění* (anglicky *rarefaction fan*).

*Nespojitá entropická vlna*. Uvažujme po částech konstantní řešení Riemannova problému

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & x < st, \\ \mathbf{w}_R, & x > st, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (2.74)$$

s přímkou nespojitosti  $x = st$ . Má-li být tato funkce slabým entropickým řešením, musí být splněny podmínky (2.40) a (2.57), tj.

$$s(\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_L), \quad (\text{Rankine-Hugoniotova podmínka}) \quad (2.75)$$

$$s[\eta(\mathbf{w}_R) - \eta(\mathbf{w}_L)] \geq G(\mathbf{w}_R) - G(\mathbf{w}_L) \quad (\text{podmínka entropie}) \quad (2.76)$$

pro každou entropii  $\eta$  a odpovídající entropický tok  $G$ . Funkce  $\mathbf{w}$  tvaru (2.74) splňující (2.75) – (2.76) se nazývá *nespojité entropická vlna*. Rozlišíme dva typy takové vlny.

*Rázová vlna* (anglicky *shock wave*). Předpokládejme, že vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou jednoduchá. Pak pro každý ryze nelineární vlastní vektor  $\mathbf{r}_k$  a libovolný stav  $\mathbf{w}_L \in D$  existuje jednoparametrická třída stavů  $\mathbf{w}_R$  taková, že nespojitá vlna (2.74) je slabé entropické řešení. Taková vlna se nazývá *k-rázová vlna* (anglicky *k-shock wave*). Místo nepříliš názorné podmínky entropie (2.76) lze rázovou vlnu identifikovat pomocí srozumitelnější *Laxovy podmínky entropie*, viz [34],

$$\lambda_k(\mathbf{w}_L) > s > \lambda_k(\mathbf{w}_R) \quad (\text{Laxova podmínka entropie}). \quad (2.77)$$

*Kontaktní nespojitost* (anglicky *contact discontinuity*). Pro každý lineárně degenerovaný vlastní vektor  $\mathbf{r}_k$  a každý stav  $\mathbf{w}_L \in D$  existuje jednoparametrická třída stavů  $\mathbf{w}_R$  taková, že nespojitá vlna (2.74) je slabé entropické řešení. Přitom

$$\lambda_k(\mathbf{w}_L) = s = \lambda_k(\mathbf{w}_R). \quad (2.78)$$

Taková vlna se nazývá *k-kontaktní nespojitost* (anglicky *k-contact discontinuity*).

Pod *k-rázovou vlnou* resp. *k-kontaktní nespojitostí* rozumíme často jen přímkou nespojitosti  $x = st$  funkce (2.74). Konstantu  $s$  nazýváme rychlostí *k-rázové vlny* resp. rychlostí *k-kontaktní nespojitosti*.

**Věta 2.6.** *Laxovo řešení Riemannova problému.* Nechť systém (2.63) je ryze hyperbolický a nechť každý vlastní vektor matice  $\mathbf{A}(\mathbf{w})$  je ryze nelineární nebo lineárně degenerovaný. Nechť počáteční stavy  $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R \in D$  jsou dostatečně blízké, tj.  $\|\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L\| < \varepsilon$  pro nějaké  $\varepsilon > 0$ . Pak má Riemannův problém (2.63)–(2.64) jediné slabé entropické řešení. Toto řešení se skládá z nejvýše  $s + 1$  konstantních stavů spojených pomocí vln zředění nebo rázových vln nebo kontaktních nespojitostí.  $\square$

**Příklad 2.10.** Uvažujme Riemannův problém pro Burgersovu rovnici, tj.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w(x, 0) = \begin{cases} w_L, & x < 0, \\ w_R, & x > 0, \end{cases}$$

přičemž  $f(w) = \frac{1}{2}w^2$ . Pak  $\lambda = w$  a odpovídající vlastní vektor  $\mathbf{r} = 1$  je ryze nelineární. Levý stav  $w_L$  lze proto spojit s pravým stavem  $w_R \neq w_L$  buďto vlnou zředění nebo rázovou vlnou. V [17] je dokázáno, že pro ryze konvexní tok  $f(w)$  je podmínka entropie (2.76) ekvivalentní s podmínkou  $w_L \geq w_R$ . Připomeňme, že  $f$  je v  $D$  ryze konvexní, pokud  $f''(w) > 0 \ \forall w \in D$ . Tok  $f(w) = \frac{1}{2}w^2$  je ryze konvexní, neboť  $f''(w) = 1 > 0$ .

V případě  $w_L > w_R$  tedy vznikne rázová vlna a v případě  $w_L \leq w_R$  vznikne vlna zředění:

$$\begin{aligned} \text{je-li } w_L \leq w_R &\implies w(x, t) = \begin{cases} w_L, & x/t \leq w_L, \\ x/t, & w_L < x/t \leq w_R, \\ w_R, & x/t > w_R, \end{cases} \\ \text{je-li } w_L > w_R &\implies w(x, t) = \begin{cases} w_L, & x \leq st, \\ w_R, & x > st, \end{cases} \quad \text{kde } s = \frac{1}{2}(w_L + w_R). \end{aligned} \quad \square$$

**Příklad 2.11.** *Riemannův problém pro 1D Eulerovy rovnice.* Rovnice jsou tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (2.79)$$

kde

$$\mathbf{w} = (\varrho, \varrho u, E)^T, \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = (\varrho u, \varrho u^2 + p, (E + p)u)^T, \quad (2.80)$$

a

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\varrho u^2). \quad (2.81)$$

Jacobiho matici  $\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \frac{D\mathbf{f}(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}$  lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ u \left[ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^2 - H \right] & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

kde

$$H = \frac{E + p}{\varrho} = \frac{\gamma E}{\varrho} - \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^2 = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2 \quad (2.83)$$

je entalpie. Vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\mathbf{A}(\mathbf{w})$  jsou

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u - a, & \mathbf{r}_1(\mathbf{w}) &= (1, u - a, H - au)^T, \\ \lambda_2 &= u, & \mathbf{r}_2(\mathbf{w}) &= (1, u, \frac{1}{2}u^2)^T, \\ \lambda_3 &= u + a, & \mathbf{r}_3(\mathbf{w}) &= (1, u + a, H + au)^T. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Tři vlny příslušné vlastním číslům  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$  spojují čtyři konstantní stavy: levý stav  $\mathbf{w}_L$ , pravý stav  $\mathbf{w}_R$  a dva vnitřní stavy, levý  $\mathbf{w}_L^*$  a pravý  $\mathbf{w}_R^*$ . Vnitřní konstantní stavy lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{w}_L^* = \begin{pmatrix} \varrho_L^* \\ \varrho_L^* u^* \\ E_L^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_R^* = \begin{pmatrix} \varrho_R^* \\ \varrho_R^* u^* \\ E_R^* \end{pmatrix} \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} E_L^* &= \frac{p^*}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\varrho_L^*(u^*)^2, \\ E_R^* &= \frac{p^*}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\varrho_R^*(u^*)^2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Dá se ukázat, že vlastní vektory  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_3$  jsou ryze nelineární a vlastní vektor  $\mathbf{r}_2$  je lineárně degenerovaný. To znamená, že levá a pravá vlna je vlna zředění nebo rázová vlna a střední vlna je kontaktní nespojitost. Konkrétní typ levé a pravé vlny lze stanovit takto:

$$\begin{aligned} p^* > p_L &\implies \text{levá vlna je rázová} \\ p^* \leq p_L &\implies \text{levá vlna je vlna zředění} \\ p^* > p_R &\implies \text{pravá vlna je rázová} \\ p^* \leq p_R &\implies \text{pravá vlna je vlna zředění.} \end{aligned}$$

Pro určení vnitřních stavů je klíčové stanovení tlaku  $p^*$ . Explicitní vzorec neexistuje, je však známa algebraická rovnice, kterou musí tlak  $p^*$  splňovat. Pro fyzikálně realistické hodnoty počátečních stavů  $\mathbf{w}_L$  a  $\mathbf{w}_R$  lze  $p^*$  určit numericky, obvykle pomocí několika málo iterací Newtonovy metody. Zbývající hodnoty  $\varrho_L^*$ ,  $\varrho_R^*$  a  $u^*$  vnitřních stavů  $\mathbf{w}_L^*$  a  $\mathbf{w}_R^*$  dopočítáme snadno dosazením do příslušných vzorců. Dále je třeba určit:

- v případě nespojitých vln rychlosti jejich šíření, tj. rychlost  $s_1$  levé rázové vlny, rychlost  $s_2$  kontaktní nespojitosti a rychlost  $s_3$  pravé rázové vlny,
- v případě spojitých vln: u levé vlny zředění rychlost  $\lambda_1(\mathbf{w}_L)$  resp.  $\lambda_1(\mathbf{w}_L^*)$  čela resp. týlu vlny a tvar  $\mathbf{w}_{L, rar}(x, t)$  vlny v oblasti zředění  $\lambda_1(\mathbf{w}_L) \leq x/t \leq \lambda_1(\mathbf{w}_L^*)$ , u pravé vlny zředění rychlost  $\lambda_3(\mathbf{w}_R)$  resp.  $\lambda_3(\mathbf{w}_R^*)$  čela resp. týlu vlny a tvar  $\mathbf{w}_{R, rar}(x, t)$  vlny v oblasti zředění  $\lambda_3(\mathbf{w}_R^*) \leq x/t \leq \lambda_3(\mathbf{w}_R)$ .

Podrobnosti lze dohledat v [18].

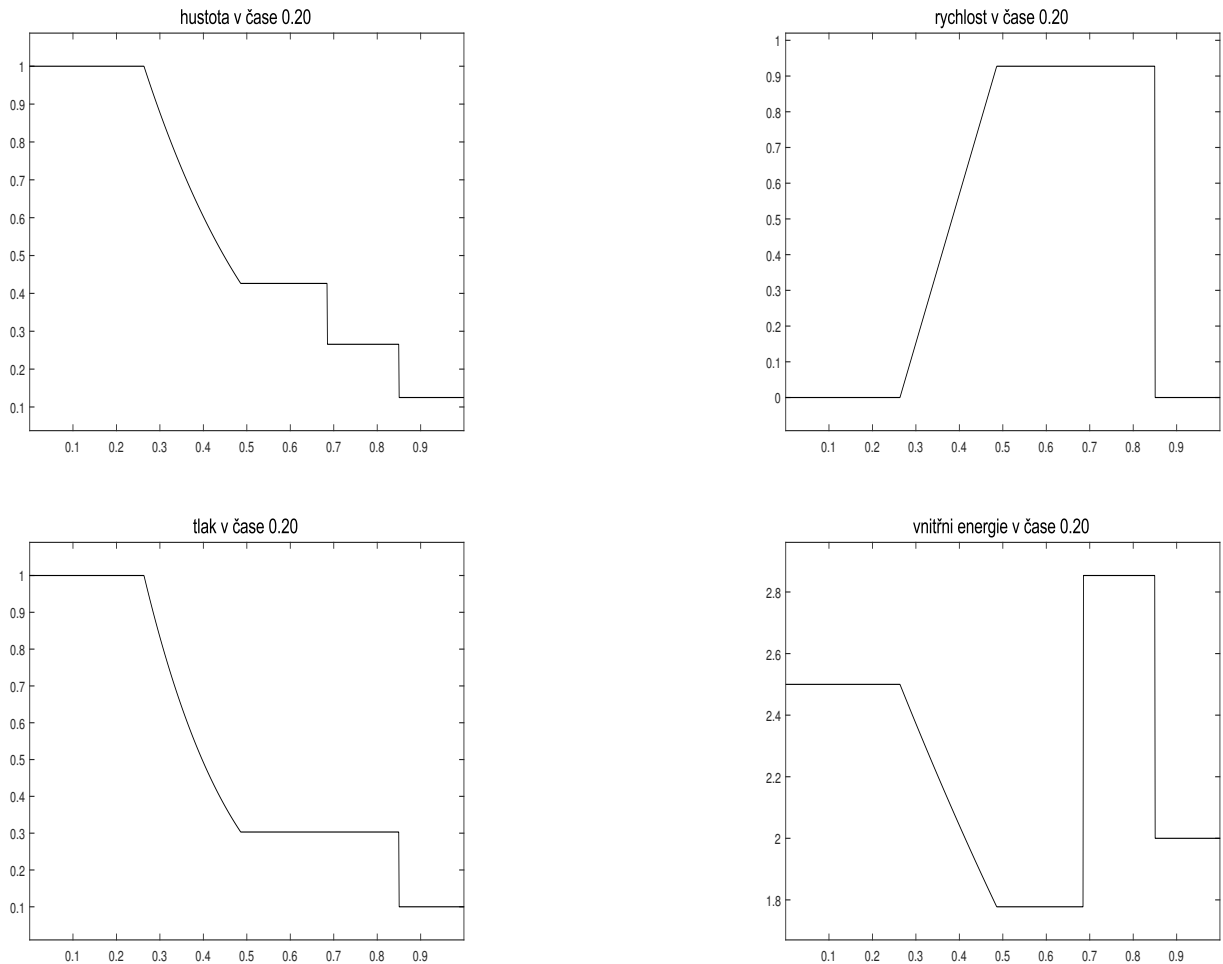
**Příklad 2.12.** *Shock tube problem.* Představme si trubici s přepážkou. Obě oddělené části jsou naplněny plynem, který je v klidu. Vlevo od přepážky má plyn hustotu  $\varrho_L$ , tlak  $p_L$  a rychlost  $u_L = 0$ , vpravo od přepážky má plyn hustotu  $\varrho_R$ , tlak  $p_R$  a rychlost  $u_R = 0$ . Děj, který nastane po odstranění přepážky, popisuje Riemannův problém pro 1D Eulerovy rovnice. Pro  $\gamma = 7/5$  je

$$\mathbf{w}_L = (\varrho_L, 0, \frac{5}{2}p_L)^T, \quad \mathbf{w}_R = (\varrho_R, 0, \frac{5}{2}p_R)^T.$$

Je-li délka trubice je rovna jedné, přepážka je umístěna uprostřed a

$$\varrho_L = 1, \quad p_L = 1, \quad \varrho_R = 0,125, \quad p_R = 0,1,$$

dostaneme úlohu známou jako *Sod shock tube problem*, stručně problém SST, viz [46]. Řešení v čase  $t = 0,2$  je znázorněno na obrázku 2.7. K výpočtu byl použit program publikovaný v [52]. Zjistíme, že  $p^* \doteq 0,30$ , a protože  $p_L = 1 > 0,30 \doteq p^* > 0,125 = p_R$ , levá vlna je zředňující a pravá je rázová. V čase 0,2 je čelo vlny v poloze  $x \doteq 0,26$  a týl v poloze  $x \doteq 0,49$ , kontaktní nespojitost je v poloze  $x \doteq 0,68$  a rázová vlna v poloze  $x \doteq 0,85$ . Dále je  $\varrho_L^* \doteq 0,43$ ,  $\varrho_R^* \doteq 0,27$ ,  $u^* \doteq 0,93$ . Pro  $e = p/((\gamma - 1)\varrho)$  dostaneme  $e_L^* \doteq 1,78$  a  $e_R^* \doteq 2,85$ .  $\square$



Obr. 2.7: Sod shock tube problem



### 3. Řešení Eulerových rovnic metodou konečných objemů

Pro řešení úloh dynamiky tekutin je prostorová diskretizace metodou konečných objemů (stručně FVM podle anglického Finite Volume Method) zdaleka nejpoužívanější. Její hlavní předností je to, že zajišťuje lokální platnost zákonů zachování na malých podoblastech, tzv. konečných objemech, vykřívajících oblast řešení.

#### 3.1. Eulerovy rovnice

Pro zjednodušení výkladu se omezíme na úlohu ve dvou prostorových proměnných s nulovým zdrojem, tj. v (1.63) položíme  $d = 2$  a  $\mathbf{s} = \mathbf{o}$ . Hledaná vektorová funkce  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ , kde  $\mathbf{x} = (x, y)^T$ , je řešení 2D Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{w})}{\partial y} = \mathbf{o}, \quad (3.1)$$

kde

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ \varrho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \varrho u \\ \varrho u u + p \\ \varrho v u \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \varrho v \\ \varrho u v \\ \varrho v v + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

Označíme-li  $\mathbf{v} = (u, v)^T$  a  $|\mathbf{v}|^2 = u^2 + v^2$ , pak

$$p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \varrho |\mathbf{v}|^2 \right). \quad (3.3)$$

Zřejmě

$$\varrho = w_1, \quad u = \frac{w_2}{w_1}, \quad v = \frac{w_3}{w_1}, \quad E = w_4, \quad p = (\gamma - 1) \left[ w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right]. \quad (3.4)$$

Snadno odvodíme, že

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + (\gamma - 1) \left[ w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right] \\ \frac{w_2 w_3}{w_1} \\ \frac{w_2}{w_1} \left[ \gamma w_4 - (\gamma - 1) \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_3 \\ \frac{w_2 w_3}{w_1} \\ \frac{w_3^2}{w_1} + (\gamma - 1) \left[ w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right] \\ \frac{w_3}{w_1} \left[ \gamma w_4 - (\gamma - 1) \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right] \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Jacobiho matice  $\mathbf{A}_1(\mathbf{w}) = D\mathbf{f}_1(\mathbf{w})/D\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{A}_2(\mathbf{w}) = D\mathbf{f}_2(\mathbf{w})/D\mathbf{w}$  toků  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)|\mathbf{v}|^2 - u^2 & (3 - \gamma)u & (1 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ -uv & v & u & 0 \\ u \left[ \frac{1}{2}(\gamma - 1)|\mathbf{v}|^2 - H \right] & H - (\gamma - 1)u^2 & (1 - \gamma)uv & \gamma u \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-1)|\mathbf{v}|^2 - v^2 & (1-\gamma)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ v \left[ \frac{1}{2}(\gamma-1)|\mathbf{v}|^2 - H \right] & (1-\gamma)uv & H - (\gamma-1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

kde

$$H = \frac{E+p}{\varrho} = \frac{\gamma E}{\varrho} - \frac{1}{2}(\gamma-1)|\mathbf{v}|^2 = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \quad (3.8)$$

je entalpie. Pro tok

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{w})n_1 + \mathbf{f}_2(\mathbf{w})n_2 \quad (3.9)$$

ve směru jednotkového vektoru  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ ,  $|\mathbf{n}| = n_1^2 + n_2^2 = 1$ , určíme Jacobiho matici

$$\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \frac{D\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})}{D\mathbf{w}} = \frac{D\mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}n_1 + \frac{D\mathbf{f}_2(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}n_2 \equiv \mathbf{A}_1(\mathbf{w})n_1 + \mathbf{A}_2(\mathbf{w})n_2. \quad (3.10)$$

Z (3.6), (3.7) dostaneme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ n_1 \frac{1}{2}(\gamma-1)|\mathbf{v}|^2 - uv_n & v_n - (\gamma-2)n_1u & n_2u - (\gamma-1)n_1v & n_1(\gamma-1) \\ n_2 \frac{1}{2}(\gamma-1)|\mathbf{v}|^2 - vv_n & n_1v - (\gamma-1)n_2u & v_n - (\gamma-2)n_2v & n_2(\gamma-1) \\ v_n \left[ \frac{1}{2}(\gamma-1)|\mathbf{v}|^2 - H \right] & n_1H - (\gamma-1)uv_n & n_2H - (\gamma-1)vv_n & \gamma v_n \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

kde  $v_n = un_1 + vn_2$ . Vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$  jsou

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= v_n - a, & \mathbf{r}_1 &= (1, u - an_1, v - an_2, H - av_n)^T, \\ \lambda_2 &= v_n, & \mathbf{r}_2 &= (1, u, v, \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2)^T, \\ \lambda_3 &= v_n, & \mathbf{r}_3 &= (0, n_2, -n_1, n_2u - n_1v)^T, \\ \lambda_4 &= v_n + a, & \mathbf{r}_3 &= (1, u + an_1, v + an_2, H + av_n)^T. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vlastní vektory jsou lineárně nezávislé, takže matice  $\mathbf{P}$  je *diagonalizovatelná*. Platí

$$\mathbf{P} = \mathbf{TDT}^{-1}, \quad (3.13)$$

kde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} v_n - a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_n + a \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

je matice vlastních čísel,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u - an_1 & u & n_2 & u + an_1 \\ v - an_2 & v & -n_1 & v + an_2 \\ H - av_n & \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 & n_2u - n_1v & H + av_n \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

je matice vlastních vektorů a matice k ní inverzní

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2a^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma - 1)|\mathbf{v}|^2 + av_n & -an_1 - (\gamma - 1)u & -an_2 - (\gamma - 1)v & \gamma - 1 \\ 2a^2 - (\gamma - 1)|\mathbf{v}|^2 & 2(\gamma - 1)u & 2(\gamma - 1)v & -2(\gamma - 1) \\ 2a^2(vn_1 - un_2) & 2a^2n_2 & -2a^2n_1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)|\mathbf{v}|^2 - av_n & an_1 - (\gamma - 1)u & an_2 - (\gamma - 1)v & \gamma - 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

V dalším budeme potřebovat jeden nový pojem: řekneme, že funkce  $\mathbf{F}(\mathbf{w})$  je *homogenní řádu jedna*, jestliže  $\mathbf{F}(\alpha\mathbf{w}) = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{w})$ , kde  $\alpha$  je libovolné nenulové číslo. Platí

**Lemma 3.1.** (*o homogenní funkci řádu jedna*). Nechť  $\mathbf{F}$  je  $C^1$ –spojitá homogenní funkce řádu jedna. Pak

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \mathbf{A}(\mathbf{w})\mathbf{w}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{A}(\mathbf{w}) = \frac{D\mathbf{F}(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}.$$

*Důkaz* vychází z definice diferenciálu, podle níž

$$\mathbf{F}(\mathbf{w} + \alpha\mathbf{w}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \frac{D\mathbf{F}(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}\alpha\mathbf{w} + \boldsymbol{\eta}(\alpha\mathbf{w}), \quad \text{přičemž} \quad \frac{\boldsymbol{\eta}(\alpha\mathbf{w})}{\|\alpha\mathbf{w}\|} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{pro} \quad \|\alpha\mathbf{w}\| \rightarrow 0.$$

Odtud, a protože  $\mathbf{F}$  je homogenní řádu jedna, obdržíme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{w})\mathbf{w} &= \frac{D\mathbf{F}(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}\mathbf{w} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\mathbf{F}(\mathbf{w} + \alpha\mathbf{w}) - \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\alpha} - \frac{\boldsymbol{\eta}(\alpha\mathbf{w})}{\|\alpha\mathbf{w}\|}\|\mathbf{w}\| \right] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \alpha)\mathbf{F}(\mathbf{w}) - \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\alpha} = \mathbf{F}(\mathbf{w}). \end{aligned} \quad \square$$

Přímým výpočtem lze snadno ověřit, že toky  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  a  $\mathcal{P}$  jsou homogenní řádu jedna, takže

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{w})\mathbf{w}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_2(\mathbf{w})\mathbf{w}, \quad \mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})\mathbf{w}. \quad (3.17)$$

**Rotační invariance.** Jednou z významných vlastností Eulerových rovnic je jejich nezávislost na rotaci a translaci souřadného systému. Ukažme si to.

Nechť  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ , a

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Nový pravotočivý kartézský souřadný systém  $(P_0, \tilde{x}, \tilde{y})$  definujeme transformací

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_0(\mathbf{n})\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \quad (3.19)$$

kde  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})^T$  jsou nové souřadnice,  $\mathbf{x}_0$  jsou souřadnice nového počátku  $P_0$ , vektor  $\mathbf{n}$  určuje kladný směr osy  $\tilde{x}$ . Stavový vektor  $\tilde{\mathbf{w}}$  v novém souřadném systému dostaneme z původního vektoru  $\mathbf{w}$  transformací

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}, \quad (3.20)$$

kde

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Transformovaný vektor  $\tilde{\mathbf{w}}$  uvažujme jako funkci  $\tilde{x}, \tilde{y}$  a času  $t$ :

$$\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}(\mathbf{Q}_0^{-1}(\mathbf{n})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0), t). \quad (3.22)$$

Není těžké ověřit, že pro tok  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = n_1\mathbf{f}_1(\mathbf{w}) + n_2\mathbf{f}_2(\mathbf{w})$  ve směru  $\mathbf{n}$ , tedy v kladném směru osy  $\tilde{x}$ , platí

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{n})\mathbf{f}_1(\mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}). \quad (3.23)$$

Pro tok

$$\mathcal{Q}(\mathbf{w}, \mathbf{t}) = -n_2\mathbf{f}_1(\mathbf{w}) + n_1\mathbf{f}_2(\mathbf{w}) \quad (3.24)$$

ve směru  $\mathbf{t} = (-n_2, n_1)^T$ , tedy v kladném směru osy  $\tilde{y}$ , lze odvodit podobný vztah

$$\mathcal{Q}(\mathbf{w}, \mathbf{t}) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{n})\mathbf{f}_2(\mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}). \quad (3.25)$$

Toky  $\mathcal{P}$  a  $\mathcal{Q}$  vyhovují rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \mathcal{Q}(\mathbf{w}, \mathbf{n})}{\partial \tilde{y}} = \mathbf{o}. \quad (3.26)$$

Skutečně, vyjádříme-li derivace podle  $\tilde{x}$  a  $\tilde{y}$  pomocí derivací podle  $x$  a  $y$ , dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \mathcal{Q}(\mathbf{w}, \mathbf{n})}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{w})}{\partial y} = \mathbf{o}.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici maticí  $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ , užitím (3.20), (3.23) a (3.25) dostaneme Eulerovy rovnice

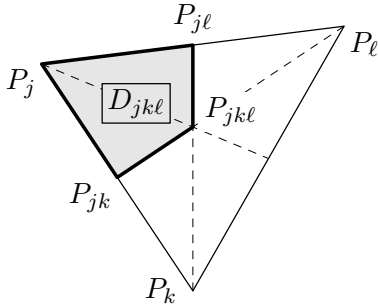
$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{w}})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\tilde{\mathbf{w}})}{\partial \tilde{y}} = \mathbf{o} \quad (3.27)$$

v nové souřadné soustavě, stejné jako rovnice (3.1) v původní souřadné soustavě.

### 3.2. Metoda konečných objemů

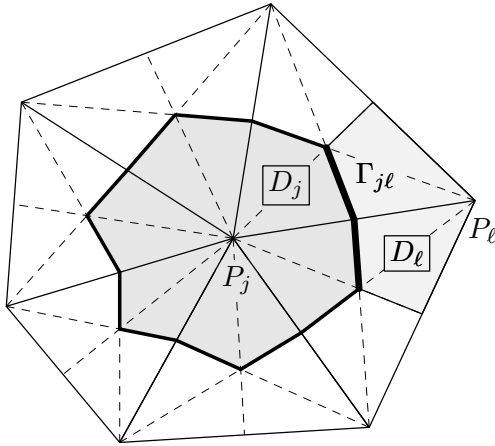
Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že výpočetní oblast  $\Omega$  je mnohoúhelník. Pokud by reálná oblast mnohoúhelníkem nebyla, lze ji mnohoúhelníkem dostatečně přesně aproximovat a  $\Omega$  necht' je takovou aproximací. Uzavřenou oblast  $\overline{\Omega}$  vyjádříme jako sjednocení konečného počtu uzavřených trojúhelníků, z nichž každé dva jsou buďto disjunktní nebo mají společný vrchol nebo stranu. Vrcholy trojúhelníků nazývejme uzly. Uzly ležící uvnitř  $\Omega$  se nazývají vnitřní a uzly ležící na hranici  $\partial\Omega$  se nazývají hraniční. Soubor všech trojúhelníků vytváří tzv. *triangulaci* oblasti  $\Omega$ , v metodě konečných objemů označovanou jako *primární síť*, viz Obr. 3.4. Ke každému uzlu  $P_j$  přiřadíme konečný objem  $D_j$ . Sestavíme ho z přilehlých částí  $D_{jkl}$  všech trojúhelníků s vrcholem  $P_j$ . Objasníme si to podrobněji.

Necht'  $T_{jkl}$  je trojúhelník s vrcholy  $P_j$ ,  $P_k$  a  $P_\ell$ . Označme  $P_{jk}$  střed strany  $\overline{P_jP_k}$ ,  $P_{j\ell}$  střed strany  $\overline{P_jP_\ell}$  a  $P_{jkl}$  těžiště trojúhelníka  $T_{jkl}$ . Pak do konečného objemu  $D_j$  zahrneme čtyřúhelník  $D_{jkl}$  s vrcholy  $P_j$ ,  $P_{jk}$ ,  $P_{jkl}$  a  $P_{j\ell}$ , viz Obr. 3.1. Tento postup opakujeme pro

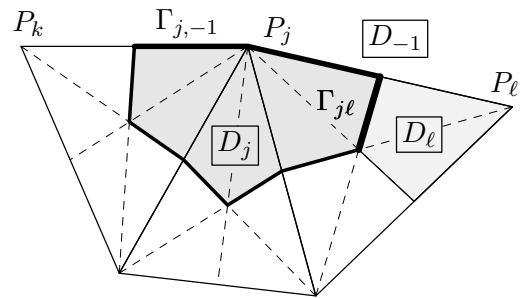


Obr. 3.1:  $D_{jkl} = D_j \cap T_{jkl}$

všechny trojúhelníky  $T_{jkl}$ , které obsahují uzel  $P_j$ , a sjednocením přilehlých částí  $D_{jkl}$  dostaneme konečný objem  $D_j$ . Konečný objem příslušný vnitřnímu uzlu nazveme vnitřní a konečný objem příslušný hraničnímu uzlu nazveme hraniční. Vnější část oblasti  $\Omega$  považujeme za konečný objem  $D_{-1}$ . Společnou hranici sousedních konečných objemů  $D_j$  a  $D_\ell$  označíme  $\Gamma_{j\ell}$ . Konečný objem  $D_j$  příslušný vnitřnímu uzlu je zakreslen na Obr. 3.2, hraniční konečný objem pak na Obr. 3.3.



Obr. 3.2: Vnitřní konečný objem



Obr. 3.3: Hraniční konečný objem

Množina všech konečných objemů se nazývá *duální síť*. Na Obr. 3.4. je zakreslena

tenkou čarou primární síť a silnou čarou síť duální.

Hranice  $\Gamma_{j\ell}$  je tvořena jednou nebo dvěma úsečkami, tj.

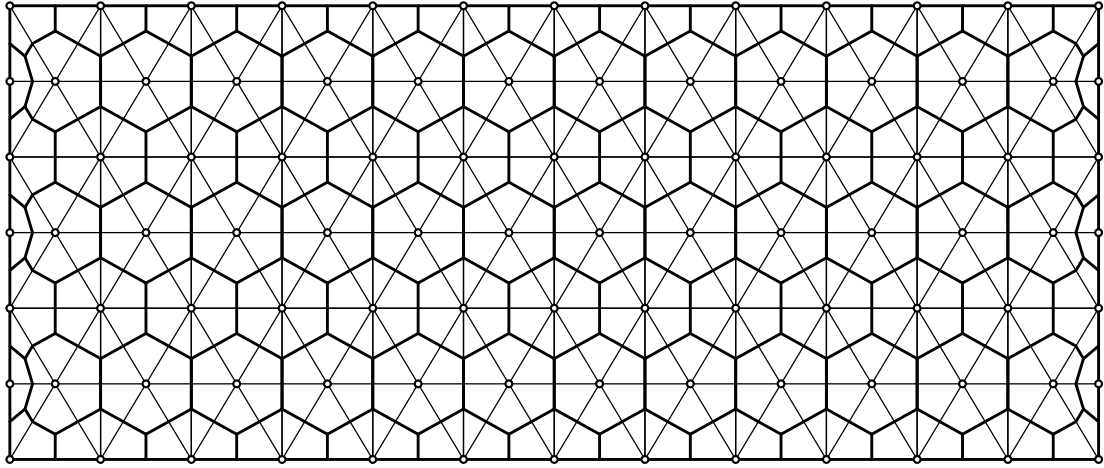
$$\Gamma_{j\ell} = \bigcup_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} \Gamma_{j\ell}^{\alpha}, \quad (3.28)$$

kde  $\beta_{j\ell} = 1$ , když oba uzly  $P_j$  i  $P_\ell$  jsou hraniční, v ostatních případech  $\beta_{j\ell} = 2$ , viz Obr. 3.2 a 3.3. Zřejmě  $\Gamma_{j\ell} = \Gamma_{\ell j}$ , úsečky  $\Gamma_{j\ell}^{\alpha}$  a  $\Gamma_{\ell j}^{\alpha}$  označme tak, že

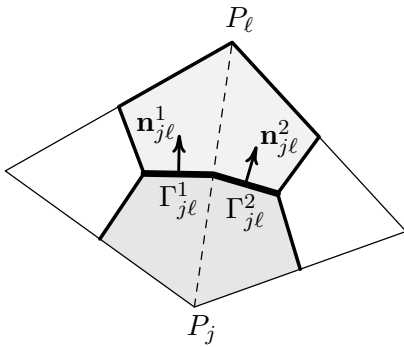
$$\Gamma_{j\ell}^{\alpha} = \Gamma_{\ell j}^{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, \beta_{j\ell}.$$

Vnější normálu konečného objemu  $D_j$  na úsečce  $\Gamma_{j\ell}^{\alpha}$  označíme  $\mathbf{n}_{j\ell}^{\alpha} = (n_1^{\alpha j\ell}, n_2^{\alpha j\ell})^T$ , viz Obr. 3.5 a 3.6. Zřejmě

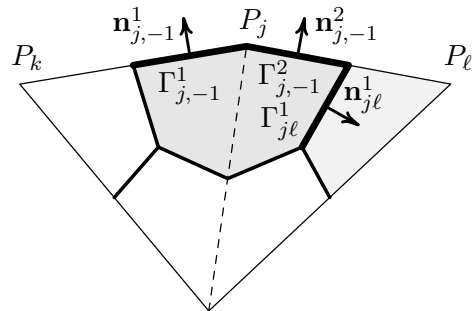
$$\mathbf{n}_{j\ell}^{\alpha} = -\mathbf{n}_{\ell j}^{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, \beta_{j\ell}.$$



Obr. 3.4: Primární a duální síť



Obr. 3.5: Vnitřní konečný objem



Obr. 3.6: Hraniční konečný objem

Nechť  $S(j)$  je množina indexů všech konečných objemů sousedících s konečným obje-  
mem  $D_j$ . Zdůrazněme, že v případě  $P_j \in \partial\Omega$  množina indexů  $S(j)$  obsahuje rovněž index

$-1$  příslušný vnějšímu konečnému objemu  $D_{-1}$ . Zřejmě

$$\partial D_j = \bigcup_{\ell \in S(j)} \Gamma_{j\ell} = \bigcup_{\ell \in S(j)} \bigcup_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} \Gamma_{j\ell}^\alpha.$$

### 3.2.1. Diskretizace.

Uvažujme Eulerovy rovnice ve 2D. Integrací rovnice (3.1) přes konečný objem  $D_j$  a užitím Greenovy věty obdržíme

$$\int_{D_j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \sum_{\ell \in S(j)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} \int_{\Gamma_{j\ell}^\alpha} \left\{ \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) n_1^{\alpha j\ell} + \mathbf{f}_2(\mathbf{w}) n_2^{\alpha j\ell} \right\} \, dS = \mathbf{o}. \quad (3.29)$$

Tok

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{jl}^\alpha) = \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) n_1^{\alpha j\ell} + \mathbf{f}_2(\mathbf{w}) n_2^{\alpha j\ell} \quad (3.30)$$

není na společné části  $\Gamma_{j\ell}^\alpha$  konečných objemů  $D_j$  a  $D_\ell$  definován v případě, že funkce  $\mathbf{w}$  je na  $\Gamma_{j\ell}^\alpha$  nespojitá. Jestliže  $\mathbf{w}_j := \mathbf{w}|_{D_j}$  je restrikce  $\mathbf{w}$  na  $D_j$ ,  $\mathbf{w}_\ell := \mathbf{w}|_{D_\ell}$  je restrikce  $\mathbf{w}$  na  $D_\ell$ , a jestliže  $\mathbf{w}_j|_{\Gamma_{j\ell}^\alpha} \neq \mathbf{w}_\ell|_{\Gamma_{j\ell}^\alpha}$ , tak kterou z funkcí  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_\ell$  máme do  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{jl}^\alpha)$  za  $\mathbf{w}$  dosadit? Správná aproximace musí vzít v úvahu jak  $\mathbf{w}_j$  tak  $\mathbf{w}_\ell$ . Tok  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{jl}^\alpha)$  proto aproximujeme tak zvaným numerickým tokem  $\mathbf{H}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{jl}^\alpha)$ . Volba numerického toku je klíčovým bodem celé diskretizace a v dalším textu navrhneme několik možností, jak lze numerický tok zvolit.

Předpokládejme, že vhodný numerický tok již máme k dispozici a pokračujeme v diskretizaci rovnice (3.29), v níž tok  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{jl}^\alpha)$  nahradíme numerickým tokem  $\mathbf{H}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{jl}^\alpha)$ , tj.

$$\int_{D_j} \frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \sum_{\ell \in S(j)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} \int_{\Gamma_{j\ell}^\alpha} \mathbf{H}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{jl}^\alpha) \, dS. \quad (3.31)$$

Integrál toku  $\mathbf{H}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{jl}^\alpha)$  po části hranice  $\Gamma_{j\ell}$  označíme jako

$$\mathbf{g}_{j\ell}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell) = \sum_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} \int_{\Gamma_{j\ell}^\alpha} \mathbf{H}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{jl}^\alpha) \, dS. \quad (3.32)$$

V dalším uvažujme nejjednodušší, po částech konstantní, aproximaci v prostorové proměnné  $\mathbf{x}$ : přibližné řešení  $\mathbf{w}$  je na každém konečném objemu v proměnné  $\mathbf{x}$  konstantní, tj.

$$\mathbf{w}_j(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{w}_j(t). \quad (3.33)$$

Pak

$$\mathbf{g}_{j\ell}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell) = \sum_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} \mathbf{H}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{jl}^\alpha) |\Gamma_{j\ell}^\alpha|, \quad (3.34)$$

kde  $|\Gamma_{j\ell}^\alpha|$  je délka úsečky  $\Gamma_{j\ell}^\alpha$ . Z rovnice(3.31) tak dospějeme k rovnici

$$|D_j| \frac{d\mathbf{w}_j}{dt} d\mathbf{x} = - \sum_{\ell \in S(j)} \mathbf{g}_{j\ell}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell),$$

kde  $|D_j|$  je plocha konečného objemu  $D_j$ . Odtud

$$\frac{d\mathbf{w}_j}{dt} = - \frac{1}{|D_j|} \sum_{\ell \in S(j)} \mathbf{g}_{j\ell}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell), \quad (3.35)$$

což je soustava obyčejných diferenciálních rovnic proměnných  $\mathbf{w}_j(t)$ . Časovou diskretizaci lze provést nejjednodušeji pomocí explicitní Eulerovy metody. Jestliže  $\tau$  je délka časového kroku,  $t_k = k\tau$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , je rovnoměrné dělení na časové ose a  $\mathbf{w}_j^k$  je přibližné řešení na konečném objemu  $D_j$  v čase  $t_k$ , pak

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{|D_j|} \sum_{\ell \in S(j)} \mathbf{g}_{j\ell}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_\ell^k). \quad (3.36)$$

**Poznámka 3.1.** (*o diskretizaci*).

1. Nechť  $h$  je nejdelší strana trojúhelníků triangulace. Aby přibližné řešení pro  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$  konvergovalo k řešení přesnému, je třeba vznést jisté požadavky jak na kvalitu triangulace, tak na vzájemnou souvislost parametrů diskretizace  $h$  a  $\tau$ . Budeme proto předpokládat, že jsou splněny následující *diskretizační předpoklady*:

- (a) Existuje konstanta  $c_1$  taková, že pro každý trojúhelník  $T_i$  triangulace platí

$$\frac{h^2}{|T_i|} \leq c_1, \quad \text{když } h \rightarrow 0, \quad (3.37)$$

kde  $|T_i|$  je plocha trojúhelníka  $T_i$ . Tento požadavek zabraňuje vzniku degenerovaných trojúhelníků.

- (b) Existují konstanty  $c_2, c_3$  takové, že

$$0 < c_2 \leq \frac{\tau}{h} \leq c_3, \quad \text{když } h, \tau \rightarrow 0, \quad (3.38)$$

tj. když  $h \rightarrow 0$ , pak také  $\tau \leq c_3 h \rightarrow 0$ , a když  $\tau \rightarrow 0$ , pak rovněž  $h \leq c_2^{-1} \tau \rightarrow 0$ .

Z diskretizačních předpokladů vyslovených pro primární síť lze odvodit analogické diskretizační předpoklady pro síť duální. Nechť tedy  $d = \max_j d_j$ , kde  $d_j$  je průměr konečného objemu  $D_j$ . Diskretizační podmínky pro duální síť pak jsou:

- (a) existuje konstanta  $c_1^*$  taková, že pro každý konečný objem  $D_j$  platí

$$\frac{d^2}{|D_j|} \leq c_1^*, \quad \text{když } d \rightarrow 0; \quad (3.39)$$



(b) existují konstanty  $c_2^*, c_3^*$  takové, že

$$0 < c_2^* \leq \frac{\tau}{d} \leq c_3^*, \quad \text{když } d, \tau \rightarrow 0. \quad (3.40)$$

2. Metoda konečných objemů na duálních sítích bývá v literatuře označována jako *vertex-based FVM*, stručně VB-FVM, neboť přibližné řešení na konečném objemu  $D_j$  je považováno za hodnotu ve vrcholu  $P_j$  primární sítě. Jinou často používanou metodou prostorové diskretizace je metoda označovaná jako *cell-centered FVM*, stručně CC-FVM. V tom případě se za konečný objem považuje prvek primární sítě a za přibližné řešení pak hodnota v jeho těžišti.

Za přednost VB-FVM lze považovat to, že hranice konečných objemů je tvořena více úsečkami a konečný objem tak obvykle lépe vystihuje optimální kruhový tvar odpovídající charakteru šíření vln, viz Obr. 3.4. Jistou nevýhodou VB-FVM je to, že vrchol  $P_j$  není těžištěm konečného objemu  $D_j$ .  $\square$

**Numerický tok.** Věnujme se nyní podrobněji numerickému toku. Budeme předpokládat, že numerický tok má následující vlastnosti:

- 1)  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  je definovaný a lipschitzovsky spojitý na  $D \times D \times S_1$ , kde  $D$  je definiční obor toků  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  a  $S_1$  je jednotková koule v  $\mathbb{R}^d = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{n}| = 1\}$ .
- 2)  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  je *konzistentní*, tj. platí

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{u})n_1 + \mathbf{f}_2(\mathbf{u})n_2 \equiv \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}). \quad (3.41)$$

- 3)  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  je *konzervativní*, tj. platí

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = -\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{n}). \quad (3.42)$$

K osvětlení konzervativnosti uveďme pár vět. Představme si, že numerický tok  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  vyjadřuje výtok látky  $\mathbf{w}$  z oblasti  $\Omega_1$ , v níž  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ , do oblasti  $\Omega_2$ , v níž  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ , a to ve směru vektoru  $\mathbf{n}$ . Pak  $\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{n})$  vyjadřuje výtok z oblasti  $\Omega_2$  do oblasti  $\Omega_1$  ve směru opačného vektoru  $-\mathbf{n}$  a tedy  $-\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{n})$  vyjadřuje vtok do oblasti  $\Omega_2$  z oblasti  $\Omega_1$ . Konzervativnost tedy znamená, že to, co vyteče z oblasti  $\Omega_1$  do oblasti  $\Omega_2$  ve směru  $\mathbf{n}$ , oblast  $\Omega_2$  kompletně přijme, žádná látka se neztratí.

### 3.2.2. Vlastnosti diskretizace.

Když navrhujeme nějakou výpočetní metodu, je třeba určit, zda dostatečně přesně řeší zvolený problém. Zkoumáme, zda metoda je stabilní, dostatečně přesná a zdali a jak rychle konverguje k přesnému řešení. Tyto pojmy v následujícím textu zavedeme a vysvětlíme. Abychom se vyhnuli komplikacím spojeným s okrajovými podmínkami, budeme v této části předpokládat, že  $\Omega = \mathbb{R}^d$ . Pro vyslovení některých teoretických výsledků je vhodné mít k dispozici diskretizaci hyperbolické úlohy v 1D, tj.

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}^0(x). \quad (3.43)$$

Předpokládejme, že úlohu (3.43) řešíme na celé číselné ose, tj.  $x \in \mathbb{R}$ , a pokud jde o čas, tak předpokládejme, že  $t \in [0, \infty)$ . Za primární síť zvolíme intervaly  $[x_j, x_{j+1}]$  stejné délky  $h$ . Duální síť konečných objemů je pak množina intervalů  $D_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ , kde  $x_{j\pm 1/2} = x_j \pm \frac{1}{2}h$ . Metoda konečných objemů v prostoru a explicitní Eulerova metoda v čase vede ve shodě s (3.36) na schéma

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{h} [\mathbf{g}_{j,j+1}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) + \mathbf{g}_{j,j-1}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j-1}^k)]. \quad (3.44)$$

V toku  $\mathbf{g}_{j,j+1}$  v bodě  $x_{j+1/2}$  je obsažen fiktivní jednotkový vektor vnější normály  $\mathbf{n}_{j,j+1} = 1$  a podobně je v toku  $\mathbf{g}_{j,j-1}$  v bodě  $x_{j-1/2}$  obsažen fiktivní jednotkový vektor vnější normály  $\mathbf{n}_{j,j-1} = -1$ . Budeme předpokládat, že numerický tok je konzervativní, tj. že

$$\mathbf{g}_{j,j-1}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j-1}^k) = -\mathbf{g}_{j-1,j}(\mathbf{w}_{j-1}^k, \mathbf{w}_j^k).$$

Z (3.44) tak dostaneme

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{h} [\mathbf{g}_{j,j+1}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) - \mathbf{g}_{j-1,j}(\mathbf{w}_{j-1}^k, \mathbf{w}_j^k)]. \quad (3.45)$$

Zápis (3.45) lze zjednodušit, když dolní indexy u  $\mathbf{g}$  vypustíme. Pak  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  je tok vektoru  $\mathbf{w}$  zleva doprava přes rozhraní, vlevo od něhož  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$  a vpravo  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ . Díky tomu můžeme (3.45) přepsat do výsledného tvaru

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{h} [\mathbf{g}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) - \mathbf{g}(\mathbf{w}_{j-1}^k, \mathbf{w}_j^k)]. \quad (3.46)$$

O funkci  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  budeme předpokládat, že je spojitá a konzistentní, tj. že  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ . Schema (3.46) s těmito vlastnostmi označíme jako *konzistentní schéma*.

V dalším se nám bude hodit obecný tvar výpočetního schématu ve tvaru

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{N}(\mathbf{w}_j^k, \{\mathbf{w}_\ell^k, \ell \in S(j)\}), \quad (3.47)$$

který zahrnuje jak 2D případ (3.36) tak 1D případ (3.44) pro  $S(j) = \{j-1, j+1\}$ .

**Stabilita.** Necht  $\mathbf{w}^k(x) = \mathbf{w}(x, t_k)$  je po částech konstantní funkce proměnné  $x$ , která na konečném objemu  $D_j$  nabývá hodnotu  $\mathbf{w}_j^k$ , tj.  $\mathbf{w}^k(x) = \mathbf{w}_j^k$  pro  $x_{j-1/2} \leq x < x_{j+1/2}$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Řekneme, že numerické schéma (3.47) je *stabilní*, jestliže

$$\|\mathbf{w}^{k+1}\| \leq \|\mathbf{w}^k\|, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.48)$$

Použijeme-li  $L^p$  normu, hovoříme o  $L^p$  stabilitě, nejčastěji se stabilita zkoumá v  $L^1$  normě,  $L^2$  normě a v  $L^\infty$  normě. Pojem stability lze přibližně vysvětlit takto. Jestliže hyperbolická rovnice neobsahuje žádný zdroj, pak množství  $\|\mathbf{w}\|$  „materiálu“  $\mathbf{w}$  se nezmění, takže ideálně bychom měli žádat  $\|\mathbf{w}^{k+1}\| = \|\mathbf{w}^k\|$ . To bychom ale chtěli příliš, spokojíme se tedy s podmínkou (3.48), která nám zaručuje, že množství materiálu alespoň neroste.

**Poznámka 3.2.** Podmínka stability bývá někdy formulována obecněji, třeba tak, že žádáme, aby

$$\|\mathbf{w}^k\| \leq c \|\mathbf{w}^0\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

kde  $c$  je konstanta. Definovat lze rovněž tak zvanou *slabou stabilitu*, což je podmínka

$$\|\mathbf{w}^k\| \leq c(1 + c^* \tau)^k \|\mathbf{w}^0\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

kde  $c$  a  $c^* \geq 0$  jsou konstanty. □

**Příklad 3.1.** Uvažujme skalární rovnici  $w_t + aw_x = 0$ . Jako numerický tok zvolme tak zvanou upwind aproximaci  $g(u, v) = a^+u + a^-v$ , kde  $a^+ = \max(a, 0)$ ,  $a^- = \min(a, 0)$ . Všimněte si, že tok  $g$  je spojitý a konzistentní. Podle (3.46) dostaneme schéma

$$w_j^{k+1} = w_j^k - \frac{\tau}{h} [a^+(w_j^k - w_{j-1}^k) + a^-(w_{j+1}^k - w_j^k)].$$

Předpokládejme, že platí tak zvaná *Courantova-Friedrichsova-Lewyova podmínka*, stručně CFL podmínka,

$$\frac{|a|\tau}{h} \leq 1. \quad (3.49)$$

Uvažme nejdříve případ  $a = a^+$ . Pak

$$w_j^{k+1} = w_j^k - \frac{a\tau}{h} (w_j^k - w_{j-1}^k).$$

Připomeňme, že  $w^k(x)$  je po částech konstantní funkce nabývající na konečném objemu  $D_j$  hodnotu  $w_j^k$ . Proto  $\|w^k\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |w^k(x)| dx = h \sum_j |w_j^k|$ , takže

$$\begin{aligned} \|w^{k+1}\|_1 &= h \sum_j |w_j^{k+1}| = h \sum_j \left| \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) w_j^k + \frac{a\tau}{h} w_{j-1}^k \right| \leq \\ &= h \left[ \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) \sum_j |w_j^k| + \frac{a\tau}{h} \sum_j |w_{j-1}^k| \right] = h \sum_j |w_j^k| = \|w^k\|_1. \end{aligned}$$

V případě  $a = a^-$  obdržíme schéma

$$w_j^{k+1} = w_j^k - \frac{a\tau}{h} (w_{j+1}^k - w_j^k) = w_j^k - \frac{|a|\tau}{h} (w_j^k - w_{j+1}^k)$$

a stejně jako v případě  $a = a^+$  dostaneme stabilitu v  $L^1$  normě.  $\square$

**Příklad 3.2.** Uvažujme hyperbolicou rovnici  $\mathbf{w}_t + \mathbf{A}\mathbf{w}_x = \mathbf{o}$ , kde  $\mathbf{w}$  je vektor délky  $s$  a  $\mathbf{A}$  je matice řádu  $s$ . Začneme tím, že rovnici zapíšeme v charakteristických proměnných. Nechť  $\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $\mathbf{T} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s)$ ,  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ , takže  $\mathbf{AT} = \mathbf{TD}$ . Vynásobíme-li rovnici zleva maticí  $\mathbf{T}^{-1}$ , obdržíme

$$(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w})_t + (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w})_x = \mathbf{o} \quad \text{nebo-li} \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{Du}_x = \mathbf{o},$$

kde  $\mathbf{u} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}$  jsou charakteristické proměnné. Soustavu je tak možné zapsat po složkách

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Na každou z rovnic aplikujeme upwind aproximaci a dostaneme

$$[u_i]_j^{k+1} = [u_i]_j^k - \frac{\tau}{h} [\lambda_i^+ ([u_i]_j^k - [u_i]_{j-1}^k) + \lambda_i^- ([u_i]_{j+1}^k - [u_i]_j^k)], \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

nebo-li

$$\mathbf{u}_j^{k+1} = \mathbf{u}_j^k - \frac{\tau}{h} [\mathbf{D}^+ (\mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_{j-1}^k) + \mathbf{D}^- (\mathbf{u}_{j+1}^k - \mathbf{u}_j^k)],$$

kde  $\mathbf{D}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_s^+)$ ,  $\mathbf{D}^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_s^-)$ . Jestliže bude splněna CFL podmínka

$$\frac{|\lambda_i|\tau}{h} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.50)$$

pak výpočet bude stabilní (pro  $\|\mathbf{u}\| := \max_{1 \leq i \leq s} \|u_i\|_1$ ) podle příkladu 1. Zpětným přechodem ke konzervativním proměnným  $\mathbf{w}$  odtud dostaneme

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{h} [\mathbf{T}\mathbf{D}^+\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w}_j^k - \mathbf{w}_{j-1}^k) + \mathbf{T}\mathbf{D}^-\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w}_{j+1}^k - \mathbf{w}_j^k)].$$

Označíme-li  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{T}\mathbf{D}^+\mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{A}^- = \mathbf{T}\mathbf{D}^-\mathbf{T}^{-1}$ , pak výsledné schéma je tvaru

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{h} [\mathbf{A}^+(\mathbf{w}_j^k - \mathbf{w}_{j-1}^k) + \mathbf{A}^-(\mathbf{w}_{j+1}^k - \mathbf{w}_j^k)].$$

Příslušný upwind tok

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}^+\mathbf{u} + \mathbf{A}^-\mathbf{v}. \quad (3.51)$$

Schéma je stabilní v normě  $\|\mathbf{w}\| := \max_{1 \leq i \leq s} \|[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}]_i\|_1$ .  $\square$

**Přesnost** se měří pomocí *lokální diskretizační chyby*. Až na znaménko jde o chybu, která vznikne tím, že do numerického schématu dosadíme přesné řešení. Dosadíme-li do (3.47) klasické řešení  $\mathbf{w}(x, t)$ , dostaneme

$$\mathbf{w}(x_j, t_{k+1}) = \mathbf{N}(\mathbf{w}(x_j, t_k); \{\mathbf{w}(x_\ell, t_k), \ell \in S(j)\}) + \tau \boldsymbol{\varepsilon}_j^k$$

Člen  $\boldsymbol{\varepsilon}_j^k$  se nazývá *lokální diskretizační chyba*. Řekneme, že schéma je řádu  $p$  v čase a řádu  $q$  v prostoru, jestliže pro dostatečně hladké řešení

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_j^k| \leq C(\tau^p + h^q).$$

Říkáme také, že schéma je konzistentní řádu  $(p, q)$  (s diferenciální rovnicí). Je-li  $p = q$ , říkáme stručně, že schéma je řádu  $p$  resp. konzistentní řádu  $p$ . Jestliže jen  $|\boldsymbol{\varepsilon}_j^k| \rightarrow 0$  pro  $h, \tau \rightarrow 0$ , říkáme, že schéma je konzistentní.

**Příklad 3.3.** Uvažujme upwind aproximaci rovnice  $w_t + aw_x = 0$ ,  $a > 0$ . Podle příkladu 1 máme schéma

$$w_j^{k+1} = w_j^k - \frac{a\tau}{h}(w_j^k - w_{j-1}^k),$$

takže lokální diskretizační chyba je definována rovnicí

$$w(x_j, t_{k+1}) = w(x_j, t_k) - \frac{a\tau}{h}[w(x_j, t_k) - w(x_{j-1}, t_k)] + \tau \varepsilon_j^k.$$

Pomocí Taylorova rozvoje okolo bodu  $(x_j, t_k)$  dostaneme

$$\hat{w} + \tau \hat{w}_t + \frac{1}{2}\tau^2 \bar{w}_{tt} = \hat{w} - \frac{a\tau}{h}[\hat{w} - (\hat{w} - h\hat{w}_x + \frac{1}{2}h^2 \bar{w}_{xx})] + \tau \varepsilon_j^k,$$

kde  $\hat{w} = w(x_j, t_k)$ ,  $\bar{w}_{tt} = w_{tt}(x_j, \bar{t})$ ,  $\bar{w}_{xx} = w_{xx}(\bar{x}, t_k)$ . Protože  $\hat{w}_t + a\hat{w}_x = 0$ , dostaneme  $\varepsilon_j^k = \frac{1}{2}(\bar{w}_{tt}\tau - a\bar{w}_{xx}h)$ , tj. schéma je řádu jedna v obou proměnných.  $\square$

**Monotónnost** numerického schématu je významná vlastnost, která zaručuje fyzikálně realistické chování numerického řešení. Při definici monotónnosti se omezíme na skalární úlohu

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \quad w(x, 0) = w^0(x), \quad (3.52)$$

pro kterou je numerické schéma tvaru

$$w_j^{k+1} = w_j^k - \frac{\tau}{h} [g(w_j^k, w_{j+1}^k) - g(w_{j-1}^k, w_j^k)] \equiv \Phi(w_{j-1}^k, w_j^k, w_{j+1}^k). \quad (3.53)$$

Řekneme, že schéma (3.53) je *monotónní*, jestliže funkce  $\Phi$  je neklesající funkcí všech svých proměnných, tj.

$$u_j \leq v_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad \implies \quad \Phi(u_1, u_2, u_3) \leq \Phi(v_1, v_2, v_3).$$

Pro pochopení smyslu monotónnosti uveďme následující objasnění. Předpokládejme, že máme dvě přibližná řešení  $u^k(x)$  a  $v^k(x)$  v čase  $t_k$  s vlastností  $u^k(x) \leq v^k(x)$ . Když z nich pomocí monotónního schématu spočteme přibližná řešení  $u^{k+1}(x)$  a  $v^{k+1}(x)$  v čase  $t_{k+1}$ , tak  $u^{k+1}(x) \leq v^{k+1}(x)$ . Stručně:

$$u^k \leq v^k \implies u^{k+1} \leq v^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

**Příklad 3.4.** Uvažujme upwind aproximaci rovnice  $w_t + aw_x = 0$ ,

$$w_j^{k+1} = w_j^k - \frac{\tau}{h} [a^+(w_j^k - w_{j-1}^k) + a^-(w_{j+1}^k - w_j^k)].$$

Podmínku monotónnosti

$$u_j - \frac{\tau}{h} [a^+(u_j - u_{j-1}) + a^-(u_{j+1} - u_j)] \leq v_j - \frac{\tau}{h} [a^+(v_j - v_{j-1}) + a^-(v_{j+1} - v_j)]$$

přepíšeme do tvaru

$$\left(1 - \frac{|a|\tau}{h}\right) u_j + \frac{a^+\tau}{h} u_{j-1} - \frac{a^-\tau}{h} u_{j+1} \leq \left(1 - \frac{|a|\tau}{h}\right) v_j + \frac{a^+\tau}{h} v_{j-1} - \frac{a^-\tau}{h} v_{j+1}.$$

Je-li  $u_j \leq v_j$ ,  $u_{j-1} \leq v_{j-1}$ ,  $u_{j+1} \leq v_{j+1}$  a je-li splněna CFL podmínka (3.49), pak je poslední nerovnost splněna a upwind schéma je tedy monotónní.  $\square$

**Konvergence.** Omezíme se na jednodimenzionální úlohu (3.43). Uvažujme rovnoměrné dělení s krokem  $h$  na ose  $x$  a s časovým krokem  $\tau$ . Necht'  $\mathbf{w}_j^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{w}^0(x) dx$  a  $\mathbf{w}_j^k$  je numerické řešení získané metodou (3.46) na konečném objemu  $D_j$  v čase  $t_k$ ,  $k \geq 1$ . Definujme funkci  $\mathbf{w}_{h\tau}(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ , předpisem

$$\mathbf{w}_{h\tau}(x, t) = \mathbf{w}_j^k \quad \text{pro} \quad x_{j-1/2} \leq x < x_{j+1/2}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (3.54)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots,$$

Uvažujme posloupnosti dělení  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ , pro které  $h_n \rightarrow 0$ ,  $\tau_n \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ , a pro  $\tau_n/h_n$  platí (3.38). Naším cílem je zkoumat, za jakých okolností  $\mathbf{w}_{h_n, \tau_n}$  konverguje k řešení  $\mathbf{w}$  úlohy (3.43).

**Věta 3.1.** (*Lax, Wendroff*). Nechť tok  $\mathbf{g}$  je spojitý a konzistentní a necht'  $\mathbf{w}^0 \in L^\infty(\mathbb{R})^s$ . Předpokládejme, že pro numerická řešení  $\mathbf{w}_{h_n, \tau_n}$  platí

$$\|\mathbf{w}_{h_n, \tau_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))^s} \leq c, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{w}_{h_n, \tau_n} \longrightarrow \mathbf{w} \quad \text{skoro všude v } \mathbb{R} \times (0, \infty) \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Pak  $\mathbf{w}$  je slabé řešení úlohy (3.43). □

Řekneme, že numerické schéma je konvergentní řádu  $(p, q)$ , jestliže

$$\|\mathbf{w}_{h_n, \tau_n} - \mathbf{w}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))^s} \leq c(\tau^q + h^p).$$

V následující větě 3.2 budeme uvažovat lineární problém

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}^0(\mathbf{x}), \quad (3.55)$$

a lineární numerické schéma (3.46). Lineárností numerického schématu přitom máme na mysli to, že numerický tok  $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  je lineární funkcí jak v proměnné  $\mathbf{u}$  tak v proměnné  $\mathbf{v}$ .

**Věta 3.2.** (*Laxova věta o ekvivalenci*). Uvažujme lineární hyperbolický problém (3.55). Lineární numerické schéma (3.46) řádu  $(p, q)$  je konvergentní řádu  $(p, q)$ , právě když je stabilní. □

Laxova věta o ekvivalenci platí pro podstatně širší okruh lineárních evolučních problémů. Větu lze například aplikovat na linearizované Eulerovy rovnice popisující šíření akustických vln.

Postačující podmínky konvergence nelineární hyperbolické úlohy uvedeme jen pro skalární jednodimenzionální úlohu (3.52) a odpovídající numerické schéma (3.53). Připomeňme si, že schéma (3.53) je  $L^\infty$ -stabilní, jestliže

$$\|w^{k+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|w^k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \text{neboli} \quad \sup_j |w_j^{k+1}| \leq \sup_j |w_j^k|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

a že totální variací  $TV(w^k)$  funkce  $w^k$  je výraz

$$TV(w^k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |w_{j+1}^k - w_j^k|, \quad (3.56)$$

jak plyne z definice (2.62). Řekneme, že schéma (3.53) je *TVD* (*total variation diminishing*), jestliže

$$TV(w^{k+1}) \leq TV(w^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.57)$$

**Věta 3.3.** (*o konvergenzi*). Předpokládejme, že

$$(1) \quad w^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}), \quad TV(w^0) < \infty, \quad w_j^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w^0(x) \, dx, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

(2) numerický tok  $g(u, v)$  je lipschitzovsky spojitý a konzistentní,

(3) schéma (3.53) je  $L^\infty$ -stabilní a je TVD.

Pak existuje posloupnost  $w_{h_n\tau_n}$  přibližných řešení a funkce  $w$  taková, že pro  $h_n \rightarrow 0$ ,  $\tau_n \rightarrow 0$ ,  $w_{h_n\tau_n} \rightarrow w$  skoro všude v  $\mathbb{R}$  a  $w$  je slabé řešení úlohy (3.52).

Jestliže místo podmínky (3) předpokládáme, že

(3') schéma (3.53) je monotónní,

pak  $w$  je Kružkovovo slabé entropické řešení (viz věta 2.3) úlohy (3.52).  $\square$

Je známo, že monotónní schéma je řádu nejvýše jedna. Dílčí teoretické výsledky a zejména praktické zkušenosti však potvrzují, že lze konstruovat schémata vyšších řádů, která jsou  $L^\infty$ -stabilní a TVD (pomocí technik známých jako *rekonstrukce* a *limitování*, viz kapitola 3.2.5), a která umožňují najít realistická řešení úloh proudění.

### 3.2.3. Godunovova metoda.

Uvažujme jednodimenzionální úlohu (3.43) a numerické schéma (3.46). Otázka zní: jak zvolit numerické toky  $\mathbf{g}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$  a  $\mathbf{g}(\mathbf{w}_{j-1}^k, \mathbf{w}_j^k)$ ? Ukažme si, jak na to šel Godunov. Omezíme se na tok  $\mathbf{g}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ , v případě toku  $\mathbf{g}(\mathbf{w}_{j-1}^k, \mathbf{w}_j^k)$  se postupuje podobně. Připomeňme, že tok  $\mathbf{g}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$  představuje tok vektoru  $\mathbf{w}$  zleva doprava přes rozhraní v bodě  $x_{j+1/2}$ , vlevo od kterého  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_j^k$  a vpravo  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{j+1}^k$ . Představme si na chvíli, že  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_j^k$  platí pro všechna  $x < x_{j+1/2}$  a  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{j+1}^k$  pro všechna  $x > x_{j+1/2}$ . Pak je přirozené definovat přibližné řešení v bodu  $x_{j+1/2}$  pomocí řešení  $\tilde{\mathbf{w}}_R(x/t; \mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$  Riemannova problému

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_j^k & \text{pro } x < 0, \\ \mathbf{w}_{j+1}^k & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

v bodu  $x/t = 0$ . Godunovův numerický tok tak je

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{w}}_R(0; \mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)).$$

Po dosazení do (3.46) tak dostaneme Godunovovu metodu

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{h} [\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{w}}_R(0; \mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{w}}_R(0; \mathbf{w}_{j-1}^k, \mathbf{w}_j^k))]. \quad (3.58)$$

Obecně je *Godunovův numerický tok* definován předpisem

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{w}}(0; \mathbf{u}, \mathbf{v})), \quad (3.59)$$

kde  $\tilde{\mathbf{w}}(x/t; \mathbf{u}, \mathbf{v})$  je řešení Riemannova problému

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u} & \text{pro } x < 0, \\ \mathbf{v} & \text{pro } x > 0. \end{cases} \quad (3.60)$$

**Příklad 3.5.** Určíme Godunovův numerický tok pro hyperbolickou rovnici  $\mathbf{w}_t + \mathbf{A}\mathbf{w}_x = \mathbf{o}$ , viz příklad 3.2. Ze vzorce (2.65) pro řešení lineárního Riemannova problému dostaneme

$$\tilde{\mathbf{w}}(0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\lambda_i > 0} \alpha_i \mathbf{r}_i + \sum_{\lambda_i < 0} \beta_i \mathbf{r}_i, \quad (3.61)$$

a odtud

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{w}}(0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\lambda_i > 0} \mathbf{r}_i \lambda_i \alpha_i + \sum_{\lambda_i < 0} \mathbf{r}_i \lambda_i \beta_i = \mathbf{A}^+ \mathbf{u} + \mathbf{A}^- \mathbf{v}. \quad \square$$

**Cvičení 3.1.** Ukažte, že pro lineární hyperbolickou rovnici  $\mathbf{w}_t + \mathbf{A}\mathbf{w}_x = \mathbf{o}$  lze Godunovův numerický tok zapsat ekvivalentně v jednom z následujících tvarů:

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}^+ \mathbf{u} + \mathbf{A}^- \mathbf{v}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i \gamma_i \mathbf{r}_i = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}^-(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (3.63)$$

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \gamma_i \mathbf{r}_i = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{A}^+(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (3.64)$$

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \sum_{i=1}^s |\lambda_i| \gamma_i \mathbf{r}_i \right] = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v}) - |\mathbf{A}|(\mathbf{v} - \mathbf{u})]. \quad (3.65)$$

Využijte cvičení 2.3 a to, že:  $\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w}$ ,  $\gamma_i$  jsou složky vektoru  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ ,  $\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^-$ ,  $|\lambda_i| = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$ ,  $|\mathbf{A}| = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-$ .

**Příklad 3.6.** Uvažujme Riemannův problém pro Burgersovu úlohu

$$w_t + \left(\frac{1}{2}w^2\right)_x = 0, \quad w(x, 0) = \begin{cases} u & \text{pro } x < 0, \\ v & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Pak Godunovův tok

$$f_G(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & \text{pro } (u > v \text{ a } u + v > 0) \text{ nebo } (u \leq v \text{ a } u \geq 0), \\ \frac{1}{2}v^2 & \text{pro } (u > v \text{ a } u + v < 0) \text{ nebo } (u \leq v \text{ a } v < 0), \\ 0 & \text{pro } u < 0 \leq v. \end{cases}$$

Jde o přímý důsledek příkladu 2.10, kde stačí zvolit  $w_L = u$ ,  $w_R = v$  a  $x/t = 0$ .  $\square$

Řešení Riemannova problému (3.60) obecně nemusí být snadné. Proto se místo Godunovova toku  $\mathbf{f}_G$  často používá nějaká jeho aproximace  $\mathbf{f}_R$ , označovaná jako *Riemannův numerický tok*. Věnujme se tedy možnému výběru Riemannova toku a to pro jednoduchost ve skalárním případě. Uvažujme tedy úlohu

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0, \quad w(x, 0) = \begin{cases} u & \text{pro } x < 0, \\ v & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$



Jestliže  $a(w) = f'(w)$  nemění znaménko, pak metodou charakteristik dostaneme

$$\tilde{w}_R(0; u, v) = \begin{cases} u & \text{pro } a(w) > 0, \\ v & \text{pro } a(w) < 0, \end{cases} \quad \text{a} \quad f_R(u, v) = \begin{cases} f(u) & \text{pro } a(w) > 0, \\ f(v) & \text{pro } a(w) < 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Tento výsledek rozšíříme na případ, kdy znaménko  $a(w)$  není pořád stejné. Funkci  $f(w)$  rozložíme tak, že

$$f(w) = f^+(w) + f^-(w), \quad \text{přičemž } (f^+)'(w) \geq 0, (f^-)'(w) \leq 0,$$

a definujeme

$$f_R(u, v) = f^+(u) + f^-(v). \quad (3.67)$$

Jestliže  $a(w) = f'(w)$  nemění znaménko, dostaneme dříve odvozený tok (3.66): pro  $a(w) > 0$ , volíme  $f^+ = f$ ,  $f^- = 0$ , a pro  $a(w) < 0$  volíme  $f^+ = 0$ ,  $f^- = f$ .

V obecném případě

$$f^+(w) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^w a^+(q) dq, \quad f^-(w) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^w a^-(q) dq,$$

kde  $f'(q) = a(q) = a^+(q) + a^-(q)$ ,  $a^+(q) = \max(a(q), 0)$ ,  $a^-(q) = \min(a(q), 0)$ .

Vzorec (3.67) lze zapsat ve tvaru známém jako *Engquistův-Osherův numerický tok*

$$f_{EO}(u, v) = \frac{1}{2} \left( f(u) + f(v) - \int_u^v |a(w)| dw \right). \quad (3.68)$$

Skutečně, protože  $|a(w)| = a^+(w) - a^-(w) = (f^+)'(w) - (f^-)'(w)$ , dostaneme

$$f_{EO}(u, v) = \frac{1}{2} \left\{ f^+(u) + f^-(u) + f^+(v) + f^-(v) - [f^+(v) - f^+(u) - (f^-(v) - f^-(u))] \right\} = f^+(u) + f^-(v).$$

Formální zobecnění Engquistova-Osheroва toku (3.68) z jedné do více dimenzí navrhne ve tvaru

$$\mathbf{H}_{EO}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \int_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} |\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})| d\mathbf{w} \right), \quad (3.69)$$

kde  $\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = D\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})/D\mathbf{w}$  je Jacobiho matice toku  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ . Člen  $\int_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} |\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})| d\mathbf{w}$  ve vzorci (3.69) berme prozatím jen formálně, jeho konkrétní význam upřesníme později.

Nechť  $\{\lambda_i(\mathbf{w}, \mathbf{n})\}_{i=1}^s$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ ,

$$\mathbf{D}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_s^+), \quad \mathbf{D}^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_s^-),$$

kde  $\lambda_i^+ = \max(\lambda_i, 0)$ ,  $\lambda_i^- = \min(\lambda_i, 0)$ , a dále

$$|\mathbf{D}| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_s|),$$

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{T}\mathbf{D}^+\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{P}^- = \mathbf{T}\mathbf{D}^-\mathbf{T}^{-1}, \quad |\mathbf{P}| = \mathbf{T}|\mathbf{D}|\mathbf{T}^{-1}.$$

Protože  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^-$ ,  $|\mathbf{D}| = \mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-$ , máme

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^+ + \mathbf{P}^-, \quad |\mathbf{P}| = \mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^-.$$

Nyní už můžeme přikročit k vyhodnocení vzorce (3.69) pro vektorový Engquistův-Osherův numerický tok. K tomu účelu se nám budou hodit dvě následující aproximace:

(a) formálním použitím obdélníkové formule dostaneme

$$\int_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} |\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})| d\mathbf{w} \approx \left| \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \right| (\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (3.70)$$

(b) jestliže  $\mathcal{P}$  je homogenní řádu 1, viz (3.17), obdržíme

$$\frac{1}{2} (\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n})) \approx \mathcal{P} \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) = \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}. \quad (3.71)$$

Dosazením (3.70) a (3.71) do vzorce (3.69) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{EO}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) &\approx \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} - \left| \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \right| \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{2} = \\ &\quad \mathbf{P}^+ \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} + \mathbf{P}^- \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} - \\ &\quad \left[ \mathbf{P}^+ \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{2} - \mathbf{P}^- \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{2} \right] = \\ &\quad \mathbf{P}^+ \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \mathbf{u} + \mathbf{P}^- \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Dostali jsem tak *Vijayasundaramův* numerický tok

$$\mathbf{H}_V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathbf{P}^+ \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \mathbf{u} + \mathbf{P}^- \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \mathbf{v}. \quad (3.72)$$

Vijayasundaramovo schéma lze považovat za *částečné upwind schéma*: o aproximaci toku  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})\mathbf{w}$  na rozhraní oddělujícím stavy  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  rozhodují znaménka vlastních čísel  $\lambda_i(\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{n})$  ve zprůměrovaném stavu  $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ .

Vyjdeme-li z analogie Riemannova toku (3.67) a předpokládáme homogenitu  $\mathcal{P}$ , dostaneme

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) := \mathcal{P}^+(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mathcal{P}^-(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \approx \mathbf{P}^+(\mathbf{u}, \mathbf{n})\mathbf{u} + \mathbf{P}^-(\mathbf{v}, \mathbf{n})\mathbf{v}.$$

Takto definovaný numerický tok

$$\mathbf{H}_{SW}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathbf{P}^+(\mathbf{u}, \mathbf{n})\mathbf{u} + \mathbf{P}^-(\mathbf{v}, \mathbf{n})\mathbf{v} \quad (3.73)$$

se nazývá *Stegerův-Warmingův* numerický tok. Stegerovo-Warmingovo schéma lze považovat za *úplné upwind schéma*: o aproximaci toku  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})\mathbf{w}$  na rozhraní mezi stavy  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  rozhodují znaménka vlastních čísel  $\lambda_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  a  $\lambda_i(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  stavů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ . Plné upwind schéma vnáší do výpočtu tak zvanou *numerickou difuzi*, která prudké změny přesného řešení zhlazuje a rozmazává.

Jestliže ve vzorci pro Engquistův-Osherův tok (3.69) užijeme jen aproximaci (3.70), dostaneme *Van Leerův* numerický tok

$$\mathbf{H}_{VL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \left| \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}, \mathbf{n} \right) \right| (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \right). \quad (3.74)$$

Poznamenejme, že v literatuře se Van Leerův tok standardně uvádí v jiné formě, viz [52], [28], [53], zde uvedený tvar Van Leerova toku lze najít třeba v [17], [18], [54].

Metoda konečných objemů (3.36) založená na použití Vijayasundaramova, Stegerova-Warmingova a Van Leerova toku patří do skupiny metod označovaných jako *metody rozkladu toku*, anglicky *flux vector splittings methods*, stručně FVS metody.

**Roeova metoda.** Jeden z nejpobulárnějších numerických toků sestrojil Roe. Nejdříve vysvětlíme základní myšlenku Roeova přístupu a pak ji aplikujeme na Eulerovy rovnice.

Uvažujme Riemannovu úlohu (2.63)–(2.64), tj.

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}, & x < 0, \\ \mathbf{v}, & x > 0, \end{cases} \quad (3.75)$$

kde  $\mathbf{A}(\mathbf{w}) = D\mathbf{f}(\mathbf{w})/D\mathbf{w}$  je Jacobiho matice toku  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  jsou konstantní počáteční stavy. Roe aproximoval nelineární Riemannovu úlohu (3.75) lineární úlohou

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}, & x < 0, \\ \mathbf{v}, & x > 0. \end{cases} \quad (3.76)$$

Požadoval přitom, aby *Roeova matice*  $\hat{\mathbf{A}} \equiv \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  měla následující tři vlastnosti:

Vlastnost (A): *Hyperboličnost* linearizované rovnice, tj. žádáme, aby matice  $\hat{\mathbf{A}}$  měla reálná vlastní čísla  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_s$  a úplný systém lineárně nezávislých vlastních vektorů  $\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \dots, \hat{\mathbf{r}}_s$ , přičemž  $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{r}}_i = \hat{\lambda}_i\hat{\mathbf{r}}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Jestliže  $\hat{\mathbf{T}} = (\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \dots, \hat{\mathbf{r}}_s)$ ,  $\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_s)$ , pak  $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}$ , nebo-li

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{T}}^{-1}. \quad (3.77)$$

Vlastnost (B): *Konzistence* přibližné Jacobiho matice  $\hat{\mathbf{A}}$  s přesnou Jacobiho maticí  $\mathbf{A}$ , tj.

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}). \quad (3.78)$$

Vlastnost (C): *Konzervativnost* toku  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{w}) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}$  na nespojitostech, tj.

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{u}). \quad (3.79)$$

Tato podmínka vychází z Rankine-Hugoniotovy podmínky pro toky  $\mathbf{f}$  a  $\hat{\mathbf{f}}$ :  
 $\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}) = s(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v} - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{u}.$

Předpokládejme, že matici  $\hat{\mathbf{A}}$  už máme k dispozici. Pak řešení linearizované úlohy (3.76) lze podle (2.69) vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{u} + \sum_{\hat{\lambda}_i < x/t} \hat{\gamma}_i \hat{\mathbf{r}}_i,$$

kde  $\hat{\gamma}_i$  je  $i$ -tá složka vektoru  $\hat{\gamma} = \hat{\mathbf{T}}^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ . Odpovídající Godunovův tok pak je

$$\hat{\mathbf{f}}_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \sum_{\hat{\lambda}_i < 0} \hat{\gamma}_i \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{r}}_i = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{A}}^-(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (3.80)$$

kde  $\hat{\mathbf{A}}^- = \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{D}}^-\hat{\mathbf{T}}^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}^- = \text{diag}(\hat{\lambda}_1^-, \hat{\lambda}_2^-, \dots, \hat{\lambda}_s^-)$ . Roeův tok dostaneme modifikací Godunova toku  $\hat{\mathbf{f}}_G$  tak, že tok  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) := \hat{\mathbf{A}}\mathbf{u}$  nahradíme tokem  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ . Tak dostaneme

$$\mathbf{f}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \sum_{\hat{\lambda}_i < 0} \hat{\gamma}_i \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \hat{\mathbf{A}}^-(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (3.81)$$

Pomocí (3.79) obdržíme ekvivalentní vyjádření Roeova toku ve tvaru

$$\mathbf{f}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \sum_{\hat{\lambda}_i > 0} \hat{\gamma}_i \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{v} - \mathbf{u}). \quad (3.82)$$

$$\mathbf{f}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \sum_{i=1}^s \hat{\gamma}_i |\hat{\lambda}_i| \hat{\mathbf{r}}_i \right] = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v}) - |\hat{\mathbf{A}}|(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \right]. \quad (3.83)$$

Formálním zobecněním Roeova toku (3.83) dostaneme

$$\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) - |\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})|(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \right]. \quad (3.84)$$

Všimněte si, že Roeův tok (3.84) lze získat také z Engquistova-Osherova toku (3.69) tak, že v něm nahradíme Jacobiho matici  $\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$  linearizovanou maticí  $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ . Pro Eulerovy rovnice Roe našel matici  $\hat{\mathbf{P}}$  (s vlastnostmi (A)–(C)) pro  $\mathbf{P}, \mathcal{P}, \hat{\mathbf{P}}$  místo  $\mathbf{A}, \mathbf{f}, \hat{\mathbf{A}}$  ve tvaru

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathbf{P}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}), \quad \text{kde } \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.85)$$

je vhodně zvolený vektor závislý na  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Pro větší srozumitelnost zapíšeme  $\hat{\mathbf{w}}$  jako funkci vektorů  $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R$  místo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , tj.  $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ . Jestliže

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_L &= (\varrho_L, \varrho_L u_L, \varrho_L v_L, E_L)^T, \quad \mathbf{w}_R = (\varrho_R, \varrho_R u_R, \varrho_R v_R, E_R)^T, \\ \text{pak} \quad \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) &= (\hat{\varrho}, \hat{\varrho} \hat{u}, \hat{\varrho} \hat{v}, \hat{E})^T, \end{aligned} \quad (3.86)$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\varrho} &= \left[ \frac{1}{2} (\sqrt{\varrho_L} + \sqrt{\varrho_R}) \right]^2, \\ \hat{u} &= \frac{\sqrt{\varrho_L} u_L + \sqrt{\varrho_R} u_R}{\sqrt{\varrho_L} + \sqrt{\varrho_R}}, \\ \hat{v} &= \frac{\sqrt{\varrho_L} v_L + \sqrt{\varrho_R} v_R}{\sqrt{\varrho_L} + \sqrt{\varrho_R}}, \\ \hat{E} &= \frac{1}{\gamma} \hat{\varrho} \hat{H} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \hat{\varrho} (\hat{u}^2 + \hat{v}^2), \quad \text{přičemž } \hat{H} = \frac{\sqrt{\varrho_L} H_L + \sqrt{\varrho_R} H_R}{\sqrt{\varrho_L} + \sqrt{\varrho_R}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

a  $H_L, H_R$  počítáme podle (3.8), tj.

$$H_L = \frac{\gamma E_L}{\varrho_L} - \frac{1}{2} (u_L^2 + v_L^2), \quad H_R = \frac{\gamma E_R}{\varrho_R} - \frac{1}{2} (u_R^2 + v_R^2). \quad (3.88)$$

Připomeňme, že podle (3.13)

$$|\mathbf{P}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})| = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})|\mathbf{D}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})|\mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}). \quad (3.89)$$

Matice  $\mathbf{T}$ ,  $|\mathbf{D}|$  a  $\mathbf{T}^{-1}$  neobsahují  $\varrho$  ani  $E$ , viz (3.15), (3.14), (3.16), takže  $\hat{\rho}$  ani  $\hat{E}$  nepotřebujeme. Tyto matice však obsahují rychlost zvuku  $a$ , kterou je třeba nahradit rychlostí

$$\hat{a} = \sqrt{(\gamma - 1) \left[ \hat{H} - \frac{1}{2}(\hat{u}^2 + \hat{v}^2) \right]}. \quad (3.90)$$

Připomeňme, že podle (3.14) vlastní čísla  $\hat{\lambda}_i \equiv \lambda_i(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , matice  $\mathbf{P}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})$  jsou

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{v}_n - \hat{a}, \quad \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_3 = \hat{v}_n, \quad \hat{\lambda}_4 = \hat{v}_n + \hat{a}, \quad \text{kde} \quad \hat{v}_n = \hat{u}n_1 + \hat{v}n_2. \quad (3.91)$$

Jestliže  $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ , pak

$$|\mathbf{P}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})|(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})|\mathbf{D}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})|\mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})\mathbf{T}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})|\mathbf{D}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})|\hat{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Uvážíme-li, že  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}), \mathbf{r}_2(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}), \mathbf{r}_3(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}), \mathbf{r}_4(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}))$ , pak

$$\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \sum_{i=1}^4 \hat{\gamma}_i |\hat{\lambda}_i(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})| \mathbf{r}_i(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) \right]. \quad (3.92)$$

Výpočetně vhodnější je ekvivalentní zápis

$$\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \sum_{\hat{\lambda}_i < 0} \hat{\gamma}_i \hat{\lambda}_i^-(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) \mathbf{r}_i(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}), \quad (3.93)$$

což je analogie k (3.81), nebo

$$\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \sum_{\hat{\lambda}_i > 0} \hat{\gamma}_i \hat{\lambda}_i^+(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) \mathbf{r}_i(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}), \quad (3.94)$$

což je analogie k (3.82).

**Toky** (3.72), (3.73), (3.74) a (3.84) splňují podmínku konzistence (3.41) a podmínku konzervativnosti (3.42). Konzistenci lze ověřit snadno. Konzervativnost lze dokázat užitím rovností  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, -\mathbf{n}) = -\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ ,  $\mathbf{P}^+(\mathbf{w}, -\mathbf{n}) = -\mathbf{P}^-(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ ,  $\mathbf{P}^-(\mathbf{w}, -\mathbf{n}) = -\mathbf{P}^+(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ ,  $|\mathbf{P}(\mathbf{w}, -\mathbf{n})| = |\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})|$ .

**Entropy fix.** Praxe i teorie potvrzují, že když

$$\lambda_i(\mathbf{u}, \mathbf{n}) < 0 < \lambda_i(\mathbf{v}, \mathbf{n}), \quad i = 1, 4, \quad (3.95)$$

pak numerické metody Godunovova typu mohou vytvořit ve spojitě vlně zředění falešnou rázovou vlnu, v anglicky psané literatuře označovanou jako *rarefaction shock* nebo *expansion shock*. Expanzní šok se výrazně projevuje zejména při použití Roeova numerického toku. Oprava numerického toku, která tento nežádoucí jev odstraňuje, se v anglicky psané literatuře označuje pojmem *entropy fix*, více viz [33], [52], [12]. Následují dvě ukázky použití entropie fixu.

a) *Entropy fix podle Hartena a Hymana*, viz [24], podrobnosti viz [52].

$\alpha)$  Jestliže  $\lambda_2(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) = \lambda_3(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) > 0$ , spočteme  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \hat{\gamma}_1 \mathbf{r}_1(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})$ , položíme

$$\tilde{\lambda}_1 = \begin{cases} \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \frac{\lambda_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{n}) - \lambda_1(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})}{\lambda_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{n}) - \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{n})} & \text{pro } \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{n}) < 0 < \lambda_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{n}), \\ \lambda_1(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

a ve shodě s (3.93) klademe

$$\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \hat{\gamma}_1 \tilde{\lambda}_1^- \mathbf{r}_1(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}). \quad (3.96)$$

$\beta)$  Jestliže  $\lambda_2(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) = \lambda_3(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) \leq 0$ , spočteme  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \hat{\gamma}_4 \mathbf{r}_4(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})$ , položíme

$$\tilde{\lambda}_4 = \begin{cases} \lambda_4(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \frac{\lambda_4(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) - \lambda_4(\mathbf{v}^*, \mathbf{n})}{\lambda_4(\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \lambda_4(\mathbf{v}^*, \mathbf{n})} & \text{pro } \lambda_4(\mathbf{v}^*, \mathbf{n}) < 0 < \lambda_4(\mathbf{v}, \mathbf{n}), \\ \lambda_4(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}) & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

a ve shodě s (3.94) klademe

$$\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \hat{\gamma}_4 \tilde{\lambda}_4^+ \mathbf{r}_4(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n}). \quad (3.97)$$

b) *Hartenův entropy fix*, viz [22], také [34]. Pro Roeův numerický tok ve tvaru (3.92) se osvědčil jednoduchý Hartenův entropy fix: platí-li (3.95), nahradíme  $|\lambda_i|$  výrazem  $\phi_\delta(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , kde

$$\phi_\delta(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta} & \text{pro } |\lambda| < \delta, \\ |\lambda| & \text{pro } |\lambda| \geq \delta, \end{cases} \quad (3.98)$$

a  $\delta \in [0, 1; 1]$  je volitelný parametr. Nevýhodou tohoto přístupu je to, že parametr  $\delta$  je třeba pro každý konkrétní problém vhodně vyladit.

Pro Roeův numerický tok ve tvaru (3.93) resp. (3.94), platí-li (3.95), použijeme

$$\lambda_i^- = \frac{1}{2}[\lambda_i - \phi_\delta(\lambda_i)] \quad \text{resp.} \quad \lambda_i^+ = \frac{1}{2}[\lambda_i + \phi_\delta(\lambda_i)]. \quad (3.99)$$

**Rusakovův numerický tok.** Existuje řada dalších, v praxi používaných numerických toků, viz [52]. Uveďme jeden z nich, známý jako *Rusakovův* numerický tok, často uváděný jako *lokální Laxův-Friedrichsův* numerický tok, viz [52]. Rusakovův numerický tok je tvaru

$$\mathbf{H}_R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) - \varrho_{max}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})(\mathbf{v} - \mathbf{u})], \quad (3.100)$$

kde  $\varrho_{max}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  absolutní hodnota největšího vlastního čísla matic  $\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  a  $\mathbf{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n})$ , tj.

$$\varrho_{max}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \max_{i=1, \dots, 4, \mathbf{q}=\mathbf{u}, \mathbf{v}} |\lambda_i(\mathbf{q}, \mathbf{n})|.$$

**Délku kroku časové diskretizace**  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  je třeba volit tak, aby výpočetní schéma bylo stabilní. Použijeme analogii CFL podmínky (3.50): žádáme, aby pro každý konečný objem  $D_j$  byla splněna nerovnost

$$\tau_k |\lambda_{j,\max}^k| \cdot |\partial D_j| / |D_j| \leq C_{\text{CFL}}. \quad (3.101)$$

Člen  $|\lambda_{j,\max}^k|$  představuje pro

- (i) schémata (3.72), (3.73) a (3.74) reprezentanta absolutních hodnot vlastních čísel  $\{\lambda_i(\mathbf{w}, \mathbf{n})\}_{i=1}^4$  matice  $\mathbf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$  na hranici  $\partial D_j$ ,
- (ii) schéma (3.84) reprezentanta absolutních hodnot vlastních čísel  $\{\lambda_i(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})\}_{i=1}^4$  matice  $\mathbf{P}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{n})$  na hranici  $\partial D_j$ .
- (iii) schéma (3.100) reprezentanta absolutních hodnot vlastních čísel  $\{\lambda_i(\mathbf{u}, \mathbf{n}), \lambda_i(\mathbf{v}, \mathbf{n})\}_{i=1}^4$  matic  $\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}), \mathbf{P}(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  na hranici  $\partial D_j$ .

Konkrétně pro Vijayasundaramovo schéma (3.72) a Van Leerovo schéma (3.74)

$$|\lambda_{j,\max}^k| = \max_{\substack{i=1,\dots,4, \ell \in S(j) \\ \alpha=1,\dots,\beta_{j\ell}}} \left| \lambda_i \left( \frac{\mathbf{w}_j^k + \mathbf{w}_\ell^k}{2}, \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha \right) \right|,$$

pro Stegerovo-Warmingovo schéma (3.73)

$$|\lambda_{j,\max}^k| = \max_{\substack{i=1,\dots,4, \ell \in S(j) \\ \alpha=1,\dots,\beta_{j\ell}}} \left| \lambda_i(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha) \right|,$$

pro Roeovo schéma (3.84)

$$|\lambda_{j,\max}^k| = \max_{\substack{i=1,\dots,4, \ell \in S(j) \\ \alpha=1,\dots,\beta_{j\ell}}} \left| \lambda_i(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_\ell^k), \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha) \right|,$$

a pro Rusakovovo schéma (3.100)

$$|\lambda_{j,\max}^k| = \max_{\substack{i=1,\dots,4, \mathbf{q}=\mathbf{u}, \mathbf{v} \\ \ell \in S(j), \alpha=1,\dots,\beta_{j\ell}}} \left| \lambda_i(\mathbf{q}_j^k, \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha) \right|.$$

Člen  $C_{\text{CFL}}$  je kladná konstanta,  $C_{\text{CFL}} \leq 1$ .

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (3.35) jsme diskretizovali pomocí explicitní Eulerovy metody. To je metoda řádu jedna s malou omezenou oblastí absolutní stability. Proto je třeba hlídat délku časového kroku, viz (3.101). Máme-li však dispozici výkonný a spolehlivý řešič pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, nemusíme se časovou diskretizací vůbec zabývat. Můžeme zvolit také implicitní metodu, která může být z hlediska výpočetních nároků velmi efektivní, například pokud nás zajímá stacionární stav zkoumaného proudění.

### 3.2.4. Okrajové podmínky.

Při výpočtu přibližného řešení  $\mathbf{w}_j^k$  podle schématu (3.36) musíme určit numerický tok  $\mathbf{g}_{j\ell}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_\ell^k)$  na společné části  $\Gamma_{j\ell}$  konečných objemů  $D_j$  a  $D_\ell$ . Pokud je  $\Gamma_{j\ell}$  částí hranice  $\partial\Omega$ , pak fiktivní konečný objem  $D_\ell$  reprezentuje vnějšek oblasti  $\Omega$  a je tu problém, jak definovat  $\mathbf{w}_\ell^k$ .

**Pevná stěna.** Nejdříve uvažujme případ, kdy  $\Gamma_{j\ell}$  je součástí pevné neprostupné stěny. V tom případě je vektor rychlosti  $\mathbf{v}$  proudící tekutiny rovnoběžný se stěnou nebo-li složka vektoru rychlosti kolmá ke stěně je nulová. Je-li tedy  $\mathbf{n}$  vektor kolmý ke stěně, musí být splněna *podmínka neprostupnosti*, v angličtině používaný termín je „slip boundary condition“:

$$v_n \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.102)$$

Na části  $\Gamma_{j\ell}$  pevné stěny užitím definičních vztahů (3.9) a (3.2) dostaneme

$$\int_{\Gamma_{j\ell}} \mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) dS = \int_{\Gamma_{j\ell}} \left[ v_n \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ \varrho v \\ E + p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] dS = \sum_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} \int_{\Gamma_{j\ell}^\alpha} p \begin{pmatrix} 0 \\ n_1^{\alpha j\ell} \\ n_2^{\alpha j\ell} \\ 0 \end{pmatrix} dS. \quad (3.103)$$

Je proto přirozené definovat  $\mathbf{g}_{j\ell} \approx \int_{\Gamma_{j\ell}} \mathcal{P} dS$  předpisem

$$\mathbf{g}_{j\ell}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_\ell^k) = p_j^k \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} |\Gamma_{j\ell}^\alpha| n_1^{\alpha j\ell} \\ \sum_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} |\Gamma_{j\ell}^\alpha| n_2^{\alpha j\ell} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

Vidíme, že z „vnějšího“ stavového vektoru  $\mathbf{w}_\ell^k$  jsme potřebovali jen tlak  $p_\ell^k$  a ten jsme extrapolovali „vnitřní“ hodnotou  $p_j^k$  z hraničního konečného objemu  $D_j$ .

**Vtok a výtok.** Nechť  $\mathbf{n}$  je vektor kolmý k hranici  $\partial\Omega$ .

Jestliže na části  $\Gamma$  hranice  $\partial\Omega$  je  $\begin{cases} v_n < 0, \\ v_n > 0, \end{cases}$  řekneme, že  $\Gamma$  je  $\begin{cases} \text{vtok} \text{ do} \\ \text{výtok} \text{ z} \end{cases}$  oblasti  $\Omega$ . (3.105)

K určení vnějšího stavového vektoru  $\mathbf{w}_\ell^k$  v bodu  $P_0 \in \partial\Gamma_{j\ell}^\alpha$  hraničního konečného objemu  $D_j$  použijeme aproximaci

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha)}{\partial \tilde{x}} = \mathbf{o} \quad (3.106)$$

transformované Eulerovy rovnice (3.26), ve které vynecháme člen  $\partial \mathcal{Q}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha) / \partial \tilde{y}$  reprezentující vliv tečného toku  $\mathcal{Q}$ . Rovnici (3.106) uvažujeme v lokálním pravotočivém souřadném systému  $(P_0, \tilde{x}, \tilde{y})$ , v němž kladný směr osy  $\tilde{x}$  je dán normálovým vektorem  $\mathbf{n}_{j\ell}^\alpha$  směřujícím



ven z oblasti  $\Omega$ . Dalšího zjednodušení dosáhneme tak, v rovnici (3.106) nahradíme nelineární tok  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha)$  lineárním tokem  $\mathbf{P}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha)\mathbf{w}$ . Pro  $x \equiv \tilde{x}$  tak dostaneme jednodimenzionální lineární rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{o} \quad (3.107)$$

s konstantní maticí  $\mathbf{A} = \mathbf{P}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha)$ . Rovnici (3.107) uvažujeme v lokálních souřadnicích  $x \equiv \tilde{x} < 0$  a v lokálním čase  $t > 0$ . Bod  $x = 0$  odpovídá bodu  $P_0$ , polopřímka  $x < 0$  reprezentuje body uvnitř oblasti  $\Omega$ . Lokální čas  $t = 0$  odpovídá reálnému času  $t_k$ ,  $t > 0$  přísluší reálnému času  $t_k + t$ . Funkce  $\mathbf{w}(x, t)$  odpovídá funkci  $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0 + x\mathbf{n}_{j\ell}^\alpha, t_k + t)$ .

K rovnici (3.107) připojíme počáteční podmínku  $\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}^0(x)$ , kde  $\mathbf{w}^0(x)$  odpovídá  $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0 + x\mathbf{n}_{j\ell}^\alpha, t_k)$ . Rovnici (3.107) řešíme metodou charakteristik. Vynásobíme-li ji maticí  $\mathbf{T}^{-1}$ , kde  $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \text{diag}(\{\lambda_i\}_{i=1}^4)$  je diagonální matice vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ , dostaneme

$$\frac{\partial[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}]}{\partial t} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \frac{\partial[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}]}{\partial x} = \mathbf{o}$$

nebo-li

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x} = \mathbf{o}, \quad (3.108)$$

kde  $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}$  je vektor charakteristických proměnných. K rovnici (3.108) přidáme počáteční podmínku  $\mathbf{z}(x, 0) = \mathbf{z}^0(x)$ , kde  $\mathbf{z}^0 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{w}^0$ . Složky  $z_i$  vektoru  $\mathbf{z}$  vyhovují rovnici

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i z_i = 0, \quad x \in (-\infty, 0), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.109)$$

a splňují počáteční podmínku  $z_i(x, 0) = z_i^0(x)$ . Řešení  $z_i(x, t)$  je na charakteristice  $x/t = \lambda_i$  konstantní, tj.  $z_i(x, t) = z_i(x - \lambda_i s, t - s)$ ,  $s \leq t$  libovolné. Zamysleme se nad otázkou jak určit hodnotu řešení  $z_i$  na hranici  $x = 0$ . Z důvodu srozumitelnosti následujících úvah se dohodneme, že  $x$  je vodorovná a  $t$  svislá osa.

Jeli  $\lambda_i > 0$ , pak charakteristiky s kladnou směrnici  $1/\lambda_i$  míří doprava a protínají osu  $t$ , takže řešení  $z_i(0, t)$  je určeno počáteční podmínkou:  $z_i(0, t) = z_i^0(-\lambda_i t)$ . Hodnotu charakteristické proměnné  $z_i(0, t)$  proto nepředepisujeme ale extrapolujeme ji z hodnot  $z_i$  na charakteristice vcházející do bodu  $[0, t]$ .

Je-li však  $\lambda_i < 0$ , charakteristiky vycházející z bodů  $[x, 0]$ ,  $x < 0$ , míří doleva, osu  $t$  neprotínají, takže počáteční podmínka  $z_i^0$  nemá na hodnotu  $z_i(0, t)$  žádný vliv. Hodnotu charakteristické proměnné  $z_i(0, t)$  proto musíme předepsat.

Vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou  $\lambda_1 = v_n - a$ ,  $\lambda_{2,3} = v_n$ ,  $\lambda_4 = v_n + a$ . Pro nadzvukové proudění, tj. když  $|v_n| > a$ , mají všechna vlastní čísla stejné znaménko, na vtoku záporné a na výtoku kladné. Na vtoku proto všechny charakteristické proměnné předepíšeme a na výtoku extrapolujeme, a protože  $\mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ , to samé platí pro konzervativní proměnné a následně také pro primitivní proměnné. Pro podzvukové proudění, tj. když  $|v_n| < a$ , dostaneme

na vtoku:  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 > 0 \implies z_1, z_2, z_3$  předepíšeme,  $z_4$  extrapolujeme,  
na výtoku:  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0 \implies z_1$  předepíšeme,  $z_2, z_3, z_4$  extrapolujeme.

Co z toho ale plyne pro konzervativní proměnné  $\mathbf{w} = \mathbf{Tz}$  a následně pro primitivní proměnné  $\varrho, u, v, p$ ? Na základě praktických zkušeností se na vtoku hustota a rychlosti předepisují a tlak extrapoluje, na výtoku se hustota a rychlosti extrapolují a předepíše se tlak. Přehledně je situace zaznamenána v tabulce 3.1.

hranice	proudění	předepsat	extrapolovat
vtok	podzvukové	$\varrho, u, v$	$p$
	nadzvukové	$\varrho, u, v, p$	
výtok	podzvukové	$p$	$\varrho, u, v$
	nadzvukové		$\varrho, u, v, p$

Tabulka 3.1: Okrajové podmínky

Vektor  $\mathbf{w}_\ell^k$  v numerickém toku  $\mathbf{g}_{j\ell}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_\ell^k)$  sestavíme pomocí  $\varrho_\ell^k, u_\ell^k, v_\ell^k, p_\ell^k$ , viz (3.4), (3.3). Je-li  $q_\ell^k$  jedna z hodnot  $\varrho_\ell^k, u_\ell^k, v_\ell^k, p_\ell^k$ , pak

$$q_\ell^k = \begin{cases} \bar{q}(\mathbf{x}_j, t_k), & \text{je-li hodnota proměnné } q \\ q_j^k, & \end{cases} \quad \begin{cases} \text{předepsána pomocí funkce } \bar{q}. \\ \text{extrapolována,} \end{cases} \quad (3.110)$$

přičemž  $q_j^k$  je jedna z hodnot  $\varrho_j^k, u_j^k, v_j^k, p_j^k$  odvozených z vektoru  $\mathbf{w}_j^k$ .

### 3.2.5. Metody druhého řádu.

Schéma (3.36) je řádu jedna jak v prostorové tak v časové proměnné. Taková metoda není schopna dostatečně přesně aproximovat řešení, což je obzvlášť patrné v místech, kde se řešení prudce mění. Ukážeme si proto, jak lze získat metodu přesnější. Omezíme se na metodu řádu 2. V prostoru použijeme metodu známou pod zkratkou MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws) a pro integraci v čase použijeme Heunovu metodu.

**Prostorová aproximace.** Metoda MUSCL je založena na po částech lineární rekonstrukci po částech konstantního řešení. Místo rovnice (3.35) použijeme rovnici

$$\frac{d\mathbf{w}_j}{dt} = -\frac{1}{|D_j|} \sum_{\ell \in S(j)} \hat{\mathbf{g}}_{j\ell}(\hat{\mathbf{w}}_{j\ell}, \hat{\mathbf{w}}_{\ell j}), \quad (3.111)$$

kde  $\hat{\mathbf{w}}_{j\ell}$  resp.  $\hat{\mathbf{w}}_{\ell j}$  jsou hodnoty zpřesněného přibližného řešení  $\hat{\mathbf{w}}_j$  resp.  $\hat{\mathbf{w}}_\ell$  na společné hranici  $\Gamma_{j\ell}$  konečných objemů  $D_j$  resp.  $D_\ell$  a

$$\hat{\mathbf{g}}_{j\ell}(\hat{\mathbf{w}}_{j\ell}, \hat{\mathbf{w}}_{\ell j}) = \sum_{\alpha=1}^{\beta_{j\ell}} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{w}}_j(\mathbf{x}_{j\ell}^\alpha, t), \hat{\mathbf{w}}_\ell(\mathbf{x}_{j\ell}^\alpha, t), \mathbf{n}_{j\ell}^\alpha) |\Gamma_{j\ell}^\alpha|, \quad (3.112)$$

kde  $\mathbf{x}_{j\ell}^\alpha$  jsou souřadnice středů úseček  $\Gamma_{j\ell}^\alpha$ .

Zpřesněné přibližné řešení  $\hat{\mathbf{w}}_j$  získáme rekonstrukcí primitivních proměnných  $\varrho_j, u_j, v_j$  a  $p_j$ . Až určíme  $\hat{\varrho}_j, \hat{u}_j, \hat{v}_j$  a  $\hat{p}_j$ , položíme

$$\hat{w}_1^j = \hat{\varrho}_j, \quad \hat{w}_2^j = \hat{\varrho}_j \hat{u}_j, \quad \hat{w}_3^j = \hat{\varrho}_j \hat{v}_j, \quad \hat{w}_4^j = \hat{p}_j / (\gamma - 1) + \frac{1}{2} \hat{\varrho}_j (\hat{u}_j^2 + \hat{v}_j^2).$$

Protože při prostorové aproximaci nehraje čas žádnou roli, nebudeme ho v dalším explicitně vyznačovat. Nechť  $q$  je jedna z primitivních proměnných  $\varrho, u, v, p$  a nechť  $\hat{q}$  je odpovídající po částech lineární rekonstrukce. Na konečném objemu  $D_j$  hledáme

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = q_j + \psi_j \nabla q_j \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \quad (3.113)$$

Vektor  $\psi_j \nabla q_j$  reprezentuje naklonění roviny  $z = q_j$  procházející bodem  $[\mathbf{x}_j, q_j]$ . Gradient  $\nabla q_j$  rovinu  $z = q_j$  nakloní a skalár  $\psi_j \in [0, 1]$  pak toto naklonění redukuje tak, aby nebylo příliš velké a aby po časové diskretizaci, při přechodu  $t_k \rightarrow t_{k+1}$ , nevznikaly nežádoucí oscilace. Ideálem je vytvoření TVD-schématu, viz (3.57).

Zabývejme se nejdříve určením gradientu  $\nabla q_j$ . Nechť  $L(j)$  je množina indexů všech trojúhelníků obsahujících vrchol  $P_j$ . Na každém trojúhelníku  $T_\ell$ ,  $\ell \in L(j)$ , sestavíme lineární interpolační polynom  $\Pi_\ell q$ , který je určen hodnotami funkce  $q$  ve vrcholech  $T_\ell$ . Gradient  $\nabla q_j$  pak definujeme jako vážený průměr gradientů  $\nabla \Pi_\ell q$ ,

$$\nabla q_j = \frac{1}{|D_j|} \sum_{\ell \in L(j)} |T_\ell \cap D_j| \nabla \Pi_\ell q. \quad (3.114)$$

Skalár  $\psi_j$  je v anglicky psané literatuře znám pod názvem *slope limiter*, my budeme v dalším používat stručnější označení *limiter*. Popíšeme si konkrétně konstrukci populárního *Barthova-Jespersenova limiteru* (stručně BJ limiteru). Spočteme

$$q_j^{\min} = \min(q_j, \min_{\ell \in S(j)} q_\ell), \quad q_j^{\max} = \max(q_j, \max_{\ell \in S(j)} q_\ell), \quad (3.115)$$

určíme

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_{j\ell}^\alpha &= q_j + \nabla q_j \cdot (\mathbf{x}_{j\ell}^\alpha - \mathbf{x}_j), \\ \psi_{j\ell}^\alpha &= \begin{cases} 1, & \bar{q}_{j\ell}^\alpha = q_j, \\ \min\left(1, \frac{q_j^{\max} - q_j}{\bar{q}_{j\ell}^\alpha - q_j}\right), & \bar{q}_{j\ell}^\alpha > q_j, \\ \min\left(1, \frac{q_j^{\min} - q_j}{\bar{q}_{j\ell}^\alpha - q_j}\right), & \bar{q}_{j\ell}^\alpha < q_j, \end{cases} \end{aligned} \right\}, \quad \ell \in S(j), \alpha = 1, \dots, \beta_{j\ell}, \quad (3.116)$$

a položíme

$$\psi_j = \min_{\substack{\ell \in S(j) \\ \alpha=1, \dots, \beta_{j\ell}}} \psi_{j\ell}^\alpha. \quad (3.117)$$

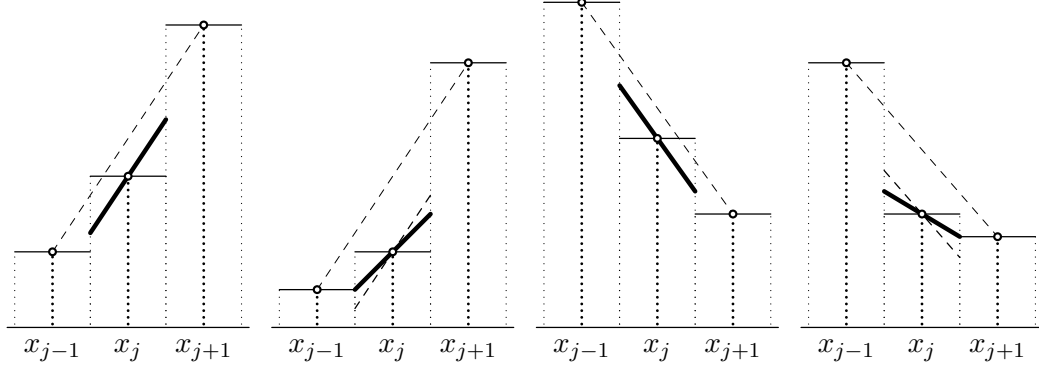
K vzorcům definujícím BJ limiter připojíme několik vysvětlujících poznámek.

1. Protože  $\hat{q}_j(\mathbf{x}_{j\ell}^\alpha) = q_j + \psi_j(\bar{q}_{j\ell}^\alpha - q_j)$ , z (3.115)–(3.117) plyne:

$$q_j^{\min} \leq \hat{q}_j(\mathbf{x}_{j\ell}^\alpha) \leq q_j^{\max}, \quad \ell \in S(j), \quad \alpha = 1, \dots, \beta_{j\ell}. \quad (3.118)$$

2. Jestliže po částech konstantní funkce  $q$ ,  $q|_{D_j} = q_j$ , nabývá na  $D_j$  svého minima, tj.  $q_j = q_j^{\min}$ , nebo maxima, tj.  $q_j = q_j^{\max}$ , pak  $\hat{q}_j = q_j$ . Skutečně: buďto  $\nabla q_j = \mathbf{0}$  nebo  $\nabla q_j \neq \mathbf{0}$  a  $\psi_j = 0$  (podle (3.116) bude nejméně jeden z členů  $\psi_{j\ell}^\alpha = 0$ ).

4. Numerické experimenty prokázaly, že v případech, kdy se uplatní limiter, tj. když na některých konečných objemech  $0 \leq \psi_j < 1$ , pak metoda je řádu nižšího než dva. viz [18], kde je tato skutečnost testována na shock-tube problému, viz cvičení 2.12.



Obr. 3.7: 1D rekonstrukce

3. Techniku MUSCL ilustrujeme na jednodimenzionálním příkladu. Nechť uzly  $x_j = jh$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots$ , definují rovnoměrné dělení na ose  $x$  a nechť  $q_j$  je přibližné řešení na konečném objemu  $D_j = [x_j - \frac{1}{2}h, x_j + \frac{1}{2}h]$ . Pak lineární rekonstrukce

$$\hat{q}_j(x) = q_j + \psi_j \frac{q_{j+1} - q_{j-1}}{2h} (x - x_j).$$

Nechť  $q_j^{\min} = \min(q_{j-1}, q_j, q_{j+1})$ ,  $q_j^{\max} = \max(q_{j-1}, q_j, q_{j+1})$ . BJ limiter  $\psi_j$  pak je největší číslo z intervalu  $[0, 1]$ , pro které  $q_j^{\min} \leq \hat{q}_j(x) \leq q_j^{\max}$ ,  $x \in D_j$ . Všimněte si, že pro  $q_j = q_j^{\min}$  nebo  $q_j = q_j^{\max}$  musí být  $\psi_j = 0$ . Vzorec pro výpočet  $\psi_j$  lze odvodit modifikací vztahů (3.115)–(3.117). Na Obr. 3.7 je zakresleno několik typických konfigurací: u první a třetí konfigurace se limiter neuplatní, tj.  $\psi_j = 1$ , u druhé a čtvrté se uplatní, tj.  $\psi_j < 1$ .

**Časová diskretizace.** Rovnice (3.111) můžeme zapsat jako soustavu

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{w}),$$

kde  $\mathbf{w}$  je vektor sestavený z vektorů  $\mathbf{w}_j$  a  $\mathcal{F}(\mathbf{w})$  je vektor sestavený z vektorů

$$\mathcal{F}_j(\mathbf{w}) = -\frac{1}{|D_j|} \sum_{\ell \in S(j)} \hat{\mathbf{g}}_{j\ell}(\hat{\mathbf{w}}_{j\ell}, \hat{\mathbf{w}}_{\ell j}).$$

Heunova metoda znamená výpočet podle schématu

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k + \frac{1}{2}\tau(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 = \mathcal{F}(\mathbf{w}^k), \quad \mathbf{k}_2 = \mathcal{F}(\mathbf{w}^k + \tau\mathbf{k}_1),$$

neboli

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^k + \tau\mathcal{F}(\mathbf{w}^k), \quad \mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k + \frac{1}{2}\tau [\mathcal{F}(\mathbf{w}^k) + \mathcal{F}(\mathbf{w}^*)].$$

Vrátíme-li se zpět k rovnici (3.111), dostaneme schéma

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_j^* &= \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{|D_j|} \sum_{\ell \in S(j)} \hat{\mathbf{g}}_{j\ell}(\hat{\mathbf{w}}_{j\ell}^k, \hat{\mathbf{w}}_{\ell j}^k), \\ \mathbf{w}_j^{k+1} &= \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau}{2|D_j|} \sum_{\ell \in S(j)} [\hat{\mathbf{g}}_{j\ell}(\hat{\mathbf{w}}_{j\ell}^k, \hat{\mathbf{w}}_{\ell j}^k) + \hat{\mathbf{g}}_{j\ell}(\hat{\mathbf{w}}_{j\ell}^*, \hat{\mathbf{w}}_{\ell j}^*)].\end{aligned}\tag{3.119}$$

Zdůrazněme, že nejdříve spočteme všechna  $\mathbf{w}_j^*$  a teprve pak počítáme  $\mathbf{w}_j^{k+1}$ .

**Metody vyššího řádu.** Existuje řada technik umožňujících získat metody řádu vyššího než dva. Pokud jde o prostorovou diskretizaci, pak mezi nejznámější patří metoda ENO (Essentially Non-Oscillatory method), viz třeba [23], její modifikace WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory method), viz třeba [29], a CENO (Central Essentially Non-Oscillatory method), viz třeba [30]. Řád časové diskretizace lze zvýšit použitím vhodné Rungovy-Kuttovy formule. Technika ADER (Arbitrary accuracy Derivatives Riemann problem method) umožňuje zvýšit současně řád jak prostorové tak časové diskretizace, viz třeba [8]. Ve všech uvedených metodách se pro dosažení vyššího řádu prostorové diskretizace používá rekonstrukce, která pro každý konečný objem používá hodnot přibližného řešení v sousedních konečných objemech a v dalších obklopujících konečných objemech, jejichž počet závisí na požadované přesnosti rekonstrukce.

## 4. Řešení Eulerových rovnic nespojitou Galerkinovou metodou

Nejvýznamnější příznivou vlastností metody konečných objemů je to, že zajišťuje splnění zákonů zachování lokálně na jednotlivých konečných objemech. Další příznivou vlastností FVM je skutečnost, že přibližné řešení je jen po částech spojitě, což je užitečné při modelování nespojitých jevů. Mezi méně příznivé vlastnosti FVM patří to, že je dosti těžkopádná, pokud jde o dosažení vyšší přesnosti prostorové diskretizace. V kapitole 3.2.5 jsme ukázali, jak lze rekonstrukcí ze základní metody řádu 1 dostat metodu řádu 2: jsou k tomu zapotřebí bezprostřední sousedé konečného objemu, na kterém se rekonstrukce provádí. Rekonstrukce vyššího řádu je možná jen zapojením dalších vrstev obklopujících konečných objemů.

Nespojitá Galerkinova metoda (stručně DGM podle anglického Discontinuous Galerkin Method) na to jde jinak. Vyšší přesnost prostorové diskretizace dosahuje DGM stejně jako metoda konečných prvků, viz [16] (stručně FEM podle anglického Finite Element Method): na prvku se použije aproximace vyššího řádu přesnosti (obvykle polynom dostatečně vysokého stupně). Globální aproximace je však na rozdíl od FEM nespojitá (proto nespojitá Galerkinova metoda), což je pro modelování nespojitých jevů žádoucí. Přibližné řešení na jednom prvku pak souvisí s přibližným řešením na sousedním prvku jen prostřednictvím hodnot obou přibližných řešení na společné hranici těchto dvou prvků podobně, jako je tomu v FVM. Prvek se tak chová jako konečný objem vyššího řádu přesnosti. DGM v sobě tedy spojuje základní přednosti FVM (lokální platnost zákonů zachování, globální nespojitost) a FEM (vysoký řád aproximace). DGM bývá proto v literatuře označována také zkratkou DG-FEM (podle anglického Discontinuous Galerkin Finite Element Method).

V této kapitole popíšeme přístup známý pod zkratkou RKDG (podle anglického Runge-Kutta Discontinuous Galerkin). Pod tímto označením metodu zavedli B. Cockburn a C.-W. Shu, viz [9]. Výkladu a implementaci RKDG metody je věnována monografie Hesthavena [26]. Knihu doprovází kolekce matlabovských programů pro řešení 1D a 2D Eulerových rovnic, ale i dalších úloh, třeba 2D Navierových-Stokesových rovnic.

### 4.1. Prostorová diskretizace nespojitou Galerkinovou metodou

Připomeňme, že diskretizujeme soustavu rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{w})}{\partial y} = \mathbf{o}, \quad (4.1)$$

doplněnou o počáteční a okrajové podmínky, viz kapitola 1.5 a 3.2.4.

Budeme předpokládat, že výpočetní oblast  $\Omega$  je mnohoúhelník. Uzavřenou oblast  $\bar{\Omega}$  vyjádříme jako sjednocení  $N_T$  uzavřených trojúhelníků, jejichž vnitřky jsou navzájem disjunktní, tj.  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_T} T_j$ . Hranice  $\partial\Omega$  je sjednocením  $N_S$  stran trojúhelníků přiléhajících k hranici, tj.  $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_S} S_j$ . Jestliže trojúhelníky  $T_j$  a  $T_\ell$  mají společnou stranu, nazveme je sousedními a jejich společnou stranu označíme jako  $\Gamma_{j\ell}$ . Stranu  $S_k$  příhraničního trojúhelníka  $T_j$  označíme jako  $\Gamma_{j\ell}$ , kde  $\ell = -k$ . Ke každému trojúhelníku  $T_j$  přiřadíme

množinu indexů  $S(j) = \{\ell \mid \Gamma_{j\ell} \in \partial T_j\}$ . Pro vnitřní trojúhelník  $S(j)$  obsahuje indexy sousedních trojúhelníků, pro příhraniční trojúhelník pak  $S(j)$  obsahuje indexy sousedních trojúhelníků a záporně vzaté indexy hraničních stran. Označme jako  $\mathbf{n}_{j\ell} = (n_1^{j\ell}, n_2^{j\ell})^T$  jednotkový vektor vnější normály k hranici  $\partial T_j$  na straně  $\Gamma_{j\ell}$ . Rovnici (4.1) vynásobíme testovací funkcí  $\varphi$ , integrujeme přes trojúhelník  $T_j$  a užitím Greenovy věty dostaneme

$$\int_{T_j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{T_j} \left[ \mathbf{f}(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{g}(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] d\mathbf{x} + \sum_{\ell \in S(j)} \int_{\Gamma_{j\ell}} \mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{j\ell}) \cdot \varphi \, dS = 0,$$

kde  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{j\ell}) = \mathbf{f}(\mathbf{w})n_1^{j\ell} + \mathbf{g}(\mathbf{w})n_2^{j\ell}$ . Přibližné řešení na trojúhelníku  $T_j$  značíme

$$\mathbf{w}_j(\mathbf{x}, t) = (w_1^j(\mathbf{x}, t), w_2^j(\mathbf{x}, t), w_3^j(\mathbf{x}, t), w_4^j(\mathbf{x}, t))^T$$

a testovací funkci na trojúhelníku  $T_j$  značíme

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = (\varphi_1^j(\mathbf{x}), \varphi_2^j(\mathbf{x}), \varphi_3^j(\mathbf{x}), \varphi_4^j(\mathbf{x}))^T.$$

Funkce  $w_i^j(\mathbf{x}, t)$ ,  $\varphi_i^j(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , uvažujeme jako polynomy dvou proměnných stupně  $q$ . Nechtě  $\{\ell_\alpha^j(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^n$ ,  $n = \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$ , jsou Lagrangeovy fundamentální polynomy na vhodně zvolené množině  $\{\mathbf{x}_\alpha^j\}_{\alpha=1}^n$  uzlů trojúhelníka  $T_j$ , takže

$$\ell_\alpha^j(\mathbf{x}_\beta^j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n.$$

Mezi uzly  $\{\mathbf{x}_\alpha^j\}_{\alpha=1}^n$  zařadíme vrcholy trojúhelníka  $T_j$ , dalších  $q-1$  uzlů zvolíme uvnitř každé strany trojúhelníka a zbývající  $n-3q$  uzlů rozmístíme uvnitř trojúhelníka, více viz odstavec 4.1.1. Označme

$$\boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x}) = (\ell_1^j(\mathbf{x}), \ell_2^j(\mathbf{x}), \dots, \ell_n^j(\mathbf{x}))^T.$$

Složku  $w_i^j$  přibližného řešení vyjádříme ve tvaru Lagrangeova interpolačního polynomu:

$$w_i^j(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{i\alpha}^j(t) \ell_\alpha^j(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x})]^T \boldsymbol{\Delta}_i^j(t), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

kde

$$\boldsymbol{\Delta}_i^j(t) = (\Delta_{i1}^j(t), \Delta_{i2}^j(t), \dots, \Delta_{in}^j(t))^T, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Parametry  $\Delta_{i\alpha}^j(t) = w_i^j(\mathbf{x}_\alpha^j, t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$  jsou funkce, které je třeba určit. Složky  $\varphi_i^j$  testovací funkce volíme podobně,

$$\varphi_i^j(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n \Theta_{i\alpha}^j \ell_\alpha^j(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\Theta}_i^j]^T \boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

kde

$$\boldsymbol{\Theta}_i^j = (\Theta_{i1}^j, \Theta_{i2}^j, \dots, \Theta_{in}^j)^T, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Parametry  $\Theta_{i\alpha}^j = \varphi_i^j(\mathbf{x}_\alpha^j)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , mohou nabývat libovolných hodnot.

Zbývá rozhodnout, jak budeme počítat tok  $\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{j\ell})$  na hranici  $\Gamma_{j\ell}$ . Stejně jako v metodě konečných objemů si pomůžeme numerickým tokem. Použijeme tedy aproximaci

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}_{j\ell})|_{\Gamma_{j\ell}} \approx \mathbf{H}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{j\ell}),$$

kde  $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  je numerický tok, viz kapitola 3.2.1. Přibližné řešení počítáme z rovnic

$$\int_{T_j} \frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_j \, d\mathbf{x} - \int_{T_j} \left[ \mathbf{f}(\mathbf{w}_j) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial x} + \mathbf{g}(\mathbf{w}_j) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial y} \right] d\mathbf{x} + \sum_{\ell \in S(j)} \int_{\Gamma_{j\ell}} \mathbf{H}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{j\ell}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_j \, dS = 0,$$

kde  $j = 1, 2, \dots, N_T$ . Rovnici na trojúhelníku  $T_j$  rozepíšeme do čtyř rovnic pro složky  $w_i^j(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Označíme-li

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T, \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, g_4)^T, \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3, H_4)^T,$$

dostaneme soustavu rovnic

$$\int_{T_j} \frac{\partial w_i^j}{\partial t} \varphi_i^j \, d\mathbf{x} - \int_{T_j} \left[ f_i(\mathbf{w}_j) \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x} + g_i(\mathbf{w}_j) \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y} \right] d\mathbf{x} + \sum_{\ell \in S(j)} \int_{\Gamma_{j\ell}} H_i(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{j\ell}) \varphi_i^j \, dS = 0, \quad (4.2)$$

kde  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_T$ .

**4.1.1. Maticový zápis.** V dalším postupně vyjádříme jednotlivé členy v rovnici (4.2). Nejdríve však zavedeme označení

$$\begin{aligned} \Delta_j(t) &= \left( [\Delta_1^j(t)]^T, [\Delta_2^j(t)]^T, [\Delta_3^j(t)]^T, [\Delta_4^j(t)]^T \right)^T, \\ \Delta(t) &= \left( [\Delta_1(t)]^T, [\Delta_2(t)]^T, \dots, [\Delta_{N_T}(t)]^T \right)^T. \end{aligned}$$

Integrál na levé straně rovnice (4.2) vyjádříme takto:

$$\int_{T_j} \frac{\partial w_i^j}{\partial t} \varphi_i^j \, d\mathbf{x} = [\boldsymbol{\Theta}_i^j]^T \left[ \int_{T_j} \boldsymbol{\ell}_j \boldsymbol{\ell}_j^T \, d\mathbf{x} \right] \dot{\Delta}_i^j(t) = [\boldsymbol{\Theta}_i^j]^T \mathbf{M}_j \dot{\Delta}_i^j(t), \quad (4.3)$$

kde tečka nad  $\Delta_i^j$  vyjadřuje časovou derivaci, tj.  $\dot{\Delta}_i^j = d\Delta_i^j(t)/dt$ , a

$$\mathbf{M}_j = \int_{T_j} \boldsymbol{\ell}_j \boldsymbol{\ell}_j^T \, d\mathbf{x}. \quad (4.4)$$

Toky  $f_i(\mathbf{w}_j)$  a  $g_i(\mathbf{w}_j)$  nahradíme interpolačními polynomy,

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{w}_j) &\approx \sum_{\alpha=1}^n f_i(\mathbf{w}_j(\mathbf{x}_\alpha^j, t)) \ell_\alpha^j(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x})]^T \mathbf{F}_i(\Delta_j(t)), \\ g_i(\mathbf{w}_j) &\approx \sum_{\alpha=1}^n g_i(\mathbf{w}_j(\mathbf{x}_\alpha^j, t)) \ell_\alpha^j(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x})]^T \mathbf{G}_i(\Delta_j(t)), \end{aligned}$$



kde  $\mathbf{F}_i(\Delta_j(t))$  a  $\mathbf{G}_i(\Delta_j(t))$  jsou sloupcové vektory délky  $n$  o složkách

$$\left. \begin{aligned} & [\mathbf{F}_i(\Delta_j(t))]_{\alpha} = f_i(\bar{\Delta}_{\alpha}^j(t)), \quad [\mathbf{G}_i(\Delta_j(t))]_{\alpha} = g_i(\bar{\Delta}_{\alpha}^j(t)), \\ & \bar{\Delta}_{\alpha}^j(t) = (\Delta_{1\alpha}^j(t), \Delta_{2\alpha}^j(t), \Delta_{3\alpha}^j(t), \Delta_{4\alpha}^j(t))^T, \end{aligned} \right\} \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Pak

$$\int_{T_j} \left[ f_i(\mathbf{w}_j) \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x} + g_i(\mathbf{w}_j) \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y} \right] d\mathbf{x} = [\Theta_i^j]^T [\mathbf{S}_x^j \mathbf{F}_i(\Delta_j(t)) + \mathbf{S}_y^j \mathbf{G}_i(\Delta_j(t))], \quad (4.5)$$

kde

$$\mathbf{S}_x^j = \int_{T_j} \frac{\partial \ell_j}{\partial x} \ell_j^T d\mathbf{x}, \quad \mathbf{S}_y^j = \int_{T_j} \frac{\partial \ell_j}{\partial y} \ell_j^T d\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Pokud jde o křivkové integrály po stranách  $\Gamma_{j\ell}$  trojúhelníka  $T_j$ , zvlášť posoudíme případ, kdy  $\Gamma_{j\ell} = T_j \cap T_{\ell}$  je vnitřní strana, a případ, kdy  $\Gamma_{j\ell} = S_{-\ell}$  je strana hraniční.

Věnujme se nejdříve vnitřní straně. Označme jako  $\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, q+1$ , uzly, které leží na straně  $\Gamma_{j\ell}$  trojúhelníka  $T_j$ . Vztah mezi čísly  $\alpha$  uzlů  $\{\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}\}_{\alpha=1}^{q+1}$  na straně  $\Gamma_{j\ell}$  a čísly uzlů  $\{\mathbf{x}_{\beta}^{\ell j}\}_{\beta=1}^{q+1}$  na straně  $\Gamma_{\ell j} \equiv \Gamma_{j\ell}$  vyjádříme pomocí zobrazení  $d_{j\ell}$ , které ke každému indexu  $\alpha$  uzlu  $\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, q+1$ , přiřadí index  $\beta$  uzlu  $\mathbf{x}_{\beta}^{\ell j}$  takový, že  $\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell} \equiv \mathbf{x}_{\beta}^{\ell j} = \mathbf{x}_{d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}$ . Necht'  $\ell_{\alpha}^{j\ell}$  je Lagrangeův fundamentální polynom příslušný k uzlu  $\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}$ , takže

$$\ell_{\alpha}^{j\ell}(\mathbf{x}_{\beta}^{j\ell}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, q+1.$$

Přibližné řešení  $\mathbf{w}_{j\ell} \equiv \mathbf{w}_j|_{\Gamma_{j\ell}}$  a testovací funkce  $\varphi_{j\ell} \equiv \varphi_j|_{\Gamma_{j\ell}}$  má složky

$$w_i^{j\ell}(\mathbf{x}, t) = [\ell_{j\ell}(\mathbf{x})]^T \Delta_i^{j\ell}(t), \quad \varphi_i^{j\ell}(\mathbf{x}) = [\Theta_i^{j\ell}]^T \ell_{j\ell}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

kde  $\ell_{j\ell}(\mathbf{x}) = (\ell_1^{j\ell}(\mathbf{x}), \ell_2^{j\ell}(\mathbf{x}), \dots, \ell_{q+1}^{j\ell}(\mathbf{x}))^T$  a

$$\Delta_i^{j\ell}(t) = (\Delta_{i1}^{j\ell}(t), \Delta_{i2}^{j\ell}(t), \dots, \Delta_{i,q+1}^{j\ell}(t))^T, \quad \Theta_i^{j\ell} = (\Theta_{i1}^{j\ell}, \Theta_{i2}^{j\ell}, \dots, \Theta_{i,q+1}^{j\ell})^T, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Označme ještě

$$\Delta_{j\ell}(t) = \left( [\Delta_1^{j\ell}(t)]^T, [\Delta_2^{j\ell}(t)]^T, [\Delta_3^{j\ell}(t)]^T, [\Delta_4^{j\ell}(t)]^T \right)^T.$$

Složku  $H_i(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_{\ell}, \mathbf{n}_{j\ell})|_{\Gamma_{j\ell}} \equiv H_i(\mathbf{w}_{j\ell}, \mathbf{w}_{\ell j}, \mathbf{n}_{j\ell})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , numerického toku na straně  $\Gamma_{j\ell}$  vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} H_i(\mathbf{w}_{j\ell}, \mathbf{w}_{\ell j}, \mathbf{n}_{j\ell}) &= \sum_{\alpha=1}^{q+1} \mathbf{H}_i(\mathbf{w}_j(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t), \mathbf{w}_{\ell}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t), \mathbf{n}_{j\ell}) \ell_{j\ell}(\mathbf{x}) = \\ &= [\ell_{j\ell}(\mathbf{x})]^T \mathbf{H}_i(\Delta_{j\ell}(t), \Delta_{\ell j}(t), \mathbf{n}_{j\ell}), \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{H}_i(\Delta_{j\ell}(t), \Delta_{\ell j}(t), \mathbf{n}_{j\ell})$  je sloupcový vektor délky  $q + 1$  o složkách

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{H}_i(\Delta_{j\ell}(t), \Delta_{\ell j}(t), \mathbf{n}_{j\ell})]_{\alpha} &= H_i \left( \bar{\Delta}_{\alpha}^{j\ell}(t), \bar{\Delta}_{d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t), \mathbf{n}_{j\ell} \right), \\ \text{přičemž} \\ \bar{\Delta}_{\alpha}^{j\ell}(t) &= \left( \Delta_{1\alpha}^{j\ell}(t), \Delta_{2\alpha}^{j\ell}(t), \Delta_{3\alpha}^{j\ell}(t), \Delta_{4\alpha}^{j\ell}(t) \right)^T, \\ \bar{\Delta}_{d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t) &= \left( \Delta_{1,d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t), \Delta_{2,d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t), \Delta_{3,d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t), \Delta_{4,d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t) \right)^T, \end{aligned} \right\} \alpha = 1, 2, \dots, q + 1.$$

Pak

$$\int_{\Gamma_{j\ell}} H_i(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_{\ell}, \mathbf{n}_{j\ell}) \varphi_i^j dS = [\Theta_i^{j\ell}]^T \mathbf{M}_{j\ell} \mathbf{H}_i(\Delta_{j\ell}(t), \Delta_{\ell j}(t), \mathbf{n}_{j\ell}), \quad (4.7)$$

kde

$$\mathbf{M}_{j\ell} = \int_{\Gamma_{j\ell}} \boldsymbol{\ell}_{j\ell} \boldsymbol{\ell}_{j\ell}^T dS. \quad (4.8)$$

Prostřednictvím stran  $\Gamma_{j\ell}$  ležících na hranici uplatníme okrajové podmínky. Pro stranu  $\Gamma_{j\ell}$  ležící na vtoku  $\Gamma_I$  nebo na výtoku  $\Gamma_O$  použijeme numerický tok  $\mathbf{H}(\mathbf{w}_{j\ell}, \mathbf{w}_{\ell j}, \mathbf{n}_{j\ell})$  pro vhodně zvolenou funkci  $\mathbf{w}_{\ell j}$ . Na stěně je účelnější pracovat přímo s tokem  $\mathcal{P}(\mathbf{w}_j, \mathbf{n}_{j\ell})$ .

Jestliže strana  $\Gamma_{j\ell}$  leží na vtoku  $\Gamma_I$  nebo na výtoku  $\Gamma_O$ , použijeme (4.7) s tím, že některé z primitivních proměnných  $\varrho_{j\ell}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t)$ ,  $u_{j\ell}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t)$ ,  $v_{j\ell}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t)$  a  $p_{j\ell}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t)$  předepíšeme a jiné extrapolujeme, viz tabulka 3.1. Z primitivních proměnných pak sestavíme konzervativní proměnné a ty dosadíme do  $\Delta_{i\alpha}^{\ell j}(t)$ . Tak třeba pro podzvukové proudění na vtoku předepíšeme hustotu a obě rychlosti, tlak extrapolujeme. Nejdříve tedy určíme

$$p_{\alpha}^{j\ell}(t) = (\gamma - 1) \left( \Delta_{4\alpha}^{j\ell}(t) - \frac{[\Delta_{2\alpha}^{j\ell}(t)]^2 + [\Delta_{3\alpha}^{j\ell}(t)]^2}{\Delta_{1\alpha}^{j\ell}(t)} \right)$$

a pak dopočítáme

$$\Delta_{1,d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t) = \bar{\varrho}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t), \quad \Delta_{2,d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t) = \bar{\varrho}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t) \bar{u}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t), \quad \Delta_{3,d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t) = \bar{\varrho}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t) \bar{v}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t),$$

$$\Delta_{4,d_{j\ell}(\alpha)}^{\ell j}(t) = \frac{p_{\alpha}^{j\ell}(t)}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\varrho}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t) ([\bar{u}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t)]^2 + [\bar{v}(\mathbf{x}_{\alpha}^{j\ell}, t)]^2).$$

Na stěně  $v_n = un_1 + vn_2 = 0$ . Odtud a z (3.9), (3.2) plyne, že

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = (0, pn_1, pn_2, 0)^T.$$

Podobně jako pro vnitřní strany odvodíme

$$\int_{\Gamma_{j\ell}} H_i(\mathbf{w}_{j\ell}, \mathbf{w}_{\ell j}, \mathbf{n}_{j\ell}) \varphi_i^j dS \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_{j\ell}} \mathcal{P}_i(\mathbf{w}_{j\ell}, \mathbf{n}_{j\ell}) \varphi_i^j dS = [\Theta_i^{j\ell}]^T \mathbf{M}_{j\ell} \mathbf{P}_i(\Delta_{j\ell}(t), \mathbf{n}_{j\ell}), \quad (4.9)$$

kde  $\mathbf{P}_i(\Delta_{j\ell}(t), \mathbf{n}_{j\ell})$  je sloupcový vektor délky  $q + 1$  o složkách

$$[\mathbf{P}_i(\Delta_{j\ell}(t), \mathbf{n}_{j\ell})]_{\alpha} = \mathcal{P}_i(\bar{\Delta}_{\alpha}^{j\ell}(t), \mathbf{n}_{j\ell}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, q + 1.$$

Součet krivkových integrálů po hranici trojúhelníka  $T_j$  zapíšeme ve tvaru

$$\sum_{\ell \in S(j)} \int_{\Gamma_{j\ell}} H_i(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{j\ell}) \varphi_i^j dS = \sum_{\ell \in S(j)} [\Theta_i^{j\ell}]^T \mathbf{M}_{j\ell} \mathbf{H}_i(\Delta_j(t), \Delta_\ell(t)), \quad (4.10)$$

kde

$$\mathbf{H}_i(\Delta_j(t), \Delta_\ell(t)) = \begin{cases} \mathbf{H}_i(\Delta_{j\ell}(t), \Delta_{\ell j}(t), \mathbf{n}_{j\ell}) \\ \mathbf{P}_i(\Delta_{j\ell}(t), \mathbf{n}_{j\ell}) \end{cases} \quad \text{pro} \quad \begin{cases} \Gamma_{j\ell} \notin \Gamma_W, \\ \Gamma_{j\ell} \in \Gamma_W. \end{cases} \quad (4.11)$$

Vztah mezi čísly uzlů na straně  $\Gamma_{j\ell}$  a čísly uzlů na trojúhelníku  $T_j$  vyjádříme pomocí zobrazení  $p_{j\ell}$ , které ke každému indexu  $\alpha$  uzlu  $\mathbf{x}_\alpha^{j\ell}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, q+1$ , přiřadí index  $\beta$  uzlu  $\mathbf{x}_\beta^j$  takový, že  $\mathbf{x}_\alpha^{j\ell} \equiv \mathbf{x}_\beta^j$ . Zobrazení  $p_{j\ell}$  můžeme popsat prostřednictvím vektoru

$$\mathbf{p}_{j\ell} = (p_{j\ell}(1), p_{j\ell}(2), \dots, p_{j\ell}(q+1)). \quad (4.12)$$

Ke každé straně  $\Gamma_{j\ell}$  sestrojíme matici  $\mathbf{E}_{j\ell}$  typu  $(n, q+1)$  takovou, aby

$$[\Theta_i^{j\ell}]^T = [\Theta_i^j]^T \mathbf{E}_{j\ell}. \quad (4.13)$$

Matici  $\mathbf{E}_{j\ell}$  sestrojíme takto:

1. matici  $\mathbf{E}_{j\ell}$  typu  $(n, q+1)$  vynulujeme;
2. pro  $\alpha = 1, 2, \dots, q+1$  provedeme  $\mathbf{E}_{j\ell}(p_{j\ell}(\alpha), \alpha) := 1$ .

Pomocí (4.13) přepíšeme rovnost (4.10) do tvaru

$$\sum_{\ell \in S(j)} \int_{\Gamma_{j\ell}} H_i^{j\ell}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_\ell, \mathbf{n}_{j\ell}) \varphi_i^j dS = [\Theta_i^j]^T \sum_{\ell \in S(j)} \mathbf{E}_{j\ell} \mathbf{M}_{j\ell} \mathbf{H}_i(\Delta_j(t), \Delta_\ell(t)). \quad (4.14)$$

Dosadíme-li do (4.2) z (4.3), (4.5) a (4.14), dostaneme

$$[\Theta_i^j]^T \left[ \mathbf{M}_j \dot{\Delta}_i^j - \mathbf{S}_x^j \mathbf{F}_i(\Delta_j) - \mathbf{S}_y^j \mathbf{G}_i(\Delta_j) + \sum_{\ell \in S(j)} \mathbf{E}_{j\ell} \mathbf{M}_{j\ell} \mathbf{H}_i(\Delta_j, \Delta_\ell) \right] = 0.$$

Protože vektor parametrů  $\Theta_i^j$  je libovolný, obdržíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\dot{\Delta}_i^j = \mathcal{F}_i^j(\Delta), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, \dots, N_T, \quad (4.15)$$

kde

$$\mathcal{F}_i^j(\Delta) = \mathbf{M}_j^{-1} \left[ \mathbf{S}_x^j \mathbf{F}_i(\Delta_j) + \mathbf{S}_y^j \mathbf{G}_i(\Delta_j) - \sum_{\ell \in S(j)} \mathbf{E}_{j\ell} \mathbf{M}_{j\ell} \mathbf{H}_i(\Delta_j, \Delta_\ell) \right]. \quad (4.16)$$

**4.1.2. Efektivní vyjádření elementárních matic.** Vrcholy trojúhelníka  $T_j$  označme jako  $\mathbf{v}_k^j$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Necht  $T$  je referenční trojúhelník v rovině proměnných  $r, s$ , jehož vrcholy jsou body  $\mathbf{v}_1 = [-1, -1]$ ,  $\mathbf{v}_2 = [1, -1]$ ,  $\mathbf{v}_3 = [-1, 1]$ . Jestliže  $\mathbf{r} = (r, s)^T$ , pak

$$\begin{pmatrix} x_j(r, s) \\ y_j(r, s) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{x}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2^j + \mathbf{v}_3^j) + (\mathbf{v}_2^j - \mathbf{v}_1^j, \mathbf{v}_3^j - \mathbf{v}_1^j) \mathbf{r} \quad (4.17)$$

je zobrazení trojúhelníka  $T$  na trojúhelník  $T_j$ , přičemž  $\mathbf{v}_k^j = \mathbf{x}_j(\mathbf{v}_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,

$$\mathbf{J}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2^j - \mathbf{v}_1^j, \mathbf{v}_3^j - \mathbf{v}_1^j)$$

je Jacobiho matice zobrazení  $\mathbf{x}_j$  a  $J_j = \det \mathbf{J}_j$  je jakobián. Zřejmě

$$\int_{T_j} d\mathbf{x} = \int_T |J_j| d\mathbf{r} = 2|J_j|, \quad \text{takže} \quad |J_j| = \frac{1}{2}|T_j|,$$

kde  $|T_j|$  je plocha trojúhelníka  $T_j$ . Inverzní zobrazení k zobrazení  $\mathbf{x}_j(\mathbf{r})$  je

$$\begin{pmatrix} r_j(x, y) \\ s_j(x, y) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{r}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_j^{-1}(\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2^j + \mathbf{v}_3^j)). \quad (4.18)$$

Jestliže

$$\mathbf{J}_j = \begin{pmatrix} x_r^j & x_s^j \\ y_r^j & y_s^j \end{pmatrix}, \quad \text{pak} \quad \mathbf{J}_j^{-1} = \begin{pmatrix} r_x^j & r_y^j \\ s_x^j & s_y^j \end{pmatrix} = \frac{1}{J_j} \begin{pmatrix} y_s^j & -x_s^j \\ -y_r^j & x_r^j \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

kde dolní index  $x$  resp.  $y$  resp.  $r$  resp.  $s$  značí parciální derivaci podle  $x$  resp.  $y$  resp.  $r$  resp.  $s$ . Vzhledem k linearitě zobrazení  $\mathbf{x}(\mathbf{r})$  jsou  $x_r^j, x_s^j, y_r^j, y_s^j, r_x^j, r_y^j, s_x^j, s_y^j$  konstanty.

Nechť  $\{\ell_\alpha(\mathbf{r})\}_{\alpha=1}^n$  je báze v prostoru  $\mathcal{P}_q^2(\mathbf{r})$  polynomů stupně  $q$ , tvořená Lagrangeovými fundamentálními polynomy stupně  $q$  na vhodně zvolené množině uzlů  $\{\mathbf{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ , tj.

$$\ell_\alpha(\mathbf{r}_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n.$$

Uzly  $\mathbf{x}_\alpha^j$  a bázové funkce  $\ell_\alpha^j$  na trojúhelníku  $T_j$  jsou určeny pomocí uzlů  $\mathbf{r}_\alpha$  a bázových funkcí  $\ell_\alpha$  na referenčním trojúhelníku  $T$  prostřednictvím transformací (4.17) a (4.18),

$$\mathbf{x}_\alpha^j = \mathbf{x}_j(\mathbf{r}_\alpha), \quad \ell_\alpha^j(\mathbf{x}) = \ell_\alpha(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Rozložení uzlů může být rovnoměrné: uzly na stranách dělí každou stranu na  $q$  stejných dílků, vnitřní uzly dostaneme jako průsečky spojnic uzlů na stranách, na obrázku 4.1 jsou rovnoměrně rozložené uzly jednoho z trojúhelníků  $T_j$  vyznačeny pomocí plných koleček.

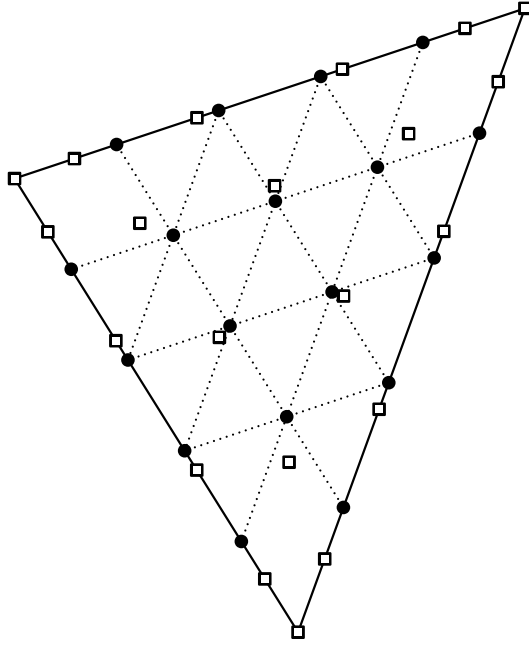
Optimalizovanou volbu uzlů lze najít třeba v [26], str 174–181, v obrázku 4.1 jsou optimalizované uzly vyznačeny pomocí čtverečků. Všimněte si, že optimalizované uzly jsou k vrcholům trojúhelníka blíže než odpovídající uzly rovnoměrného dělení. Ukázku optimalizovaných uzlů na referenčním trojúhelníku nabízí obrázek 4.2.

Strany  $\overline{\mathbf{v}_1^j \mathbf{v}_2^j}$ ,  $\overline{\mathbf{v}_2^j \mathbf{v}_3^j}$ ,  $\overline{\mathbf{v}_3^j \mathbf{v}_1^j}$  trojúhelníka  $T_j$  označíme postupně jako  $\Gamma_1^j$ ,  $\Gamma_2^j$ ,  $\Gamma_3^j$ . Ukázku značení uzlů na trojúhelníku  $T_j$  nabízí obrázek 4.3.

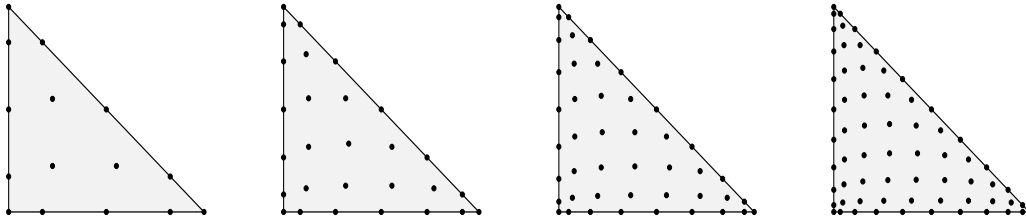
Nechť  $\{p_\alpha(\mathbf{r})\}_{\alpha=1}^n$  jsou ortonormální polynomy na referenčním trojúhelníku  $T$ , tj. platí

$$\int_T p_\alpha(\mathbf{r}) p_\beta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Ortogonalní polynomy  $\{p_\alpha(r, s)\}_{\alpha=1}^n$  dostaneme Grammovou-Schmidtovou ortonormalizací polynomů  $\{r^\alpha s^\beta\}_{0 \leq \alpha + \beta \leq q}$ . Efektivní konstrukce ortonormálních polynomů založená na použití Jacobiho polynomů  $\{P_i^{(\alpha, \beta)}(r)\}_{i=0}^n$  je detailně popsána v [26], strana 173.



Obr. 4.1: Rovnoměrné a optimalizované rozložení uzlů,  $q = 5$ ,  $n = 21$



Obr. 4.2: Optimalizovaná síť uzlů na referenčním trojúhelníku  $T$  pro  $q = 4, 6, 8, 10$

Označme

$$\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) = (\ell_1(\mathbf{r}), \ell_2(\mathbf{r}), \dots, \ell_n(\mathbf{r}))^T, \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}) = (p_1(\mathbf{r}), p_2(\mathbf{r}), \dots, p_n(\mathbf{r}))^T.$$

Protože  $p_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\beta=1}^n p_\alpha(\mathbf{r}_\beta) \ell_\beta(\mathbf{r})$ ,

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) \tag{4.20}$$

kde

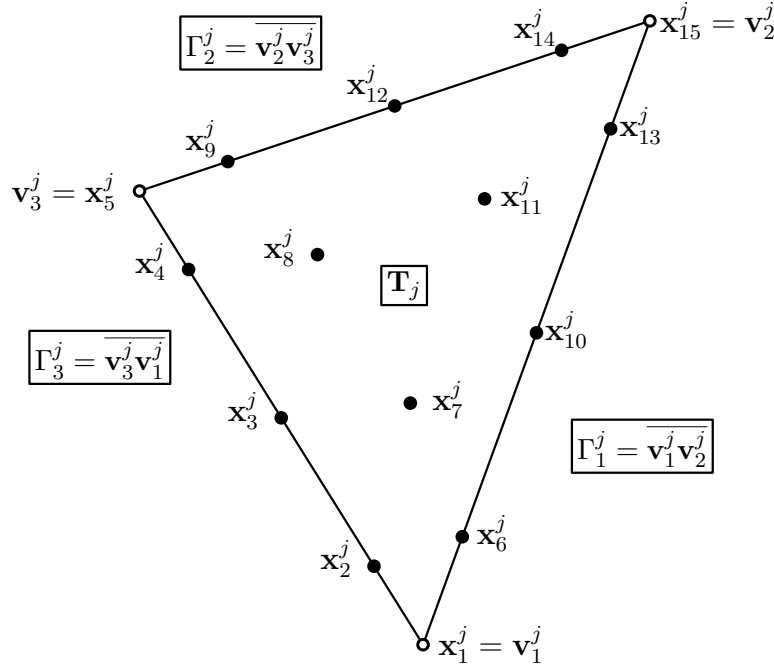
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{r}_1) & p_2(\mathbf{r}_1) & \cdots & p_n(\mathbf{r}_1) \\ p_1(\mathbf{r}_2) & p_2(\mathbf{r}_2) & \cdots & p_n(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{r}_n) & p_2(\mathbf{r}_n) & \cdots & p_n(\mathbf{r}_n) \end{pmatrix}$$

je zobecněná Vandermondova matice funkcí  $\{p_\alpha(\mathbf{r})\}_{\alpha=1}^n$ . Protože

$$\begin{aligned} \int_T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})[\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} &= \int_T \mathbf{V}^{-T} \mathbf{p}(\mathbf{r}) [\mathbf{V}^{-T} \mathbf{p}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} = \mathbf{V}^{-T} \int_T \mathbf{p}(\mathbf{r})[\mathbf{p}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} \mathbf{V}^{-1} = \\ &= \mathbf{V}^{-T} \mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Odtud a z (4.4) dostaneme

$$\mathbf{M}_j = \frac{1}{2}|T_j|\mathbf{M}, \quad \text{kde } \mathbf{M} = (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1}. \quad (4.21)$$



Obr. 4.3: Uzly na trojúhelníku  $T_j$ ,  $q = 4$ ,  $n = 15$

Také matice  $\mathbf{S}_x^j$  a  $\mathbf{S}_y^j$  vyjádříme pomocí ortonormálních polynomů. Na základě pravidla o derivování složené funkce platí

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{T_j} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r_j}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s_j}{\partial x} = r_x^j \frac{\partial}{\partial r} + s_x^j \frac{\partial}{\partial s}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{T_j} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r_j}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{\partial s_j}{\partial y} = r_y^j \frac{\partial}{\partial r} + s_y^j \frac{\partial}{\partial s}.$$

Proto

$$\mathbf{S}_x^j = \int_{T_j} \frac{\partial \boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x})}{\partial x} [\boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x})]^T d\mathbf{x} = \frac{1}{2}|T_j| \left[ r_x^j \int_T \frac{\partial \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})}{\partial r} [\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} + s_x^j \int_T \frac{\partial \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})}{\partial s} [\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} \right],$$

$$\mathbf{S}_y^j = \int_{T_j} \frac{\partial \boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x})}{\partial y} [\boldsymbol{\ell}_j(\mathbf{x})]^T d\mathbf{x} = \frac{1}{2}|T_j| \left[ r_y^j \int_T \frac{\partial \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})}{\partial r} [\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} + s_y^j \int_T \frac{\partial \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})}{\partial s} [\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} \right].$$

V dalším se věnujme vyjádření integrálů. Protože

$$\frac{\partial p_\alpha(\mathbf{r})}{\partial r} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial p_\alpha(\mathbf{r}_\beta)}{\partial r} \ell_\beta(\mathbf{r}),$$

dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{r})}{\partial r} = \mathbf{V}_r^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}), \quad (4.22)$$

kde

$$\mathbf{V}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_1)}{\partial r} & \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_1)}{\partial r} & \dots & \frac{\partial p_n(\mathbf{r}_1)}{\partial r} \\ \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_2)}{\partial r} & \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_2)}{\partial r} & \dots & \frac{\partial p_n(\mathbf{r}_2)}{\partial r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_n)}{\partial r} & \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_n)}{\partial r} & \dots & \frac{\partial p_n(\mathbf{r}_n)}{\partial r} \end{pmatrix}$$

je zobecněná Vandermondova matice funkcí  $\{\partial p_\alpha(\mathbf{r})/\partial r\}_{\alpha=1}^n$ . Ze (4.20) a (4.22) dostaneme

$$\frac{\partial \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})}{\partial r} = \mathbf{V}^{-T} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{r})}{\partial r} = \mathbf{V}^{-T} \mathbf{V}_r^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) = (\mathbf{V}_r \mathbf{V}^{-1})^T \mathbf{V}^{-T} \mathbf{p}(\mathbf{r}),$$

takže

$$\begin{aligned} \int_T \frac{\partial \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})}{\partial r} [\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} &= \int_T (\mathbf{V}_r \mathbf{V}^{-1})^T \mathbf{V}^{-T} \mathbf{p}(\mathbf{r}) (\mathbf{V}^{-T} \mathbf{p}(\mathbf{r}))^T d\mathbf{r} = \\ &= (\mathbf{V}_r \mathbf{V}^{-1})^T \mathbf{V}^{-T} \int_T \mathbf{p}(\mathbf{r}) [\mathbf{p}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} \mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{V}_r \mathbf{V}^{-1})^T (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Podobně odvodíme

$$\int_T \frac{\partial \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})}{\partial s} [\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})]^T d\mathbf{r} = (\mathbf{V}_s \mathbf{V}^{-1})^T (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1},$$

kde

$$\mathbf{V}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_1)}{\partial s} & \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_1)}{\partial s} & \dots & \frac{\partial p_n(\mathbf{r}_1)}{\partial s} \\ \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_2)}{\partial s} & \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_2)}{\partial s} & \dots & \frac{\partial p_n(\mathbf{r}_2)}{\partial s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_n)}{\partial s} & \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_n)}{\partial s} & \dots & \frac{\partial p_n(\mathbf{r}_n)}{\partial s} \end{pmatrix}$$

je zobecněná Vandermondova matice funkcí  $\{\partial p_\alpha(\mathbf{r})/\partial s\}_{\alpha=1}^n$ . Celkem tedy

$$\mathbf{S}_x^j = \frac{1}{2}|T_j|(r_x^j \mathbf{S}_r + s_x^j \mathbf{S}_s), \quad \mathbf{S}_y^j = \frac{1}{2}|T_j|(r_y^j \mathbf{S}_r + s_y^j \mathbf{S}_s),$$

kde

$$\mathbf{S}_r = (\mathbf{V}_r \mathbf{V}^{-1})^T (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1}, \quad \mathbf{S}_s = (\mathbf{V}_s \mathbf{V}^{-1})^T (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1}.$$

Pro matice  $\mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{S}_x^j$  a  $\mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{S}_y^j$  z pravé strany (4.16) soustavy (4.15) tak dostaneme

$$\mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{S}_x^j = r_x^j \mathbf{D}_r + s_x^j \mathbf{D}_s, \quad \mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{S}_y^j = r_y^j \mathbf{D}_r + s_y^j \mathbf{D}_s,$$

kde

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{V} \mathbf{V}_r^T (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1}, \quad \mathbf{D}_s = \mathbf{V} \mathbf{V}_s^T (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1}.$$

Dále se věnujme vyjádření matic  $\mathbf{M}_{j\ell}$ . Úsečku  $\Gamma_{j\ell}$  s koncovými body  $\mathbf{v}_1^{j\ell}$  a  $\mathbf{v}_2^{j\ell}$  lze popsat pomocí zobrazení

$$\bar{\mathbf{x}}_{j\ell}(r) = \frac{1}{2}[\mathbf{v}_1^{j\ell} + \mathbf{v}_2^{j\ell} + (\mathbf{v}_2^{j\ell} - \mathbf{v}_1^{j\ell})r], \quad r \in [-1, 1].$$

Odtud

$$\mathbf{M}_{j\ell} = \int_{\Gamma_{j\ell}} \boldsymbol{\ell}_{j\ell}(\mathbf{x}) [\boldsymbol{\ell}_{j\ell}(\mathbf{x})]^T dS = \frac{1}{2} |\Gamma_{j\ell}| \int_{-1}^1 \bar{\boldsymbol{\ell}}(r) [\bar{\boldsymbol{\ell}}(r)]^T dr.$$

Zde  $|\Gamma_{j\ell}| = |\mathbf{v}_2^{j\ell} - \mathbf{v}_1^{j\ell}|$  je délka úsečky  $\Gamma_{j\ell}$  a  $\bar{\boldsymbol{\ell}}(r) = (\bar{\ell}_1(r), \bar{\ell}_2(r), \dots, \bar{\ell}_{q+1}(r))^T$ , kde  $\{\bar{\ell}_\alpha(r)\}_{\alpha=1}^{q+1}$  jsou Lagrangeovy fundamentální polynomy stupně  $q$  na množině uzlů  $\{\bar{r}_\alpha\}_{\alpha=1}^{q+1}$ . Platí přitom, že

$$\mathbf{x}_\alpha^{j\ell} = \bar{\mathbf{x}}_{j\ell}(\bar{r}_\alpha), \quad \ell_\alpha^{j\ell}(\bar{\mathbf{x}}_{j\ell}(r)) = \ell_\alpha(r), \quad \alpha = 1, 2, \dots, q+1.$$

Nechť  $\{\bar{p}_\alpha(r)\}_{\alpha=1}^{q+1}$  jsou normalizované Legendrovy polynomy na úsečce  $[-1, 1]$ , tj. platí

$$\int_{-1}^1 \bar{p}_\alpha(r) \bar{p}_\beta(r) dr = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, q+1,$$

a nechť

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \bar{p}_1(\bar{r}_1) & \bar{p}_2(\bar{r}_1) & \cdots & \bar{p}_{q+1}(\bar{r}_1) \\ \bar{p}_1(\bar{r}_2) & \bar{p}_2(\bar{r}_2) & \cdots & \bar{p}_{q+1}(\bar{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_1(\bar{r}_{q+1}) & \bar{p}_2(\bar{r}_{q+1}) & \cdots & \bar{p}_{q+1}(\bar{r}_{q+1}) \end{pmatrix}$$

je zobecněná Vandermondova matice funkcí  $\{\bar{p}_\alpha(r)\}_{\alpha=1}^{q+1}$ . Dále už postupujeme obdobně jako u vyjádření matice  $\mathbf{M}_j$  a obdržíme

$$\mathbf{M}_{j\ell} = \frac{1}{2} |\Gamma_{j\ell}| \bar{\mathbf{M}}, \quad \text{kde } \bar{\mathbf{M}} = (\bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}^T)^{-1}. \quad (4.26)$$

Pravá strana (4.16) soustavy (4.15) obsahuje matice

$$\mathbf{M}_j^{-1} \mathbf{E}_{j\ell} \mathbf{M}_{j\ell} = \frac{|\Gamma_{j\ell}|}{|T_j|} \mathbf{B}_{j\ell}, \quad \text{kde } \mathbf{B}_{j\ell} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E}_{j\ell} \bar{\mathbf{M}}. \quad (4.27)$$



Jestliže  $\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n)$ , pak

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{E}_{j\ell} = (\mathbf{z}_{p_{j\ell}(1)}, \mathbf{z}_{p_{j\ell}(2)}, \dots, \mathbf{z}_{p_{j\ell}(q+1)}),$$

jak plyne z definice matice  $\mathbf{E}_{j\ell}$  a zobrazení  $p_{j\ell}$ . Matice  $\mathbf{E}_{j\ell}$  tedy sestavovat nemusíme, stačí nám vektory  $\mathbf{p}_{j\ell}$ , viz (4.12).

Pravou stranu  $\mathcal{F}_i^j$  soustavy (4.15) můžeme pomocí (4.16), (4.24) a (4.27) vyjádřit ve tvaru

$$\mathcal{F}_i^j(\Delta) = (r_x^j \mathbf{D}_r + s_x^j \mathbf{D}_s) \mathbf{F}_i(\Delta_j) + (r_y^j \mathbf{D}_r + s_y^j \mathbf{D}_s) \mathbf{G}_i(\Delta_j) - \sum_{\ell \in S(j)} \frac{|\Gamma_{j\ell}|}{|T_j|} \mathbf{B}_{j\ell} \mathbf{H}_i(\Delta_j, \Delta_\ell). \quad (4.28)$$

Matice  $\mathbf{D}_r$  a  $\mathbf{D}_s$  jsou pro všechny trojúhelníky stejné. Matice  $\mathbf{B}_{j\ell}$  jsou obecně pro každou stranu jiné. Pokud ale uzly na všech trojúhelnících očíslovujeme jednotným postupem, třeba podle obrázku 4.3, pak každá z matic  $\mathbf{B}_{j\ell}$  bude rovna některé ze tří matic  $\mathbf{B}_{1\ell}$ ,  $\ell \in S(1)$ . Geometrická data specifická pro každý trojúhelník jsou  $r_x^j$ ,  $r_y^j$ ,  $s_x^j$ ,  $s_y^j$ ,  $|T_j|$  a  $|\Gamma_{j\ell}|$ .

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (4.15) s pravými stranami (4.28) zapíšeme ve tvaru

$$\dot{\Delta} = \mathcal{F}(\Delta),$$

$$\text{kde } \mathcal{F}(\Delta) = \left( [\mathcal{F}_1(\Delta)]^T, [\mathcal{F}_2(\Delta)]^T, \dots, [\mathcal{F}_{N_T}(\Delta)]^T \right)^T, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{F}_j(\Delta) = \left( [\mathcal{F}_1^j(\Delta)]^T, [\mathcal{F}_2^j(\Delta)]^T, [\mathcal{F}_3^j(\Delta)]^T, [\mathcal{F}_4^j(\Delta)]^T \right)^T, \quad j = 1, 2, \dots, N_T.$$

## 4.2. Časová diskretizace užitím Rungových-Kuttových metod

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (4.29) řešíme pomocí Rungovy-Kuttovy metody známé pod zkratkou SSP-RK (podle anglického strong stability preserving Runge-Kutta), viz [26]. SSP-RK metodu popíšeme pro rovnici

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathcal{F}(t, \mathbf{w}).$$

Nechť  $\mathbf{w}^k$  je přibližné řešení v čase  $t_k$  a  $\tau_k$  je délka kroku. Pak  $s$ -stupňová SSP-RK metoda je tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &:= \mathbf{w}^k, \\ \mathbf{v}_i &:= \sum_{j=0}^{i-1} [a_{ij} \mathbf{v}_j + \tau_k b_{ij} \mathcal{F}(t_k + c_j \tau_k, \mathbf{v}_j)], \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ \mathbf{w}^{k+1} &:= \mathbf{v}_s. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Jako příklad uvedeme dvě SSP-RK metody, další lze dohledat v [26], [47]. Dvoustupňová

SSP-RK metoda řádu 2 je tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &:= \mathbf{w}^k, \\ \mathbf{v}_1 &:= \mathbf{v}_0 + \tau_k \mathcal{F}(t_k, \mathbf{v}_0), \\ \mathbf{v}_2 &:= \frac{1}{2} [\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \tau_k \mathcal{F}(t_k + \tau_k, \mathbf{v}_1)], \\ \mathbf{w}^{k+1} &:= \mathbf{v}_2\end{aligned}$$

a třístupňová SSP-RK metoda řádu 3 je dána předpisem

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &:= \mathbf{w}^k, \\ \mathbf{v}_1 &:= \mathbf{v}_0 + \tau_k \mathcal{F}(t_k, \mathbf{v}_0), \\ \mathbf{v}_2 &:= \frac{1}{4} [3\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \tau_k \mathcal{F}(t_k + \tau_k, \mathbf{v}_1)], \\ \mathbf{v}_3 &:= \frac{1}{3} [\mathbf{v}_0 + 2\mathbf{v}_2 + 2\tau_k \mathcal{F}(t_k + \frac{1}{2}\tau_k, \mathbf{v}_2)], \\ \mathbf{w}^{k+1} &:= \mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

Délku časového kroku  $\tau_k$  volíme tak, aby byla splněna CFL podmínka typu (3.101). Využijeme toho, že pro Eulerovy rovnice  $|\lambda_{\max}(\mathbf{w}, \mathbf{n})| = |un_1 + vn_2| + a$ . CFL podmínka, konkrétně pro Rusakovův numerický tok (3.100), pak znamená zvolit  $\tau_k$  tak, aby

$$\tau_k \frac{|\Gamma_{j\ell}|}{|T_j|} \left( |[u_\alpha^{j\ell}]^k n_1^{j\ell} + [v_\alpha^{j\ell}]^k n_2^{j\ell}| + [a_\alpha^{j\ell}]^k \right) \leq C_{\text{CFL}}, \quad (4.31)$$

kde  $j = 1, 2, \dots, N_T$ ,  $\ell \in S(j)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, q+1$ ,

$$\begin{aligned}\varrho_\alpha^{j\ell} &= \Delta_{1\alpha}^{j\ell}, \quad u_\alpha^{j\ell} = \frac{\Delta_{2\alpha}^{j\ell}}{\varrho_\alpha^{j\ell}}, \quad v_\alpha^{j\ell} = \frac{\Delta_{3\alpha}^{j\ell}}{\varrho_\alpha^{j\ell}}, \\ p_\alpha^{j\ell} &= (\gamma - 1) \left( \Delta_{4\alpha}^{j\ell} - \frac{1}{2} \varrho_\alpha^{j\ell} \left( [u_\alpha^{j\ell}]^2 + [v_\alpha^{j\ell}]^2 \right) \right), \quad a_\alpha^{j\ell} = \sqrt{\frac{\gamma p_\alpha^{j\ell}}{\varrho_\alpha^{j\ell}}}\end{aligned}$$

a kde horní index  $k$  v (4.31) značí přibližné řešení v čase  $t_k$ . Pro CFL konstantu  $C_{\text{CFL}}$  je v [10] doporučena volba

$$C_{\text{CFL}} = \frac{1}{2q+1}.$$

Pro ostatní numerické toky volíme v (4.31) hodnoty  $u_\alpha^{j\ell}$ ,  $v_\alpha^{j\ell}$  a  $a_\alpha^{j\ell}$  v souladu s textem upřesňujícím CFL podmínku (3.101).

### 4.3. Potlačení nežádoucích oscilací

Metody vyšších řádů vyvolávají v místech prudkých změn přesného řešení falešné (nefyzikální) oscilace. Pozorovat je můžeme zejména v okolí rázových vln a kontaktních nespojitostí. Vznik falešných oscilací se označuje jako *Gibbsův jev*. Nežádoucí oscilace

lze potlačit pomocí techniky označované anglicky jako *slope limiting*. Místo doslovného překladu *omezování sklonu* budeme používat termín *limitování*. Kvalitní limitovací technika je popsána v [49], její implementace viz [26]. My se omezíme na jednoduchou strategii limitování, kterou zavedl Cockburn, viz [9]. Protože limitování souvisí jen s prostorovou proměnnou, závislost příslušných veličin na čase vypustíme.

Nechť  $v$  je po částech polynomická funkce, na kterou chceme aplikovat limiter  $\Pi$ , a necht'  $u_j = \Pi v_j$  je výsledek limitování  $v_j = v|_{T_j}$  na trojúhelníku  $T_j$ . Symbolem  $v_j^1$  označíme ortogonální projekci  $v_j$  do prostoru polynomů stupně jedna. Budeme předpokládat, že  $v_j$  má na trojúhelníku falešné oscilace, právě když je na něm má  $v_j^1$ . Necht'  $\Pi^1$  je limiter pro funkce po částech lineární. Limitování funkce  $v_j$  provedeme takto:

$$\begin{aligned} & \text{(a) urči } w_j = \Pi^1 v_j^1, \\ & \text{(b) jestliže } w_j = v_j^1, \text{ pak } u_j = v_j, \\ & \text{(c) jinak } u_j = w_j. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ukažme si, jak získáme ortogonální projekci  $v_j^1$ . Pomocí lagrangeovské báze  $\{\ell_\alpha(\mathbf{r})\}_{\alpha=1}^n$  a ortonormální báze  $\{p_\alpha(\mathbf{r})\}_{\alpha=1}^n$  odvodíme

$$v_j(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha^j \ell_\alpha^j(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha^j \ell_\alpha(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})) = \Delta_j^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\delta}_j^T \mathbf{p}(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})) = \sum_{\alpha=1}^n \delta_\alpha^j p_\alpha(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})).$$

Protože  $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})$ , viz (4.20), dostaneme

$$\Delta_j^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\delta}_j^T \mathbf{p}(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\delta}_j^T \mathbf{V}^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})) = (\mathbf{V} \boldsymbol{\delta}_j)^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})),$$

takže

$$\Delta_j = \mathbf{V} \boldsymbol{\delta}_j. \tag{4.33}$$

Předpokládejme, že  $\text{span}\{p_1, p_2, p_3\} = \text{span}\{1, r, s\}$  a že  $p_1$  je konstanta. Pak

$$v_j^1(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^3 \delta_\alpha^j p_\alpha(\mathbf{r}_j(\mathbf{x})), \tag{4.34}$$

kde  $(\delta_1^j, \delta_2^j, \delta_3^j, \dots, \delta_n^j)^T = \boldsymbol{\delta}_j = \mathbf{V}^{-1} \Delta_j$ .

Všimněte si, že průměrná hodnota  $\bar{v}_j$  funkce  $v_j$  na trojúhelníku  $T_j$ ,

$$\bar{v}_j = \frac{1}{|T_j|} \int_{T_j} v_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{|J_j|}{|T_j|} \int_T v(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int_T \sum_{\alpha=1}^n \delta_\alpha^j p_\alpha(\mathbf{r}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_T \delta_1^j p_1 \, d\mathbf{r} = \delta_1^j p_1,$$

je rovněž průměrnou hodnotou  $\bar{v}^1$  funkce  $v^1$ .

Přejděte nyní už ke konstrukci limiteru  $\Pi^1$  pro funkci po částech lineární. Začneme tím, že definujeme tzv. minmod funkci předpisem

$$\text{minmod}(a_1, a_2, \dots, a_p) = s \min(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_p|), \tag{4.35}$$

kde

$$s = \begin{cases} 1, & \text{když } a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_p > 0, \\ -1, & \text{když } a_1 < 0, a_2 < 0, \dots, a_p < 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (4.36)$$

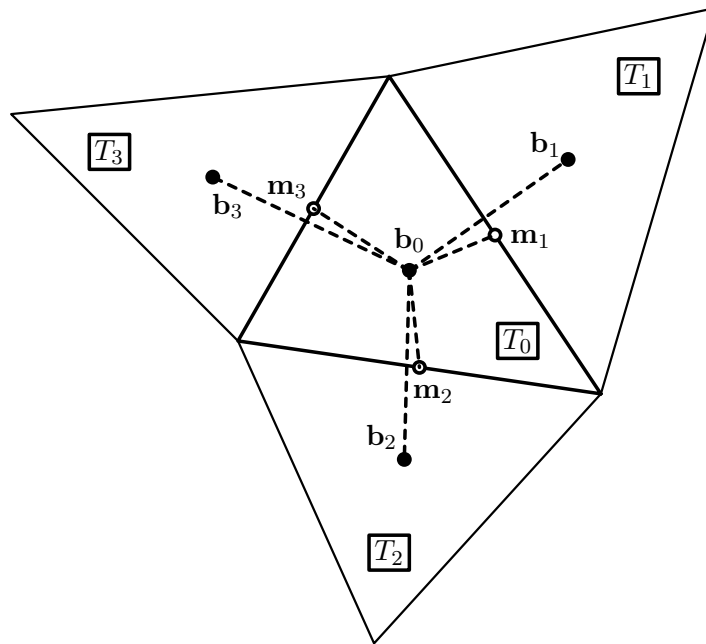
V dalším výkladu budeme používat značení uvedené na obrázku 4.4. Tedy, uvažujme trojúhelník  $T_0$  a tři přilehlé trojúhelníky  $T_1, T_2, T_3$ . Body  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  jsou těžiště trojúhelníků  $T_0, T_1, T_2, T_3$  a  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$  jsou středy stran trojúhelníka  $T_0$ .

Vektor  $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{m}_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , vyjádříme pomocí vektorů  $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_i}$  a  $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_{\varrho(i)}}$ , kde  $\varrho(i) \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\varrho(i) \neq i$ , tj.

$$\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{m}_i} = \alpha_i \overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_i} + \beta_i \overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_{\varrho(i)}}.$$

Vektor  $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_{\varrho(i)}}$  přitom zvolíme tak, aby konstanty  $\alpha_i, \beta_i$  byly nezáporné. Pro případ z obrázku 4.4 je  $\varrho(1) = 2, \varrho(2) = \varrho(3) = 1$ . Konkrétně pro vektor  $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{m}_1}$  tak dostaneme

$$\mathbf{m}_1 - \mathbf{b}_0 = \alpha_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + \beta_1(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0).$$



Obr. 4.4: Lineární limiter na trojúhelníku  $T_0$ : označení

Nechť  $v$  je lineární funkce, tj. stejná na každém z trojúhelníků  $T_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Pak zřejmě

$$v(\mathbf{m}_1) - v(\mathbf{b}_0) = \alpha_1(v(\mathbf{b}_1) - v(\mathbf{b}_0)) + \beta_1(v(\mathbf{b}_2) - v(\mathbf{b}_0)),$$

a protože

$$\bar{v}_i := \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} v \, d\mathbf{x} = v(\mathbf{b}_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (4.37)$$

platí

$$v(\mathbf{m}_1) - \bar{v}_0 = \alpha_1(\bar{v}_1 - \bar{v}_0) + \beta_1(\bar{v}_2 - \bar{v}_0) \quad \text{nebo-li} \quad v_{01} = \bar{v}_{01},$$

kde

$$v_{01} := v(\mathbf{m}_1) - \bar{v}_0, \quad \bar{v}_{01} := \alpha_1(\bar{v}_1 - \bar{v}_0) + \beta_1(\bar{v}_2 - \bar{v}_0).$$

V souladu s obrázkem 4.4 podobně dostaneme

$$v_{02} := v(\mathbf{m}_2) - \bar{v}_0, \quad \bar{v}_{02} := \alpha_2(\bar{v}_2 - \bar{v}_0) + \beta_2(\bar{v}_1 - \bar{v}_0),$$

$$v_{03} := v(\mathbf{m}_3) - \bar{v}_0, \quad \bar{v}_{03} := \alpha_3(\bar{v}_3 - \bar{v}_0) + \beta_3(\bar{v}_1 - \bar{v}_0).$$

Souhrnně tedy

$$v_{0i} = v(\mathbf{m}_i) - \bar{v}_0, \quad \bar{v}_{0i} = \alpha_i(\bar{v}_i - \bar{v}_0) + \beta_i(\bar{v}_{\varrho(i)} - \bar{v}_0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.38)$$

Po této přípravě můžeme přistoupit k popisu limiteru. Nechť  $v$  je po částech lineární funkce, tj. na každém z trojúhelníků  $T_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , je  $v$  obecně jiná. Na trojúhelníku  $T_0$  vyjádříme

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{m}_i) \varphi_i(\mathbf{x}) = \bar{v}_0 + \sum_{i=1}^3 v_{0i} \varphi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in T_0,$$

kde  $\varphi_i$  jsou lineární funkce s vlastností

$$\varphi_i(\mathbf{m}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Nechť

$$\Delta_i = \min_{\text{mod}}(v_{0i}, \mu \bar{v}_{0i}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.39)$$

kde  $\mu \in [1, 2]$  je volitelný parametr, v [10] je doporučena hodnota  $\mu = 1,5$ . Jestliže  $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$ , limiter  $\Pi^1$  definujeme předpisem

$$\Pi^1 v(\mathbf{x}) = \bar{v}_0 + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (4.40)$$

Takto definovaný limiter splňuje tři charakteristické vlastnosti.

1. Platí „zákon zachování“  $\overline{\Pi^1 v} = \bar{v}_0$ . Skutečně, protože  $\Pi^1 v(\mathbf{b}_0) = v(\mathbf{b}_0)$ ,

$$\int_{T_0} \Pi^1 v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |T_0| \Pi^1 v(\mathbf{b}_0) = |T_0| v(\mathbf{b}_0) = \int_{T_0} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

2. Limiter „zachovává“ lineární funkci, tj. pro lineární funkci  $\Pi^1 v = v$ . Skutečně, když je  $v$  lineární, pak  $\Delta_i = v_{0i} = v(\mathbf{m}_i) - \bar{v}_0$ , odtud  $\Pi^1 v(\mathbf{m}_i) = v(\mathbf{m}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a tedy  $\Pi^1 v = v$ .
3. Limiter omezuje gradient, tj.  $|\nabla \Pi^1 v| \leq |\nabla v|$ . Tak tomu skutečně je, jak plyne z nerovností  $|\Pi^1 v(\mathbf{m}_i) - \bar{v}_0| = |\Delta_i| \leq |v(\mathbf{m}_i) - \bar{v}_0|$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Pro lineární funkci  $v$  je limiter  $\Pi^1 v$  definován předpisem (4.40), neboť pro lineární funkci  $\sum_{i=1}^3 [v(\mathbf{m}_i) - v(\mathbf{b}_0)] \equiv \sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$ .

Jestliže  $\sum_{i=1}^3 \Delta_i \neq 0$  spočteme

$$\Delta^+ = \sum_{i=1}^3 \Delta_i^+, \quad \Delta^- = \sum_{i=1}^3 \Delta_i^-,$$

kde  $\Delta_i^+ = \max(0, \Delta_i)$ ,  $\Delta_i^- = \min(0, \Delta_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Když  $\Delta^+ = 0$  (lokální maximum) nebo  $\Delta^- = 0$  (lokální minimum), klademe  $\Pi^1 v(\mathbf{x}) = \bar{v}_0$ . Jinak určíme

$$\theta^+ = \min(1, |\Delta^-|/|\Delta^+|), \quad \theta^- = \min(1, |\Delta^+|/|\Delta^-|),$$

a limiter  $\Pi^1$  definujeme předpisem

$$\Pi^1 v(\mathbf{x}) = \bar{v}_0 + \sum_{i=1}^3 \hat{\Delta}_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (4.41)$$

kde

$$\hat{\Delta}_i = \theta^+ \Delta_i^+ + \theta^- \Delta_i^-, \quad i = 1, 2, 3.$$

Protože  $\sum_{i=1}^3 \hat{\Delta}_i = 0$ , limiter (4.41) splňuje první a třetí z výše uvedených charakteristických vlastností.

V [10] je doporučeno provádět limitování v lokálních charakteristických proměnných. Následuje stručný popis takového postupu.

Nechť  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$  je vektor konzervativních proměnných. Nejdříve určíme vektory  $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}(\mathbf{b}_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , viz (4.37). Pak pro každé  $i = 1, 2, 3$  postupně

- (a) sestavíme matici  $\mathbf{T}_i$  vlastních vektorů Jacobiho matice  $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{v}}_0, \mathbf{n}_i)$ , viz (3.10), kde jednotkový směrový vektor  $\mathbf{n}_i = (\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0)/|\mathbf{m}_i - \mathbf{b}_0|$ ;
- (b) sestrojíme vektory  $\mathbf{v}_{0i} = \mathbf{v}(\mathbf{m}_i) - \bar{\mathbf{v}}_0$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_{0i} = \alpha_i(\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}}_0) + \beta_i(\bar{\mathbf{v}}_{\ell(i)} - \bar{\mathbf{v}}_0)$ , viz (4.38);
- (c) aplikací limiteru (4.39) na  $k$ -tou složku vektorů  $\mathbf{v}_{0i}^* := \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{v}_{0i}$  a  $\bar{\mathbf{v}}_{0i}^* := \mathbf{T}_i^{-1} \bar{\mathbf{v}}_{0i}$  dostaneme  $\Delta_k^{*i}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , sestavíme vektor  $\Delta_i^* = (\Delta_1^{*i}, \Delta_2^{*i}, \Delta_3^{*i}, \Delta_4^{*i})^T$  a položíme  $\Delta_i = \mathbf{T}_i \Delta_i^*$ .

Dále postupujeme zase po složkách, tj. postupně pro  $k = 1, 2, 3, 4$  spočteme  $\Pi^1 v_k$  pomocí  $k$ -tých složek  $\Delta_k^1, \Delta_k^2, \Delta_k^3$  vektorů  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , a pak podle algoritmu (4.32) sestavíme  $\Pi v_k$ . Tak dostaneme  $\mathbf{u} = \Pi \mathbf{v} = (\Pi v_1, \Pi v_2, \Pi v_3, \Pi v_4)^T$ .

Vektorový limiter  $\Pi$  zařadíme do SSP-RK metody (4.30) takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &:= \mathbf{w}^k, \\ \mathbf{v}_i &:= \sum_{j=0}^{i-1} [a_{ij} \mathbf{v}_j + \tau_k b_{ij} \mathcal{F}(t_k + c_j \tau_k, \mathbf{v}_j)], \quad \mathbf{v}_i := \Pi \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ \mathbf{w}^{k+1} &:= \mathbf{v}_s. \end{aligned} \quad (4.42)$$

#### 4.4. 1D Eulerovy rovnice

řešíme pro  $x \in [0, \ell]$ . Nechť  $0 \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_N \equiv \ell$  je dělení intervalu  $[0, \ell]$  na  $N$  subintervalů  $D_j = [x_{j-1}, x_j]$  délky  $h_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Přibližné řešení na  $D_j$  je polynom stupně  $q$ , tj.  $w_i^j(x, t) = \sum_{i=1}^n \Delta_{i\alpha}^j(t) \ell_\alpha^j(x)$ , kde  $i = 1, 2, 3$  jsou čísla složek a  $\ell_\alpha^j$  jsou Lagrangeovy fundamentální polynomy příslušné uzlům  $\{x_\alpha^j\}_{\alpha=1}^n$  dělení  $x_{j-1} \equiv x_1^j < x_2^j < \dots < x_n^j \equiv x_j$ ,  $n = q + 1$ .

Ortonomální polynomy  $p_\alpha(r)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , na referenčním intervalu  $[-1, 1]$  jsou normalizované Legendrovy polynomy definované rekurencí

$$c_{\alpha+1}p_{\alpha+2}(r) = rp_{\alpha+1}(r) - c_\alpha p_\alpha(r), \quad c_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(2\alpha-1)(2\alpha+1)}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-2,$$

kde  $p_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_2(r) = \sqrt{\frac{3}{2}}r.$

Na referenčním intervalu  $[-1, 1]$  zvolíme dělení  $-1 \equiv r_1 < r_2 < \dots < r_n \equiv 1$ , kde  $r_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , jsou uzly Gaussovy-Lobattovy formule, tj.  $r_\alpha$  jsou kořeny polynomu  $(1-r^2)p'_n(r)$ . Pomocí zobrazení  $x_j : D \rightarrow D_j$ ,  $x_j(r) = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j + h_j r)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , volíme  $x_\alpha^j = x_j(r_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ . Označme

$$\Delta_i^j = \begin{pmatrix} \Delta_{i1}^j \\ \Delta_{i2}^j \\ \vdots \\ \Delta_{in}^j \end{pmatrix}, \quad \Delta_j = \begin{pmatrix} \Delta_1^j \\ \Delta_2^j \\ \Delta_3^j \end{pmatrix}, \quad \bar{\Delta}_\alpha^j = \begin{pmatrix} \Delta_{1\alpha}^j \\ \Delta_{2\alpha}^j \\ \Delta_{3\alpha}^j \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \\ j = 1, 2, \dots, N, \\ \alpha = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Podobně jako pro 2D Eulerovy rovnice odvodíme

$$\dot{\Delta}_i^j = \frac{2}{h_j} [\mathbf{D}_j \mathbf{F}_i(\Delta_j) + H_i(\bar{\Delta}_n^{j-1}, \bar{\Delta}_1^j) \mathbf{v}_1 - H_i(\bar{\Delta}_n^j, \bar{\Delta}_1^{j+1}) \mathbf{v}_n], \quad (4.43)$$

kde  $\mathbf{D}_j = (\mathbf{V}\mathbf{V}_r)^T(\mathbf{V}\mathbf{V}^T)^{-1}$ ,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{r}_1) & p_2(\mathbf{r}_1) & \dots & p_n(\mathbf{r}_1) \\ p_1(\mathbf{r}_2) & p_2(\mathbf{r}_2) & \dots & p_n(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{r}_n) & p_2(\mathbf{r}_n) & \dots & p_n(\mathbf{r}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_r = \begin{pmatrix} p'_1(\mathbf{r}_1) & p'_2(\mathbf{r}_1) & \dots & p'_n(\mathbf{r}_1) \\ p'_1(\mathbf{r}_2) & p'_2(\mathbf{r}_2) & \dots & p'_n(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_1(\mathbf{r}_n) & p'_2(\mathbf{r}_n) & \dots & p'_n(\mathbf{r}_n) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{F}_i(\Delta_j) = (f_i(\bar{\Delta}_1^j), f_i(\bar{\Delta}_2^j), \dots, f_i(\bar{\Delta}_n^j))^T$ ,  $\mathbf{v}_1$  je první a  $\mathbf{v}_n$  poslední sloupec matice  $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$ .

Pro  $q = 0$  a  $x_1 = 0$  je  $n = 1$ ,  $\mathbf{V}_r = 0$  a tedy  $\mathbf{D}_j = 0$ , dále  $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}_n = \frac{1}{2}$ , takže (4.43) není nic jiného než prostorová diskretizace metodou konečných objemů.

Limitování provedeme na bázi algoritmu (4.32), limiter  $\Pi^1$  pro 1D úlohu ale volíme jinak než ve 2D, viz [9], [26]. Závislost na čase opět nebudeme explicitně vyznačovat.

Nechť tedy  $v_j$  je jedna z funkcí  $w_i^j$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Označíme

$$\begin{aligned} v_j^- &= \bar{v}_j - \min\text{mod}(\bar{v}_j - v_1^j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j), \\ v_j^+ &= \bar{v}_j + \min\text{mod}(v_n^j - \bar{v}_j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j), \end{aligned} \quad (4.44)$$

kde  $\bar{v}_j$  je průměrná hodnota  $v_j$  na  $D_j$  a  $v_1^j = v_j(x_1^j)$ ,  $v_n^j = v_j(x_n^j)$ . Jestliže  $v_j^- = v_1^j$  a současně  $v_j^+ = v_n^j$ , pak limitování neprovedeme, tj.  $\Pi^1 v_j = v_j$ . V opačném případě limitujeme, tj.

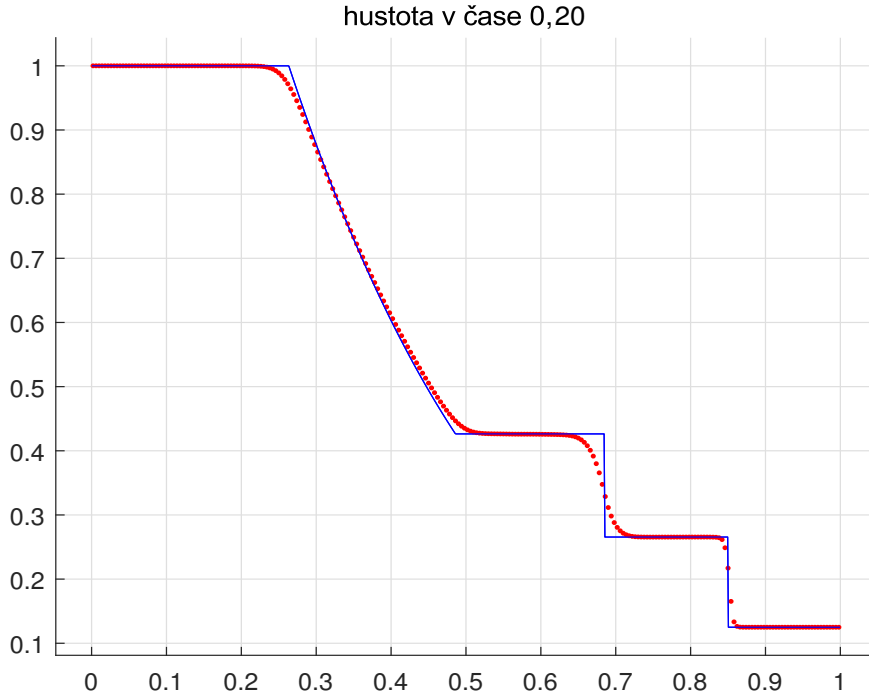
$$\Pi^1 v_j = \bar{v}_j + (x - \bar{x}_j) \cdot \text{minmod} \left( [v_j^1]_x', (\bar{v}_j - \bar{v}_{j-1})/h_j, (\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j)/h_j \right), \quad (4.45)$$

kde  $\bar{x}_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$  a  $v_j^1$  je ortogonální projekce  $v_j$  do prostoru polynomů stupně jedna. Pro  $v_j = w_i^j$  lze odvodit, že

$$\bar{v}_j = \delta_{i1}^j \quad [v_j^1]_x' = \frac{\sqrt{6}}{h_j} \delta_{i2}^j,$$

kde  $(\delta_{i1}^j, \delta_{i2}^j, \dots, \delta_{in}^j)^T \equiv \boldsymbol{\delta}_i^j = \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\Delta}_i^j$ . Časovou diskterizaci provedeme podle (4.42).

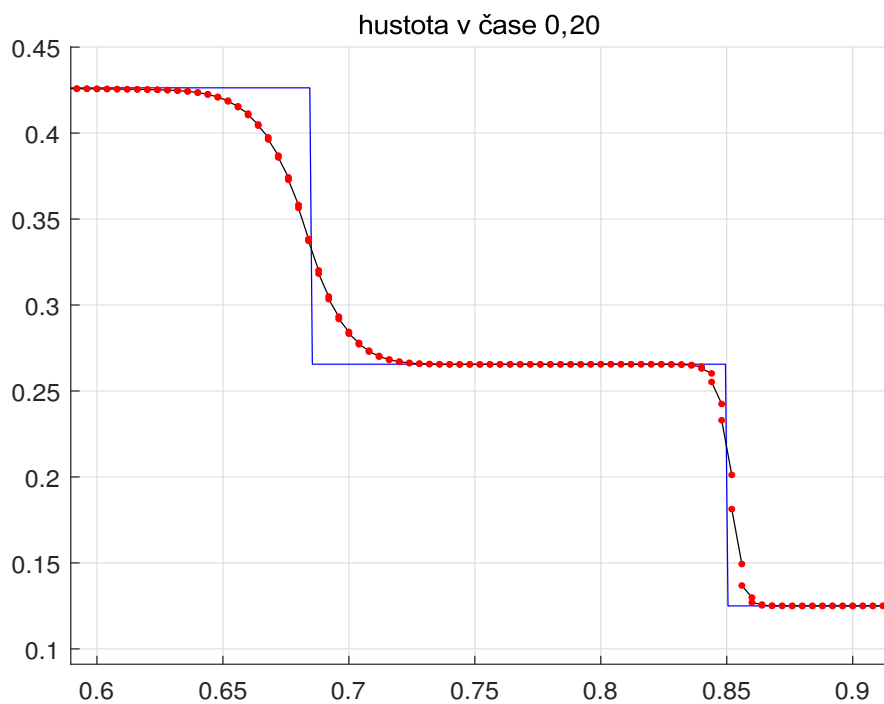
Pro ilustraci uvažujeme řešení Sod shock tube problému, viz příklad 2.12. Na obrázku 4.5: tečky jsou hodnoty DGM řešení ve středech intervalů, tenká čára je přesné řešení.



Obr. 4.5: Sod shock tube problém, hustota, Rusakovův tok,  $q = 8$ ,  $N = 250$

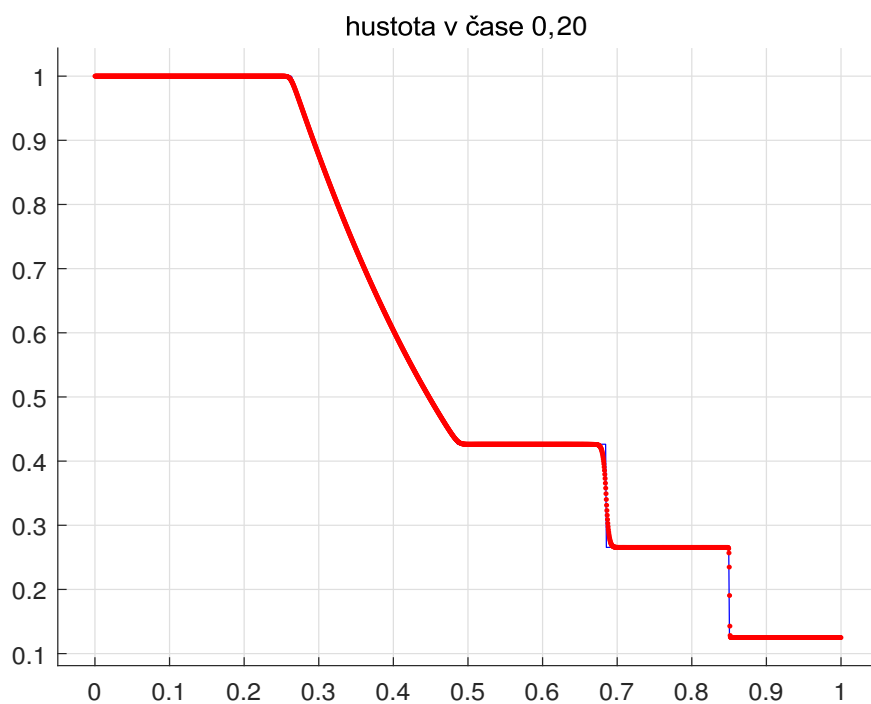
Výpočet byl proveden pomocí mírně modifikovaných programů programů CDF1D Hesthavena, viz [26]. Experimentování prokázalo, že pro řešení SST problému nemá smysl používat DGM příliš vysokých řádů. Zcela postačí metoda řádu  $q = 1$  a limitování (4.45) na každém subintervalu, tj. bez ohledu na test (4.44). Výsledek takového výpočtu je uveden na obrázku 4.6. Tentokrát zobrazujeme plně limitovanou hustotu jako po částech lineární funkci, tečky jsou hodnoty v koncových bodech úseček, kvůli větší názornosti zobrazujeme jen výřez pro  $0,6 < x < 0,9$ .





Obr. 4.6: Sod shock tube problém, hustota, Rusakovův tok,  $q = 1$ ,  $N = 250$

Lepší vystižení vln spojujících konstantní stavy lze dosáhnout použitím většího počtu subintervalů, viz obrázek 4.7, DGM řešení je zobrazeno ve středech subintervalů.



Obr. 4.7: Sod shock tube problém, hustota, Rusakovův tok,  $q = 1$ ,  $N = 2500$

## 5. Řešení Navierových-Stokesových rovnic pro stlačitelné proudění nespojitou Galerkinovou metodou

Omezíme se na dvoudimenzionální úlohu, tj. řešíme rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{w})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_i}. \quad (5.1)$$

Viskózní toky můžeme vyjádřit, ve tvaru

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^2 \mathbf{A}_{ik}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2. \quad (5.2)$$

Jestliže označíme  $Pr = k/(c_p \mu)$ , dostaneme, viz [25],

$$\mathbf{A}_{11} = \frac{\mu}{\varrho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}u & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{4}{3}u^2 + v^2 + \frac{\gamma}{Pr} \left[\frac{E}{\varrho} - |\mathbf{v}|^2\right]\right) & \left(\frac{4}{3} - \frac{\gamma}{Pr}\right)u & \left(1 - \frac{\gamma}{Pr}\right)v & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12} = \frac{\mu}{\varrho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}v & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uv & v & -\frac{2}{3}u & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \frac{\mu}{\varrho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}u & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uv & -\frac{2}{3}v & u & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{22} = \frac{\mu}{\varrho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}v & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ -\left(u^2 + \frac{4}{3}v^2 + \frac{\gamma}{Pr} \left[\frac{E}{\varrho} - |\mathbf{v}|^2\right]\right) & \left(1 - \frac{\gamma}{Pr}\right)u & \left(\frac{4}{3} - \frac{\gamma}{Pr}\right)v & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix}.$$

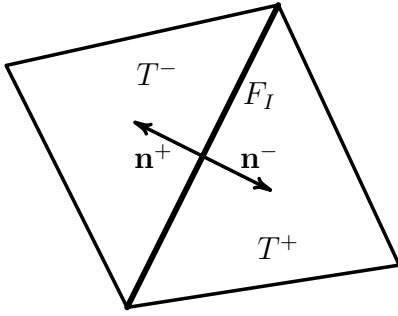
Navierovy-Stokesovy rovnice (5.1) lze tedy zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{w})}{\partial x_i} = \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{A}_{ik}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right). \quad (5.3)$$

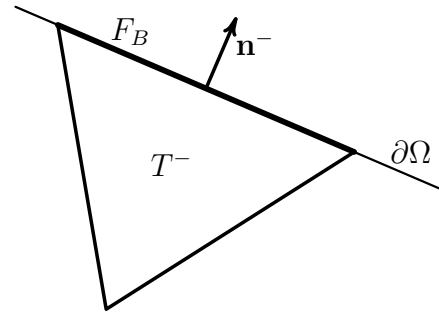
Diskretizaci založenou na nespojité Galerkinově metodě je věnováno velké množství prací, odkazy na některé z nich lze najít třeba v [11], [14]. Z několika známých postupů popíšeme ten, který v roce 1997 publikoval Bassi et al. [3]. V dalších letech pak Bassi se spoluautory svou metodu propracovali, viz [4], z pozdějších prací uvedme třeba [5].

**Diskretizace.** Triangulací  $\mathcal{T}$  polygonální oblasti  $\Omega$  rozumíme množinu  $\{T_e\}$  uzavřených trojúhelníků vykrývajících oblast  $\Omega$ , tj.  $\Omega = \bigcup_e T_e$ , přičemž každé dva různé trojúhelníky triangulace jsou buďto disjunktní nebo mají společný jeden vrchol nebo mají společnou jednu stranu. Množinu stran všech trojúhelníků triangulace označíme  $\mathcal{F} := \mathcal{F}^I \cup \mathcal{F}^B$ , kde  $\mathcal{F}^I$  je množina všech vnitřních stran  $F_I \notin \partial\Omega$  a  $\mathcal{F}^B$  je množina všech hraničních stran  $F_B \in \partial\Omega$ . Pro  $F_I \in \mathcal{F}^I$  existují dva trojúhelníky  $T^+$  a  $T^-$  takové, že  $F_I = T^+ \cap T^-$ . Dále označíme  $\mathbf{n}^+$  resp.  $\mathbf{n}^-$  jednotkovou vnější normálu trojúhelníka  $T^+$  resp.  $T^-$  na  $F_I$ , takže  $\mathbf{n}^+$  směřuje do  $T^-$ ,  $\mathbf{n}^-$  směřuje do  $T^+$ , zřejmě  $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ . Pro hraniční stranu  $F_B$  příhraničního trojúhelníka  $T \equiv T^-$  označíme jednotkovou vnější normálu jako  $\mathbf{n}^-$ , viz obrázek 5.1.

Nechť  $v$  je funkce definovaná a spojitá na  $T^+$  i na  $T^-$ , na  $F_I = T^+ \cap T^-$  je však  $v$  obecně nespojitá. Pak označíme jako  $v^+$  hodnotu  $v$  ze strany trojúhelníka  $T^+$  a jako  $v^-$  hodnotu  $v$  ze strany trojúhelníka  $T^-$ . Na hraniční straně  $F_B$  příslušné příhraničnímu trojúhelníku  $T$  značíme jako  $v^-$  hodnotu funkce  $v$  definované na  $T$ .



Obr. 5.1: Vnitřní strana  $F_I = T^- \cap T^+$



Obr. 5.2: Hraniční strana  $F_B \in \partial\Omega$

Rovnici (5.3) přepíšeme do ekvivalentní soustavy tří rovnic prvního řádu

$$\sigma_i = \mathbf{A}_{ik}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{w})}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \quad (5.5)$$

pro neznámé  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\mathbf{w}$ . Pro zjednodušení zápisu zde i v dalším používáme Einsteinovu sumační konvenci a budeme také vynechávat explicitní vyznačení závislosti  $\mathbf{f}_i$  a  $\mathbf{A}_{ik}$  na  $\mathbf{w}$ . Rovnice (5.4)–(5.5) představují tzv. *smíšenou formulaci* Navierových-Stokesových rovnic.

Přechod ke slabé smíšené formulaci dostaneme tak, že rovnice (5.4) násobíme testovacími funkcemi  $\psi_i$ , sečteme je a integrujeme přes  $\Omega$ . Integraci provádíme po trojúhelnících,

takže

$$\sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \, d\mathbf{x} = \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) d\mathbf{x}. \quad (5.6)$$

Podobně rovnici (5.5) násobíme testovací funkcí  $\boldsymbol{\varphi}$  a integrujeme přes  $\Omega$ ,

$$\sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} d\mathbf{x} + \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} d\mathbf{x}. \quad (5.7)$$

Věnujme se nejdříve rovnici (5.6). Pravou stranu rovnice (5.6) upravíme pomocí Greenovy věty. Na vnitřních stranách přitom nahradíme dvojznačnou funkci  $\mathbf{w}$  aritmetickým průměrem  $\frac{1}{2}(\mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-)$ . Tak dostaneme aproximace  $\mathbf{s}_i$  toků  $\boldsymbol{\sigma}_i$ , pro které

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \mathbf{s}_i \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \sum_e \int_{\partial T_e^I} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-) \, dS \\ &+ \sum_e \int_{\partial T_e^B} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot \mathbf{w}^B \, dS - \sum_e \int_{T_e} \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

kde  $\partial T_e^I$  je část hranice  $\partial T_e$  ležící uvnitř  $\Omega$  a  $\partial T_e^B$  je část hranice  $\partial T_e$  ležící na  $\partial\Omega$ . Funkci  $\mathbf{w}^B$  určíme podle typu zadaných okrajových podmínek. Poznamenejme, že při odvození vztahu (5.8) jsme použili identitu  $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$ . Připomeňme ještě, že

$$(n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^-|_F = n_k^- \mathbf{A}_{ik}^T (\mathbf{w}^-) \boldsymbol{\psi}_i^-, \quad F \in \mathcal{F}.$$

Jestliže k pravé straně rovnice (5.8) přičteme a odečteme člen

$$\sum_e \int_{\partial T_e} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot \mathbf{w}^- \, d\mathbf{x},$$

po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \mathbf{s}_i \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \sum_e \int_{\partial T_e^I} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) \, dS \\ &+ \sum_e \int_{\partial T_e^B} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^B - \mathbf{w}^-) \, dS \\ &+ \sum_e \left[ \int_{\partial T_e} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot \mathbf{w}^- \, dS - \int_{T_e} \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Poslední člen na pravé straně rovnice (5.9) vyjádříme pomocí Greenovy věty,

$$\begin{aligned} \sum_e \left[ \int_{\partial T_e} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot \mathbf{w}^- \, dS - \int_{T_e} \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \right] &= \\ \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Označíme-li

$$\boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} = \mathbf{s}_i - \boldsymbol{\sigma}_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.11)$$

pak z (5.9), (5.10) a (5.11) obdržíme

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i \, d\mathbf{x} &:= \frac{1}{2} \sum_e \int_{\partial T_e^I} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) \, dS \\ &+ \sum_e \int_{\partial T_e^B} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^B - \mathbf{w}^-) \, dS. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Vyjádříme-li součet křivkových integrálů po částech  $\partial T_e^I$  a  $\partial T_e^B$  hranic  $\partial T_e$  jako součet integrálů po vnitřních stranách  $F_I \in \mathcal{F}^I$  a hraničních stranách  $F_B \in \mathcal{F}^B$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i \, d\mathbf{x} &= -\frac{1}{2} \sum_I \int_{F^I} [(\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- + (\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^+] \cdot [(n_k \mathbf{w})^- + (n_k \mathbf{w})^+] \, dS \\ &+ \sum_B \int_{F^B} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^B - \mathbf{w}^-) \, dS. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Skutečně, na vnitřní straně  $F_I = T^- \cap T^+$  lze součet příspěvků od  $F_I \cap \partial T^-$  a  $F_I \cap \partial T^+$  (užitím  $n_k^+ = -n_k^-$ ,  $k = 1, 2$ ) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} & (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) + (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^+ \cdot (\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+) = \\ & - \left[ (\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- + (\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^+ \right] \cdot [(n_k \mathbf{w})^- + (n_k \mathbf{w})^+], \end{aligned}$$

což objasňuje tvar prvního integrálu na pravé straně (5.13). Připomeňme, že rovnice (5.13) obsahuje hledané aproximace  $\mathbf{s}_i$  toků  $\boldsymbol{\sigma}_i$ , neboť podle (5.11)

$$\sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i \, d\mathbf{x} = \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \left( \mathbf{s}_i - \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) \, d\mathbf{x},$$

takže

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \mathbf{s}_i \, d\mathbf{x} &= -\frac{1}{2} \sum_I \int_{F^I} [(\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- + (\mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^+] \cdot [(n_k \mathbf{w})^- + (n_k \mathbf{w})^+] \, dS \\ &+ \sum_B \int_{F^B} (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^B - \mathbf{w}^-) \, dS + \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Přejdeme nyní popisu aproximace pravé strany rovnice (5.7). Místo toků  $\boldsymbol{\sigma}_i$  použijeme jejich aproximace  $\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{\delta}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Viskózní člen

$$\sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial x_i} \, d\mathbf{x}$$

upravíme pomocí Greenovy věty. Na vnitřních stranách trojúhelníků použijeme aproximaci  $\mathbf{s}_i|_{F_I} \approx \frac{1}{2}(\mathbf{s}_i^- + \mathbf{s}_i^+)$ . Na hranici pak klademe  $\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\sigma}_i^B$ , kde toky  $\boldsymbol{\sigma}_i^B$ ,  $i = 1, 2$ , určíme podle typu zadaných okrajových podmínek. Tak dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} \approx & \frac{1}{2} \sum_I \int_{F_I} [(n_i \boldsymbol{\varphi})^- + (n_i \boldsymbol{\varphi})^+] \cdot [\mathbf{s}^+ + \mathbf{s}^-] dS + \sum_B \int_{F_B} (n_i \boldsymbol{\varphi})^- \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^B dS - \sum_e \int_{T_e} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{s}_i d\mathbf{x} = \\
& + \frac{1}{2} \sum_I \int_{F_I} [(n_i \boldsymbol{\varphi})^- + (n_i \boldsymbol{\varphi})^+] \cdot \left[ \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right)^- + \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right)^+ \right] dS \quad (5.15) \\
& + \frac{1}{2} \sum_I \int_{F_I} [(n_i \boldsymbol{\varphi})^- + (n_i \boldsymbol{\varphi})^+] \cdot [\boldsymbol{\delta}_i^- + \boldsymbol{\delta}_i^+] dS + \sum_B \int_{F_B} (n_i \boldsymbol{\varphi})^- \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^B dS \\
& - \sum_e \int_{T_e} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \cdot \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) d\mathbf{x} - \sum_e \int_{T_e} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \cdot \boldsymbol{\delta}_i d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Poslední člen na pravé straně rovnice (5.15) vyjádříme pomocí vztahu (5.13), v němž volíme  $\boldsymbol{\psi}_i = \partial \boldsymbol{\varphi} / \partial x_i$ ,  $i = 1, 2$ . Obdržíme

$$\begin{aligned}
\sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} \approx & - \sum_e \int_{T_e} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \cdot \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) d\mathbf{x} \\
& + \frac{1}{2} \sum_I \int_{F_I} \left[ \left( \mathbf{A}_{ik}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \right)^- + \left( \mathbf{A}_{ik}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \right)^+ \right] \cdot [(n_k \mathbf{w})^- + (n_k \mathbf{w})^+] dS \\
& + \frac{1}{2} \sum_I \int_{F_I} [(n_i \boldsymbol{\varphi})^- + (n_i \boldsymbol{\varphi})^+] \cdot \left[ \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right)^- + \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right)^+ \right] dS \quad (5.16) \\
& + \frac{1}{2} \sum_I \int_{F_I} [(n_i \boldsymbol{\varphi})^- + (n_i \boldsymbol{\varphi})^+] \cdot [\boldsymbol{\delta}_i^- + \boldsymbol{\delta}_i^+] dS \\
& - \sum_B \int_{F_B} \left( n_k \mathbf{A}_{ik}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \right)^- \cdot (\mathbf{w}^B - \mathbf{w}^-) dS + \sum_B \int_{F_B} (n_i \boldsymbol{\varphi})^- \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^B dS.
\end{aligned}$$

Věnujme se v dalším podrobněji členu obsahujícímu  $\boldsymbol{\delta}_i^+$  a  $\boldsymbol{\delta}_i^-$ ,  $i = 1, 2$ . Z praktických důvodů, viz [3], [4], podložených také teoretickou analýzou, viz [2], je účelné nahradit globální funkce  $\boldsymbol{\delta}_i$  pomocí lokálně definovaných funkcí

$$\boldsymbol{\delta}_i^e = \sum_{F \in \partial T_e} \boldsymbol{\delta}_i^F, \quad i = 1, 2, \quad (5.17)$$

kde

$$\int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i^F \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_F (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) \, dS, \quad F \in \partial T_e^I, \quad (5.18)$$

$$\int_{T_e} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_i^F \, d\mathbf{x} = \int_F (n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\psi}_i)^- \cdot (\mathbf{w}^B - \mathbf{w}^-) \, dS, \quad F \in \partial T_e^B. \quad (5.19)$$

Všimněte si, že pro  $\boldsymbol{\delta}_i|_{T_e} = \boldsymbol{\delta}_i^e$  rovnice (5.12), a tedy také (5.13), platí. V dalším proto použijeme aproximaci  $\boldsymbol{\delta}_i^\pm \approx (\boldsymbol{\delta}_i^F)^\pm$ . V integrálu

$$\int_{F_I} [(n_i \boldsymbol{\varphi})^- + (n_i \boldsymbol{\varphi})^+] \cdot [\boldsymbol{\delta}_i^- + \boldsymbol{\delta}_i^+] \, dS \approx \int_{F_I} [\boldsymbol{\varphi}^+ - \boldsymbol{\varphi}^-] \cdot \left[ (n_i \boldsymbol{\delta}_i^F)^+ - (n_i \boldsymbol{\delta}_i^F)^- \right] \, dS \quad (5.20)$$

obsažené členy  $(n_i \boldsymbol{\delta}_i^F)^\pm := (\boldsymbol{\delta}_n^F)^\pm$  lze určit z (5.18) volbou  $\boldsymbol{\psi}_i = n_i \boldsymbol{\varphi}$ ,  $i = 1, 2$ , tj.

$$\int_{T_e^\pm} \boldsymbol{\varphi} \cdot (\boldsymbol{\delta}_n^F)^\pm \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{F_I} (n_i n_k \mathbf{A}_{ik}^T \boldsymbol{\varphi})^\pm \cdot (\mathbf{w}^\mp - \mathbf{w}^\pm) \, dS, \quad F_I = T^+ \cap T^- \in \mathcal{F}^I. \quad (5.21)$$

Praktický přínos aproximace (5.17) je zřejmý: místo řešení jednoho „rozsáhlého“ globálního problému (5.13) řešíme soubor „malých“ lokálních problémů (5.21).

Prostorovou diskretizaci Navierových-Stokesových rovnic dostaneme z (5.7) a (5.16),

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{T_e} \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \sum_e \int_{\partial T_e} \boldsymbol{\varphi}^- \cdot \mathbf{H}(\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+, \mathbf{n}^-) \, dS - \sum_e \int_{T_e} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{f}_i \, d\mathbf{x} = \\ & - \sum_e \int_{T_e} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \cdot \left( \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right) \, d\mathbf{x} \\ & + \frac{1}{2} \sum_I \int_{F^I} \left[ \left( n_k \mathbf{A}_{ik}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \right)^+ - \left( n_k \mathbf{A}_{ik}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \right)^- \right] \cdot (\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) \, dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_I \int_{F_I} (\boldsymbol{\varphi}^+ - \boldsymbol{\varphi}^-) \cdot \left[ \left( n_i \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right)^+ - \left( n_i \mathbf{A}_{ik} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right)^- \right] \, dS \\ & + \frac{1}{2} \sum_I \int_{F_I} \eta_I (\boldsymbol{\varphi}^+ - \boldsymbol{\varphi}^-) \cdot \left[ (\boldsymbol{\delta}_n^F)^+ - (\boldsymbol{\delta}_n^F)^- \right] \, dS \\ & - \sum_B \int_{F^B} \left( n_k \mathbf{A}_{ik}^T \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \right)^- \cdot (\mathbf{w}^B - \mathbf{w}^-) \, dS + \sum_B \int_{F_B} (n_i \boldsymbol{\varphi})^- \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^B \, dS, \end{aligned} \quad (5.22)$$

kde  $\mathbf{H}$  je numerický tok, viz kapitola 4,  $\mathbf{H}(\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^+, \mathbf{n}^-) = \mathbf{H}(\mathbf{w}^-, \mathbf{w}^B, \mathbf{n}^-)$  na  $\partial\Omega$ ,  $(\boldsymbol{\delta}_n^F)^\pm$  jsou řešení lokálních úloh (5.21) a parametr  $\eta_I = 1$ . Pro potlačení případných nežádoucích oscilací se doporučuje považovat  $\eta_I$  za penalizační parametr a volit případně  $\eta_I > 1$ , více o tom viz [5], [2].

Přibližné řešení  $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}|_{T_e}$  a testovací funkci  $\boldsymbol{\varphi}_e = \boldsymbol{\varphi}|_{T_e}$  na trojúhelníku  $T_e$  předpokládáme stejně jako v kapitole 4 ve tvaru

$$\mathbf{w}_e(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^n \boldsymbol{\Delta}_\alpha^e(t) \ell_\alpha^e(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\varphi}_e(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n \boldsymbol{\Theta}_\alpha^e \ell_\alpha(\mathbf{x}), \quad T_e \in \mathcal{T},$$

kde  $n = \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$  je dimenze prostoru polynomů dvou proměnných stupně  $q$  a  $\{\ell_\alpha^e(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^n$  jsou Lagrangeovy fundamentální polynomy na vhodně zvolené množině  $\{\mathbf{x}_\alpha^e\}_{\alpha=1}^n$  uzlů trojúhelníka  $T_e$ , více viz kapitola 4. Po dosazení  $\mathbf{w}_e$  a  $\varphi_e$  do (5.22) obdržíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé  $\Delta_\alpha^e(t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ,  $e \in \mathcal{F}$ . Tuto soustavu pak obvykle řešíme vhodnou implicitní metodou, viz [4], [5]. Poznamenejme, že každému vyhodnocení pravé strany rovnice (5.22) předchází výpočet členů  $(\delta_n^F)^\pm$  získaných řešením „malých“ lokálních úloh (5.21).



## 6. Řešení Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění metodou konečných objemů

Nestacionární nestlačitelné proudění viskózní tekutiny v rovinné oblasti popisují pohybové rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u) + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v} u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + S^u, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v) + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v} v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + S^v, \quad (6.2)$$

kde

$$S^u = \varrho f^u + \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right), \quad S^v = \varrho f^v + \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right). \quad (6.3)$$

Předpokládejme, že hustota  $\varrho$  nezávisí na čase. Rovnice kontinuity je pak tvaru

$$\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0. \quad (6.4)$$

Rovnice (6.1)–(6.4) doplníme o okrajové a počáteční podmínky, viz kapitola 1.5. Předpokládejme, že  $\partial\Omega = \Gamma_I \cup \Gamma_W \cup \Gamma_O$ , přičemž

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} \quad \text{na } \Gamma_I, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} \quad \text{na } \Gamma_O, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_W. \quad (6.7)$$

Tedy, na vtoku  $\Gamma_I$  předepisujeme rychlost  $\hat{\mathbf{v}}$ , na výtoku  $\Gamma_O$  předepisujeme vektor napětí  $\hat{\mathbf{T}}$ , viz (1.9), a na stěně  $\Gamma_W$  předpokládáme no-slip okrajovou podmínku. V čase  $t = 0$  stačí zadat rychlost,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 \quad \text{pro } t = 0. \quad (6.8)$$

Jestliže viskozita  $\mu$  nezávisí na prostorových souřadnicích  $x, y$ , pak  $S^u = \varrho f^u$ ,  $S^v = \varrho f^v$ . Skutečně, neboť podle (6.4)

$$\nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial x} = 0, \quad \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial y} = 0.$$

Nestlačitelné viskózní proudění lze řešit metodou konečných objemů, viz [42], [55], [6], metodou konečných prvků, viz [20], [21] nebo nespojitou Galerkinovou metodou, viz [45]. Nejpoužívanější softwarové produkty *ANSYS-Fluent*, *CD-adapco STAR-CD*, *OpenFoam* a další používají metodu konečných objemů. V této kapitole se proto budeme věnovat právě této technice.

Při řešení nestlačitelného viskózního proudění metodou konečných objemů patří mezi nejpoužívanější postupy *algorithmus SIMPLE* podle *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*. Algoritmus SIMPLE byl vyvinut nejdříve jako tzv. *schéma přesazených*

*síť*, anglicky *staggered-mesh scheme*, v nichž každé neznámé  $u$ ,  $v$  a  $p$  příslušel jiný konečný objem. To nebylo praktické a proto později vznikl algoritmus SIMPLE jako *schéma na sesazené síti*, anglicky *collocated-mesh scheme*, kdy všechny složky řešení sdílejí tentýž konečný objem. Algoritmus byl původně navržen pro obdélníkové konečné objemy, později byl rozvinut pro libovolné polygonální konečné objemy. Ve 2D se obvykle používají čtyřúhelníkové (méně často trojúhelníkové) konečné objemy tvořené prvky primární sítě. Jde o tzv. *cell-centered finite volume schemes*, kdy za aproximaci  $u$ ,  $v$ ,  $p$  na konečném objemu považujeme jejich přibližnou hodnotu v těžišti.

**Časová diskretizace.** Použijeme implicitní Eulerovu metodu řádu jedna

$$\varrho^{k+1} \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + \nabla \cdot (\varrho^{k+1} \mathbf{v}^{k+1} u^{k+1}) = -\frac{\partial p^{k+1}}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu^{k+1} \nabla u^{k+1}) + S^{u,k+1},$$

$$\varrho^{k+1} \frac{v^{k+1} - v^k}{\tau} + \nabla \cdot (\varrho^{k+1} \mathbf{v}^{k+1} v^{k+1}) = -\frac{\partial p^{k+1}}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu^{k+1} \nabla v^{k+1}) + S^{v,k+1},$$

kde  $\tau$  je délka časového kroku a horní index  $k$  resp.  $k+1$  značí přibližné řešení v čase  $t_k$  resp.  $t_{k+1} = t_k + \tau$ . Nelinearit v konvekčních členech linearizujeme. Položíme  $u^{k+1,0} = u^k$ ,  $v^{k+1,0} = v^k$ ,  $p^{k+1,0} = p^k$  a pro  $s = 0, 1, \dots$  postupně počítáme

$$\varrho^{k+1} \frac{u^{k+1,s+1} - u^k}{\tau} + \nabla \cdot (\varrho^{k+1} \mathbf{v}^{k+1,s} u^{k+1,s+1}) = -\frac{\partial p^{k+1,s}}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu^{k+1} \nabla u^{k+1,s+1}) + S^{u,k+1,s},$$

$$\varrho^{k+1} \frac{v^{k+1,s+1} - v^k}{\tau} + \nabla \cdot (\varrho^{k+1} \mathbf{v}^{k+1,s} v^{k+1,s+1}) = -\frac{\partial p^{k+1,s}}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu^{k+1} \nabla v^{k+1,s+1}) + S^{v,k+1,s}.$$

Pro popis jednoho kroku iterace je výhodné zavést zjednodušené značení

$$\varrho \frac{u - u^0}{\tau} + \nabla \cdot (\varrho \bar{\mathbf{v}} u) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + \bar{S}^u, \quad (6.9)$$

$$\varrho \frac{v - v^0}{\tau} + \nabla \cdot (\varrho \bar{\mathbf{v}} v) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + \bar{S}^v. \quad (6.10)$$

Zřejmě  $u \equiv u^{k+1,s+1}$  je aproximace rychlosti  $u$  v čase  $t_{k+1}$  v  $(s+1)$ -ní iteraci,  $\bar{u} \equiv u^{k+1,s}$  je aproximace rychlosti  $u$  v čase  $t_{k+1}$  v předchozí  $s$ -té iteraci,  $u^0 \equiv u^k$  je aproximace rychlosti  $u$  v čase  $t_k$ ,  $\bar{p} \equiv p^{k+1,s}$  je aproximace tlaku  $p$  v čase  $t_{k+1}$  v  $s$ -té iteraci,  $\bar{S}_u \equiv S_u^{k+1,s}$  je aproximace  $S_u$  v čase  $t_{k+1}$  v  $s$ -té iteraci a  $\varrho = \varrho^{k+1}$ ,  $\mu = \mu^{k+1}$ . Význam symbolů ve druhé pohybové rovnici je obdobný.

Z diskretizované první pohybové rovnice (6.9) dostaneme předběžnou aproximaci  $u^*$  rychlosti  $u$ , viz kapitola 6.1.1 nebo 6.2.1, a z diskretizované druhé pohybové rovnice (6.10) dostaneme předběžnou aproximaci  $v^*$  rychlosti  $v$ , viz kapitola 6.1.2 nebo 6.2.1. Rychlosti  $u$ ,  $v$  a tlak  $p$  navrhneme ve tvaru  $u = u^* + u'$ ,  $v = v^* + v'$ ,  $p = \bar{p} + p'$ . Dosazením do diskretizované rovnice kontinuity (6.4) dostaneme rovnici pro výpočet tlakové korekce  $p'$ . Pomocí  $p'$  pak dopočítáme rychlostní korekce  $u'$ ,  $v'$  a určíme  $u$ ,  $v$  a  $p$ , viz kapitola 6.1.3 nebo 6.2.2. Jeden iterační krok, tj. přechod od  $s$ -té k  $(s+1)$ -ní iteraci, tedy probíhá takto:

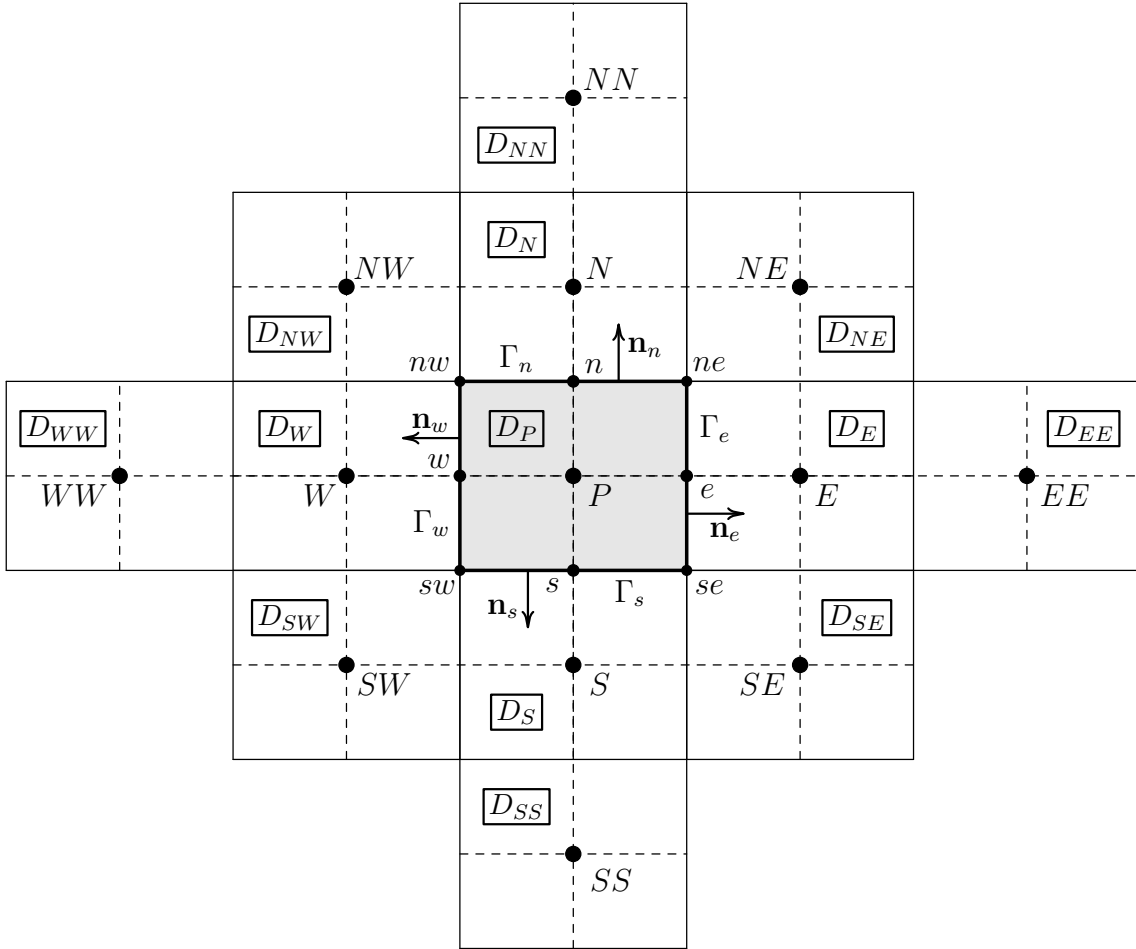
1. pomocí  $\bar{u} = u^{k+1,s}$ ,  $\bar{v} = v^{k+1,s}$  a  $\bar{p} = p^{k+1,s}$  vypočteme  $u^*$  a  $v^*$ ;
2. pomocí  $u^*$ ,  $v^*$  a  $\bar{p}$  vypočteme  $p'$  a následně  $u'$  a  $v'$ ;
3. určíme  $u^{k+1,s+1} = u^* + u'$ ,  $v^{k+1,s+1} = v^* + v'$  a  $p^{k+1,s+1} = \bar{p} + p'$ .

## 6.1. Algoritmus SIMPLE na pravidelné obdélníkové síti

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že oblast  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$  je obdélník. Na obdélníku zvolíme rovnoměrné dělení: strany rovnoběžné s osou  $x$  rozdělíme na  $N$  stejných dílků délky  $h_x = a/N$  a strany rovnoběžné s osou  $y$  rozdělíme na  $M$  stejných dílků délky  $h_y = b/M$ . Tak dostaneme *základní síť* s uzly  $[x_i, y_j]$ , kde  $x_i = ih_x$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , a  $y_j = jh_y$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ . Obdélník  $\Omega$  je tedy sjednocením  $N \times M$  *kontrolních objemů*

$$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Přibližné hodnoty  $u$ ,  $v$ ,  $p$  budeme počítat ve středech  $[x_{i-1/2}, y_{j-1/2}]$  kontrolních objemů  $D_{ij}$ , kde  $x_{i-1/2} = x_i - \frac{1}{2}h_x$ ,  $y_{j-1/2} = y_j - \frac{1}{2}h_y$ .



Obr. 6.1: Konečný objem  $D_P$

Abychom zjednodušili naše vyjadřování, zavedeme si lokální značení. Zvolený konečný objem  $D_{ij}$  označíme jako  $D_P$ , východního souseda  $D_{i+1,j}$  označíme jako  $D_E$  (podle anglického east), západního souseda  $D_{i-1,j}$  označíme jako  $D_W$  (podle anglického west), severního souseda  $D_{i,j+1}$  označíme jako  $D_N$  (podle anglického north) a jižního souseda  $D_{i,j-1}$  označíme jako  $D_S$  (podle anglického south). Podobně označíme severovýchodního souseda

$D_{i+1,j+1}$  jako  $D_{NE}$ , jihovýchodního souseda  $D_{i+1,j-1}$  jako  $D_{SE}$ , severozápadního souseda  $D_{i-1,j+1}$  jako  $D_{NW}$  a jihozápadního souseda  $D_{i-1,j-1}$  jako  $D_{SW}$ . Označme také  $D_{i+2,j}$  jako  $D_{EE}$ ,  $D_{i-2,j}$  jako  $D_{WW}$ ,  $D_{i,j+2}$  jako  $D_{NN}$  a  $D_{i,j-2}$  jako  $D_{SS}$ . Středů konečných objemů  $D_P$ ,  $D_E$ ,  $D_N$ ,  $D_W$ ,  $D_S$ ,  $D_{NE}$ ,  $D_{SE}$ ,  $D_{NW}$ ,  $D_{SW}$ ,  $D_{EE}$ ,  $D_{NN}$ ,  $D_{WW}$  a  $D_{SS}$  označíme písmeny  $P$ ,  $E$ ,  $N$ ,  $W$ ,  $S$ ,  $NE$ ,  $SE$ ,  $NW$ ,  $SW$ ,  $EE$ ,  $NN$ ,  $WW$  a  $SS$ . Vrcholy  $D_P$  označíme  $ne$ ,  $se$ ,  $nw$  a  $sw$ . Pro konečný objem  $D_P$ , jehož jedna nebo dvě strany leží na hranici  $\partial\Omega$ , existují jen některé sousední konečné objemy. Tak třeba pro  $D_P \equiv D_{11}$  neexistují  $D_W$  ani  $D_S$ , pro  $D_P \equiv D_{iM}$ ,  $1 < i < N$ , neexistuje  $D_N$ .

Nechť  $\Gamma_P$  je hranice  $D_P$ . Společnou stranu konečného objemu  $D_P$  a  $D_E$  označíme jako  $\Gamma_e$  a podobně označíme  $\Gamma_n = D_P \cap D_N$ ,  $\Gamma_w = D_P \cap D_W$  a  $\Gamma_s = D_P \cap D_S$ . Zřejmě  $\Gamma_P = \Gamma_e \cup \Gamma_n \cup \Gamma_w \cup \Gamma_s$ . Středů stran  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_w$  a  $\Gamma_s$  označíme jako  $e$ ,  $n$ ,  $w$  a  $s$ .

Budeme používat následující značení: zápisem  $u_P$  rozumíme hodnotu rychlosti  $u$  v bodě  $P$ , podobně třeba  $\mu_e$  je hodnota  $\mu$  v bodě  $e$  nebo  $v_{ne}$  je hodnota  $v$  v bodě  $ne$ .

Jednotkový vektor vnější normály k hranici  $\Gamma_P$  označíme  $\mathbf{n}_P = (n_x^P, n_y^P)^T$ . Jednotkový vektor vnější normály ke stranám  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_w$  a  $\Gamma_s$  označíme  $\mathbf{n}_e$ ,  $\mathbf{n}_n$ ,  $\mathbf{n}_w$  a  $\mathbf{n}_s$ . Zřejmě  $\mathbf{n}_e = (1, 0)^T$ ,  $\mathbf{n}_n = (0, 1)^T$ ,  $\mathbf{n}_w = (-1, 0)^T$  a  $\mathbf{n}_s = (0, -1)^T$ . Zavedené značení je uvedeno na obrázku 6.1.

### 6.1.1. Diskretizace první pohybové rovnice.

Integrací (6.9) přes konečný objem  $D_P$  dostaneme

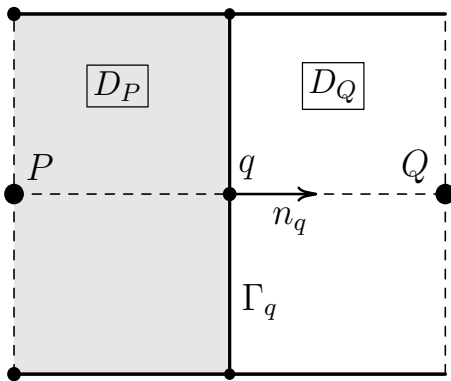
$$\int_{D_P} \varrho \frac{u - u^0}{\tau} \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_P} \varrho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) u \, \mathrm{d}S = - \int_{\Gamma_P} \bar{p} n_x \mathrm{d}S + \int_{\Gamma_P} \mu(\nabla u \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}S + \int_{D_P} \bar{S}^u \mathrm{d}\mathbf{x}. \quad (6.11)$$

V dalším se věnujme aproximaci jednotlivých členů v rovnici (6.11). Integrály vyčíslíme numericky, na stranách  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_w$  a  $\Gamma_s$  pomocí obdélníkové formule a na konečném objemu  $D_P$  pomocí součinnové obdélníkové formule. Nejdříve se budeme věnovat vnitřním konečným objemům  $D_P \equiv D_{ij}$ ,  $1 < i < N$ ,  $1 < j < M$ .

**Diskretizace konvekčního členu.** Označme

$$F_q(\mathbf{v}) = \varrho_q(\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{n}_q) |\Gamma_q|, \quad q = e, n, w, s, \quad (6.12)$$

*hmotnostní tok* stranou  $\Gamma_q$  pro rychlost  $\mathbf{v}_q$ . Připomeňme, že  $\varrho_q$  resp.  $\mathbf{v}_q$  je hustota resp.



Obr. 6.2:  $q = e$ ,  $Q = E$

rychlost ve středu strany  $\Gamma_q$ , a dále necht'  $\mathbf{n}_q$  je jednotkový vektor vnější normály konečného objemu  $D_P$  na straně  $\Gamma_q$  a  $|\Gamma_q|$  je délka strany  $\Gamma_q$ , tj.  $|\Gamma_q| = h_x$  pro  $q \in \{n, s\}$  a  $|\Gamma_q| = h_y$  pro  $q \in \{e, w\}$ . Označíme-li  $s(P) = \{e, n, w, s\}$ , pak pomocí obdélníkové kvadraturní formule dostaneme

$$\int_{\Gamma_P} \varrho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) u \, \mathrm{d}S \approx \sum_{q \in s(P)} F_q(\bar{\mathbf{v}}) u_q. \quad (6.13)$$

$F_q(\bar{\mathbf{v}}) u_q$  nahradíme *upwind aproximací*:

$$F_q(\bar{\mathbf{v}})u_q \approx F_q^+(\bar{\mathbf{v}})u_P + F_q^-(\bar{\mathbf{v}})u_Q, \quad (6.14)$$

kde  $Q$  je střed sousedního konečného objemu  $D_Q$ , který má s konečným objemem  $D_P$  společnou stranu  $\Gamma_q$ , takže třeba pro  $q = e$  je  $Q = E$ , viz obrázek 6.2. Horní index  $\pm$  má obvyklý význam, tj.  $a^+ = \max(a, 0)$ ,  $a^- = \min(a, 0)$ . Platí tedy

$$\int_{\Gamma_P} \varrho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})u \, dS \approx \sum_{q \in s(P)} [F_q^+(\bar{\mathbf{v}})u_P + F_q^-(\bar{\mathbf{v}})u_Q]. \quad (6.15)$$

V kapitole 6.1.3 ukážeme, že hmotnostní toky  $\{F_q(\bar{\mathbf{v}})\}_{q \in s(P)}$  splňují diskrétní rovnici kontinuity, tj. platí

$$\sum_{q \in s(P)} F_q(\bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (6.16)$$

Proto

$$\sum_{q \in s(P)} [F_q^+(\bar{\mathbf{v}}) + F_q^-(\bar{\mathbf{v}})] = 0, \quad \text{takže} \quad \sum_{q \in s(P)} F_q^+(\bar{\mathbf{v}}) = - \sum_{q \in s(P)} F_q^-(\bar{\mathbf{v}}).$$

Odtud a z (6.15) dostaneme

$$\int_{\Gamma_P} \varrho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})u \, dS \approx \sum_{q \in s(P)} [-F_q^-(\bar{\mathbf{v}})](u_P - u_Q) = A_P^c u_P - \sum_{Q \in S(P)} A_Q^c u_Q, \quad (6.17)$$

kde  $S(P) = \{E, N, W, S\}$  a

$$A_Q^c = -F_q^-(\bar{\mathbf{v}}), \quad (Q, q) = (E, e), (N, n), (W, w), (S, s), \quad A_P^c = \sum_{Q \in S(P)} A_Q^c. \quad (6.18)$$

Všimněte si, že všechny koeficienty  $\{A_Q^c\}_{Q \in S(P)}$  a  $A_P^c$  jsou nezáporné.

**Cvičení 6.1.** Ověřte, že

$$\begin{aligned} A_E^c &= \varrho_e(-\bar{u}_e)^+ h_y, & A_N^c &= \varrho_n(-\bar{v}_n)^+ h_x, & A_P^c &= \sum_{Q \in S(P)} A_Q^c. \\ A_W^c &= \varrho_w(\bar{u}_w)^+ h_y, & A_S^c &= \varrho_s(\bar{v}_s)^+ h_x, \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nápověda: využijte rovnosti  $-(a)^- = (-a)^+$ ,  $-(-a)^- = a^+$ .

Rychlosti  $\bar{u}_e$ ,  $\bar{v}_n$ ,  $\bar{u}_w$  a  $\bar{v}_s$  převezmeme z předchozí iterace, viz (6.66). Upwind aproximace (6.14) je pouze řádu jedna. O aproximaci druhého řádu se zmíníme později.

**Diskretizace viskózního členu.** Pomocí obdélníkové kvadraturní formule a náhrady derivace centrální diferencí dostaneme

$$\int_{\Gamma_P} \mu(\nabla u \cdot \mathbf{n}) \, dS = \sum_{q \in s(P)} \int_{\Gamma_q} \mu \frac{\partial u}{\partial n_q} \, dS \approx \sum_{q \in s(P)} \mu_q \frac{|\Gamma_q|}{d_q} (u_Q - u_P),$$

kde  $d_q = |PQ|$  je délka úsečky  $\overline{PQ}$ , tj.  $d_q = h_x$  pro  $q \in \{e, w\}$  a  $d_q = h_y$  pro  $q \in \{n, s\}$ . Máme tedy

$$\int_{\Gamma_P} \mu(\nabla u \cdot \mathbf{n}) \, dS \approx -A_P^\mu u_P + \sum_{Q \in S(P)} A_Q^\mu u_Q, \quad (6.20)$$

kde

$$A_Q^\mu = \mu_q \frac{|\Gamma_q|}{d_q}, \quad (Q, q) = (E, e), (N, n), (W, w), (S, s), \quad A_P^\mu = \sum_{Q \in S(P)} A_Q^\mu \quad (6.21)$$

jsou kladné koeficienty, podrobně

$$A_E^\mu = \mu_e \frac{h_y}{h_x}, \quad A_N^\mu = \mu_n \frac{h_x}{h_y}, \quad A_W^\mu = \mu_w \frac{h_y}{h_x}, \quad A_S^\mu = \mu_s \frac{h_x}{h_y}, \quad A_P^\mu = \sum_{Q \in S(P)} A_Q^\mu. \quad (6.22)$$

**Diskretizace tlakového členu.** Pomocí obdélníkové kvadraturní formule dostaneme

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_P} \bar{p} n_x \, dS &= \int_{\Gamma_w} \bar{p} \, dS - \int_{\Gamma_e} \bar{p} \, dS \approx |\Gamma_w| \bar{p}_w - |\Gamma_e| \bar{p}_e = h_y (\bar{p}_w - \bar{p}_e) \approx \\ &h_y \left[ \frac{1}{2} (\bar{p}_P + \bar{p}_W) - \frac{1}{2} (\bar{p}_P + \bar{p}_E) \right] = -|D_P| \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

kde  $|D_P| = h_x h_y$  je plocha konečného objemu  $D_P$ .

**Diskretizace časového členu.** Pomocí složené obdélníkové formule dostaneme

$$\int_{D_P} \varrho \frac{u - u^0}{\tau} \, d\mathbf{x} \approx |D_P| \varrho_P \frac{u_P - u_P^0}{\tau}. \quad (6.24)$$

**Diskretizace zdrojového členu.** Jde o člen

$$\int_{D_P} \bar{S}^u \, d\mathbf{x} = \int_{D_P} \bar{f}^u \, d\mathbf{x} + \int_{D_P} \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \right) \, d\mathbf{x}. \quad (6.25)$$

První integrál aproximujeme pomocí složené obdélníkové formule,

$$\int_{D_P} \bar{f}^u \, d\mathbf{x} \approx |D_P| \bar{f}_P^u, \quad (6.26)$$

kde  $\bar{f}_P^u \approx f^u(t_{n+1}, \bar{\mathbf{v}}_P, \bar{p}_P)$ . Druhý integrál v (6.25) vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_{D_P} \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \right) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma_P} \mu \left( n_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \, dS = \\ &\int_{\Gamma_e} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \, dS - \int_{\Gamma_w} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \, dS + \int_{\Gamma_n} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \, dS - \int_{\Gamma_s} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \, dS \approx \\ &\mu_e \frac{h_y}{h_x} (\bar{u}_E - \bar{u}_P) - \mu_w \frac{h_y}{h_x} (\bar{u}_P - \bar{u}_W) + \mu_n \frac{h_x}{h_x} (\bar{v}_{ne} - \bar{v}_{nw}) - \mu_s \frac{h_x}{h_x} (\bar{v}_{se} - \bar{v}_{sw}). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Přitom hodnoty  $\bar{v}_{ne}$ ,  $\bar{v}_{nw}$ ,  $\bar{v}_{se}$  a  $\bar{v}_{sw}$  aproximujeme aritmetickým průměrem hodnot  $\bar{v}$  ve středech okolních konečných objemů. Tak například

$$\bar{v}_{ne} \approx \frac{1}{4}(\bar{v}_P + \bar{v}_E + \bar{v}_{NE} + \bar{v}_N). \quad (6.28)$$

Celkem tedy

$$\int_{D_P} \bar{S}^u d\mathbf{x} \approx |D_P| \bar{S}_P^u, \quad (6.29)$$

$$\text{kde} \quad \bar{S}_P^u = \bar{f}_P^u + \frac{\mu_e(\bar{u}_E - \bar{u}_P) - \mu_w(\bar{u}_P - \bar{u}_W)}{h_x^2} + \frac{\mu_n(\bar{v}_{ne} - \bar{v}_{nw}) - \mu_s(\bar{v}_{se} - \bar{v}_{sw})}{h_x h_y}.$$

**Celková diskretizace.** Pomocí (6.17), (6.19), (6.20), (6.22), (6.23), (6.24) a (6.29) dostaneme aproximaci rovnice (6.11) ve tvaru

$$A_P^u u_P = A_E^u u_E + A_W^u u_W + A_N^u u_N + A_S^u u_S - |D_P| \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + b_P^u, \quad (6.30)$$

kde

$$\begin{aligned} A_E^u &= \varrho_e h_y (-\bar{u}_e)^+ + \mu_e \frac{h_y}{h_x}, & A_N^u &= \varrho_n h_x (-\bar{v}_n)^+ + \mu_n \frac{h_x}{h_y}, \\ A_W^u &= \varrho_w h_y (\bar{u}_w)^+ + \mu_w \frac{h_y}{h_x}, & A_S^u &= \varrho_s h_x (\bar{v}_s)^+ + \mu_s \frac{h_x}{h_y}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$A_P^u = A_E^u + A_W^u + A_N^u + A_S^u + \frac{|D_P| \varrho_P}{\tau},$$

$$b_P^u = \frac{|D_P| \varrho_P}{\tau} u_P^0 + |D_P| \bar{S}_P^u.$$

**Okrajové podmínky.** Pro konkrétnost předpokládejme, že vtok  $\Gamma_I = \{[0, y] : 0 \leq y \leq b\}$  je levá strana obdélníka  $\Omega$ , výtok  $\Gamma_O = \{[a, y] : 0 \leq y \leq b\}$  je pravá strana obdélníka  $\Omega$  a stěna  $\Gamma_W = \{[x, 0] : 0 \leq x \leq a\} \cup \{[x, b] : 0 \leq x \leq a\}$  je dolní a horní strana obdélníka  $\Omega$ .

**Vtok.** Uvažujme příhraniční konečný objem, jehož západní strana  $\Gamma_w$  leží na vtoku  $\Gamma_I$ . Konvekční integrál straně  $\Gamma_w$  aproximujeme takto:

$$\int_{\Gamma_P} \varrho(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) u \, dS \approx \sum_{q \in \{e, n, s\}} [-F_q^-(\bar{\mathbf{v}})] (u_P - u_Q) + [-F_w^-(\hat{\mathbf{v}})] (u_P - \hat{u}_w).$$

Protože  $\hat{u}_w > 0$ , podle (6.19) je  $A_W^c = \varrho_w \hat{u}_w h_y$ . V (6.17) položíme  $u_W = \hat{u}_w$  a v (6.31) zahrneme člen  $A_W^c \hat{u}_w$  do  $b_P^u$ . Viskózní integrál přes stranu  $\Gamma_w$  aproximujeme takto:

$$\int_{\Gamma_w} \mu \frac{\partial u}{\partial n_w} \approx \mu_w \frac{|\Gamma_w|}{\frac{1}{2} h_x} (\hat{u}_w - u_P) = \mu_w \frac{2h_y}{h_x} (\hat{u}_w - u_P).$$

Proto  $A_W^\mu = \mu_w \frac{2h_y}{h_x}$ , v (6.20) položíme  $u_W = \hat{u}_w$  a v (6.31) zahrneme člen  $A_W^\mu \hat{u}_w$  do  $b_P^u$ .

V aproximaci tlakového členu, viz (6.23), extrapolujeme:  $\bar{p}_w = \bar{p}_P - \frac{1}{2}(\bar{p}_E - \bar{p}_P)$ , takže

$$- \int_{\Gamma_P} \bar{p} n_x \, dS \approx -|D_P| \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_P}{h_x}.$$

V aproximaci (6.29) zdroje  $\bar{S}_P^u$  nahradíme člen  $\mu_w(\bar{u}_P - \bar{u}_W)$  členem  $2\mu_w(\bar{u}_P - \hat{u}_w)$  a položíme  $\bar{v}_{nw} = \hat{v}_{nw}$ ,  $\bar{v}_{sw} = \hat{v}_{sw}$ .

**Stěna.** Omezíme se na příhraniční konečný objem, jehož severní strana  $\Gamma_n$  leží na stěně  $\Gamma_W$ . Podobnými úvahami jako v případě vtoku zjistíme, že  $A_N^c = 0$ ,  $A_N^\mu = \mu_n \frac{2h_x}{h_y}$ . Protože  $u_N = 0$ , v (6.30) vynecháme člen  $A_N^u u_N$ . Dále v (6.29) vypustíme člen  $\mu_n(\bar{v}_{ne} - \bar{v}_{nw})$ .

**Výtok.** Uvažujme příhraniční konečný objem, jehož východní stěna  $\Gamma_e$  leží na výtoku  $\Gamma_O$ . Požadujeme, aby  $T_1|_{\Gamma_e} = \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\Gamma_e} = \hat{T}_1$ . Z pravé strany rovnice (6.11) tedy vyjme me  $\int_{\Gamma_e} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) dS$  a nahradíme ho  $\int_{\Gamma_e} \hat{T}_1 dS$ . To zajistíme tak, že v (6.22) položíme  $A_E^\mu = 0$ , v (6.29) vypustíme člen  $\mu_e(\bar{u}_E - \bar{u}_P)$ , v (6.30) místo  $-|D_P|(\bar{p}_E - \bar{p}_W)/(2h_x)$  vezmeme  $|D_P|(\bar{p}_W + \bar{p}_P)/(2h_x)$  a v (6.31) k  $b_P^u$  přičteme  $h_y[\hat{T}_1]_e$ .

**Soustava rovnic.** Soustavu lineárních rovnic (6.30) zapišme maticově,

$$\mathbf{A}^u \mathbf{u} = \mathbf{L}^u \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{b}^u. \quad (6.32)$$

Matice  $\mathbf{A}^u = \mathbf{A}^u(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$  je nesymetrická, ryze diagonálně dominantní a tedy regulární, s kladnými koeficienty na hlavní diagonále ( $A_P^u > 0$ ) a s nekladnými mimodiagonálními koeficienty (koeficienty  $-A_E^u$ ,  $-A_W^u$ ,  $-A_N^u$  a  $-A_S^u$  jsou záporné, zbývající koeficienty  $P$ -tého řádku matice  $\mathbf{A}^u$  jsou nulové). Matice  $\mathbf{L}^u$  na  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{p}}$  nezávisí,  $\mathbf{b}^u = \mathbf{b}^u(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ .

Pro zajištění konvergence  $(\bar{u}_P, \bar{v}_P, \bar{p}_P) \rightarrow (u_P, v_P, p_P)$  se osvědčil postup známý jako *dolní relaxace*. Ten spočívá v tom, že do rovnice (6.30) dosadíme místo  $u_P$  výraz

$$\frac{1}{\alpha_u} u_P - \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} \bar{u}_P, \quad (6.33)$$

kde  $\alpha \in (0, 1]$  je relaxační parametr. Pro  $\alpha_u = 1$  dostaneme nerelaxovanou metodu. Vliv relaxačního faktoru vymizí, když nastane konvergence, tj. když  $u_P = \bar{u}_P$ . Pro velmi malé  $\alpha_u$  dojde v modifikované rovnici

$$\frac{1}{\alpha_u} A_P^u u_P = A_E^u u_E + A_W^u u_W + A_N^u u_N + A_S^u u_S - |D_P| \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + b_P^u + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} A_P^u \bar{u}_P \quad (6.34)$$

k výraznému potlačení vlivu všech koeficientů neobsahujících faktor  $1/\alpha_u$ , takže rovnice (6.34) se chová podobně jako rovnice  $u_P = \bar{u}_P$ . Volíme-li však  $\alpha_u$  „přiměřeně malé“, zabráníme vzniku pronikavých změn mezi hodnotami  $u_P$  a  $\bar{u}_P$  ve dvou po sobě jdoucích iteracích, což má stabilizující účinek a napomáhá to konvergenci. Vhodná volba parametru  $\alpha_u$  vyžaduje kromě zkušeností také nezbytné experimentování. Řešení soustavy (6.32) označíme jako  $\mathbf{u}^*$ .

**Metoda druhého řádu.** Pokud jde o časovou diskretizaci, doporučit lze metodu zpětného diferencování druhého řádu. Pro rovnici  $y' = f(t, y)$  jde o schéma

$$\frac{3}{2}y_{k+1} - 2y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} = f(t_{k+1}, y_{k+1}). \quad (6.35)$$



Pokud jde o prostorovou diskretizaci, jediná aproximace, která není řádu dva, je upwind diskretizace (6.14) konvekčního členu. Aproximaci řádu dva získáme podobně jako v kapitole 3.2.5. Tedy, na konečném objemu  $D_P$  definujeme lineární funkci

$$\hat{u}_P(\mathbf{x}, t) = u_P + \psi_P \nabla u_P \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P), \quad (6.36)$$

kde  $\nabla u_P$  je aproximace gradientu  $u$  v bodě  $P$ ,  $\psi_P$  je limiter a  $\mathbf{x}_P$  je souřadnice bodu  $P$ . V dalším uvažujeme pro jednoduchost jen vnitřní konečné objemy. Na nich aproximujeme gradient pomocí centrálních diferencí,

$$\nabla u_P = \left( \frac{u_E - u_W}{2h_x}, \frac{u_N - u_S}{2h_y} \right)^T. \quad (6.37)$$

Nechť

$$u_q^P = \hat{u}_P(\mathbf{x}_q, t), \quad q = e, n, w, s, \quad (6.38)$$

kde  $\mathbf{x}_q$  je souřadnice bodu  $q$ , viz obrázek 6.2. Limitování provedeme pomocí Barthova-Jespersenova limiteru. Konstrukce BJ limiteru pro duální konečné objemy na primární trojúhelníkové síti je popsána v kapitole 3.2.5, viz (3.115)-(3.117). BJ limiter na primární obdélníkové síti se zkonstruuje podobně.

Místo upwind aproximace (6.14) řádu jedna použijeme aproximaci

$$F_q(\bar{\mathbf{v}})u_q \approx F_q^+(\bar{\mathbf{v}})u_q^P + F_q^-(\bar{\mathbf{v}})u_q^Q, \quad (6.39)$$

kde  $u_q^Q = \hat{u}_Q(\mathbf{x}_q)$ . Tím by však došlo k poškození skvělých vlastností matice  $\mathbf{A}^u$  soustavy (6.32). Proto aproximaci (6.39) vylepšíme technikou známou jako *deferred correction method* (česky *metoda odložených korekcí*) takto:

$$F_q(\bar{\mathbf{v}})u_q \approx F_q^+(\bar{\mathbf{v}})[u_P + (\bar{u}_q^P - \bar{u}_P)] + F_q^-(\bar{\mathbf{v}})[u_Q + (\bar{u}_q^Q - \bar{u}_Q)], \quad (6.40)$$

přičemž podle (6.38) a (6.36)

$$\bar{u}_q^P = \bar{u}_P + \psi_P \nabla \bar{u}_P(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_P), \quad \bar{u}_q^Q = \bar{u}_Q + \psi_Q \nabla \bar{u}_Q(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_Q). \quad (6.41)$$

Gradient  $\nabla \bar{u}_P$  spočteme podle vztahu (6.37), v němž místo  $u$  bereme  $\bar{u}$ , gradient  $\nabla \bar{u}_Q$  spočteme na konečném objemu  $D_Q$  obdobně. Matice  $\mathbf{A}^u$  tak zůstane nezměněna, část  $F_q^+(\bar{\mathbf{v}})(\bar{u}_q^P - \bar{u}_P) + F_q^-(\bar{\mathbf{v}})(\bar{u}_q^Q - \bar{u}_Q)$  korekce zahrneme do pravé strany  $\mathbf{b}^u$ . Přitom v limitě, když  $\bar{u} = u$ , jsou obě aproximace (6.39) a (6.40) totožné. Když se limiter neuplatní, tj. když  $\psi_P = 1$ , je aproximace (6.40) řádu dva, pro  $\psi_P \in [0, 1)$  je řád aproximace nižší.

### 6.1.2. Diskretizace druhé pohybové rovnice.

Podobně jako v předchozí kapitole dostaneme rovnice

$$\frac{1}{\alpha_v} A_P^v v_P = A_E^v v_E + A_W^v v_W + A_N^v v_N + A_S^v v_S - |D_P| \frac{\bar{p}_N - \bar{p}_S}{2h_y} + b_P^v + \frac{1 - \alpha_v}{\alpha_v} A_P^v \bar{v}_P, \quad (6.42)$$

kde

$$\begin{aligned}
A_Q^v &= A_Q^u, \quad Q = E, N, S, W, \quad A_P^v = A_P^u, \\
b_P^v &= \frac{|D_P| \varrho_P}{\tau} v_P^0 + |D_P| \bar{S}_P^v, \\
\bar{S}_P^v &= \bar{f}_P^v + \frac{\mu_e(\bar{u}_{ne} - \bar{u}_{se}) - \mu_w(\bar{u}_{nw} - \bar{u}_{sw})}{h_x h_y} + \frac{\mu_n(\bar{v}_N - \bar{v}_P) - \mu_s(\bar{v}_P - \bar{v}_S)}{h_y^2},
\end{aligned} \tag{6.43}$$

a  $\alpha_v$  je relaxační koeficient. Maticově lze soustavu rovnic (6.42) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A}^v \mathbf{v} = \mathbf{L}^v \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{b}^v. \tag{6.44}$$

Okrajové podmínky a případnou diskretizaci druhého řádu zavedeme podobně jako u první pohybové rovnice. Řešení soustavy (6.44) označíme jako  $\mathbf{v}^*$ .

### 6.1.3. Diskretizace rovnice kontinuity.

Integrací rovnice (6.4) přes kontrolní objem  $D_P$  obdržíme

$$0 = \int_{D_P} \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_P} \varrho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS.$$

Pomocí obdélníkové kvadraturní formule dostaneme diskrétní rovnici kontinuity

$$0 = \sum_{q \in s(P)} F_q(\mathbf{v}) = \varrho_e u_e h_y + \varrho_n v_n h_x - \varrho_w u_w h_y - \varrho_s v_s h_x. \tag{6.45}$$

**Rychlosti na stranách.** Skutečnost, že v pohybových rovnicích (6.34) a (6.42) chybí hodnota  $\bar{p}_P$  tlaku ve středu kontrolního objemu  $D_P$ , podstatně ovlivní aproximaci rychlostí  $u_e, u_w, v_n$  a  $v_s$  ve středech stran  $\Gamma_e, \Gamma_w, \Gamma_n$  a  $\Gamma_s$ . Namísto přímočaré lineární interpolace z přilehlých kontrolních objemů použijeme aproximaci, kterou navrhli Rhie a Chow, viz [43], a která bývá v literatuře označována jako *momentum interpolation*, někdy také *added dissipation scheme*. My ji budeme v tomto textu označovat jako *Rhie-Chow aproximaci*, stručně R-Ch aproximaci. Použití pouhé lineární interpolace vede na nestabilní algoritmus, viz poznámka 6.1. Z rovnice (6.34) pro kontrolní objemy  $D_P$  a  $D_E$

$$u_P = \tilde{u}_P - \alpha_u \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x}, \quad u_E = \tilde{u}_E - \alpha_u \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{\bar{p}_{EE} - \bar{p}_P}{2h_x}, \tag{6.46}$$

kde

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_P &= \frac{\alpha_u}{A_P^u} \left( A_E^u u_E + A_W^u u_W + A_N^u u_N + A_S^u u_S + b_P^u + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} A_P^u \bar{u}_P \right), \\
\tilde{u}_E &= \frac{\alpha_u}{[A_P^u]_E} \left( [A_E^u]_E u_{EE} + [A_W^u]_E u_P + [A_N^u]_E u_{NE} + [A_S^u]_E u_{SE} + [b_P^u]_E + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} [A_P^u]_E \bar{u}_E \right).
\end{aligned}$$

Index  $E$  vpravo dole u hranatých závorek okolo koeficientů  $A_Q^u$  přitom vyznačuje, že tyto koeficienty přísluší kontrolnímu objemu  $D_E$ . R-Ch aproximace rychlosti  $u$  ve středu východní strany  $\Gamma_e$  je dána předpisem

$$u_e = \frac{1}{2}(u_P + u_E) - \left( d_e \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_P}{h_x} - \frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{\bar{p}_{EE} - \bar{p}_P}{2h_x} \right] \right), \tag{6.47}$$

kde

$$d_e = \frac{\alpha_u}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \right). \quad (6.48)$$

*Přídavný člen*

$$u_{e,add} := - \left( d_e \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_P}{h_x} - \frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{\bar{p}_{EE} - \bar{p}_P}{2h_x} \right] \right) \quad (6.49)$$

je „malý“, řádu  $O(h_x^3 h_y)$ . Přesnost „přirozené“ *lineární aproximace*

$$u_{e,lin} = \frac{1}{2}(u_P + u_E) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_P + \tilde{u}_E) - \frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{\bar{p}_{EE} - \bar{p}_P}{2h_x} \right], \quad (6.50)$$

která je řádu  $O(h_x^2)$ , tedy přídavný člen neovlivní.

Pomocí (6.47) lze R-Ch aproximaci rychlosti  $u_e$  vyjádřit také ve tvaru

$$u_e = \tilde{u}_e - d_e \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_P}{h_x}, \quad (6.51)$$

kde

$$\tilde{u}_e = \frac{1}{2}(u_P + u_E) + \frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{\bar{p}_{EE} - \bar{p}_P}{2h_x} \right]. \quad (6.52)$$

Protože  $\tilde{u}_e = \frac{1}{2}(\tilde{u}_P + \tilde{u}_E)$ , máme

$$u_e = \frac{1}{2}(\tilde{u}_P + \tilde{u}_E) - d_e \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_P}{h_x}. \quad (6.53)$$

Srovnáním (6.50) a (6.53) vidíme účinek R-Ch aproximace: vážený průměr centrálních diferencí  $\frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{\bar{p}_{EE} - \bar{p}_P}{2h_x} \right]$  v lineární aproximaci  $u_{e,lin}$ , viz (6.50), je v R-Ch aproximaci  $u_e$  nahrazen jednostrannou diferencí  $d_e \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_P}{h_x}$ , viz (6.51). Chyby obou aproximací (6.50) a (6.53) jsou přitom řádově stejné.

Rychlosti  $u_w$ ,  $u_n$  a  $u_s$  aproximujeme podobně:

$$\begin{aligned} u_w &= \frac{1}{2}(u_P + u_W) - \left( d_w \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_W}{h_x} - \frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_W|}{[A_P^u]_W} \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_{WW}}{2h_x} \right] \right), \\ v_n &= \frac{1}{2}(v_P + v_N) - \left( d_n \frac{\bar{p}_N - \bar{p}_P}{h_y} - \frac{\alpha_v}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_N - \bar{p}_S}{2h_y} + \frac{|D_N|}{[A_P^u]_N} \frac{\bar{p}_{NN} - \bar{p}_P}{2h_y} \right] \right), \\ v_s &= \frac{1}{2}(v_P + v_S) - \left( d_s \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_S}{h_y} - \frac{\alpha_v}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_N - \bar{p}_S}{2h_y} + \frac{|D_S|}{[A_P^u]_S} \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_{SS}}{2h_y} \right] \right), \end{aligned} \quad (6.54)$$

kde

$$d_w = \frac{\alpha_u}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} + \frac{|D_W|}{[A_P^u]_W} \right), \quad d_n = \frac{\alpha_v}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} + \frac{|D_N|}{[A_P^u]_N} \right), \quad d_s = \frac{\alpha_v}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} + \frac{|D_S|}{[A_P^u]_S} \right), \quad (6.55)$$

a také

$$u_w = \tilde{u}_w - d_w \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_W}{h_x}, \quad v_n = \tilde{v}_n - d_n \frac{\bar{p}_N - \bar{p}_P}{h_y}, \quad v_s = \tilde{v}_s - d_s \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_S}{h_y}, \quad (6.56)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{u}_w &= \frac{1}{2}(u_P + u_W) + \frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_W|}{[A_P^u]_W} \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_{WW}}{2h_x} \right], \\ \tilde{v}_n &= \frac{1}{2}(v_P + v_N) + \frac{\alpha_v}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_N - \bar{p}_S}{2h_y} + \frac{|D_N|}{[A_P^u]_N} \frac{\bar{p}_{NN} - \bar{p}_P}{2h_y} \right], \\ \tilde{v}_s &= \frac{1}{2}(v_P + v_S) + \frac{\alpha_v}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_N - \bar{p}_S}{2h_y} + \frac{|D_S|}{[A_P^u]_S} \frac{\bar{p}_P - \bar{p}_{SS}}{2h_y} \right]. \end{aligned} \quad (6.57)$$

**Korekce.** Naším cílem je určit korekce  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{v}'$  a  $\mathbf{p}'$  tak, aby korigované vektory

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}', \quad \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{p}'$$

splňovaly rovnice

$$\mathbf{A}^u(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}') = \mathbf{L}^u(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{p}') + \mathbf{b}^u, \quad \mathbf{A}^v(\mathbf{v}^* + \mathbf{v}') = \mathbf{L}^v(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{p}') + \mathbf{b}^v. \quad (6.58)$$

Korekce určíme prostřednictvím diskrétní rovnice kontinuity (6.45). Označme jako  $u'_P$ ,  $v'_P$  a  $p'_P$  korekce ve středu konečného objemu  $D_P$  a necht'  $u'_e$ ,  $v'_n$ ,  $u'_w$  a  $v'_s$  jsou korekce ve středech stran  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_w$  a  $\Gamma_s$ . Pak

$$\begin{aligned} u_P &= u_P^* + u'_P, \quad v_P = v_P^* + v'_P, \quad p_P = \bar{p}_P + p'_P, \\ u_e &= u_e^* + u'_e, \quad v_n = v_n^* + v'_n, \quad u_w = u_w^* + u'_w, \quad v_s = v_s^* + v'_s. \end{aligned}$$

Do diskrétní rovnice kontinuity (6.45) dosadíme  $(u^* + u', v^* + v')^T$  místo  $\mathbf{v} = (u, v)^T$ ,

$$\sum_{q \in s(P)} F_q \left( \begin{bmatrix} u^* + u' \\ v^* + v' \end{bmatrix} \right) = 0, \quad \text{nebo-li} \quad \sum_{q \in s(P)} F_q \left( \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} \right) = - \sum_{q \in s(P)} F_q \left( \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} \right),$$

po složkách

$$\varrho_e u'_e h_y + \varrho_n v'_n h_x - \varrho_w u'_w h_y - \varrho_s v'_s h_x = -(\varrho_e u_e^* h_y + \varrho_n v_n^* h_x - \varrho_w u_w^* h_y - \varrho_s v_s^* h_x). \quad (6.59)$$

Rychlosti  $u_e^*$ ,  $v_n^*$ ,  $u_w^*$  a  $v_s^*$  vyjádříme ze vzorců (6.47) a (6.54), v nichž místo  $u$  resp.  $v$  píšeme  $u^*$  resp.  $v^*$ . Tak třeba

$$u_e^* = \frac{1}{2}(u_P^* + u_E^*) - \left( d_e \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_P}{h_x} - \frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{\bar{p}_{EE} - \bar{p}_P}{2h_x} \right] \right).$$

Korekce  $u'_e$ ,  $v'_n$ ,  $u'_w$  a  $v'_s$  vyjádříme ze vzorců (6.51), (6.52), (6.56) a (6.57), v nichž místo  $u$  resp.  $v$  resp.  $\bar{p}$  píšeme  $u'$  resp.  $v'$  resp.  $p'$ . Tak třeba

$$u'_e = \tilde{u}'_e - d_e \frac{p'_E - p'_P}{h_x}, \quad \text{kde} \quad \tilde{u}'_e = \frac{1}{2}(u'_P + u'_E) + \frac{\alpha_u}{2} \left[ \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{p'_E - p'_W}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{p'_{EE} - p'_P}{2h_x} \right].$$

Levá strana rovnice (6.59) tak nabude tvaru

$$\begin{aligned} & \varrho_e h_y \left( \tilde{u}'_e - d_e \frac{p'_E - p'_P}{h_x} \right) + \varrho_n h_x \left( \tilde{v}'_n - d_n \frac{p'_N - p'_P}{h_y} \right) - \\ & \varrho_w h_y \left( \tilde{u}'_w - d_w \frac{p'_P - p'_W}{h_x} \right) - \varrho_s h_x \left( \tilde{v}'_s - d_s \frac{p'_P - p'_S}{h_y} \right). \end{aligned} \quad (6.60)$$

**Soustava rovnic.** Z 6.60 a (6.59) dostaneme soustavu rovnic pro výpočet tlakových korekcí:

$$A_P^p p'_P = A_E^p p'_E + A_N^p p'_N + A_W^p p'_W + A_S^p p'_S + b_P^* + \tilde{b}'_P, \quad (6.61)$$

kde

$$\begin{aligned} A_E^p &= \varrho_e d_e h_y / h_x, \quad A_N^p = \varrho_n d_n h_x / h_y, \quad A_W^p = \varrho_w d_w h_y / h_x, \quad A_S^p = \varrho_s d_s h_x / h_y, \\ A_P^p &= A_E^p + A_N^p + A_W^p + A_S^p, \\ b_P^* &= -(\varrho_e u_e^* h_y + \varrho_n v_n^* h_x - \varrho_w u_w^* h_y - \varrho_s v_s^* h_x), \\ \tilde{b}'_P &= -(\varrho_e \tilde{u}'_e h_y + \varrho_n \tilde{v}'_n h_x - \varrho_w \tilde{u}'_w h_y - \varrho_s \tilde{v}'_s h_x). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Algoritmus SIMPLE dostaneme tak, že ve vzorcích (6.51) a (6.56) pro rychlosti  $u'_e$ ,  $v'_n$ ,  $u'_w$  a  $v'_s$  zanedbáme členy  $\tilde{u}'_e$ ,  $\tilde{v}'_n$ ,  $\tilde{u}'_w$  a  $\tilde{v}'_s$ , takže

$$u'_e = -d_e \frac{p'_E - p'_P}{h_x}, \quad v'_n = -d_n \frac{p'_N - p'_P}{h_y}, \quad u'_w = -d_w \frac{p'_P - p'_W}{h_x}, \quad v'_s = -d_s \frac{p'_P - p'_S}{h_y}. \quad (6.63)$$

To se v rovnici (6.61) projeví tak, že vynecháme člen  $\tilde{b}'_P$ , tj. řešíme rovnice

$$A_P^p p'_P = A_E^p p'_E + A_W^p p'_W + A_N^p p'_N + A_S^p p'_S + b_P^*. \quad (6.64)$$

Soustavu rovnic (6.64) doplníme o okrajové podmínky.

**Vtok.** Předepsanou okrajovou podmínku promítneme přímo do rovnice (6.59), tj. položíme  $u_w^* = \hat{u}_w$ ,  $u'_w = 0$ . Podmínku  $u'_w = 0$  přitom uplatníme tak, že položíme  $A_W^p = 0$ .

**Stěna.** Na severní stěně  $\Gamma_N$  položíme  $v_n^* = 0$ ,  $A_N^p = 0$ , na jižní stěně  $\Gamma_S$  pak klademe  $v_s^* = 0$ ,  $A_S^p = 0$ .

**Výtok** Jestliže tlak na výtoku předepsán není, pak je přirozené očekávat, že tlakové korekce na příslušných hraničních kontrolních objemech nejsou vnějším tlakem ovlivněny. To lze zohlednit tak, že položíme  $A_E^p = 0$ . Jiná situace nastane v případě, když na výtoku tlak předepsán je. Pak postupujeme tak, jako kdyby byl tlak předepsán ve středech příslušných hraničních kontrolních objemů. To znamená, že  $\bar{p}_P = \hat{p}_P$  je dané a místo rovnice (6.64) bereme triviální rovnici  $p'_P = 0$ .

**Řešení soustavy lineárních rovnic.** Soustavu rovnic (6.64), upravenou zahrnutím vlivu okrajových podmínek, zapíšeme formálně ve tvaru

$$\mathbf{A}^p \mathbf{p}' = \mathbf{b}^p. \quad (6.65)$$

Pokud není předepsán tlak  $\hat{p}$ , matice  $\mathbf{A}^p$  je singulární. V tom případě jednu libovolně zvolenou rovnici nahradíme triviální rovnicí  $p'_P = 0$ . Matice takto modifikované soustavy už regulární je a soustava má jediné řešení. Triviální rovnice je asymptoticky správná: nastane-li konvergence,  $p'_P \rightarrow 0$  pro každý bod  $P$ .

Poté, co určíme tlakové korekce jako řešení soustavy rovnic (6.65), dopočítáme podle (6.63) korekce rychlostí a vypočteme korigované rychlosti

$$u_e = u_e^* + u'_e, \quad v_n = v_n^* + v'_n, \quad u_w = u_w^* + u'_w, \quad v_s = v_s^* + v'_s \quad (6.66)$$

a korigovaný tlak

$$p_P = \bar{p} + \alpha_p p'_P, \quad (6.67)$$

kde  $\alpha_P \in (0, 1]$  je relaxační parametr. Vhodná volba relaxačních faktorů je závislá na konkrétním problému, více viz [19].

V rovnici (6.64) vyjadřuje člen  $b_P^*$  míru nesplnění diskrétní rovnice kontinuity (6.59) rychlostmi  $u^*$  a  $v^*$ . Je-li na všech kontrolních objemech  $b_P^* = 0$ , je  $\mathbf{p}' = \mathbf{0}$ , podle (6.63) pak  $u'_e = v'_n = u'_w = v'_s = 0$  a podle (6.66)  $u_e = u_e^*$ ,  $v_n = v_n^*$ ,  $u_w = u_w^*$  a  $v_s = v_s^*$ . Vidíme tedy, že i když je aproximace (6.63), použitá k odvození rovnic (6.64), velmi hrubá, je asymptoticky správná.

Rychlosti  $u_e$ ,  $u_w$ ,  $v_n$  a  $v_s$  ve středech stran přenášíme do další iterace, kde je značíme jako  $\bar{u}_e$ ,  $\bar{u}_w$ ,  $\bar{v}_n$ ,  $\bar{v}_s$  a používáme je při diskretizaci konvekčních členů, viz (6.12)-(6.19). Z (6.66) a (6.59) přitom plyne, že rychlosti  $\bar{u}_e := u_e$ ,  $\bar{u}_w := u_w$ ,  $\bar{v}_n := v_n$  a  $\bar{v}_s := v_s$  splňují diskrétní rovnici kontinuity.

Korekci  $u'_P$  ve středu konečného objemu dostaneme modifikací prvního vzorce v (6.46): místo  $u$  v něm píšeme  $u'$  a následně člen  $\tilde{u}'_P$  vypustíme (což odpovídá tomu, že jsme ve vzorcích (6.51) a (6.56) pro rychlosti  $u'_e$ ,  $v'_n$ ,  $u'_w$  a  $v'_s$  zanedbali členy  $\tilde{u}'_e$ ,  $\tilde{v}'_n$ ,  $\tilde{u}'_w$  a  $\tilde{v}'_s$ , viz 6.63)). Korekci  $v'_P$  získáme podobně. Výsledek je

$$u'_P = -\alpha_u \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{p'_E - p'_W}{2h_x}, \quad v'_P = -\alpha_v \frac{|D_P|}{A_P^v} \frac{p'_N - p'_S}{2h_y}. \quad (6.68)$$

Nákonc položíme

$$u_P = u_P^* + u'_P, \quad v_P = v_P^* + v'_P. \quad (6.69)$$

**Konvergenční** posoudíme třeba tak, že otestujeme velikost reziduí

$$\mathbf{r}^u = \mathbf{L}^u \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{b}^u - \mathbf{A}^u \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{r}^v = \mathbf{L}^v \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{b}^v - \mathbf{A}^v \bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{r}^p = \mathbf{b}^p - \mathbf{A}^p \bar{\mathbf{p}}',$$

kde  $\bar{\mathbf{p}}'$  je tlaková korekce z předchozí iterace. Jsou-li rezidua dostatečně malá, položíme  $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}$ , v opačném provedeme  $\bar{\mathbf{u}} := \mathbf{u}$ ,  $\bar{\mathbf{v}} := \mathbf{v}$ ,  $\bar{\mathbf{p}} := \mathbf{p}$  a pokračujeme další iterací.

**Poznámka 6.1.** Jestliže bychom místo R-Ch aproximace použili jen lineární interpolaci, dostaneme nestabilní algoritmus. Naznačme si to. Pro rychlost  $u_e$  na východní straně obdržíme

$$u_e = \frac{u_P + u_E}{2} = \frac{\tilde{u}_P + \tilde{u}_E}{2} - \frac{\alpha_u}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{\bar{p}_E - \bar{p}_W}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{\bar{p}_{EE} - \bar{p}_P}{2h_x} \right). \quad (6.70)$$

Postupujeme podobně jako při odvozování soustavy rovnic (6.64), tentokrát však

$$u_e^* = \frac{u_P^* + u_E^*}{2}, \quad u_e' = -\frac{\alpha_u}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{p_E' - p_W'}{2h_x} + \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E} \frac{p_{EE}' - p_P'}{2h_x} \right). \quad (6.71)$$

Na zbývajících stranách konečného objemu  $D_P$  máme

$$\begin{aligned} u_w^* &= \frac{u_P^* + u_W^*}{2}, \quad u_w' = -\frac{\alpha_u}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{p_E' - p_W'}{2h_x} + \frac{|D_W|}{[A_P^u]_W} \frac{p_P' - p_{WW}'}{2h_x} \right), \\ v_n^* &= \frac{v_P^* + v_N^*}{2}, \quad v_n' = -\frac{\alpha_v}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{p_N' - p_S'}{2h_y} + \frac{|D_N|}{[A_P^u]_N} \frac{p_{NN}' - p_P'}{2h_y} \right), \\ v_s^* &= \frac{v_P^* + v_S^*}{2}, \quad v_s' = -\frac{\alpha_v}{2} \left( \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{p_N' - p_S'}{2h_y} + \frac{|D_S|}{[A_P^u]_S} \frac{p_P' - p_{SS}'}{2h_y} \right). \end{aligned} \quad (6.72)$$

Dosažením do (6.59) dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A_{PP}^p p_P' &= A_{EW}^p (p_E' - p_W') + A_{NS}^p (p_N' - p_S') + \\ &A_{EE}^p p_{EE}' + A_{WW}^p p_{WW}' + A_{NN}^p p_{NN}' + A_{SS}^p p_{SS}' + b_P^p, \end{aligned} \quad (6.73)$$

kde

$$A_{EW}^p = \alpha_u \frac{\varrho_e - \varrho_w}{4} \frac{h_y}{h_x} \frac{|D_P|}{A_P^u}, \quad A_{NS}^p = \alpha_v \frac{\varrho_n - \varrho_s}{4} \frac{h_x}{h_y} \frac{|D_P|}{A_P^u}, \quad (6.74)$$

a dále

$$\begin{aligned} A_{EE}^p &= \alpha_u \frac{\varrho_e}{4} \frac{h_y}{h_x} \frac{|D_E|}{[A_P^u]_E}, & A_{WW}^p &= \alpha_u \frac{\varrho_w}{4} \frac{h_y}{h_x} \frac{|D_W|}{[A_P^u]_W}, \\ A_{NN}^p &= \alpha_v \frac{\varrho_n}{4} \frac{h_x}{h_y} \frac{|D_N|}{[A_P^u]_N}, & A_{SS}^p &= \alpha_v \frac{\varrho_s}{4} \frac{h_x}{h_y} \frac{|D_S|}{[A_P^u]_S}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

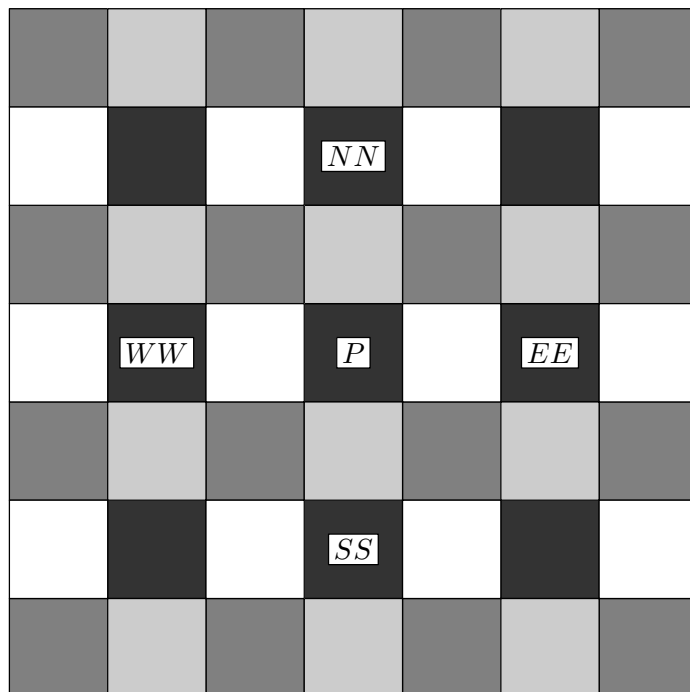
$$A_{PP}^p = A_{EE}^p + A_{NN}^p + A_{WW}^p + A_{SS}^p,$$

$$b_P^p = -(\varrho_e u_e^* h_y + \varrho_n v_n^* h_x - \varrho_w u_w^* h_y - \varrho_s v_s^* h_x).$$

Pro konstantní hustotu je  $A_{EW}^p = A_{NS}^p = 0$  a rovnice (6.73) nabude tvaru

$$A_{PP}^p p_P' = A_{EE}^p p_{EE}' + A_{WW}^p p_{WW}' + A_{NN}^p p_{NN}' + A_{SS}^p p_{SS}' + b_P^p. \quad (6.76)$$

Soustava rovnic (6.76) se tak rozpadne do čtyř dílčích soustav, které můžeme rozlišit pomocí obrázku 6.1 takto: první dílčí soustava obsahuje neznámé příslušné pouze černým polím, druhá neznámé příslušné pouze bílým polím, třetí neznámé příslušné pouze světle šedým polím a čtvrtá neznámé příslušné pouze tmavě šedým polím. Jedinou vazbu mezi těmito soustavami zajišťuje zdrojový člen  $b_P^p$  a okrajové podmínky. Teoreticky si lze představit situaci, kdy by tlakové korekce na polích stejného odstínu nabývaly přibližně stejnou konstantní hodnotu, třeba  $p' \doteq \alpha$  na černých polích,  $p' \doteq \beta$  na bílých polích,  $p' \doteq \gamma$  na světle šedých polích a  $p' \doteq \delta$  na tmavě šedých polích. Rozkmitané tlakové



Obr. 6.3: Šachovnicový efekt

korekce se přenesou prostřednictvím rychlostních korekcí do pohybových rovnic a způsobí rozkmitání rychlostí. Výsledkem je rozkmitané pole jak rychlostí tak tlaku, ztráta stability a kolaps výpočtu. V anglicky psané literatuře se pro tento druh nestability používá termín *checkerboarding*, česky můžeme použít termín *šachovnicový efekt*.

Předpoklad konstantní hustoty není podstatný. Z (6.74) vidíme, že koeficienty  $A_{EW}^p$  a  $A_{NS}^p$  jsou řádově menší než koeficienty  $A_{EE}^p$ ,  $A_{NN}^p$ ,  $A_{WW}^p$ ,  $A_{SS}^p$ ,  $A_{PP}^p$ , takže tendence ke vzniku oscilací nastává i v tomto případě.  $\square$

**Poznámka 6.2.** Algoritmus SIMPLE obecně konverguje jen velmi pomalu, někdy dokonce vůbec. Je to způsobeno velmi hrubou aproximací (6.63), při níž zanedbáváme členy  $\tilde{u}'_e$ ,  $\tilde{v}'_n$ ,  $\tilde{u}'_w$  a  $\tilde{v}'_s$ . Proto vzniklo několik modifikací algoritmu SIMPLE známých pod zkratkami SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised), viz [42], SIMPLEC (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent), viz [19], nebo PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operator), viz [19]. V následujícím stručně popíšeme

**Algoritmus PISO.** Po výpočtu korekcí  $p'_P$ ,  $u'_P$  a  $v'_P$  dopočítáme  $\tilde{u}'_e$ ,  $\tilde{v}'_n$ ,  $\tilde{u}'_w$ ,  $\tilde{v}'_s$  a pak  $\tilde{b}'_P$ . Řešením soustavy

$$A_P^p p_P'' = A_E^p p_E'' + A_W^p p_W'' + A_N^p p_N'' + A_S^p p_S'' + b_P^* + \tilde{b}'_P \quad (6.77)$$

získáme druhé korekce tlaku  $p_P''$ . Pak upravíme tlak,

$$p_P = \bar{p}_P + p_P'', \quad (6.78)$$



a spočteme rychlosti na stranách,

$$\begin{aligned} u_e &= u_e^* + \left[ \tilde{u}'_e - d_e \frac{p''_E - p''_P}{h_x} \right], & v_n &= v_n^* + \left[ \tilde{v}'_n - d_n \frac{p''_N - p''_P}{h_y} \right], \\ u_w &= u_w^* + \left[ \tilde{u}'_w - d_w \frac{p''_P - p''_W}{h_x} \right], & v_s &= v_s^* + \left[ \tilde{v}'_s - d_s \frac{p''_P - p''_S}{h_y} \right]. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Nakonec určíme druhé korekce rychlostí ve středech konečných objemů

$$u''_P = \tilde{u}'_P - \alpha_u \frac{|D_P|}{A_P^u} \frac{p''_E - p''_W}{2h_x}, \quad v''_P = \tilde{v}'_P - \alpha_v \frac{|D_P|}{A_P^v} \frac{p''_N - p''_S}{2h_y}, \quad (6.80)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{u}'_P &= \frac{\alpha_u}{A_P^u} (A_E^u u'_E + A_W^u u'_W + A_N^u u'_N + A_S^u u'_S), \\ \tilde{v}'_P &= \frac{\alpha_v}{A_P^v} (A_E^v v'_E + A_W^v v'_W + A_N^v v'_N + A_S^v v'_S), \end{aligned}$$

a spočteme rychlosti ve středech konečných objemů,

$$u_P = u_P^* + u''_P, \quad v_P = v_P^* + v''_P. \quad (6.81)$$

Následovat může výpočet dalších korekcí  $(p'''_P, u'''_P, v'''_P)$ ,  $(p^{(4)}_P, u^{(4)}_P, v^{(4)}_P)$  atd., což není nic jiného než iterační řešení rovnice (6.61). Standardně se končí druhou iterací, tj. postupuje se podle (6.77)–(6.81).  $\square$

## 6.2. Algoritmus SIMPLE na obecné čtyřúhelníkové síti

Oblast  $\Omega$  vykryjeme konvexními čtyřúhelníky. Při popisu diskretizace použijeme podobné označení jako v předchozí kapitole, viz obrázek 6.4. Konečný objem  $D_P$  je tedy uzavřený konvexní čtyřúhelník, bod  $P$  je jeho těžiště,  $e, n, w, s$  jsou středy stran  $\Gamma_e, \Gamma_n, \Gamma_w, \Gamma_s$ .

**Gradient.** V dalším budeme potřebovat gradient  $\nabla\phi(P)$  pro  $\phi = u, v, p$ . Podle Greenovy věty

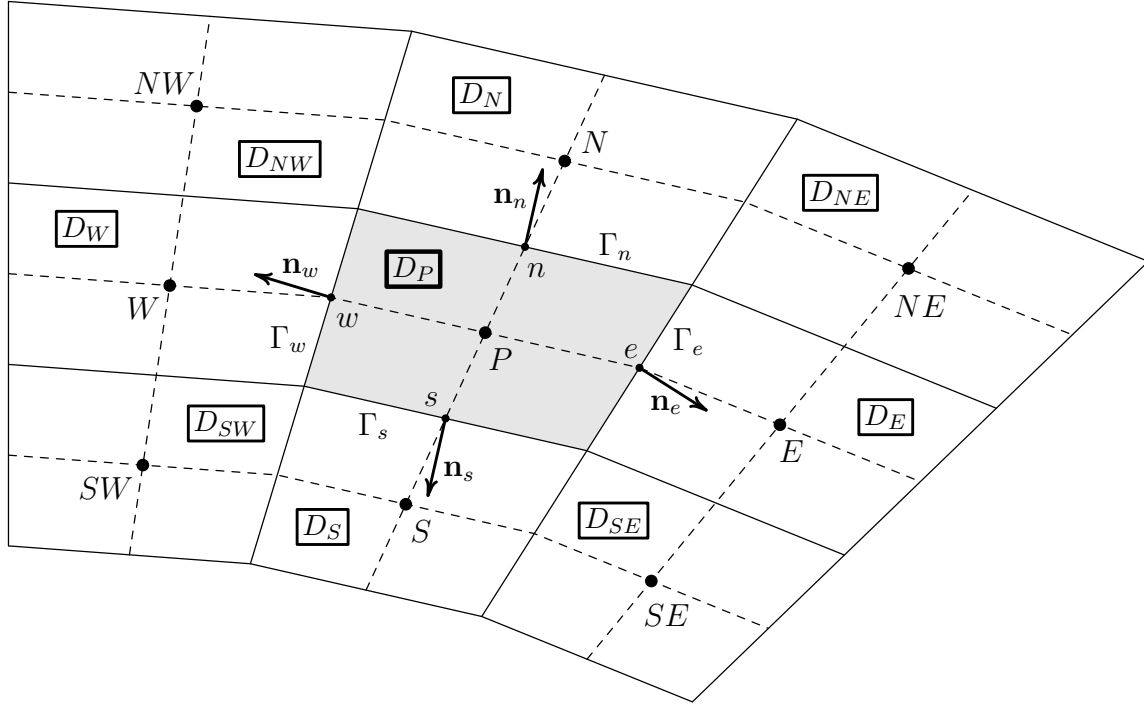
$$\int_{D_P} \nabla\phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_P} \phi \mathbf{n} \, dS.$$

Spočteme-li integrály na stranách  $\Gamma_q$ ,  $q = e, n, w, s$ , obdélníkovou formulí, dostaneme

$$|D_P| \nabla\phi(P) \approx \sum_{q \in s(P)} |\Gamma_q| \phi(\mathbf{x}_q) \mathbf{n}_q.$$

Přibližnou hodnotu gradientu  $\nabla\phi$  v bodu  $P$  proto definujeme předpisem

$$\nabla\phi_P := \frac{1}{|D_P|} \sum_{q \in s(P)} |\Gamma_q| \phi_q \mathbf{n}_q. \quad (6.82)$$



Obr. 6.4: Konečný objem  $D_P$  a jeho sousedé

**Síť, interpolate.** Spojnice bodu  $P$  a sousedního bodu  $Q$  protíná společnou hranici  $\Gamma_q$  konečných objemů  $D_P$  a  $D_Q$  v bodu  $q'$ , který obecně není středem  $q$  strany  $\Gamma_q$ , tj.  $q' \neq q$ , viz obrázek 6.5. Necht' bod  $P'$  resp.  $Q'$  je kolmým průmětem bodu  $P$  resp.  $Q$  na přímku, která prochází bodem  $q$  a má směrnici  $\mathbf{n}_q$ , viz obrázek 6.5. Připomeňme, že  $\mathbf{n}_q$  je jednotkový vektor vnější normály konečného objemu  $D_P$  na straně  $\Gamma_q$ . Normovaný vektor  $\overrightarrow{PQ}$  označíme jako  $\mathbf{e}_\xi := (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P)/|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P|$ .

Hodnotu  $\phi_q$  funkce  $\phi$  v bodu  $\mathbf{x}_q$  nahradíme dostatečně přesnou aproximací  $[\![\phi]\!]_q$ . Tak třeba

$$[\![\phi]\!]_q = \phi_I(\mathbf{x}_q), \quad (6.83)$$

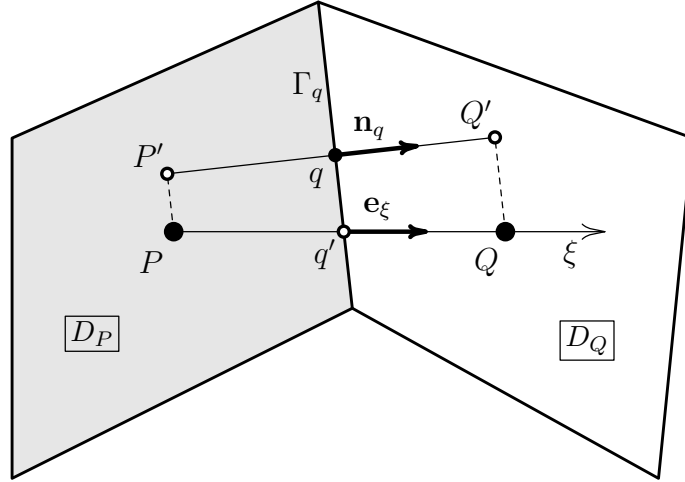
kde  $\phi_I(\mathbf{x})$  je lineární interpolant funkce  $\phi$  na trojúhelníku  $PQR$ ,  $R \in S(P) \cup S(E)$ . Pro  $q = e$  na obrázku 6.4 zvolíme za  $R$  jeden z bodů  $N, NE, S, SE$ . Když úsečka  $\overline{PQ}$  prochází středem  $q$  strany  $\Gamma_q$ , pak

$$[\![\phi]\!]_q = \phi_P + \frac{|\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_P|}{|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P|}(\phi_Q - \phi_P) \quad \text{pro } q = q'. \quad (6.84)$$

Jestliže navíc  $q' = \frac{1}{2}(P + Q)$ , pak

$$[\![\phi]\!]_q = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_Q) \quad \text{pro } q = q' = \frac{1}{2}(P + Q). \quad (6.85)$$

Když je úsečka  $\overline{PQ}$  ke straně  $\Gamma_q$  kolmá pro každé  $P, Q \in S(P)$ , řekneme, že *síť je ortogonální*. Kvalitní generátory sítí umí generovat ortogonální nebo téměř ortogonální sítě, v nichž spojnice  $\overline{PQ}$  těžišť dvou sousedních konečných objemů prochází přibližně středem



Obr. 6.5: Konečný objem  $D_P$  a jeden z jeho sousedů  $D_Q$

$q$  jejich společné strany  $\Gamma_q$ . Takové sítě jsou pro modelování proudění tekutin metodou konečných objemů velmi vhodné. Když je totiž úsečka  $\overline{PQ}$  ke straně  $\Gamma_q$  kolmá a  $q' = q$ , pak  $P' \equiv P$ ,  $Q' \equiv Q$  a platí

$$\frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} = \frac{\partial \phi_{q'}}{\partial \xi} \quad \text{pro } \overline{PQ} \perp \Gamma_q, \quad q = q', \quad (6.86)$$

viz obrázek 6.5. To vede ke zjednodušené diskretizaci viskózního členu, viz (6.88).

### 6.2.1. Diskretizace pohybových rovnic.

Uvažujme nejdříve první pohybovou rovnici. Vyjdeme z integrální identity (6.11). Objemové integrály spočteme přibližně jako součin plochy  $|D_P|$  a hodnoty integrandu v bodu  $P$ , tj.

$$\int_{D_P} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx |D_P| \varphi(\mathbf{x}_P),$$

křivkové integrály po hranici  $\Gamma_P$  počítáme složenou obdélníkovou formulí, tj.

$$\int_{\Gamma_P} \varphi(\mathbf{x}) \, dS \approx \sum_{q \in s(P)} |\Gamma_q| \varphi(\mathbf{x}_q).$$

Připomeňme, že  $\mathbf{x}_P$  je souřadnice bodu  $P$ ,  $\mathbf{x}_q$  je souřadnice bodu  $q$ ,  $s(P) = \{e, n, w, s\}$ . Po provedené integraci z (6.11) dostaneme

$$|D_P| \varrho_P \frac{u_P - u_P^0}{\tau} + \sum_{q \in s(P)} F_q(\bar{\mathbf{v}}) u_q = -|D_P| \frac{\partial \bar{p}_P}{\partial x} + \sum_{q \in s(P)} |\Gamma_q| \mu_q \frac{\partial u_q}{\partial n_q} + |D_P| \bar{S}_P^u, \quad (6.87)$$

kde  $F_q(\bar{\mathbf{v}}) = \varrho_q(\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \mathbf{n}_q) |\Gamma_q|$ , viz (6.12),  $n_x^q$  je  $x$ -ová složka vektoru  $\mathbf{n}_q = (n_x^q, n_y^q)^T$  a kde  $\partial u_q / \partial n_q = (\nabla u)_q \cdot \mathbf{n}_q$ . Dolní index  $P$  resp.  $q$  u členů  $u$ ,  $u^0$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\nabla u$  a  $\bar{S}^u$  označuje

přibližnou hodnotu v bodu  $P$  resp.  $q$ . V dalším se věnujeme diskretizaci jednotlivých členů rovnosti (6.87).

**Diskretizace konvekčního členu.** Použijeme upwind schéma (6.40), gradient  $\nabla \bar{u}_P$  resp.  $\nabla \bar{u}_Q$  obsažený v (6.41) spočteme podle (6.82) pro  $\phi_q = \llbracket \bar{u} \rrbracket_q$ ,  $q \in s(P)$  resp.  $q \in s(Q)$ . Rychlost  $\bar{\mathbf{v}}_q$  obsaženou v  $F_q^\pm(\bar{\mathbf{v}})$  aproximujeme pomocí  $\llbracket \bar{\mathbf{v}} \rrbracket_q$ .

**Diskretizace viskózního členu.** Metodou odložených korekcí dostaneme aproximaci

$$\frac{\partial u_q}{\partial n_q} \approx \frac{\partial u_q}{\partial \xi} + \left[ \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial n_q} - \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial \xi} \right]. \quad (6.88)$$

Nastane-li konvergence, tj.  $\bar{u} = u$ , aproximace (6.88) přejde v identitu. Derivace aproximujeme diferencemi, takže

$$\frac{\partial u_q}{\partial n_q} \approx \frac{u_Q - u_P}{|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P|} + \left[ \frac{\bar{u}_{Q'} - \bar{u}_{P'}}{|\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}|} - \frac{\bar{u}_Q - \bar{u}_P}{|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P|} \right]. \quad (6.89)$$

Pro souřadnice  $\mathbf{x}_{P'}$ ,  $\mathbf{x}_{Q'}$  bodů  $P'$ ,  $Q'$  snadno odvodíme, že

$$\mathbf{x}_{P'} = \mathbf{x}_q - [(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}_q] \mathbf{n}_q, \quad \mathbf{x}_{Q'} = \mathbf{x}_q - [(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_Q) \cdot \mathbf{n}_q] \mathbf{n}_q. \quad (6.90)$$

Hodnoty  $\bar{u}_{P'}$  a  $\bar{u}_{Q'}$  v bodech  $P'$  a  $Q'$  aproximujeme pomocí hodnot  $\bar{u}_P$ ,  $\bar{u}_Q$  a gradientů  $\nabla \bar{u}_P$ ,  $\nabla \bar{u}_Q$  v bodech  $P$  a  $Q$ ,

$$\bar{u}_{P'} \approx \bar{u}_P + \nabla \bar{u}_P \cdot (\mathbf{x}_{P'} - \mathbf{x}_P), \quad \bar{u}_{Q'} \approx \bar{u}_Q + \nabla \bar{u}_Q \cdot (\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_Q). \quad (6.91)$$

Gradienty  $\nabla \bar{u}_P$ ,  $\nabla \bar{u}_Q$  spočteme pomocí (6.82) pro  $\phi_q = \llbracket \bar{u} \rrbracket_q$ .

**Diskretizace tlakového členu.**  $\partial \bar{p}_P / \partial x$  je první složka gradientu  $\nabla \bar{p}_P$ . Gradient  $\nabla \bar{p}_P$  určíme podle (6.82) pro  $\phi_q = \llbracket \bar{p} \rrbracket_q$ .

**Diskretizace zdrojového členu** je tvaru

$$\bar{S}_P^u = |D_P| \bar{f}_P^u + |D_P| \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_P}{\partial x} \right). \quad (6.92)$$

Z rovnice kontinuity plyne, že pro konstantní  $\mu$  je druhý člen nulový. Pro nekonstantní  $\mu$  dostaneme aproximaci

$$|D_P| \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_P}{\partial x} \right) \approx \int_{D_P} \nabla \cdot \left( \mu \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \right) d\mathbf{x} \approx \sum_{q \in s(P)} |\Gamma_q| \mu_q \left[ \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \right] \right]_q \mathbf{n}_q. \quad (6.93)$$

Při interpolaci využijeme toho, že  $\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_A}{\partial x} = \frac{1}{|D_A|} \sum_{q \in s(A)} |\Gamma_q| \llbracket \bar{\mathbf{v}} \rrbracket_q n_x^q$ , kde  $A = P, Q, R$ .

**Soustava lineárních rovnic.** Do (6.87) dosadíme aproximace členů  $F_q(\bar{\mathbf{v}})$ ,  $\partial \bar{p}_P / \partial x$ ,  $\partial u_q / \partial n_q$ ,  $\bar{S}_P^u$  a obdržíme rovnici

$$A_P^u u_P = A_E^u u_E + A_W^u u_W + A_N^u u_N + A_S^u u_S - |D_P| \frac{\partial \bar{p}_P}{\partial x} + b_P^u. \quad (6.94)$$

Rovnice (6.94) sestavíme pro každý konečný objem  $D_P$  a uplatníme předepsané okrajové podmínky. Je také vhodné použít dolní relaxaci, viz (6.33), (6.34). Řešení označíme jako  $\mathbf{u}^*$ .

**Druhá pohybová rovnice.** Diskretizovaná druhá pohybová rovnice je tvaru

$$A_P^v v_P = A_E^v v_E + A_W^v v_W + A_N^v v_N + A_S^v v_S - |D_P| \frac{\partial \bar{p}_P}{\partial y} + b_P^v \quad (6.95)$$

kde  $\frac{\partial \bar{p}_P}{\partial y}$  je druhá složka vektoru  $\nabla \bar{p}_P$ . Odvození je podobné jako u první pohybové rovnice.

Platí  $A_Q^v = A_Q^u$  pro  $Q = P, E, W, N, S$ . Řešení soustavy rovnic (6.95) doplněné o vliv okrajových podmínek a relaxaci označíme jako  $\mathbf{v}^*$ .

### 6.2.2. Diskretizace rovnice kontinuity.

Pomocí Greenovy věty a numerické integrace dostaneme diskrétní tvar rovnice kontinuity

$$\sum_{q \in s(P)} F_q(\mathbf{v}) \equiv \sum_{q \in s(P)} \varrho_q(\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{n}_q) |\Gamma_q| = 0. \quad (6.96)$$

Věnujme se nejdříve aproximaci normálové rychlosti  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_q$ . Z rovnic (6.94) a (6.95) dostaneme

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{s}_P - \frac{|D_P|}{A_P^u} \nabla \bar{p}_P, \quad (6.97)$$

kde

$$\mathbf{s}_P = \frac{1}{A_P^u} \begin{pmatrix} A_E^u u_E + A_W^u u_W + A_N^u u_N + A_S^u u_S + b_P^u \\ A_E^u v_E + A_W^u v_W + A_N^u v_N + A_S^u v_S + b_P^v \end{pmatrix}.$$

Ve středu  $q$  strany  $\Gamma_q$  interpolací dostaneme

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_q = \llbracket \mathbf{s} \rrbracket_q - \left\llbracket \frac{|D|}{A^u} \nabla \bar{p} \right\rrbracket_q.$$

R-Ch aproximaci  $v_{n,q}$  normálové rychlosti  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_q$  proto volíme ve tvaru

$$v_{n,q} = \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_q \cdot \mathbf{n}_q - \left( \left\llbracket \frac{|D|}{A^u} \right\rrbracket_q \frac{\delta \bar{p}_q}{\delta n_q} - \left\llbracket \frac{|D|}{A^u} \nabla \bar{p} \right\rrbracket_q \cdot \mathbf{n}_q \right), \quad (6.98)$$

kde

$$\frac{\delta \bar{p}_q}{\delta n_q} = \frac{\bar{p}_{Q'} - \bar{p}_{P'}}{|\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}|} \quad (6.99)$$

je aproximace  $\frac{\partial \bar{p}(\mathbf{x}_q)}{\partial n_q}$ . Pak zřejmě

$$v_{n,q} = \llbracket \mathbf{s} \rrbracket_q \cdot \mathbf{n}_q - \left\llbracket \frac{|D|}{A^u} \right\rrbracket_q \frac{\delta \bar{p}_q}{\delta n_q}. \quad (6.100)$$

Na pravidelné obdélníkové síti je zde uvedená R-Ch aproximace ekvivalentní s R-Ch aproximací zavedenou v kapitole 6.1.3. Tak třeba pro  $q = e$  je (6.98) ekvivalentní s (6.47) pro  $\alpha_u = 1$  a (6.100) je ekvivalentní s (6.53).

Z (6.98), (6.99) a pomocí aproximace  $\left[\left[\frac{|D|}{A^u}\nabla\bar{p}\right]\right]_q \approx \left[\left[\frac{|D|}{A^u}\right]\right]_q \llbracket \nabla\bar{p} \rrbracket_q$  dostaneme

$$v_{n,q} \approx \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_q \cdot \mathbf{n}_q - \left[\left[\frac{|D|}{A^u}\right]\right]_q \frac{\bar{p}_{Q'} - \bar{p}_{P'} - \llbracket \nabla\bar{p} \rrbracket_q \cdot (\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'})}{|\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}|}. \quad (6.101)$$

Pro vzdálenost  $|\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}|$  bodů  $P'$  a  $Q'$  podle (6.90) platí

$$|\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}| = (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}_q. \quad (6.102)$$

Aproximaci  $v_{n,q}^*$  normálové rychlosti  $(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n})_q$  dostaneme tak, že na pravé straně výrazu (6.101) zaměníme  $\mathbf{v}$  za  $\mathbf{v}^*$  a výraz

$$Q_1 := \bar{p}_{Q'} - \bar{p}_{P'} - \llbracket \nabla\bar{p} \rrbracket_q \cdot (\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'})$$

nahradíme výrazem

$$Q_2 := \bar{p}_Q - \bar{p}_P - \llbracket \nabla\bar{p} \rrbracket_{q'} \cdot (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P).$$

Užijeme-li ještě (6.102), dostaneme vztah

$$v_{n,q}^* = \llbracket \mathbf{v}^* \rrbracket_q \cdot \mathbf{n}_q - \left[\left[\frac{|D|}{A^u}\right]\right]_q \frac{\bar{p}_Q - \bar{p}_P - \llbracket \nabla\bar{p} \rrbracket_{q'} \cdot (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P)}{(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}_q}, \quad (6.103)$$

který lze najít třeba ve [19] nebo [37]. Gradient  $\llbracket \nabla\bar{p} \rrbracket_{q'}$  získáme pomocí (6.84) pro  $\phi = \nabla\bar{p}$ , přičemž  $\nabla\bar{p}_P$  resp.  $\nabla\bar{p}_Q$  určíme podle (6.82) pro  $\phi_q = \llbracket \bar{p} \rrbracket_q$ ,  $q \in s(P)$  resp.  $q \in s(Q)$ .

Rovnice (6.96) pro  $v_{n,q}^* \approx (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n})_q$  neplatí, tj.

$$\sum_{q \in s(P)} \varrho_q |\Gamma_q| v_{n,q}^* \neq 0.$$

Algoritmus SIMPLE proto zavádí korekce  $v'_{n,q}$  normálových rychlostí  $v_{n,q}^*$  tak, aby

$$\sum_{q \in s(P)} \varrho_q |\Gamma_q| (v_{n,q}^* + v'_{n,q}) = 0. \quad (6.104)$$

Jestliže ve výrazu

$$v_{n,q}^* = - \left[\left[\frac{|D|}{A^u}\right]\right]_q \frac{\bar{p}_{Q'} - \bar{p}_{P'}}{|\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}|} + \left\{ \left[\left[\frac{|D|}{A^u}\right]\right]_q \frac{\llbracket \nabla\bar{p} \rrbracket_q \cdot (\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}) + Q_1 - Q_2}{|\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}|} + \llbracket \mathbf{v}^* \rrbracket_q \cdot \mathbf{n}_q \right\}$$

píšeme  $v'_{n,q}$  místo  $v_{n,q}^*$ ,  $p'$  místo  $\bar{p}$ ,  $\mathbf{v}'$  místo  $\mathbf{v}^*$  a když pak vypustíme celý výraz ve složených závorkách, dostaneme

$$v'_{n,q} = - \left[\left[\frac{|D|}{A^u}\right]\right]_q \frac{p'_{Q'} - p'_{P'}}{|\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_{P'}|}. \quad (6.105)$$

Hodnoty  $p'_{P'}$  resp.  $p'_{Q'}$  v bodech  $P'$  resp.  $Q'$  aproximujeme pomocí hodnot  $p'_P$  resp.  $p'_Q$  a gradientů  $\nabla p'_P$  resp.  $\nabla p'_Q$  v bodech  $P$  resp.  $Q$ ,

$$p'_{P'} \approx p'_P + \nabla p'_P \cdot (\mathbf{x}_{P'} - \mathbf{x}_P), \quad p'_{Q'} \approx p'_Q + \nabla p'_Q \cdot (\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_Q). \quad (6.106)$$

Gradienty  $\nabla p'_P$  resp.  $\nabla p'_Q$  spočteme pomocí (6.82) pro  $\phi_q = \llbracket p' \rrbracket_q$ ,  $q \in s(P)$  resp.  $q \in s(Q)$ . Dosazením (6.106) do (6.105) dostaneme

$$v'_{n,q} = - \left\llbracket \frac{|D|}{A^u} \right\rrbracket_q \left[ \frac{p'_Q - p'_P}{(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}_q} + \frac{\nabla p'_Q \cdot (\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_Q) - \nabla p'_P \cdot (\mathbf{x}_{P'} - \mathbf{x}_P)}{(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}_q} \right]. \quad (6.107)$$

Soustavu rovnic (6.104) řešíme iteračně,

$$\begin{aligned} \sum_{q \in s(P)} \varrho_q |\Gamma_q| \left\llbracket \frac{|D|}{A^u} \right\rrbracket_q \frac{p'^{(k)}_P - p'^{(k)}_Q}{(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}_q} = \\ \sum_{q \in s(P)} \varrho_q |\Gamma_q| \left\llbracket \frac{|D|}{A^u} \right\rrbracket_q \frac{\nabla p'^{(k-1)}_Q \cdot (\mathbf{x}_{Q'} - \mathbf{x}_Q) - \nabla p'^{(k-1)}_P \cdot (\mathbf{x}_{P'} - \mathbf{x}_P)}{(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}_q} - \sum_{q \in s(P)} \varrho_q |\Gamma_q| v^*_{n,q}, \end{aligned} \quad (6.108)$$

přičemž v první iteraci bereme  $\nabla p'^{(0)}_P = \nabla p'^{(0)}_Q = 0$ , takže první suma na pravé straně rovnice (6.108) vypadne. Pro  $P' \doteq P$  a  $Q' \doteq Q$  klademe  $p'_P = p'^{(1)}_P$ , jinak obvykle stačí  $p'_P = p'^{(2)}_P$ . Gradienty  $\nabla p'^{(k-1)}_P$  resp.  $\nabla p'^{(k-1)}_Q$  dostaneme podle (6.82) pro  $\phi_q = \llbracket p'^{(k-1)} \rrbracket_q$ ,  $q \in s(P)$  resp.  $q \in s(Q)$ . Korekce rychlostí  $u'_P$ ,  $v'_P$  dostaneme ze vzorce (6.97) takto: za  $\mathbf{v}_P$  resp.  $\bar{p}_P$  dosadíme  $\mathbf{v}'_P$  resp.  $p'_P$ , vypustíme člen  $\mathbf{s}_P$  a  $\nabla p'_P$  spočteme pomocí (6.82) pro  $\phi_q = \llbracket p' \rrbracket_q$ . Tak dostaneme

$$u'_P = -\frac{1}{A^u_P} \sum_{q \in s(P)} |\Gamma_q| n^q_x \llbracket p' \rrbracket_q, \quad v'_P = -\frac{1}{A^u_P} \sum_{q \in s(P)} |\Gamma_q| n^q_y \llbracket p' \rrbracket_q. \quad (6.109)$$

Na pravidelné obdélníkové síti jsou vzorce (6.109) stejné jako vzorce (6.68) pro  $\alpha_u = \alpha_v = 1$ . Nakonec položíme

$$u_P = u^*_P + u'_P, \quad v_P = v^*_P + v'_P, \quad p_P = \bar{p}_P + \alpha_p p'_P, \quad (6.110)$$

kde  $\alpha_p$  je relaxační koeficient.

## 7. Řešení Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění metodou konečných prvků

**Formulace.** Navierovy-Stokesovy rovnice a rovnici kontinuity zapíšeme ve tvaru

$$\varrho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p, \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (7.1)$$

kde  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$  (7.2)

$$\boldsymbol{\sigma}(p, \mathbf{v}) = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v})$$

je tenzor napětí,  $\mathbf{I}$  je jednotková matice,

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$$

je vazká část tenzoru napětí,  $\mu = \varrho\nu$  je dynamická viskozita a

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$$

je tenzor rychlosti deformace. Uvažujeme okrajové podmínky

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} \quad \text{na } \Gamma_I, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{T}} \quad \text{na } \Gamma_O, \quad (7.4)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_W, \quad (7.5)$$

a počáteční podmínku

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 \quad \text{pro } t = 0. \quad (7.6)$$

Zvolíme testovací funkci  $\boldsymbol{\varphi}$  splňující podmínku

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_I \cup \Gamma_W \quad (7.7)$$

a testovací funkci  $\psi$ . Rovnici (7.1) násobíme skalárně  $\boldsymbol{\varphi}$ , integrujeme přes  $\Omega$ , užijeme Greenovu větu a uplatníme podmínku (7.7) a okrajovou podmínku (7.4). Rovnici (7.2) násobíme  $\psi$  a integrujeme přes  $\Omega$ . Takto získané rovnice sečteme a dostaneme rovnost

$$a(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\varphi}, \psi) = 0, \quad (7.8)$$

kde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\varphi}, \psi) = & \int_{\Omega} \varrho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \nabla \boldsymbol{\varphi} + \int_{\Omega} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}) \, d\mathbf{x} - \\ & \int_{\Gamma_O} \hat{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \psi \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (7.9)$$



Připomeňme, že  $\varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi})$  je Frobeniův skalární součin matic  $\varepsilon(\mathbf{v})$  a  $\varepsilon(\boldsymbol{\varphi})$ , takže

$$\varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \right].$$

**Prostorová diskretizace.** Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že  $\Omega$  je polygonální oblast. Její uzávěr  $\overline{\Omega}$  vykryjeme pomocí  $m$  uzavřených trojúhelníkových prvků  $T_1, T_2, \dots, T_m$ , jejichž vnitřky jsou navzájem disjunktní, takže  $\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^m T_j$ . Označme  $\mathcal{T}_h = \{T_j\}_{j=1}^m$ .

Nechť  $S_j^q$  je prostor polynomů stupně  $q$  na trojúhelníku  $T_j$ . Předpokládejme, že polynom  $v \in S_j^q$  je jednoznačně určen pomocí svých hodnot  $v(\mathbf{x}_\alpha^{qj})$  v uzlech  $\mathbf{x}_\alpha^{qj} \in T_j$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n_q$ , kde  $n_q = \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$  je dimenze  $S_j^q$ . Pro  $q \geq 1$  navíc předpokládejme, na každé straně  $\Gamma_\beta^j$  trojúhelníka  $T_j$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ , je polynom  $v \in S_j^q$  jednoznačně určen pomocí svých hodnot  $v(\mathbf{x}_\alpha^{qj})$  v uzlech  $\mathbf{x}_\alpha^{qj} \in \Gamma_\beta^j$ . To lze zajistit tak, že pro  $q \geq 1$  mezi uzly  $\{\mathbf{x}_\alpha^{qj}\}_{\alpha=1}^{n_q}$  patří vrcholy trojúhelníka  $T_j$  a pro  $q \geq 2$  každá strana  $\Gamma_\beta^j$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ , obsahuje  $q-1$  navzájem různých vnitřních uzlů dělících stranu  $\Gamma_\beta^j$  na  $q$  stejných částí. Tak třeba v prostoru  $S_j^1$  jsou uzly  $\{\mathbf{x}_\alpha^{1j}\}_{\alpha=1}^3$  vrcholy  $T_j$  a v  $S_j^2$  jsou uzly  $\{\mathbf{x}_\alpha^{2j}\}_{\alpha=1}^6$  vrcholy a středy stran  $T_j$ . V  $S_j^0$  předpokládáme, že  $\mathbf{x}_1^{0j}$  je těžiště  $T_j$ .

Nechť  $\{\ell_\alpha^{qj}(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^{n_q}$  je tzv. *nodální báze* prostoru  $S_j^q$ , pro kterou

$$\ell_\alpha^{qj}(\mathbf{x}_\beta^{qj}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \beta \neq \alpha, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n_q. \quad (7.10)$$

Pro libovolný polynom  $v \in S_j^q$  zřejmě platí

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n_q} v(\mathbf{x}_\alpha^{qj}) \ell_\alpha^{qj}(\mathbf{x}). \quad (7.11)$$

Definujme konečněprvkový prostor

$$X^q = \{w \mid w|_{T_j} \in S_j^q \quad \forall T_j \in \mathcal{T}_h\} \quad (7.12)$$

spojitých funkcí, které jsou po prvcích  $T_j$  polynomy stupně  $q$ . Spojitost funkcí  $w \in X^q$  je důsledkem toho, že na společné straně  $\Gamma_{jk} = T_j \cap T_k$  sousedních trojúhelníků  $T_j$  a  $T_k$  jsou funkce  $v_j^q \in S_j^q$  i  $v_k^q \in S_k^q$  určeny pomocí hodnot  $v_j^q(\mathbf{x}_\alpha^q) = v_k^q(\mathbf{x}_\alpha^q)$  v uzlech  $\mathbf{x}_\alpha^q \in \Gamma_{jk}$ .

Každou funkci  $w \in X^q$  lze vyjádřit ve tvaru

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_q} w(\mathbf{x}_\alpha^q) \ell_\alpha^q(\mathbf{x}) \quad (7.13)$$

kde  $\{\mathbf{x}_\alpha^q\}_{\alpha=1}^{N_q} = \bigcup_{j=1}^m \{\mathbf{x}_\beta^{qj}\}_{\beta=1}^{n_q}$  je množina všech  $N_q$  uzlů triangulace  $\mathcal{T}_h$  a  $\{\ell_\alpha^q(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^{N_q}$  je nodální báze prostoru  $X^q$ : pro  $\mathbf{x}_\alpha^q = \mathbf{x}_\beta^{qj}$  je  $\ell_\alpha^q|_{T_j} = \ell_\beta^{qj}$ .

Aproximaci  $\mathbf{v}_h$  rychlosti  $\mathbf{v}$  hledáme ve tvaru

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N_r} \mathbf{v}_\alpha^r(t) \ell_\alpha^r(\mathbf{x}), \quad \text{kde } \mathbf{v}_\alpha^r(t) = \hat{\mathbf{v}}_I(\mathbf{x}_\alpha^r, t) \text{ pro } \mathbf{x}_\alpha^r \in \bar{\Gamma}_I, \mathbf{v}_\alpha^r(t) = \mathbf{0} \text{ pro } \mathbf{x}_\alpha^r \in \bar{\Gamma}_W \quad (7.14)$$

a kde  $r \geq 1$  určuje stupeň prostorové po částech polynomicke aproximace. Uzly  $\{\mathbf{x}_\alpha^r\}_{\alpha=1}^{N_r}$  očísľujeme tak, aby uzly  $\{\mathbf{x}_\alpha^r\}_{\alpha=1}^{M_r}$  ležely uvnitř oblasti  $\Omega$  nebo uvnitř hranice  $\Gamma_O$ , aby uzly  $\{\mathbf{x}_\alpha^r\}_{\alpha=M_r+1}^{Q_r}$  ležely na hranici  $\bar{\Gamma}_I$  a aby uzly  $\{\mathbf{x}_\alpha^r\}_{\alpha=Q_r+1}^{N_r}$  ležely na hranici  $\bar{\Gamma}_W$ . Pak

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{M_r} \mathbf{v}_\alpha^r(t) \ell_\alpha^r(\mathbf{x}) + \sum_{\alpha=M_r+1}^{Q_r} \hat{\mathbf{v}}_I(\mathbf{x}_\alpha^r, t) \ell_\alpha^r(\mathbf{x}), \quad (7.15)$$

a neznámé, které je třeba určit, jsou funkce  $\{\mathbf{v}_\alpha^r(t)\}_{\alpha=1}^{M_r}$ .

Aproximaci  $\varphi_h$  testovací funkce  $\varphi$  zvolíme ve tvaru

$$\varphi_h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{M_r} \varphi_\alpha^r \ell_\alpha^r(\mathbf{x}), \quad (7.16)$$

kde  $\varphi_\alpha^r$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, M_r$ , jsou libovolné konstantní sloupcové vektory o dvou složkách.

Aproximace  $p_h$  tlaku  $p$  hledáme ve tvaru

$$p_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N_s} p_\alpha^s(t) \ell_\alpha^s(\mathbf{x}), \quad (7.17)$$

kde  $0 \leq s \leq r$  určuje stupeň prostorové po částech polynomicke aproximace. Obvyklá volba je  $s = r$ , pro  $s = r - 1$  je trojice  $(T_j, \mathbf{v}_h^r|_{T_j}, p_h^s|_{T_j})$  známa jako *Taylorův-Hoodův* prvek. Neznámé, které je třeba určit, jsou funkce  $\{p_\alpha^s(t)\}_{\alpha=1}^{N_s}$ .

Aproximaci  $\psi_h$  testovací funkce  $\psi$  zvolíme ve tvaru

$$\psi_h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_s} \psi_\alpha^s \ell_\alpha^s(\mathbf{x}), \quad (7.18)$$

kde  $\psi_\alpha^s$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N_s$ , jsou libovolné konstanty.

Aproximaci  $\mathbf{v}_h^{0r}$  funkce  $\mathbf{v}^0$  zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{v}_h^{0r}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_r} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}_\alpha^r) \ell_\alpha^r(\mathbf{x}). \quad (7.19)$$

Úloha

$$\text{najít } \mathbf{v}_h^r, p_h^s \text{ tak, aby } a(\mathbf{v}_h^r, p_h^s, \varphi_h^r, \psi_h^s) = 0 \quad \forall \varphi_h^r, \psi_h^s, \quad \mathbf{v}_h^r|_{t=0} = \mathbf{v}_h^{0r}, \quad (7.20)$$

neposkytuje uspokojivou aproximaci  $(\mathbf{v}_h^r, p_h^s)$  řešení  $(\mathbf{v}, p)$  úlohy (7.1), (7.2). Potíže způsobuje především konvekční člen  $(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \varphi = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \varphi_i$  a divergenční člen  $(\nabla \cdot \mathbf{v}) \psi = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \psi$ .

**Stabilizace.** Postup, který umožňuje překonat uvedené potíže, je označován jako stabilizace. Místo úlohy (7.20) řešíme stabilizovanou úlohu

$$\text{najít } \mathbf{v}_h^r, p_h^s \text{ tak, aby } A(\mathbf{v}_h^r, p_h^s, \varphi_h^r, \psi_h^s) = 0 \quad \forall \varphi_h^r, \psi_h^s, \quad \mathbf{v}_h^r|_{t=0} = \mathbf{v}_h^{0r}, \quad (7.21)$$

kde

$$A(\mathbf{v}, p, \varphi, \psi) = a(\mathbf{v}, p, \varphi, \psi) + a_{stab}(\mathbf{v}, p, \varphi, \psi) \quad (7.22)$$

a

$$a_{stab}(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\varphi}, \psi) = \sum_{j=1}^m \int_{T_j} \frac{1}{\varrho} \left[ \tau_{SUPG} \varrho \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \right) + \tau_{PSPG} \nabla \psi \right] \cdot \mathcal{L}(\mathbf{v}, p) \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^m \int_{T_j} \tau_{LSIC} \varrho (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad (7.23)$$

přičemž

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, p) = \varrho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p, \mathbf{v}) \quad (7.24)$$

je levá strana Navierovy-Stokesovy rovnice (7.1). Všimněte si: jestliže je  $(\mathbf{v}, p)$  řešení (7.1)-(7.2), pak  $\mathcal{L}(\mathbf{v}, p) = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , takže  $a_{stab}(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\varphi}, \psi) = 0$ .

Parametr  $\tau_{SUPG}$  je stabilizační parametr metody *SUPG* (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*),  $\tau_{PSPG}$  je stabilizační parametr metody *PSPG* (*Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin*) a  $\tau_{LSIC}$  je stabilizační parametr metody *LSIC* (*Least Squares on Incompressibility Constraint*). Úspěch stabilizace podstatně závisí na vhodné volbě stabilizačních parametrů, viz [1], [50], [51].

Pro konkrétnost uvedeme volbu stabilizačních parametrů podle [1]. Nechť  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_T^j)$  je rychlost  $\mathbf{v}_h$  v těžišti  $\mathbf{x}_T^j$  trojúhelníka  $T_j$  a  $h_s = \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_j, \mathbf{x} - \mathbf{y} = \alpha \mathbf{s}, \alpha \in \mathbb{R}\}$  je průměr trojúhelníka  $T_j$  ve směru  $\mathbf{s}$ . Lze ukázat, že

$$h_s = 2|\mathbf{s}| \left( \sum_{\alpha=1}^3 |\mathbf{s} \cdot \nabla \ell_{\alpha}^{1j}| \right)^{-1}, \quad (7.25)$$

kde  $\{\ell_{\alpha}^{1j}\}_{\alpha=1}^3$  jsou nodální bázové funkce v prostoru  $S_j^1$ . Na trojúhelníku  $T_j$  definujeme

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left[ \left( \frac{2|\mathbf{s}|}{h_s} \right)^2 + \left( \frac{4\nu}{h_s^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (7.26)$$

$$\tau_{LSIC} = \frac{h_s}{2} |\mathbf{s}| z, \quad z = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{Re}, & \text{Re} \leq 3, \\ 1 & \text{Re} > 3, \end{cases} \quad \text{Re} = \frac{h_s |\mathbf{s}|}{2\nu},$$

kde  $\nu = \mu/\varrho$  je kinematická viskozita v těžišti  $\mathbf{x}_T^j$ .

**Semidiskrétní formulace.** Pomocí označení

$$\mathbf{V}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^r(t) \\ \mathbf{v}_2^r(t) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{M_r}^r(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_1^s(t) \\ p_2^s(t) \\ \vdots \\ p_{N_s}^s(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1^r \\ \varphi_2^r \\ \vdots \\ \varphi_{M_r}^r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_1^s \\ \psi_2^s \\ \vdots \\ \psi_{N_s}^s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}_1^r) \\ \mathbf{v}^0(\mathbf{x}_2^r) \\ \vdots \\ \mathbf{v}^0(\mathbf{x}_{M_r}^r) \end{pmatrix}$$

lze rovnici úlohu (7.21) zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{P}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{P}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}^0. \quad (7.27)$$

Matici  $\mathbf{M}$  a vektory  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  dostaneme standardní technikou metody konečných prvků. Protože vektory parametrů  $\Phi$ ,  $\Psi$  mohou nabývat libovolných hodnot, dostáváme ekvivalentní vyjádření úlohy (7.21) ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{najít } \mathbf{V}(t), \mathbf{P}(t) \text{ tak, aby} \quad & \mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{P}) = \mathbf{f}, \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}^0, \\ & \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{P}) = \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Navierovy-Stokesovy rovnice neurčují tlak jednoznačně: je-li  $(\mathbf{v}, p)$  řešení (7.1)-(7.6), pak je řešením také  $(\mathbf{v}, p + \bar{p})$ , kde  $\bar{p}$  je libovolná funkce proměnné  $t$ . Tuto skutečnost zohledníme tak, že v (7.27)<sub>1</sub> pro nějaké  $k \in \{1, 2, \dots, N_s\}$  provedeme  $p_k^s(t) = \bar{p}(t)$ ,  $\psi_k^s = 0$ . Odpovídající úloha (7.28) pak bude jednoznačně řešitelná.

**Časová diskretizace.** Obvykle se používá implicitní Eulerova metoda nebo BDF2 metoda. Tak třeba pro IE metodu dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^k}{\tau_k} + \mathbf{F}(\mathbf{V}^{k+1}, \mathbf{P}^{k+1}) &= \mathbf{f}^{k+1}, & k = 0, 1, \dots \\ \mathbf{G}(\mathbf{V}^{k+1}, \mathbf{P}^{k+1}) &= \mathbf{g}^{k+1}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

Nelineární soustavu rovnic (7.29) řešíme modifikovanou Newtonovou metodou (Jacobiho matice zůstává po několik iterací stejná), stabilizační parametry v dané iteraci počítáme pomocí rychlostí z předchozí iterace, příslušné soustavy lineárních rovnic řešíme vhodnou iterační metodou, třeba GMRES.

## Literatura

- [1] S. Aliabadi, T.E. Tezduyar: *Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel computation of unsteady flows with interfaces*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2000), 243-261.
- [2] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L.D. Marini: *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal. 39-5 (2002), 1749-1779.
- [3] F. Bassi, S. Rebay, G. Mariotti, S. Pedinotti, M. Savini: *A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows*, In *2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*, R. Decuyper, G. Dibelius (eds.), Technologisch Instituut: Antwerpen, Belgium, March 5-7 1997, 99-108.
- [4] F. Bassi, S. Rebay: *GMRES discontinuous Galerkin solution of the compressible Navier-Stokes equations*, In: *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications*, B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.W. Shu (eds.), Springer, Berlin, 2000, 197-208.
- [5] F. Bassi, L. Botti, A. Colombo, A. Ghidoni, F. Massa: *Linearly implicit Rosenbrock-type Runge-Kutta schemes applied to the discontinuous Galerkin solution of compressible and incompressible unsteady flows*, Computer & Fluids 118 (2015), 197-207.
- [6] J. Blazek: *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, 3rd Edition*, Butterworth-Heinemann Elsevier Ltd, Oxford, 2015.
- [7] M. Brdička, L. Samek, B. Sopko: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000.
- [8] M.E. Castro: *High Order ADER FV/DG Numerical Methods for Hyperbolic Equations*, Monographs of the School of Doctoral Studies in Environmental Engineering, University of Trento, Civil and Environmental Engineering, Trento, Italy, 2007.
- [9] B. Cockburn, C.-W. Shu: *The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws V: Multidimensional Systems*, J. Comput. Phys. 141 (1998), 199-224.
- [10] B. Cockburn, C.-W. Shu: *Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection dominated problems*, Journal of Scientific Computing 16 (2001) 173-261.
- [11] B. Cockburn: *Discontinuous Galerkin methods for computational fluid dynamics*, In: *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 2nd edition, vol. 5, 141-204, E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, (eds.), John Wiley & Sons, Ltd., 2018.
- [12] H. Choi, J.G. Liu: *The reconstruction of upwind fluxes for conservation laws: its behavior in dynamic and steady state calculations*, J. Comput. Phys. 144 (1998), 237-256.
- [13] M.O. Deville, P.F. Fischer, E.H. Mund: *Higher-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, Cambridge University Press, New York, 2002.
- [14] V. Dolejší, M. Feistauer: *Discontinuous Galerkin Method. Analysis and Applications to Compressible Flow*, Springer, New York, 2015.
- [15] J. Donea, A. Huerta: *Finite Element Methods for Flow Problems*, Wiley, Chichester, 2003.
- [16] A. Ern, J.L. Guermond: *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer Series in Applied Mathematical Sciences, Vol. 159 (2004), Springer-Verlag, New York.

- [17] M. Feistauer: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [18] M. Feistauer, J. Felcman, I. Straškraba: *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*, Oxford Science Publications, New York, 2003.
- [19] J.H. Ferziger, M. Perić: *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd edn, Springer, Berlin, 2002.
- [20] P.M. Gresho, R.L. Sani: *Incompressible Flow and the Finite Element Method, Volume One: Advection-Diffusion*, Wiley, New York, 1999.
- [21] P.M. Gresho, R.L. Sani: *Incompressible Flow and the Finite Element Method, Volume Two: Isothermal Laminar Flow*, Wiley, New York, 1999.
- [22] J. Harten: *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys. 49 (1983), 357–393.
- [23] A. Harten, S. R. Chakravarthy: *Multi-dimensional ENO schemes for general geometries*, technical report 91-76, ICASE, 1991.
- [24] J. Harten, J. Hyman: *Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys. 52 (1983), 235–269.
- [25] R. Hartmann, P. Houston: *Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations I: method formulation*, Int. J. Numer. Anal. Mod. 3 (2006), 1–20.
- [26] J.S. Hesthaven, T. Warburton: *Nodal Discontinuous Galerkin Methods. Algorithms, Analysis and Applications*, Springer Verlag, New York, 2008.
- [27] C. Hirsch: *Numerical Methods of Internal and External Flows, Vol. I: Fundamentals of Numerical Discretization*, Wiley, New York, 1988.
- [28] C. Hirsch: *Numerical Methods of Internal and External Flows, Vol. II: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, Wiley, New York, 1990.
- [29] C. Hu, C. W. Shu: *Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes*, J. Comput. Phys. 150 (1999), 97–127.
- [30] L. Ivan, C. P. T. Groth: *High-order central CENO finite-volume scheme with adaptive mesh refinement*, 2007-4323, AIAA, 2007.
- [31] C. A. Kennedy, M. H. Carpenter, R. M. Lewis: *Low-storage, explicit Runge–Kutta schemes for the compressible Navier–Stokes equations*, Applied Numerical Mathematics 35 (2000), 177–219.
- [32] J. D. Lambert: *Numerical Methods in Ordinary Differential Systems. The Initial Value Problem*, J. Willey & Sons, Chichester, 1993.
- [33] R.J. LeVeque: *Numerical Methods in Conservation Laws*, Birkhäuser, Basel, 1992.
- [34] R.J. LeVeque: *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [35] M. Lukáčová-Medvid'ová: *Mathematical methods in fluid dynamics*, CERM, Brno, 2003.
- [36] G.E. Karniadakis, S. Sherwin: *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics, 2nd edn*, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [37] S.R. Mathur, J.Y. Murthy: *A pressure based method for unstructured meshes*, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 31:2 (1997), 195-215.
- [38] S.R. Mathur, J.Y. Murthy: *Pressure boundary conditions for incompressible flow using unstructured meshes*, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 32:3 (1997), 283-298.
- [39] S.R. Mathur, J.Y. Murthy: *Numerical Methods in Heat, Mass and Momentum Transfer*, Draft Notes ME 608, Purdue University, 2002, [online], [cit 2017-8-11], dostupné z <https://purdue.uloop.com/course-notes/3458-ME/1471815-ME-608-Numerical-Methods-in-Heat-Mass-and-Momentum-Transfer>.
- [40] L.F. Shampine: *Numerical Solution of ordinary differential equations*, Chapman & Hall, New York, 1994.
- [41] A. Pascau, N. García: *Enhancement of PISO scheme in collocated grids*, V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010, J. C. F. Pereira and A. Sequeira (Eds), Lisbon, Portugal, 14-17 June 2010.
- [42] S.V. Patankar: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [43] C.M. Rhie, W.L. Chow: *Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation*, AIAA J. 31 (1983), 1523-1532.
- [44] Y. Saad: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, 2003.
- [45] K. Shahbazi, P.W. Fisher, C.R. Ethier: *A high-order discontinuous Galerkin method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. 222 (2007), 391-407.
- [46] G.A. Sod: *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys. 27: 1-31, 1978.
- [47] R. Spiteri, S. Ruuth: *A new class of optimal high-order strong stability preserving time discretization methods*, SIAM J. Numer. Anal. 40 (2002), 469-491.
- [48] J.C. Tannehill, D.A. Anderson, R.H. Pletcher: *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, 2nd edn*, Taylor & Francis, Philadelphia, 1997.
- [49] S. Tu, S. Aliabadi: *A slope limiting procedure in discontinuous Galerkin finite element method for gasdynamic applications*, Int. J. Numer. Anal. Model. 2(2005), 163-178.
- [50] T.E. Tezduyar: *Finite elements in fluids: Stabilized formulations and moving boundaries and interfaces*, Computer & Fluids 36 (2007), 191-206.
- [51] T.E. Tezduyar, Y. Osawa: *Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2000), 411-430.
- [52] E.F. Toro: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Practical Introduction, 3rd edn*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

- [53] B. van Leer: *Flux Vector Splitting for The Euler Equations*, IN: Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, p. 507-512, Lecture Notes in Physics, volume 170, Springer Verlag, 1982.
- [54] B. van Leer, J. L. Thomas, P. L. Roe, R. W. Newsome: *A comparison of numerical flux formulas for the Euler and Navier-Stokes equations*, IN: Computational Fluid Dynamics Conference, 8th, Honolulu, HI, June 9-11, 1987, Technical Papers (A87-42051 18-02), AIAA, p. 36-41, New York, 1987.
- [55] H.K. Versteeg, W. Malalasekera: *The Finite Element Method: The finite Volume Method, 2nd edn*, Pearson Prentice Hall, Harlow, 2007.
- [56] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor: *The Finite Element Method, Volume 3: An Introduction to Computational Fluid Dynamics, 5th edn*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.