Úvod do optimalizace

Optimalizace – nalezení „nejlepšího řešení“ dané úlohy.

Matematická formulace:

Mějme funkci $f: M \to \mathbb{R}$. Nalezněte prvek $\mathbf{x}_m \in M$ takový, že pro každé $\mathbf{x} \in M$ je $f(\mathbf{x}_m) \le f(\mathbf{x})$, popř. $f(\mathbf{x}_m) \ge f(\mathbf{x})$, tj. hledáme minimum resp. maximum funkce $f(\mathbf{x})$ na množině M.

Lze hledat vždy minimum. Hledání maxima funkce $f(\mathbf{x})$ lze převést na hledání minima funkce $-f(\mathbf{x})$

M - množina všech přípustných řešení
f - kriteriální (též účelová funkce)

Většinou je $M \subseteq \mathbb{R}^n$; tj. $\mathbf{x} = [x_1; x_2; \ldots; x_n]$ kde $x_1; x_2; \ldots; x_n \in \mathbb{R}$

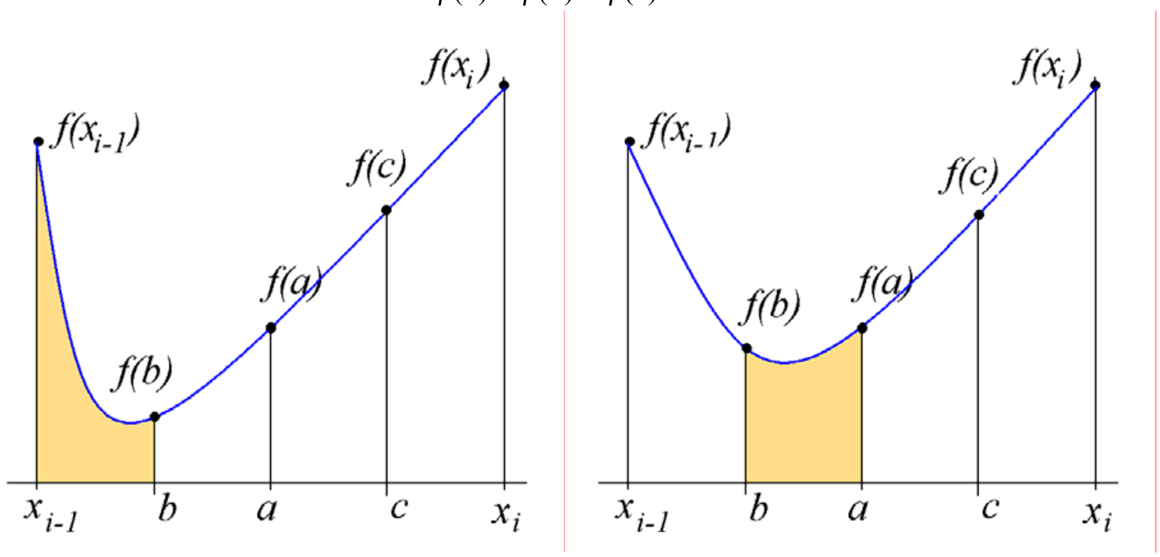
Optimalizace	nepodmíněná	$M = \mathbb{R}^n$
	podmíněná	$M \subset \mathbb{R}^n \wedge M \ne \mathbb{R}^n$
Optimalizace	globální	hledání extrému na celé množině M
	podmíněná	hledání extrému v jistém okolí bodu $\mathbf{x}$, tj. na množině $O(\mathbf{x}) \cap M$
Základní metody:	metody používající derivace	
	metody nepoužívající derivace	
Obecné fáze řešení	určení intervalů s jedním extrémem	
	zužování tohoto intervalu	

Jednorozměrná minimalizace:

Určení intervalu s jedním minimem – nejlépe sestrojením grafu (počítač).

Zpřesňující metody

Půlení intervalu $f(b) < f(a) < f(c)$



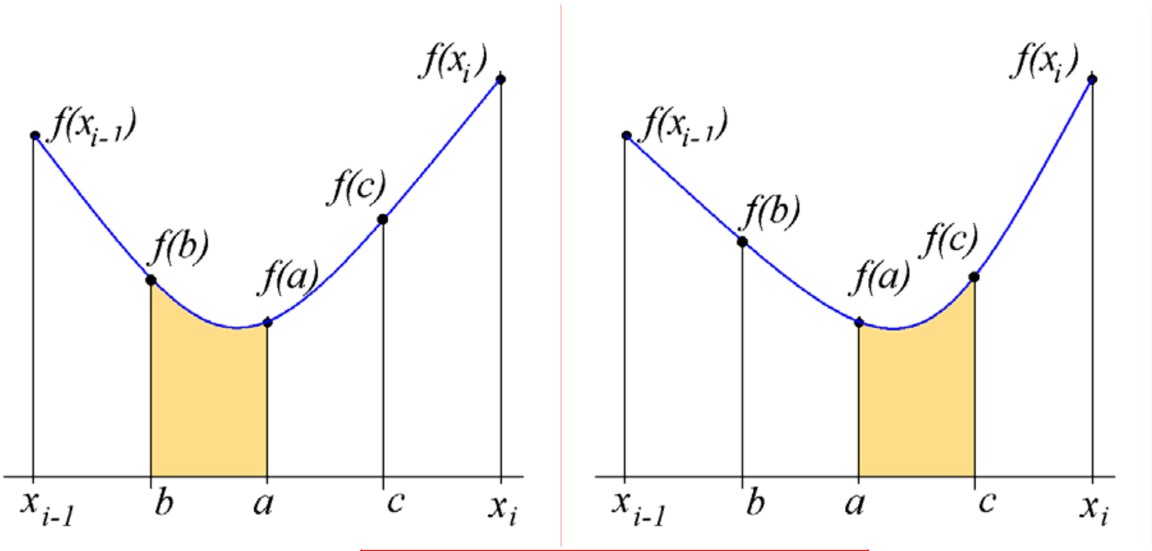
$$\boxed{f(b) < f(a) < f(c) \Rightarrow x_i := a}$$

Jednorozměrná minimalizace:

Určení intervalu s jedním minimem – nejlépe sestrojením grafu (počítač).

Zpřesňující metody

Půlení intervalu $f(b) > f(a) < f(c)$



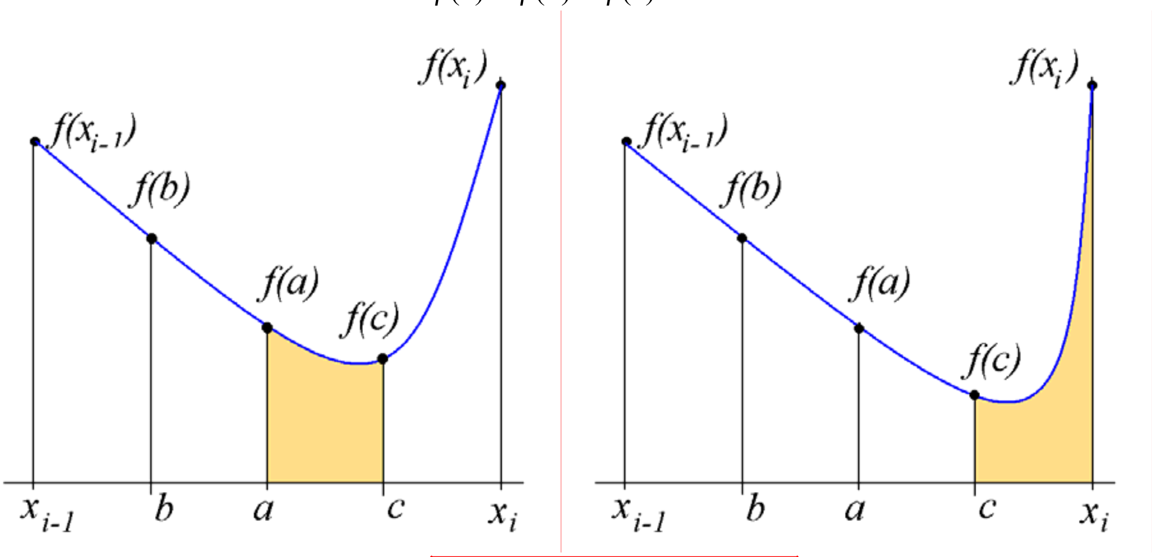
$$\boxed{f(b) > f(a) < f(c) \Rightarrow (x_{i-1} := b) \wedge (x_i := c)}$$

Jednorozměrná minimalizace:

Určení intervalu s jedním minimem – nejlépe sestrojením grafu (počítač).

Zpřesňující metody

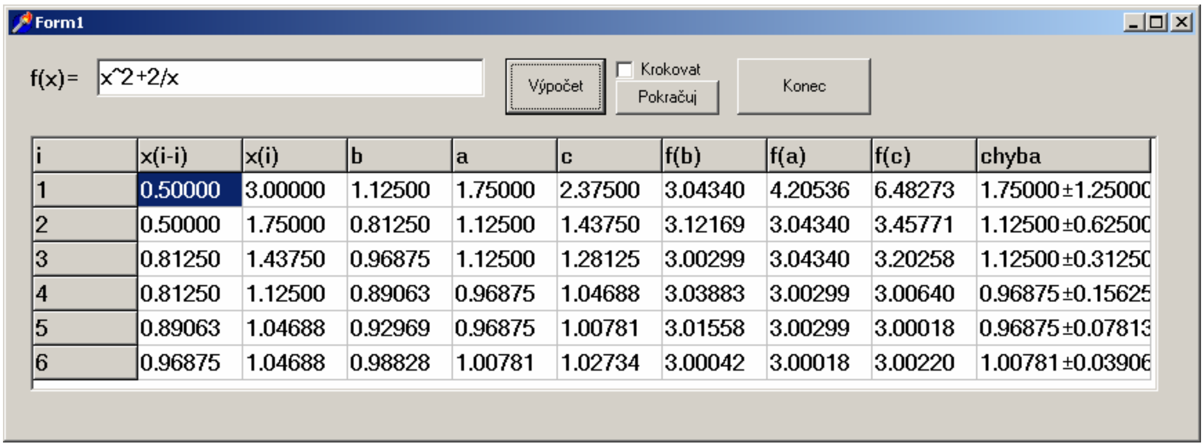
Půlení intervalu $f(b) > f(a) > f(c)$



$$\boxed{f(b) > f(a) > f(c) \Rightarrow x_{i-1} := a}$$

Půlení intervalu

Příklad: Určeme minimum funkce $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ v intervalu $\langle 0.5;3 \rangle$ s přesností $\varepsilon = 0.1$.



i	x(i-i)	x(i)	b	a	c	f(b)	f(a)	f(c)	chyba
1	0.50000	3.00000	1.12500	1.75000	2.37500	3.04340	4.20536	6.48273	1.75000±1.25000
2	0.50000	1.75000	0.81250	1.12500	1.43750	3.12169	3.04340	3.45771	1.12500±0.62500
3	0.81250	1.43750	0.96875	1.12500	1.28125	3.00299	3.04340	3.20258	1.12500±0.31250
4	0.81250	1.12500	0.89063	0.96875	1.04688	3.03883	3.00299	3.00640	0.96875±0.15625
5	0.89063	1.04688	0.92969	0.96875	1.00781	3.01558	3.00299	3.00018	0.96875±0.07813
6	0.96875	1.04688	0.98828	1.00781	1.02734	3.00042	3.00018	3.00220	1.00781±0.03906

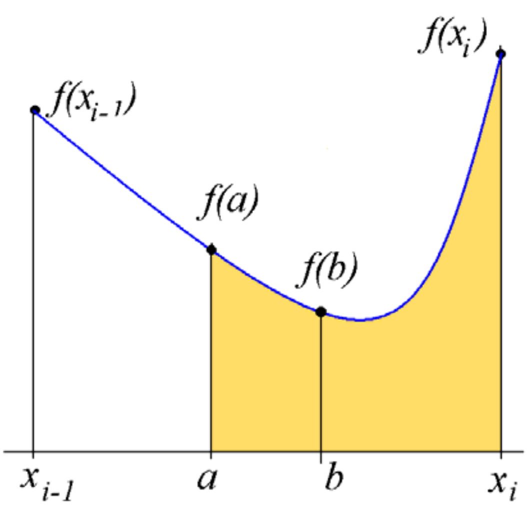
Jednorozměrná minimalizace:

Určení intervalu s jedním minimem – nejlépe sestrojením grafu (počítač).

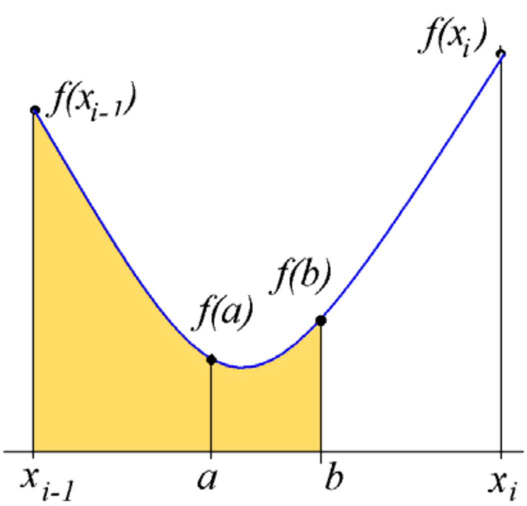
Zpřesňující metody

Metoda zlatého řezu

$\boxed{f(a) > f(b) \Rightarrow x_{i-1} := a}$



$\boxed{f(a) < f(b) \Rightarrow x_i := b}$

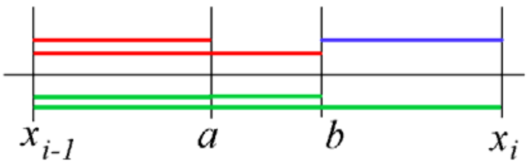


Jednorozměrná minimalizace:

Určení intervalu s jedním minimem – nejlépe sestrojením grafu (počítač).

Zpřesňující metody

Metoda zlatého řezu: **Proč „zlatý řez“?**



$$\frac{b-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}=\frac{a-x_{i-1}}{b-x_{i-1}}$$

$$a-x_{i-1}=x_i-b$$

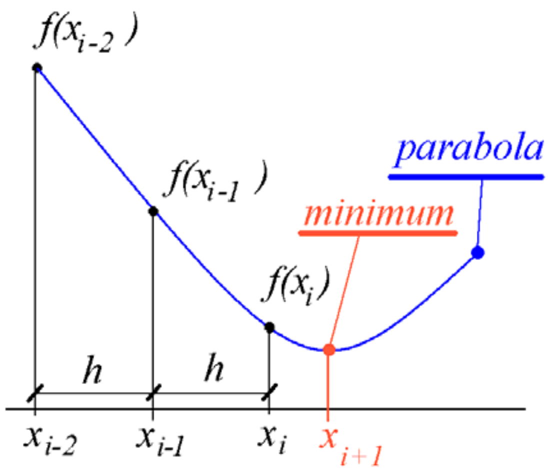
$$a=x_{i-1}+\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\left(x_i-x_{i-1}\right)\approx x_{i-1}+0.382\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)$$
$$b=x_{i-1}+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\left(x_i-x_{i-1}\right)\approx x_{i-1}+0.618\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

Jednorozměrná minimalizace:

Určení intervalu s jedním minimem – nejlépe sestrojením grafu (počítač).

Zpřesňující metody

Kvadratická interpolace

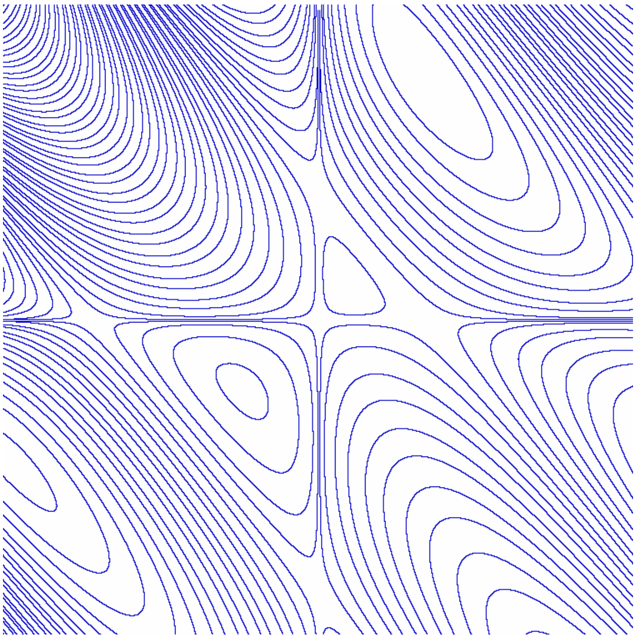


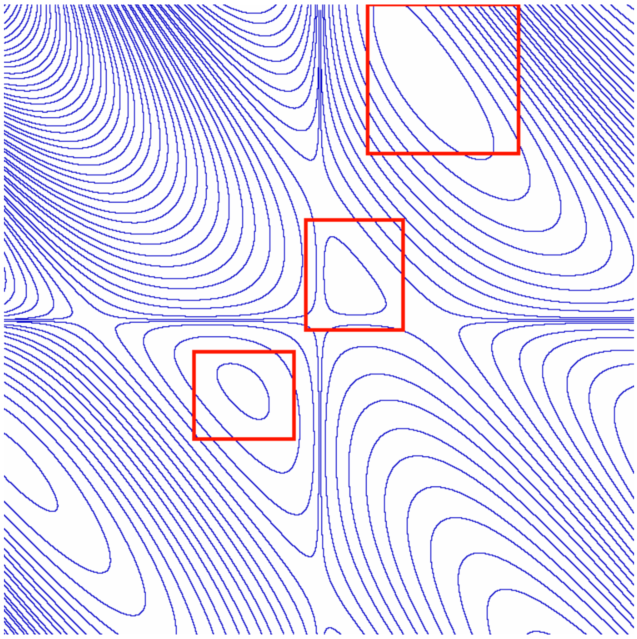
Dvojrozměrná minimalizace:

Určení oblasti s jedním extrémem :

Příklad: Určete oblasti s jedním extrémem funkce $z = \ln\left(\sqrt{\dfrac{|xy|\,|\sin(x+y+1)|}{x-y+9}} + 1\right)$

vrstevnice



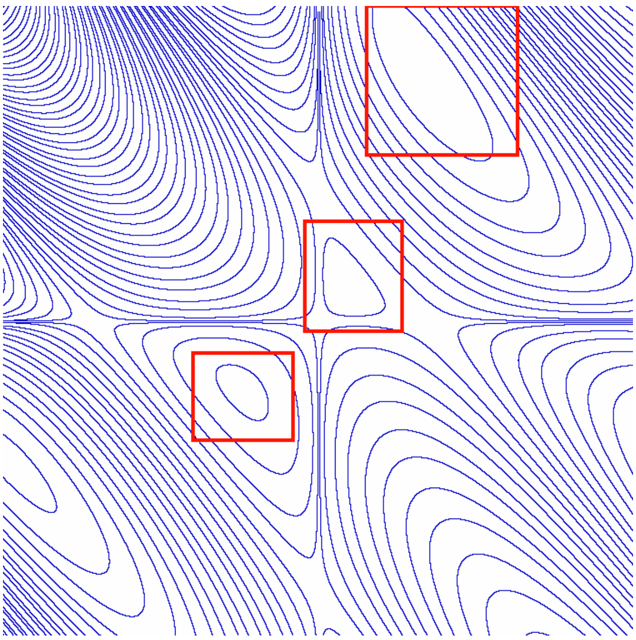


Dvojrozměrná minimalizace:

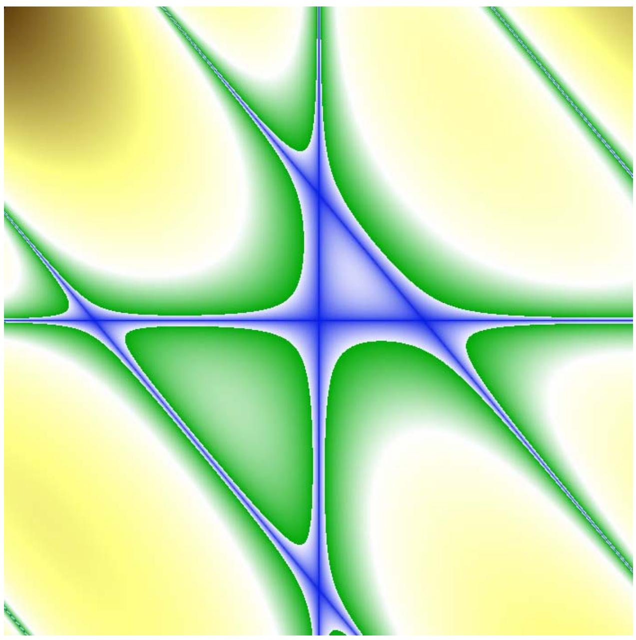
Určení oblasti s jedním extrémem :

Příklad: Určete oblasti s jedním extrémem funkce $z = \ln\left(\sqrt{\dfrac{|xy|\,|\sin(x+y+1)|}{x-y+9}} + 1\right)$

vrstevnice



topografická paleta

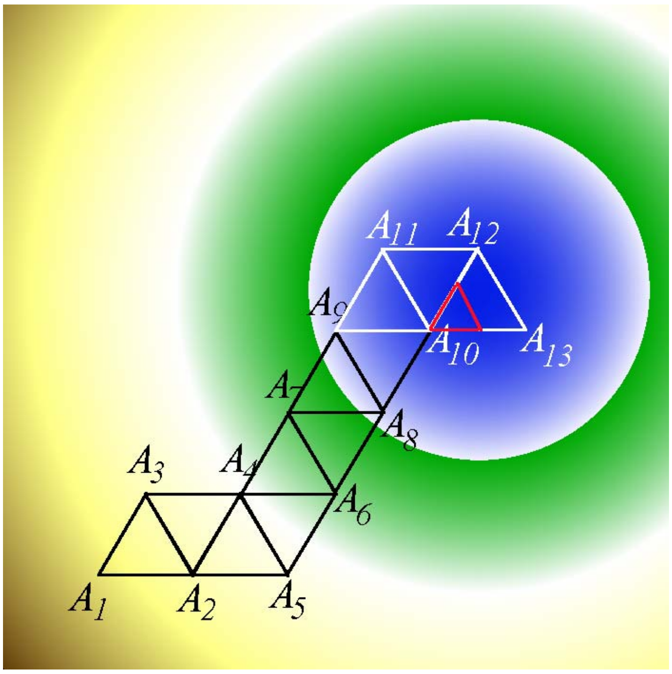


Dvojrozměrná minimalizace:

Zpřesňující metody : - a) metody nepoužívající derivace
- b) metody používající derivace

a) Simplexová metoda:

Příklad: Určeme minimum funkce $z = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 20$; $x; y \in \langle -1; 5 \rangle$



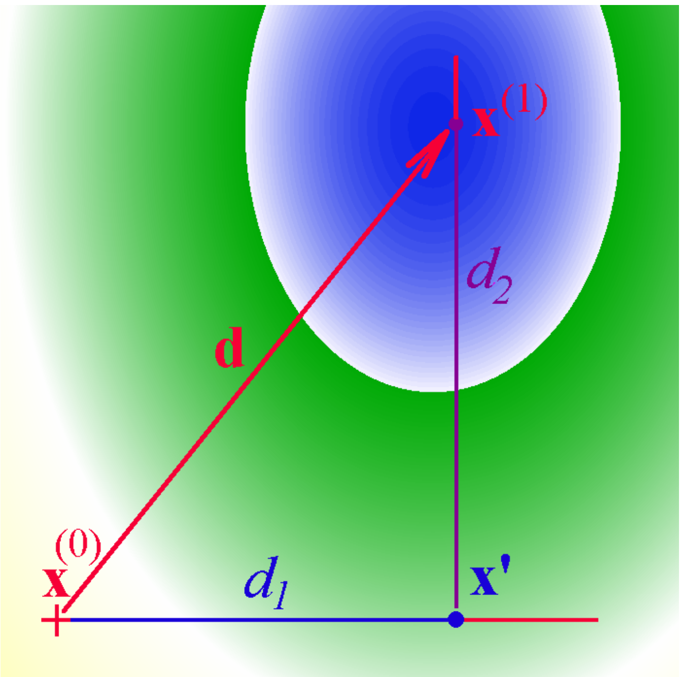
- zvol rovnostranný trojúhelník (simplex), např. $A_1 = [0;0]$, $A_2 = [1;0]$, $A_3 = [0.5;0.866]$
- urči $\max\{f(A_1); f(A_2); f(A_3)\}$ - zde $f(A_1)$
- sestroj bod A_4 středově souměrný s A_1 podle těžiště zbývajících bodů – zde středu úsečky A_2A_3
- je-li $f(A_4) < f(A_1); f(A_2); f(A_3)$ (náš případ), opakuj pro simplex $A_2A_3A_4$
- až do okamžiku, kdy (pro náš případ) $f(A_{13}) > f(A_{12})$ nebo $f(A_{13}) > f(A_{10})$
- zpracovávaný simplex zmenši na polovinu – v našem případě $A_{10}A_{12}A_{13} \to B_1B_2B_3$ a pokračuj, dokud nedosáhneš požadované přesnosti.

Dvojrozměrná minimalizace:

Zpřesňující metody : - a) metody nepoužívající derivace
- b) metody používající derivace

a) b) ??

Spádové metody: metoda souřadnicových směrů:



Příklad

$z = 2x^2 + y^2 - 16x - 12y$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $d_1 = ?$

$\varphi(d_1) = 2(x + d_1)^2 + y^2 - 16(x + d_1) - 12y$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \varphi(d_1)$

$\varphi(d_1) = 2(0 + d_1)^2 + 0^2 - 16(0 + d_1) - 12 \cdot 0$

$\varphi(d_1) = 2d_1^2 - 16d_1$

$\varphi'(d_1) = 4d_1 - 16 = 0 \Rightarrow d_1 = 4$

$\psi(d_2) = 2x^2 + (y + d_2)^2 - 16x - 12(y + d_2)$

$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \psi(d_2)$

$\psi(d_2) = 2 \cdot 4^2 + (0 + d_2)^2 - 16 \cdot 4 - 12(0 + d_2)$

$\psi(d_2) = d_2^2 - 12d_2 - 32$ **min** $d_2 = 6$

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$