Témata k magisterské státní závěrečné zkoušce (ak. rok 25/26)

Každému studentovi bude individuálně přiřazen soubor otázek vybraných z tohoto seznamu. Studenti i zkoušející tuto informaci včas obdrží.

Předpokládají se znalosti všech matematických předmětů předchozího bakalářského studia.

I. Matematické struktury, algebra a geometrie

1) **Obecná algebra:** univerzální algebry, podalgebry a homomorfismy, kongruence, příklady algeber, základní vlastnosti grup (podgrupy, konečné grupy, normální podgrupy), okruhů (podokruh, ideál), oborů integrity, těles a svazů.

2) **Geometrické struktury:** duální prostory, vlastnosti duálních prostorů (kanonický izomorfismus V a V**, duální báze, matice přechodu), bilineární a kvadratické formy (skalární součin).

3) **Matematické struktury:** definice konstruktu, podkonstrukty, izomorfizmy objektů, přenosové konstrukty, vlákna, kostra konstruktu, podobjekty, průniky objektů a generování, faktorové objekty a kongruence, volné objekty, iniciální struktury a kartézské součiny objektů, finální struktury a disjunktní sjednocení objektů.

4) **Geometrie v prostoru:** afinní a eukleidovské prostory (afinní a Eukleidovské transformace), Frenetovy vzorce prostorové křivky, Gaussova křivost.

II. Matematická logika, teorie grafů

1) **Výroková logika:** formule výrokové logiky a jejich pravdivost, jazyk, axiomy a odvozovací pravidlo výrokové logiky, důkaz, věta o úplnosti výrokové logiky.

2) **Predikátová logika:** jazyk predikátové logiky (symboly, termy, atomické formule a formule), sémantika predikátové logiky (pravdivost formulí), formální systém predikátové logiky (axiomy a odvozovací pravidla), dokazatelnost formulí, prenexní tvary formulí, teorie a její bezespornost, model a důsledek teorie, věty o úplnosti a kompaktnosti, věty o neúplnosti.

3) **Neorientované grafy:** sledy, tahy, cesty a kružnice, souvislost, podgrafy, stupeň uzlu, stromy, kostry a minimální kostry, Kruskalův a Primův algoritmus pro hledání minimální kostry, eulerovské a hamiltonovské grafy, obarvování grafů, planární grafy a jejich vlastnosti (Eulerova věta).

4) **Orientované grafy a toky v sítích:** orientovaný sled a tah, orientovaná cesta a kružnice, vstupní a výstupní stupeň uzlu, orientace a symetrizace grafu, turnaje a jejich vlastnosti, cesta minimální délky, Dijkstrův a Floyd-Warshallův algoritmus pro hledání minimální cesty, sítě a toky v nich, Ford-Fulkersonův algoritmus pro hledání maximálního toku.

III. Funkcionální analýza, parciální diferenciální rovnice, pokročilé metody matematické analýzy

1) **Normované lineární prostory a unitární prostory:** norma, skalární součin, Banachův prostor, Hilbertův prostor, vliv dimenze prostoru na různé vlastnosti,

příklady (zejména prostory posloupností a funkcí, a to včetně Lebesgueových prostorů a konstrukce Lebesgueova integrálu), Hamelova vs. Schauderova báze, abstraktní Fourierovy řady, Rieszova-Fischerova věta.

2) **Lineární funkcionály a operátory:** spojitost a ohraničenost, norma funkcionálu a operátoru, Hahnova-Banachova věta, duální prostory, příklady (zejména prostory posloupností a funkcí), reprezentace funkcionálů, slabá konvergence, kompaktní operátory, invertovatelnost, adjungovaný operátor, spektrum operátoru, Fredholmovy věty v Hilbertově prostoru.

3) **Klasická teorie parciálních diferenciálních rovnic:** PDR 1. řádu, PDR 2. řádu, klasifikace (rovnice eliptické, parabolické a hyperbolické), klasické metody řešení (metoda charakteristik, Fourierova metoda), vlastnosti řešení (oblast závislosti, hladkost řešení, princip maxima).

4) **PDR v aplikacích:** základní rovnice matematické fyziky - základní principy, konstituční vztahy a stavové rovnice pro odvození rovnice kmitání struny a vlnové rovnice, rovnice vedení tepla a difúze, rovnice průhybu tenké membrány, Eulerovy a Navierovy-Stokesovy rovnice; formulace počátečních a okrajových úloh a jejich fyzikální interpretace.

5) **Zobecněné funkce, zobecněná řešení:** zavedení zobecněných funkcí (distribucí) a zobecněných derivací, Sobolevovy prostory, stopy, vnoření prostorů, slabá a variační formulace úloh pro diferenciální rovnice, význam slabého řešení, existence a jednoznačnost, Laxovo-Milgramovo lemma.

IV. Numerické řešení diferenciálních rovnic, dynamické systémy

1) **ODR – počáteční úlohy – jednokrokové metody:** formulace úlohy, Eulerova explicitní a implicitní metoda, lichoběžníková metoda, Runge-Kuttovy metody, přesnost a stabilita uvedených metod, řízení délky kroku.

2) **ODR – počáteční úlohy – mnohokrokové metody:** Adamsovy metody, metody prediktor-korektor, metody zpětného derivování, tuhé systémy, přesnost a stabilita uvedených metod**.**

3) **ODR – Okrajové úlohy:** formulace úlohy, diferenční metoda pro DR 2. řádu s konvekcí a bez konvekce, metoda konečných objemů. Metoda konečných prvků**:** slabá formulace, Galerkinova metoda, Lagrangeův konečný prvek (lineární prvek a prvky vyšších řádů, definice konečného prvku), vlastnosti MKP (konzistence, Galerkinova ortogonalita, nejlepší aproximace, apriorní a aposteriorní odhady, řád konvergence).

4) **PDR – Diferenční metoda, metoda konečných prvků, abstraktní metody:** diferenční metoda, MKP pro Poissonovu rovnici a časově závislé úlohy (rovnice vedení tepla a vlnová rovnice), Ritzova metoda, Galerkinova metoda.

5) **PDR – Metoda konečných objemů:** MKO pro Eulerovy rovnice, diskretizace v čase a prostoru pro metody prvního řádu a pro metody druhého řádu, vlastnosti numerického toku, Riemannův problém a Godunův numerický tok.

6) **Dynamické systémy:** existence, jednoznačnost a prodloužitelnost počáteční úlohy, stabilita, kritéria stability lineárních a nelineárních soustav, fázový portrét, základní typy ekvilibrií autonomních soustav.

V. Variační počet, optimální řízení, optimalizace

1) **Úlohy variačního počtu a jejich řešení:** Přehled úloh vedoucích na postupy variačního počtu. Minimalizace funkcionálu, základní lemma a odvození Eulerovy rovnice. Postačující podmínka (druhá variace) a konjugované body. Zobecněné úlohy (vektorová funkce, derivace vyšších řádů, pohyblivé koncové body).

2) **Lagrangeovský a hamiltonovský formalismus variačního počtu:** Vztah mezi Eulerovými a kanonickými (Hamiltonovými) rovnicemi, Legendrova transformace. Hamiltonova-Jacobiho rovnice, úplné řešení parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.

3) **Nelineární úlohy optimálního řízení:** formulace problému, nutné a postačující podmínky optimality (princip maxima, podmínky transverzality), aplikace.

4) **Lineární úlohy časové optimalizace:** formulace problému, nutné a postačující podmínky optimality, základní vlastnosti optimálních regulací a trajektorií.

5) **Konečněrozměrná optimalizace lineárních úloh:** Formulace úloh, konvexní a polyedrické množiny a jejich vlastnosti, reprezentace množiny přípustných řešení, podmínky optimality, simplexová metoda.

6) **Konečněrozměrná optimalizace nelineárních úloh:** Formulace úloh, konvexní funkce a jejich vlastnosti, podmínky optimality (Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky a jejich geometrická interpretace), základní numerické algoritmy.

VI. Analýza v komplexním oboru, Fourierova analýza, zpracování obrazu

1) **Funkce komplexní proměnné:** limita, spojitost, derivace, Cauchyho–Riemannovy podmínky, harmonicky sdružené funkce.

2) **Integrál v komplexním oboru:** primitivní funkce, nezávislost na integrační cestě, Cauchyova věta, Cauchyův integrální vzorec, věta o jednoznačnosti holomorfních funkcí.

3) **Nekonečné řady v komplexním oboru:** Taylorova řada, Laurentova řada, singulární body holomorfních funkcí a jejich klasifikace, rezidua, reziduová věta.

4) **Geometrický význam:** geometrická interpretace derivace v komplexním oboru, konformní zobrazení, Riemannova věta a věta o zachování násobnosti oblastí.

5) **Zpracování obrazu:** Digitální obraz a jeho reprezentace v prostorové a frekvenční oblasti, 2D diskrétní konvoluce, PSF a MTF, lineární filtry, filtrace aditivního a impulzního šumu.

VII. Pravděpodobnost a statistika, fuzzy množiny, stochastická optimalizace

1) **Teorie odhadu:** základní rozdělení pravděpodobnosti a jejich vlastnosti, náhodný výběr, statistiky, bodové a intervalové odhady parametrů, nestrannost, konzistence a vydatnost odhadu, maximálně věrohodné odhady, odhady metodou momentů, bayesovské odhady.

2) **Testování hypotéz:** hladina významnosti, síla testu, p-hodnota, testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení, rozdělení odvozená od normálního, testy o korelaci dvourozměrného normálního rozdělení, asymptotické testy založené na věrohodnostní funkci, testy o rozdělení, neparametrické testy.

3) **Regresní analýza:** mnohorozměrné normální rozdělení, lineární regresní model, metoda nejmenších čtverců, analýza rozptylu, regresní diagnostika, nelineární model.

4) **Stochastické procesy:** definice, trajektorie, systém distribučních funkcí, striktní a slabá stacionarita, funkce středních hodnot, autokovarianční, autokorelační a parciální autokorelační funkce, spektrální hustota, dekompozice časové řady, ARMA procesy, nejlepší lineární predikce, Markovovy řetězce – matice přechodu, klasifikace stavů, rozklad.

5) **Fuzzy množiny:** základní pojmy, reprezentace fuzzy množin, množinové operace a jejich rozšíření (t-normy a t-konormy), princip rozšíření, reálná fuzzy čísla a operace s nimi.

6) **Aplikace fuzzy množin:** fuzzy relace, lingvistická proměnná a operátory, fuzzy logika (fuzzifikace a defuzzifikace), Fuzzy Inference System.

7) **Konečněrozměrná optimalizace celočíselných a síťových úloh:** Formulace celočíselných úloh včetně využití indikátorových proměnných, metoda větví a mezí pro řešení celočíselných lineárních úloh, formulace vybraných síťových úloh pomocí lineární optimalizace a jejich vlastnosti.

8) **Konečněrozměrná optimalizace stochastických úloh:** Formulace úloh, WS a HN přístupy, deterministické přepisy a jejich řešení, EEV, EVPI, VSS charakteristiky a jejich interpretace, dvojstupňové úlohy a jejich vlastnosti.

prof. Mgr. Pavel Řehák, PhD.
garant studijního programu