AUTOR TEXTU: JIŘÍ KLAŠKA
VUT BRNO

POKRAČOVÁNÍ DRUHÉ 22.3. – 24.3. 2020

VÁZANÉ EXTRÉMY (6 STRAN)

Ve druhém pokračování „Matematiky na dálku" se budeme zabývat vázanými extrémy.

Zadání: Vyšetřete vázané extrémy funkce f s vazbou V. (zadání je autorovo)

$$(U) \quad f(x,y) = e^{x^2(1-y)}, \quad V: x+y=8.$$

Řešení: Ukážeme dva různé postupy, jak úlohu (U) řešit. První postup je založen na tzv. Lagrangeově funkci.

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) byl významný francouzský matematik italského původu. Jeho rodné jméno je Giuseppe Lodovico.

Úlohu (U) převedeme na následující úlohu (U1) o Lagrangeově funkci L:

(U1): Vyšetřete lokální extrémy funkce L.

$$L(x,y) = e^{x^2(1-y)} + \lambda(x+y-8)$$

Z teorie víme, že úloha (U1) není ekvivalentní s původní úlohou (U). Vyřešením úlohy (U1) však můžeme získat (za určitých podmínek) řešení úlohy U.

Řešme tedy úlohu (U1):

$$L'_x = e^{x^2(1-y)} \cdot 2x(1-y) + \lambda = 0$$
$$L'_y = e^{x^2(1-y)} \cdot (-x^2) + \lambda = 0$$
$$x + y = 8$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Třetí rovnicí je vazba V.
Porovnáním prvních dvou rovnic podle λ dostaneme:

$$e^{x^2(1-y)} \cdot 2x(1-y) = e^{x^2(1-y)} (-x^2)$$

Protože $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ je $e^{\alpha} \neq 0$, můžeme rovnici pokrátit výrazem $e^{x^2(1-y)}$. Odtud

(*) $$2x(1-y) = -x^2.$$

Z rovnice vazby obdržíme $y = 8 - x$. Dosazením do (*) dostaneme:

$$2x(1-(8-x)) = -x^2 \iff 2x(x-7) = -x^2$$
$$\iff 3x^2 - 14x = 0 \iff x(3x-14) = 0 \iff$$
$$x = 0 \text{ nebo } x = \frac{14}{3}.$$

Protože $y = 8 - x$, máme dva stacionární body Lagrangeovy funkce L:

$$S_1 = [0, 8], \quad S_2 = \left[\frac{14}{3}, \frac{10}{3}\right].$$

Dalším krokem k nalezení lokálních extrémů fce L je výpočet druhých parciálních derivací a sestavení matice druhé derivace.

$$L''_{xx} = e^{x^2(1-y)}\left[2x(1-y)\right]^2 + e^{x^2(1-y)} \cdot 2(1-y) =$$

$$= e^{x^2(1-y)} \cdot \left(\left(2x(1-y)\right)^2 + 2(1-y)\right) =$$

$$= e^{x^2(1-y)} \cdot 2(1-y)(2x^2 - 2x^2y + 1)$$

$$L''_{xx}(S_1) = 2 \cdot (-7) \cdot 1 \cdot e^0 = -14$$

$$L''_{xx}(S_2) = 2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)\left(2 \cdot \left(\frac{14}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{14}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 1\right) e^{\left(\frac{14}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)}$$

$$= \frac{38038}{81} e^{-\frac{1372}{27}}$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = e^{x^2 \cdot (1-y)}(-x^2)2x(1-y) + e^{x^2(1-y)} \cdot (-2x)$$

$$= e^{x^2(1-y)}\left(2x\left(-x^2(1-y) - 1\right)\right) = e^{x^2(1-y)} \cdot 2x\left(x^2y - x^2 - 1\right)$$

$$L''_{xy}(S_1) = 0$$

$$L''_{xy}(S_2) = 2 \cdot \frac{14}{3} \cdot \left(\left(\frac{14}{3}\right)^2 \cdot \frac{10}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 - 1\right) e^{-\frac{1372}{27}} =$$

$$= \frac{37660}{81} \cdot e^{-\frac{1372}{27}}$$

$$L''_{yy} = e^{x^2(1-y)}(-x^2)(-x^2) = e^{x^2(1-y)} \cdot x^4$$

$$L''_{yy}(S_1) = 0$$

$$L''_{yy}(S_2) = \left(\frac{14}{3}\right)^4 \cdot e^{-\frac{1372}{27}} = \frac{38416}{81} \cdot e^{-\frac{1372}{27}}$$

Spočítat druhé parciální derivace nebylo těžké, ale najít jejich hodnoty ve stacionárních bodech bylo trochu zdlouhavé.

$$L''(S_1) = \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L''(S_2) = e^{-\frac{1372}{27}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{38038}{81} & \frac{37660}{81} \\ \frac{37660}{81} & \frac{38416}{81} \end{bmatrix}$$

Použijeme Sylvesterovo rozhodovací kritérium.

a) Pro bod S_1 je

$$D_1 = -14 < 0$$

$$D_2 = 0$$

Podle kritéria může nastat v bodě S_1 libovolná situace: V S_1 může být maximum L, minimum L nebo L nemá v S_1 extrém.

b) Pro bod S_2 je

$$D_1 = \frac{38\,038}{81} \cdot e^{-\frac{1372}{27}} > 0$$

$$D_2 = \det L''(S_2) = \frac{530\,768}{81} e^{\left(-\frac{1372}{27}\right)^2} > 0$$

Podle kritéria je v bodě S_2 lokální minimum.

Jaké můžeme z našeho počítání udělat závěry?

Závěr 1: Pro úlohu (U1) (Pro funkci L) V bodě $S_1 = [0, 8]$ může ale nemusí být extrém fce L. (Museli bychom zkoumat okolí S_1). V bodě $S_2 = \left[\frac{14}{3}, \frac{10}{3}\right]$ má L lokální minimum. Hodnota $f(S_2)$ je velmi malá $f(S_2) = e^{-\frac{1372}{27}} \approx 0{,}85 \times 10^{-22}$.

Závěr 2: Pro úlohu (U), f, V:

Funkce f s vazbou V může ale nemusí mít vázaný extrém v bodě $S_1 = [0, 8]$.

Funkce f, V má v $S_2 = \left[\frac{14}{3}, \frac{10}{3}\right]$ vázané lokální minimum.

Bez detailního prozkoumání okolí $O(S_1)$ se již více říci nedá.

Máme ale ještě k dispozici druhou možnost jak úlohu (U) řešit. Vazba V je jednoznačně řešitelná vzhledem k y: $y = 8 - x$.

Sestavíme úlohu (U2):

(U2): Zadání: Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$F(x) = f(x, 8-x) = e^{x^2(1-(8-x))} = e^{x^2(x-7)}.$$

Úloha (U2) je ekvivalentní s úlohou (U).

Lokální extrémy fce $F(x)$ vyšetříme metodami zimního semestru.

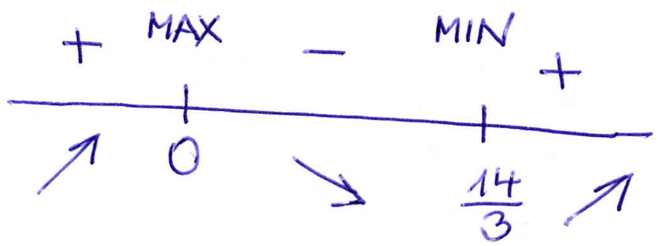
$$F'(x) = e^{x^2(x-7)} \cdot (2x(x-7) + x^2) = e^{x^2(x-7)} \cdot (3x^2 - 14x)$$

$$F'(x) = 0 \iff 3x^2 - 14x = 0 \iff x(3x-14) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ nebo } x = \frac{14}{3}$$

Stanovíme sgn F':

sgn F':



Závěr 1 (pro úlohu U2). Funkce $F(x)$ má v bodě $x = 0$ lokální maximum a v bodě $x = \frac{14}{3}$ lokální minimum.

Ze závěru 1 učiníme závěr 2 pro původní úlohu (U).

Závěr 2 (pro úlohu U). Funkce f s vazbou V má v bodě $[0, 8]$ vázané maximum a v bodě $\left[\frac{14}{3}, \frac{10}{3}\right]$ vázané minimum.

Poznámka: Řešení ukázalo jistou omezenost Lagrangeovy metody. Je-li vazba jednoznačně řešitelná, doporučuji provést převod na úlohu typu (U2). To samozřejmě není vždy možné. Původně jsem chtěl zařadit analogickou úlohu:

$$(U): f(x,y) = e^{x^2(1-y)}, \quad V: x+y = 3.$$

V tomto případě má f, V v bodě

$S_1 = [0, 3]$ vázané maximum a v bodě

$S_2 = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ vázané minimum.

Zkuste úlohu obecnější

$$(U): f(x,y) = e^{x^2(1-y)}, \quad V: x+y = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c je libovolná, pevně zvolená konstanta)

KONEC DRUHÉ ČÁSTI

AUTOR TEXTU: JIŘÍ KLAŠKA
VUT BRNO

POKRAČOVÁNÍ TŘETÍ 25.3 – 27.3.2020

EXTRÉMY NA MNOŽINĚ

Ve třetím pokračování se budeme zabývat extrémy na množině. Přesněji řečeno fce f bude spojitá na uzavřené a ohraničené množině M, kde $M \subseteq Df$.

Zadání: Nalezněte největší a nejmenší hodnotu fce f na množině M.

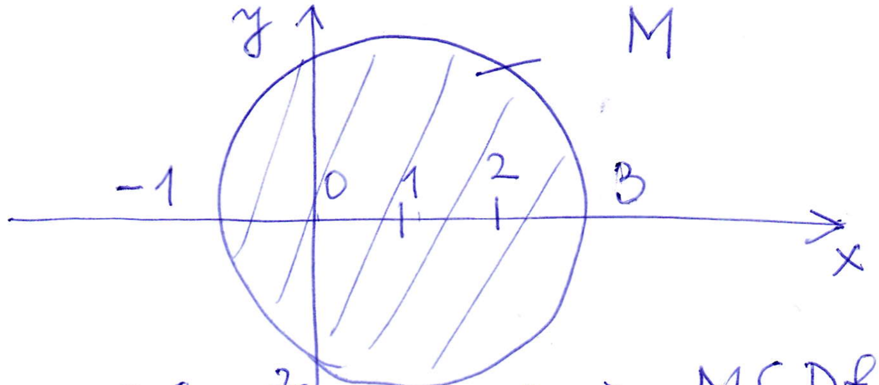
$$f(x,y) = x^2 - y^2, \quad M: x^2 + y^2 \leq 3 + 2x.$$

Největší hodnotu f na M označme $\max_M f$ a nejmenší hodnotu f na M označme $\min_M f$. Než se pustíme do řešení úlohy, připomeňme, že pokud jsou splněny podmínky 1) f spojitá na M 2) M uzavřená, 3) M ohraničená, pak teorie zaručuje existenci čísel $\max_M f$ a $\min_M f$. Tato čísla jsou jednoznačně určena, ale může k nim dojít obecně v různých bodech, resp. více bodech. Navíc z teorie víme, že k $\max_M f$ a $\min_M f$ dochází buď v bodech lokálních extrémů, nebo na hranici množiny M. Hranice $h(M)$ je v našem případě určena rovnicí $x^2 + y^2 = 3 + 2x$. Začneme tím, že si množinu M nakreslíme.

K tomu je třeba provést menší algebraickou úpravu:

$$x^2+y^2 \leq 3+2x$$
$$x^2-2x+1+y^2 \leq 4$$
$$(x-1)^2+y^2 \leq 4.$$

Odtud plyne, že M je kruh se středem $S=[1,0]$ a poloměrem $r=2$. Jedná se o uzavřenou a ohraničenou množinu.



Protože $Df=\mathbb{R}^2$, platí, že $M \subset Df$ a dále platí, že f je spojitá na Df. Hranice M je kružnice, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru $y^2=3+2x-x^2$.

Část a: Nejprve vyšetříme lokální extrémy f:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x = 0 \\ f'_y &= -2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=y=0.$$

Existuje jediný stacionární bod $A=[0,0]$.

$$f''_{xx}=2, \quad f''_{xy}=0, \quad f''_{yy}=-2$$

$$f''=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=f''(A)$$

Použijeme rozhodovací kritérium:

$$D_1=2>0$$
$$D_2=\det f''(A)=-4<0.$$

Podle kritéria nemá fce f v A lokální extrém.

Část b: Vyšetříme hranici. To však znamená vyřešit následující úlohu (U) na vázaný extrém fce f s vazbou $V = h(M)$.

$$(U): \quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad V: \quad x^2 + y^2 = 3 + 2x.$$

Vazba sice není jednoznačně řešitelná vzhledem k x ani k y, ale $y^2 = 3 + 2x - x^2$. Sestavíme funkci

$$F(x) = f(x, 3+2x-x^2) = x^2 - (3+2x-x^2) =$$
$$= 2x^2 - 2x - 3.$$

Lagrangeovu metodu jsme po předchozích zkušenostech „dali až na druhé místo".

(U1): Vyšetřete lokální extrémy fce
$$F(x) = 2x^2 - 2x - 3.$$

Postup je dále zřejmý.

$$F'(x) = 4x - 2 = 0 \iff 4x = 2 \iff x = \frac{1}{2}$$

sgn F': $\quad - \quad$ MIN $\quad +$

$\searrow \quad \frac{1}{2} \quad \nearrow$

pro úlohu (U1)

Závěr 1. (Pro funkci F). Funkce F má lokální minimum v bodě $x = \frac{1}{2}$.

Odtud se nabízí závěr 2 pro úlohu (U):

Závěr 2: f, V má bodě $B = \left[\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right]$ a

&

V bodě $C = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right]$ vázané lokální minima.
y-ové souřadnice jsme dopočítali ze vztahu:

$$y^2 = 3 + 2x - x^2$$

$$y^2 = 3 + 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 3 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4}$$

Tedy $y = \pm\sqrt{\frac{15}{4}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

Dále platí $f(B) = f(C) = \frac{1}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$
Tedy $\min_M f = -\frac{7}{2}$ a dojde k němu ve dvou bodech B, C.

Co ale $\max_M f = ?$ Dochází k této hodnotě ve stacionárním bodu $A = [0,0]$? Podle teorie ne. Tak kde tedy $\max_M f$ leží? a čemu se rovná?

Nebudu vás dále trápit a napínat. Část b jsme řešili od začátku špatně.

VAZBA MUSÍ BÝT JEDNOZNAČNĚ ŘEŠITELNÁ !!

Ve snaze si vše ulehčit a vyhnout se Lagrangeově funkci L jsme se dopustili velké chyby. Lagrangeově fci se tedy nevyhneme:

(U2) $L(x,y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 3)$

Víme již jak postupovat:

(1) $L'_x = 2x + \lambda(2x-2) = 0$

(2) $L'_y = -2y + \lambda\cdot 2y = 0$

(3) $x^2 + y^2 = 3 + 2x.$

První rovnice:

$$(1'): \quad x + \lambda(x-1) = 0$$
$$x + \lambda x - \lambda = 0$$
$$x(1+\lambda) = \lambda$$
$$(*) \qquad x = \frac{\lambda}{1+\lambda} \quad \text{pro } \lambda \neq -1.$$

Je-li však $\lambda = -1$, pak z (1) plyne
$2x - 1(2x-2) = 0 \iff 2x - 2x + 2 = 0$
$\iff 2 = 0$, což je spor. Tedy $\lambda \neq -1$. a
~~ten~~ předpoklad $\lambda \neq -1$ není omezující.

Druhá rovnice:

$(2')$ $-y + \lambda y = 0 \iff y(-1+\lambda) = 0 \iff$
$y = 0$ nebo $\lambda = 1$

Třetí rovnice: Do třetí rovnice (vazby) dosadíme nejprve $y = 0$:

$$x^2 = 3 + 2x \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$$
$$= \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

Odtud plynou dva stacionární body Lagrangeovy fce L: $S_1 = [3, 0]$, $S_2 = [-1, 0]$. Pro
S_1 je $3 + \lambda(3-1) = 0$ (podle $(1')$), odkud
$$3 + 2\lambda = 0 \quad \text{a} \quad \lambda = -\frac{3}{2}.$$
Podobně pro S_2 je $-1 + \lambda(-1-1) = 0$, odkud
$$-1 - 2\lambda = 0 \quad \text{a} \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Dále dosadíme $\lambda = 1$ do $(*)$: $x = \frac{\lambda}{1+\lambda}$

Odtud $x = \frac{1}{2}$. Z rovnice (3) (vazby V) plyne $\frac{1}{4} + y^2 = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \iff y^2 = 4 - \frac{1}{4} \iff$

$y^2 = \frac{15}{4} \iff y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Dostáváme další dva stacionární body

$$S_3 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right], \quad S_4 = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right].$$

Pro S_3 i S_4 je $\lambda = 1$: (Plyne z (1'))

Nyní vypočteme druhé parciální derivace Lagrangeovy fce:

$$L''_{xx} = 2 + 2\lambda \qquad L'' = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & -2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$L''_{yy} = -2 + 2\lambda$$

$$L''(S_3) = L''(S_4) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 4, \ D_2 = 0$$

$$L''(S_1) = \begin{bmatrix} 2+2(-\frac{3}{2}) & 0 \\ 0 & -2+2(-\frac{3}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$D_1 = -1$, $D_2 = 5$

$$L''(S_2) = \begin{bmatrix} 2+2(-\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & -2+2(-\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 1$, $D_2 = -3$

Nyní můžeme stanovit závěr vyšetření Lagrangeovy fce L.

Závěr 1 (pro U2)

Lagrangeova funkce má 4 stacionární body $S_1 = [3, 0]$, $S_2 = [-1, 0]$, $S_3 = [\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}]$, $S_4 = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}]$.

Podle kritéria L má v S_1 lokální maximum, v S_2 nemá L extrém a v bodech S_3, S_4 není možné podle kritéria rozhodnout o existenci extrému.

Závěr 2 (pro U)

$f|V$ má v $S_1 = [3, 0]$ vázané maximum. V ostatních stacionárních bodech může, ale nemusí být vázaný extrém.

Bez podrobného studia funkčních hodnot v okolí stacionárních bodů problém vázaných extrémů nevyřešíme. To ale nevadí. Ať v bodech extrém je nebo ne, zařadíme je do našich úvah.

$$f(S) = f(0,0) = 0$$

$$f(S_1) = f(3,0) = 9 - 0 = 9$$

$$f(S_2) = f(-1,0) = 1 - 0 = 1$$

$$f(S_3) = f(S_4) = f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{7}{2}$$

$$\max_f M = \max\left\{0, 9, 1, -\frac{7}{2}\right\} = 9 \text{ v } S_1$$

$$\min_f M = \min\left\{0, 9, 1, -\frac{7}{2}\right\} = -\frac{7}{2} \text{ v } S_3 \text{ a } S_4.$$

KONEC TŘETÍ ČÁSTI

AUTOR TEXTU: JIŘÍ KLAŠKA
VUT BRNO

POKRAČOVÁNÍ ČTVRTÉ: 25.3–27.3.

IMPLICITNÍ FUNKCE

Velká většina úloh o implicitních funkcích využívá věty umožňující nalézt derivaci funkce dané implicitně. Připomeňme si nejprve vzorec pro případ

$$f(x,y) \quad a \quad y = y(x).$$

(1) $$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$ (první derivace)

(2) $$y'' = \frac{-f''_{xx}\cdot(f'_y)^2 + 2f''_{xy}\cdot f'_x\cdot f'_y - f''_{yy}\cdot(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

(druhá derivace)

Pro případ $f(x,y,z)=0$ a $z = z(x,y)$ jsou vzorce pro derivace analogické:

$$z'_x = -\frac{f'_x}{f'_z}, \quad z'_y = -\frac{f'_y}{f'_z}.$$

(první parciální derivace)

$$z''_{xx} = \frac{-f''_{xx}\cdot(f'_z)^2 + 2f''_{xz}\cdot f'_x\cdot f'_z - f''_{zz}\cdot(f'_x)^2}{(f'_z)^3}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{-f''_{xy}\cdot(f'_z)^2 + f''_{xz}\cdot f'_y\cdot f'_z + f''_{yz}\cdot f'_x f'_z - f''_{zz} f'_x f'_y}{(f'_z)^3}$$

$$z''_{yy} = \frac{-f''_{yy}(f'_z)^2 + 2f''_{yz}\cdot f'_y\cdot f'_z - f''_{zz}\cdot(f'_y)^2}{(f'_z)^3}$$

(druhé parciální derivace)

Pro vyšší derivace existují podobné, ale mnohem komplikovanější vzorce.
Kromě uvedených vzorců máme ještě jednu možnost, jak derivace vypočítat. Jedná se o tzv. metodu implicitního derivování.
Podstata je velmi jednoduchá: Pro případ $f(x,y) = 0$ a $y = y(x)$ můžeme y' vypočítat tak, že rovnici $f(x,y) = 0$ zderivujeme podle dvou pravidel:

(1) x derivujeme jako proměnnou
(2) y derivujeme jako funkci, která na x závisí.

Přitom používáme běžné vzorce z předchozího semestru.

Zadání: V okolí bodu $A=[1,0]$ je rovnicí

$$x^2-y^3=1-\ln(x+y)$$

určena jediná spojitá funkce $y=y(x)$.

Vypočtete $y'(1)$.

Řešení: Nejprve postupujme podle vzorce (1):

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

Položíme $f(x,y)=x^2-y^3+\ln(x+y)-1$.

Spočítáme parciální derivace 1. řádu:

$$f'_x=2x+\frac{1}{x+y},\quad f'_y=-3y^2+\frac{1}{x+y}$$

Dosadíme:

$$y'=-\frac{2x+\frac{1}{x+y}}{-3y^2+\frac{1}{x+y}}=-\frac{\frac{2x(x+y)+1}{x+y}}{\frac{-3y^2(x+y)+1}{x+y}}$$

$$=\frac{2x(x+y)+1}{3y^2(x+y)-1}. \quad (*)$$

Nyní do výrazu $(*)$ dosadíme za $x=1$, $y=0$

$$y'(1)=\frac{2\cdot 1(1+0)+1}{3\cdot 0^2(1+0)-1}=\frac{2+1}{-1}=\underline{\underline{-3}}$$

Nyní určíme y' metodou implicitního derivování.

Rovnici $x^2 - y^3 + \ln(x+y) - 1 = 0$

implicitně zderivujeme:

$$2x - 3y^2 \cdot y' + \frac{1}{x+y} \cdot (1+y') = 0$$

Z této rovnice vypočteme y':

$$(2x - 3y^2 \cdot y')(x+y) + 1 + y' = 0 \qquad (**)$$

$$2x^2 + 2xy - 3xy^2 y' - 3y^3 y' + 1 + y' = 0$$

$$y'(-3xy^2 - 3y^3 + 1) = -1 - 2x^2 - 2xy$$

$$y' = \frac{-1 - 2x(x+y)}{-3y^2(x+y)+1} = \frac{2x(x+y)+1}{3y^2(x+y)-1}$$

Získali jsme stejný výsledek jako prvním postupem.

Protože $y'(1) = -3$, plyne odtud, že fce $y = y(x)$ je v okolí bodu A klesající.

Zadání: Nalezněte rovnici normály fce $y = y(x)$ v bodě A.

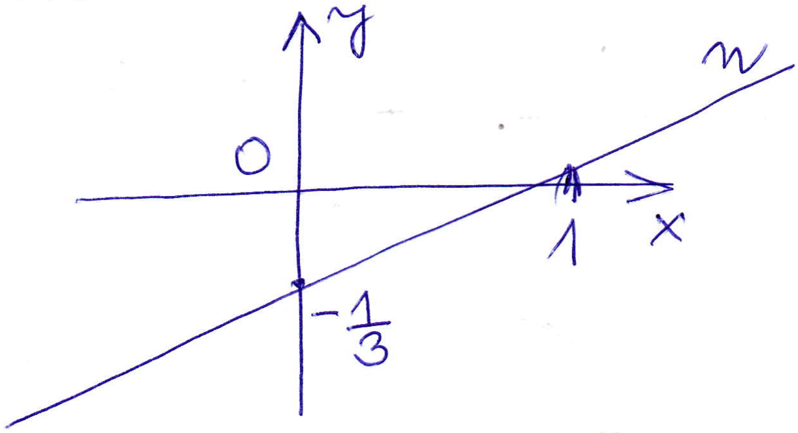
Řešení: Rovnice normály má tvar:

$$n: \; y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)}(x - x_0). \quad \text{Dosadíme:}$$

$$y - 0 = \frac{-1}{-3}(x - 1). \quad \text{Odtud}$$

$n: \ y = \frac{1}{3}(x-1).$

Normálu umíme i nakreslit:



Zadání: Vypočtěte $y''(1)$.

Derivaci y'' vypočítáme tak, že znovu implicitně zderivujeme rovnici (**):

$$(2x - 3y^2 y')(x+y) + 1 + y' = 0$$

$$(2 - 6yy'\cdot y' - 3y^2 y'')(x+y) + (2x - 3y^2 y')(1+y') + y'' = 0$$

Z rovnice vypočteme y'':

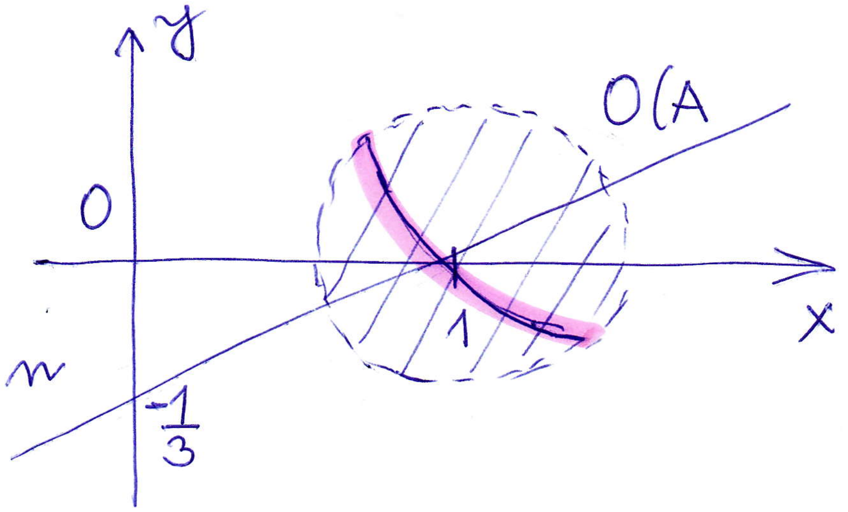
$$\left(-3y^2(x+y)+1\right) y'' = -(2-6y(y')^2)(x+y) - (2x-3y^2y')\cdot (1+y')$$

$$y'' = \frac{(2-6y(y')^2)(x+y) + (2x-3y^2y')(1+y')}{-1+3y^2(x+y)}$$

Nyní dosadíme: $x=1, \ y=0, \ y'=-3$

$$y''(1) = \frac{(2-0)1 + (2-0)(1+(-3))}{-1+0} = \frac{2+2(-2)}{-1} = \underline{\underline{2}}$$

Protože $y''(1) = 2$ plyne odtud (z teorie předcházejícího semestru), že funkce $y = y(x)$ je v okolí $O(A)$ konvexní. Můžeme si nakreslit obrázek.



Na základě znalosti $y'(1)$ a $y''(1)$ můžeme také zkonstruovat Taylorův polynom fce $y = y(x)$ v bodě $x = 1$ (druhého řádu)

$$T_2(x) = y(1) + \frac{1}{1!} y'(1)(x-1) + \frac{1}{2!} y''(x-1)^2$$

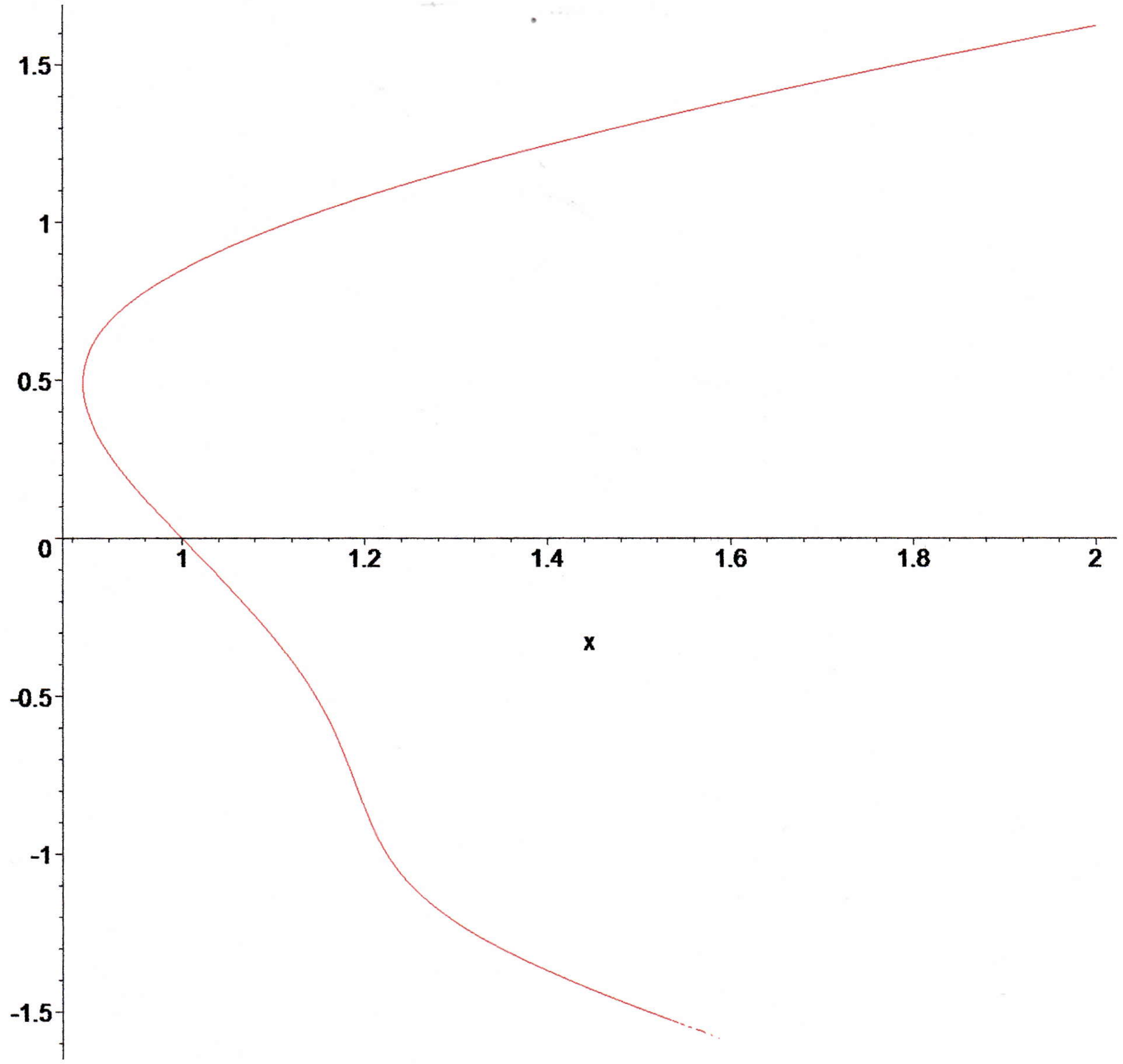
Dosazením dostáváme:

$$T_2(x) = 0 + 1 \cdot (-3)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 (x-1)^2 =$$
$$= -3x + 3 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x + 4$$

$$T_2(x) = x^2 - 5x + 4$$

Nyní si ukážeme, jak by se derivace vypočítaly v programu MAPLE:

```
> with(plots):
> implicitplot(x^2-y^3=1-ln(x+y),x=0..2,y=-2..2,grid=[500,500]);
>
```




```
> prvniderivace:=implicitdiff(x^2-y^3=1-ln(x+y),y,x);
```

$$prvniderivace := \frac{2\,x^2 + 2\,x\,y + 1}{-1 + 3\,y^2\,x + 3\,y^3}$$

```
> druhaderivace:=implicitdiff(x^2-y^3=1-ln(x+y),y,x,x);
```

$$druhaderivace := -\,(24\,y\,x^5 + 72\,y^2\,x^4 + 4\,x^3 + 24\,x^3\,y + 72\,x^3\,y^3 - 18\,x^3\,y^4 - 54\,y^5\,x^2 + 72\,x^2\,y^2 + 4\,y\,x^2 + 24\,y^4\,x^2 - 2\,x - 54\,y^6\,x + 9\,y^4\,x + 60\,y^3\,x + 6\,x\,y + 12\,y^4 - 2\,y + 6\,y^2 - 18\,y^7 + 9\,y^5) \Big/ (27\,y^6\,x^3 + 81\,x^2\,y^7 - 27\,y^4\,x^2 - 54\,y^5\,x + 81\,x\,y^8 + 9\,y^2\,x - 1 - 27\,y^6 + 27\,y^9 + 9\,y^3)$$

```
> tretiderivace:=implicitdiff(x^2-y^3=1-ln(x+y),y,x,x,x);
```

$$tretiderivace := (6\,x + 6\,y - 54\,y^3 + 360\,y\,x^4 + 1080\,y^2\,x^6 + 5400\,y^3\,x^5 - 648\,y^5\,x^6 + 720\,x^8\,y^2$$

$+ 3600 x^7 y^3 + 48 x^7 + 36 x^3 + 324 y^6 - 486 y^9 + 144 y^4 + 189 y^7 - 810 x^2 y^7 + 1890 y^5 x$
$- 162 y^6 x^3 + 234 y^3 x + 3294 y^4 x^2 + 351 y^6 x + 72 y x^2 + 162 y^5 x^2 + 90 x^2 y^2 + 384 x^3 y^4$
$+ 2268 x^3 y^3 + 540 y^2 x^4 + 8 x^3 y - 12 x y - 18 y^2 x - 1134 x y^8 - 12 x^2 + 72 x^5 + 8 x^4$
$+ 10260 y^4 x^4 + 8964 y^5 x^3 + 162 y^{10} + 3600 y^6 x^4 + 720 y^7 x^3 + 162 y^8 x^2 + 324 y^9 x$
$- 3240 x^5 y^6 - 6480 x^4 y^7 + 7200 x^6 y^4 + 7200 x^5 y^5 - 648 x y^{10} - 6480 x^3 y^8 - 3240 x^2 y^9$
$+ 3348 y^6 x^2 + 324 y^7 x + 540 y^2 x^3 + 252 y^3 x^2 + 480 y x^6 + 1200 x^5 y^2 + 1152 x^4 y^3) / ($
$243 y^{10} x^5 + 1215 y^{11} x^4 - 405 y^8 x^4 + 2430 x^3 y^{12} - 1620 x^3 y^9 + 270 y^6 x^3 + 2430 x^2 y^{13}$
$- 2430 y^{10} x^2 + 810 x^2 y^7 - 90 y^4 x^2 + 1215 x y^{14} - 1620 y^{11} x + 810 x y^8 - 180 y^5 x + 15 y^2 x$
$+ 243 y^{15} - 405 y^{12} + 270 y^9 - 90 y^6 + 15 y^3 - 1)$

```
> subs(x=1,y=0,prvniderivace);
```

$$-3$$

```
> subs(x=1,y=0,druhaderivace);
```

$$2$$

```
> subs(x=1,y=0,tretiderivace);
```

$$-158$$

Je zde i třetí derivace: $y'''(1) = -158.$

KONEC ČTVRTÉ ČÁSTI