Základy funkcionální analýzy

I. METRICKÉ PROSTORY

1. Definice a příklady metrických prostorů

Definice 1.1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici $\mathcal{X} = (X, \varrho)$, kde X je množina, jejíž prvky nazýváme *body*, a ϱ je tzv. *vzdálenost (metrika)*, což je nezáporná reálná funkce $\varrho(x, y)$, která je definována pro každou dvojici $x, y \in X$ (tedy $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ je zobrazení) a která splňuje tyto tři podmínky:

1) $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (*symetrie*);
3) $\forall x, y, z \in X : \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$ (*trojúhelníková nerovnost*).

V případech, kdy nemůže vést k nedorozumění, budeme metrický prostor $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ označovat stejným symbolem jako množinu jeho bodů, tj. symbolem X.

Příklad 1.2. Položíme-li pro prvky x, y libovolné množiny X

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{v případě } x = y, \\ 1 & \text{v případě } x \neq y, \end{cases}$$

dostaneme metrický prostor (X, ϱ), který se nazývá *diskrétní*.

Příklad 1.3. Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel se vzdáleností

$$\varrho(x, y) = |x - y|$$

tvoří metrický prostor $\mathbb{R}^1$.

Příklad 1.4. Množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se vzdáleností

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$$

se nazývá n-rozměrným euklidovským prostorem $\mathbb{R}^n$. Platnost prvních dvou axiomů vzdálenosti $\varrho(x, y)$ je v případě $\mathbb{R}^n$ zřejmá. Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost; užijeme k tomu Cauchy-Buňakovského nerovnost:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{1.1}$$

(Cauchy-Buňakovského nerovnost plyne ze snadno ověřitelné identity

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2;$$

k jejímu ověření stačí vyjádřit druhou mocninu dvojčlenu na pravé straně.)
Uvažujme v $\mathbb{R}^n$ body

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Položíme-li

$$a_k = y_k - x_k, \quad b_k = z_k - y_k,$$

dostaneme

$$z_k - x_k = a_k + b_k.$$

Podle (1.1) platí

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2,$$

tj.

$$\varrho^2(x,z)\le(\varrho(x,y)+\varrho(x,z))^2,$$

čili

$$\varrho(x,z)\le\varrho(x,y)+\varrho(y,z).$$

Příklad 1.5. Položíme-li pro libovolné prvky $x,y\in\mathbb{R}^n$, kde $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, $\varrho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|$, pak dostaneme metrický prostor $(\mathbb{R}^n,\varrho)$, který značíme symbolem $\mathbb{R}^n_1$.

Příklad 1.6. Symbolem $\mathbb{R}^n_0$ označíme metrický prostor, jehož body jsou opět uspořádané n-tice reálných čísel $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ale vzdálenost se definuje vztahem

$$\varrho_0(x,y)=\max_{1\le k\le n}|y_k-x_k|.$$

Platnost všech tří axiomů vzdálenosti je zřejmá.

Příklad 1.7. Množina $C(\langle a,b\rangle)$ (často též značená $C^0\langle a,b\rangle$) všech spojitých reálných funkcí, které jsou definovány na intervalu $\langle a,b\rangle$, se vzdáleností

$$\varrho(f,g)=\max_{a\le t\le b}|g(t)-f(t)| \tag{1.2}$$

také tvoří metrický prostor. Platnost axiomů 1 – 3 je zřejmá.

Příklad 1.8. Označme symbolem l_2 metrický prostor, jehož body jsou posloupnosti reálných čísel

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$$

splňující podmínku

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<+\infty$$

a v němž se vzdálenost definuje vztahem

$$\varrho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}. \tag{1.3}$$

Nejprve dokážeme, že takto definovaná funkce $\varrho(x,y)$ má vždy smysl, tj. že řada $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2$ konverguje. Pro libovolné přirozené n platí (viz příklad 1.4, kde v trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho(x,y)\le\varrho(x,z)+\varrho(z,y)$$

položíme $z=(0,0,\dots,0)$):

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2\right)^{\frac12}\le\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac12}+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)^{\frac12}. \tag{1.4_n}$$

Nyní nechť $n\to\infty$. Podle definice metrického prostoru l_2 pravá strana vztahu (1.4_n) má limitu. Tedy výraz stojící na levé straně se nezmenšuje a je ohraničený; tedy má limitu, takže vztah (1.3) má smysl. Zaměníme-li x v (1.4_n) výrazem $-x$ a přejdeme-li k limitě $n \to \infty$, dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(y_k + x_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

odkud již snadno plyne trojúhelníková nerovnost: Nechť

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots), \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$$

jsou tři body prostoru l_2. Položme

$$x_k = b_k - a_k, \quad y_k = c_k - b_k;$$

potom

$$c_k - a_k = y_k + x_k$$

a vzhledem k (1.4) platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(c_k - a_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(c_k - b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

tj.

$$\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c).$$

Příklad 1.9. Uvažujme, stejně jako v příkladu 1.7, množinu všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$, ale vzdálenost definujme jinak, totiž vztahem

$$\varrho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Tento metrický prostor budeme značit $C_2^0\langle a, b\rangle$ a nazývat *prostorem spojitých funkcí s kvadratickou metrikou*. V tomto případě je splnění prvních dvou axiomů vzdálenosti zřejmé; trojúhelníková nerovnost pak vyplývá (podobně jako v příkladu 1.4) z Cauchy-Buňakovského nerovnosti, tentokrát však v integrálním tvaru (tzv. *Schwarzova nerovnost*)

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t \int_a^b y^2(t)\mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

Nerovnost (1.6) ihned plyne z lehko ověřitelné identity

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t \int_a^b y^2(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b [x(s)y(t) - y(s)x(t)]^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Příklad 1.10. Uvažujme množinu všech ohraničených posloupností

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

reálných čísel. Položíme-li

$$\varrho(x, y) = \sup |x_k - y_k|, \tag{1.7}$$

dostaneme metrický prostor M^∞. Platnost axiomů 1 – 3 je zřejmá.

Definice 1.11. Nechť $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ je libovolný metrický prostor. Metrický prostor $\mathcal{M} = (M, \varrho)$ s toutéž metrikou ϱ uvažovanou pouze na množině $M \subset X$ se nazývá *podprostorem* metrického prostoru $\mathcal{X}$.

2. Konvergence posloupností

Buď $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ metrický prostor, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$. *Otevřenou koulí* $S(x_0, r)$ v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat množinu bodů $x \in X$, které vyhovují podmínce

$$\varrho(x, x_0) < r.$$

Bod x_0 se nazývá *středem* a číslo r *poloměrem* této koule.
Uzavřenou koulí $S[x_0, r]$ v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat množinu bodů $x \in X$, které vyhovují podmínce

$$\varrho(x, x_0) \leq r.$$

Otevřenou kouli poloměru ε se středem x_0 budeme také nazývat ε-*okolím* bodu x_0 a značit symbolem $O_\varepsilon(x_0)$.
Bod x nazýváme *bodem uzávěru množiny* M, jestliže jeho libovolné okolí obsahuje alespoň jeden bod z M. Množina všech bodů uzávěru množiny M se označuje $\overline{M}$ a nazývá *uzávěrem* této množiny.
Protože každý bod, který náleží M, je bodem uzávěru množiny M (tento bod totiž leží v každém svém okolí), platí $M \subseteq \overline{M}$.
Množinu M, pro kterou platí $M = \overline{M}$, nazýváme *uzavřenou.*
Bod x nazýváme *vnitřním bodem množiny* M, existuje-li okolí $O_\varepsilon(x)$ tohoto bodu, které je celé obsažené v množině M. Množinu, jejíž všechny body jsou vnitřní, nazýváme *otevřenou.*
Zřejmě je tedy množina M otevřená (uzavřená), právě když její doplněk je uzavřená (otevřená) množina.

Věta 2.1. *Uzávěr uzávěru M je roven uzávěru M:*

$$\overline{\overline{M}} = \overline{M}.$$

Důkaz. Nechť $x \in \overline{\overline{M}}$. Potom v libovolném okolí $O_\varepsilon(x)$ tohoto bodu lze nalézt nějaký bod $x_1 \in \overline{M}$. Položme $\varepsilon - \varrho(x, x_1) = \varepsilon_1$ a uvažujme kouli $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Tato koule celá leží uvnitř $O_\varepsilon(x)$. Skutečně, jestliže $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, potom $\varrho(z, x_1) < \varepsilon_1$ a protože $\varrho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\varrho(z, x) \leq \varrho(z, x_1) + \varrho(x_1, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

tj. $z \in O_\varepsilon(x)$. Protože $x_1 \in \overline{M}$, existuje v $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ bod $x_2 \in M$. Ale potom $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Protože $O_\varepsilon(x)$ je libovolné okolí bodu x, platí $x \in \overline{M}$. □

Věta 2.2. *Jestliže $M_1 \subseteq M$, potom $\overline{M_1} \subseteq \overline{M}$*

Tvrzení této věty je zřejmé.

Věta 2.3. *Uzávěr sjednocení je roven sjednocení uzávěrů:*

$$\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

Důkaz. Nechť $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$, tj. nechť libovolné okolí $O_\varepsilon(x)$ obsahuje bod $y \in M_1 \cup M_2$. Kdyby $x \notin \overline{M_1}$ a současně $x \notin \overline{M_2}$, potom by se našlo okolí $O_{\varepsilon_1}(x)$, které by neobsahovalo body z M_1, a okolí $O_{\varepsilon_2}(x)$ neobsahující body z M_2. Ale potom okolí $O_\varepsilon(x)$, kde $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, by neobsahovalo žádný bod z $M_1 \cup M_2$. Ze získaného sporu plyne, že bod x leží alespoň v jedné z množin $\overline{M_1}$ nebo $\overline{M_2}$, tj.

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subseteq \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

Protože $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$ a $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, obrácená inkluze plyne z věty 2.2. □

Nechť $x_1, x_2, \dots$ je posloupnost bodů v metrickém prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$. Říkáme, že *tato posloupnost konverguje k bodu* $x \in X$, jestliže každé ε-okolí $O_\varepsilon(x)$ bodu x obsahuje všechny body x_n počínaje od některého indexu $N(\varepsilon)$, tj. jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové přirozené číslo $N(\varepsilon)$, že okolí $O_\varepsilon(x)$ obsahuje všechny body x_n, kde $n \geq N(\varepsilon)$. Bod x se nazývá *limita posloupnosti* $\{x_n\}$.
Tuto definici lze vyslovit také takto: Posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k bodu x, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x, x_n) = 0.$$

Z definice limity přímo plyne:

a) Žádná posloupnost nemůže mít dvě různé limity.
b) Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k bodu x, potom každá posloupnost vybraná z této posloupnosti konverguje k témuž bodu.

Následující věta vyjadřuje úzkou souvislost mezi bodem uzávěru na jedné straně a pojmem limity na druhé straně.

Věta 2.4. *Aby bod x byl bodem uzávěru množiny M, je nutné a stačí, aby existovala posloupnost $\{x_n\}$ bodů množiny M konvergující k x.*

Důkaz. Nutnost. Je-li x bodem uzávěru množiny M, potom v každém jeho okolí $O_{\frac{1}{n}}(x)$ leží alespoň jeden bod $x_n \in M$. Tyto body tvoří posloupnost konvergující k x.
Dostatečnost je zřejmá. □

Nechť A je podmnožina metrickém prostoru $\mathcal{X}$. Množinu A nazýváme *hustou* v $\mathcal{X}$, jestliže $\overline{A} = \mathcal{X}$.
Například množina racionálních čísel je hustá na číselné přímce.
Metrický prostor $\mathcal{X}$, který obsahuje hustou *spočetnou* množinu, se nazývá *separabilní.*

Příklad 2.5 (Příklady separabilních metrických prostorů). a) Diskrétní metrický prostor uvedený v příkladě 1.2 je separabilní, právě když je spočetný. V tomto prostoru totiž uzávěr $\overline{M}$ libovolné množiny M je totožný s množinou M.
b) Všechny metrické prostory uvedené v příkladech 1.3 − 1.9 jsou separabilní. Pro každý z těchto prostorů uvedeme hustou množinu; detaily důkazů přenecháváme čtenáři:

(1) V metrickém prostoru $\mathbb{R}^1$ je hustou množinou množina racionálních čísel.
(2) V metrickém prostoru $\mathbb{R}^n$ je hustou množinou množina vektorů s racionálními souřadnicemi.
(3) V metrickém prostoru $\mathbb{R}^n_0$ je hustou množinou množina vektorů s racionálními souřadnicemi.
(4) V metrických prostorech $C^0\langle a, b\rangle$ a $C^0_2\langle a, b\rangle$ je hustou množinou množina polynomů s racionálními koeficienty.
(5) V metrickém prostoru l_2 je hustou množinou množina všech posloupností $\{x_n\}$, kde x_n jsou racionální čísla, přičemž počet čísel x_n různých od nuly je pouze konečný a pro různé posloupnosti obecně různý.

Příklad 2.6 (Příklad neseparabilního prostoru). Metrický prostor M^∞ všech ohraničených posloupností uvedený v příkladu 1.10 není separabilní: Je dobře známo, že všechny posloupnosti vytvořené z nul a jedniček tvoří nekonečnou nespočetnou množinu. Vzdálenost dvou takových od sebe různých bodů prostoru M^∞, definovaná vztahem (1.7), se rovná jedné. Kolem každého z těchto bodů sestrojíme otevřenou kouli o poloměru $\frac{1}{2}$. Tyto koule jsou disjunktní. Je-li nějaká množina A hustá v M^∞, potom každá ze sestrojených koulí musí obsahovat alespoň jeden bod množiny A, takže množina A nemůže být spočetná.

3. Spojitá zobrazení. Homeomorfismus. Izometrické zobrazení

Definice 3.1. Nechť $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ a $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$ jsou dva metrické prostory. Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{Y}$ se nazývá *spojité v bodě* $x_0 \in X$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $\delta > 0$, že pro všechny body x s vlastností $\varrho(x, x_0) < \delta$ platí

$$\varrho^*(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Jinými slovy, zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je spojité v bodě x_0, jestliže k libovolnému okolí $O_\varepsilon(f(x_0))$ bodu $f(x_0)$ lze najít takové okolí $O_\delta(x_0)$ bodu x_0, že platí $f(O_\delta(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(f(x_0))$. Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se nazývá *spojité*, jestliže je spojité ve všech bodech prostoru $\mathcal{X}$.

Poznámka 3.2. Je-li $\mathcal{Y}$ číselná přímka, potom spojité zobrazení $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$ se nazývá *spojitou funkcí* na $\mathcal{X}$.

Věta 3.3. *Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je spojité v bodě x, právě když pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$, která konverguje k bodu x, konverguje posloupnost $\{f(x_n)\}$ k bodu $y = f(x)$.*

Důkaz. Nutnost podmínky je zřejmá. Dokážeme dostatečnost této podmínky. Jestliže zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ není spojité v bodě x, potom existuje takové okolí $O_\varepsilon(y)$ bodu $y = f(x)$, že v libovolném okolí $O_\delta(x)$ se naleznou body, jejichž obrazy neleží v $O_\varepsilon(y)$. Položme $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ a vyberme v každé kouli $O_{\frac{1}{n}}(x)$ bod x_n tak, že $f(x_n) \notin O_\varepsilon(y)$. Potom posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x (symbolickým zápisem: $x_n \to x$), ale posloupnost $\{f(x_n)\}$ nekonverguje k $f(x)$, tj. podmínka věty není splněna, což jsme potřebovali dokázat. (Všimněme si, že jsme v důkazu užili axiom výběru.) $\square$

Věta 3.4. *Aby zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ bylo spojité, je nutné a stačí, aby vzor vzhledem k f každé uzavřené množiny z $\mathcal{Y}$ byla uzavřená množina v $\mathcal{X}$.*

Důkaz. Nutnost. Nechť $M \subseteq \mathcal{X}$ je vzor uzavřené množiny $N \subseteq \mathcal{Y}$. Dokážeme, že $\overline{M} = M$. V případě $M = \emptyset$ je tato rovnost zřejmá. Nechť tedy $M \neq \emptyset$. Jestliže $x \in \overline{M}$, potom existuje posloupnost $\{x_n\} \subset M$, která konverguje k x. Ale potom podle věty 3.3 $f(x_n) \to f(x)$. Protože $f(x_n) \in N$ a N je uzavřená množina, platí $f(x) \in N$, takže $x \in M$, což jsme potřebovali dokázat.
Dostatečnost. Nechť x je libovolný bod metrického prostoru $\mathcal{X}$, $y = f(x)$ a $O_\varepsilon(y)$ libovolné okolí bodu y. Množina $\mathcal{Y} - O_\varepsilon(y)$ je uzavřená (protože je komplementem otevřené množiny). Podle předpokladu je množina $F = f^{-1}(\mathcal{Y} - O_\varepsilon(y))$ uzavřená a kromě toho $x \notin F$. Tedy $X - F$ je otevřená množina a $x \in X - F$; odtud plyne, že v $X - F$ existuje nějaké okolí $O_\delta(x)$ bodu x. Ovšem $O_\delta(x) \subseteq X - F$, takže $f(O_\delta(x)) \subseteq O_\varepsilon(y)$, tj. zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je spojité, což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Poznámka 3.5. Obraz uzavřené množiny není při spojitém zobrazení nutně uzavřenou množinou, jak to ukazuje tento příklad: Zobrazme polouzavřený interval $\langle 0, 1)$ (chápaný jako podprostor metrického prostoru $\mathbb{R}^1$) na kružnici téže délky (chápanou jako podprostor metrického prostoru $\mathbb{R}^2$), tj. „sviňme“ tento interval do kružnice. Množina $\langle \frac{1}{2}, 1)$, která je uzavřená v $\langle 0, 1)$, přechází při tomto zobrazení v neuzavřenou množinu.

Protože pro každé zobrazení je vzor komplementu roven komplementu vzoru, platí také tato věta (duální k větě 3.4):

Věta 3.6. *Aby zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ bylo spojité, je nutné a stačí, aby vzor každé otevřené množiny z $\mathcal{Y}$ byla otevřená množina.*

Pro spojitá zobrazení platí následující věta, která je analogií dobře známé věty z analýzy o spojitosti složené funkce.

Věta 3.7. *Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ jsou metrické prostory a $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ spojitá zobrazení. Potom zobrazení $z = \varphi(f(x))$ metrického prostoru $\mathcal{X}$ do metrického prostoru $\mathcal{Z}$ je spojité.*

Důkaz probíhá zcela stejně jako v analýze v případě číselných funkcí.

Definice 3.8. Zobrazení f se nazývá *homeomorfismus*, je-li vzájemně jednoznačné a jak zobrazení f tak k němu inverzní zobrazení f^{-1} jsou spojitá.
Metrické prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ se nazývají *homeomorfní*, existuje-li mezi nimi homeomorfní zobrazení.

Snadno vidíme, že libovolné dva uzavřené intervaly (chápané jako podprostory metrického prostoru $\mathbb{R}^1$) jsou homeomorfní, že libovolný otevřený interval je homeomorfní s $\mathbb{R}^1$, atd.
Z věty 3.4 plyne:

Věta 3.9. *Aby vzájemně jednoznačné zobrazení bylo homeomorfní, je nutné a stačí, aby uzavřené (otevřené) množiny odpovídaly uzavřeným (otevřeným) množinám.*

Příklad 3.10. Uvažujme metrické prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n_0$ (viz příklady 1.4 a 1.6). Protože ϱ i ϱ_0 jsou definovány na téže množině všech n-tic reálných čísel, z jejich definic plyne

$$\varrho_0(x,y) \le \varrho(x,y) \le \sqrt{n}\varrho_0(x,y),$$

a tedy v libovolném ε-okolí bodu x metrického prostoru $\mathbb{R}^n$ je obsaženo nějaké δ-okolí téhož bodu uvažovaného jako prvek metrického prostoru $\mathbb{R}^n_0$ a naopak. Odtud plyne, že identické zobrazení, které přiřazuje prvku z $\mathbb{R}^n$, který má souřadnice $x_1, \dots, x_n$, prvek z $\mathbb{R}^n_0$, který má tytéž souřadnice, je homeomorfismus.

Důležitým speciálním případem homeomorfismu je izometrické zobrazení.

Definice 3.11. Říkáme, že vzájemně jednoznačné zobrazení $y = f(x)$ metrického prostoru $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ na metrický prostor $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$ je *izometrické*, jestliže

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho^*(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Samotné metrické prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, mezi kterými je možno stanovit izometrické zobrazení, se nazývají *izometrickými* mezi sebou.

Izometrie dvou prostorů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ značí, že metrické vztahy mezi jejich elementy jsou jedny a tytéž a rozdíl může být pouze v kvalitě jejich elementů, což je z metrického hlediska nepodstatné. V dalším proto budeme považovat izometrické prostory za totožné.

4. Úplné metrické prostory

Číselná osa je nejjednodušším příkladem tak zvaných úplných metrických prostorů, jejichž základní vlastnosti probereme v této kapitole.

Definice 4.1. Posloupnost $\{x_n\}$ bodů metrického prostoru $\mathcal{X}$ budeme nazývat *cauchyovskou* (nebo *fundamentální*), jestliže splňuje Cauchyovo kritérium, tj. jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové kladné celé číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\forall m, n \ge N(\varepsilon) \quad \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Skutečně, jestliže $\{x_n\}$ konverguje k x (tj. $\varrho(x_n, x) \to 0$), potom ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové celé kladné $N(\varepsilon)$, že $\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n > N(\varepsilon)$. Potom

$$\forall m, n \ge N(\varepsilon) \quad \varrho(x_m, x_n) \le \varrho(x_m, x) + \varrho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Naopak definujeme:

Definice 4.2. Jestliže v metrickém prostoru $\mathcal{X}$ libovolná cauchyovská posloupnost konverguje (tj. existuje $x \in \mathcal{X}$ tak, že $\varrho(x_n, x) \to 0$), potom nazýváme tento prostor *úplný*.

Příklad 4.3. a) V diskrétním metrickém prostoru uvedeném v příkladě 1.2 jsou cauchyovské pouze stacionární posloupnosti, tj. takové, v nichž se od určitého indexu stále opakuje tentýž bod. Každá taková posloupnost ovšem konverguje, tj. tento prostor je úplný.
b) Úplnost prostoru $\mathbb{R}^1$, tj. úplnost množiny všech reálných čísel, je známa z matematické analýzy.
c) Úplnost euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ plyne snadno z úplnosti prostoru $\mathbb{R}^1$: Nechť $\{x^{(p)}\}$ je cauchyovská posloupnost bodů

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}) \in \mathbb{R}^n, \quad p = 1, 2, \dots$$

To znamená, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N(\varepsilon)$, že

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2$$

pro všechna přirozená čísla $p, q > N(\varepsilon)$. Odtud dostáváme pro k-té souřadnice ($k = 1, 2, \dots, n$) tyto nerovnosti:

$$|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon,$$

platné pro všechna přirozená čísla $p, q > N(\varepsilon)$; je tedy $\{x_k^{(p)}\}$ cauchyovská posloupnost reálných čísel. Položme

$$x_k = \lim_{p \to \infty} x_k^{(p)}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Potom zřejmě je

$$\lim_{p \to \infty} x^{(p)} = x.$$

Tím je úplnost prostoru $\mathbb{R}^n$ dokázána.
d) Úplnost prostorů $\mathbb{R}_0^n$, $\mathbb{R}_1^n$ lze ukázat obdobně.
e) Také metrické prostory $C^0\langle a, b\rangle$, l_2 a M^∞ jsou úplné (cvičení).
f) Dokážeme, že prostor $C_2^0\langle a, b\rangle$ není úplný. Mějme např. posloupnost spojitých funkcí na intervalu $\langle -1, 1\rangle$:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \le t \le -\frac{1}{n}, \\ nt & \text{pro } -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{pro } \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Tato posloupnost je cauchyovská v prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$, protože

$$\int_{-1}^{1} [\varphi_n(t) - \varphi_m(t)]^2 \mathrm{d}t \le \frac{2}{\min(m, n)};$$

nekonverguje však k žádné funkci prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$. Skutečně, nechť f je nějaká funkce z prostoru $C_2^0\langle -1, 1\rangle$ a ψ funkce definovaná vztahem

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } t < 0, \\ 1 & \text{pro } t \ge 0. \end{cases}$$

Z integrálního tvaru Minkowského nerovnosti (platné zřejmě i pro funkce po částech spojité) plyne

$$\left\{\int_{-1}^{1} [f(t) - \psi(t)]^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{\int_{-1}^{1} [f(t) - \varphi_n(t)]^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_{-1}^{1} [\varphi_n(t) - \psi(t)]^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Vzhledem k spojitosti funkce f je integrál na levé straně této nerovnosti kladný. Dále zřejmě je

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[\varphi_n(t)-\psi(t)]^2\mathrm{d}t=0. \tag{4.1}$$

Proto integrál $\displaystyle\int_{-1}^{1}[f(t)-\varphi_n(t)]^2\mathrm{d}t$ nemůže konvergovat k nule pro $n\to\infty$.

Není-li metrický prostor $\mathcal{X}$ úplný, pak jej lze vždy vnořit do úplného prostoru $\mathcal{X}^*$. Přesněji, existuje (až na izometrii) jediný úplný prostor $\mathcal{X}^*$ takový, že $\mathcal{X}$ je podprostor prostoru $\mathcal{X}^*$ a $\mathcal{X}$ je hustý v $\mathcal{X}^*$.

5. Banachův princip pevného bodu (BPPB)

Řadu problémů souvisejících s existencí a jednoznačností řešení rovnic různého typu lze převést na otázku existence a jednoznačnosti pevného bodu nějakého zobrazení odpovídajícího metrického prostoru do tohoto prostoru. Mezi různými kritérii existence a jednoznačnosti pevného bodu zobrazení tohoto druhu můžeme za jedno z nejjednodušších a zároveň nejdůležitějších považovat tzv. *Banachův princip pevného bodu* (stručně BPPB); někdy též nazývaný *princip kontraktivních zobrazení.*

Definice 5.1. Nechť $\mathcal{X}=(X,\varrho)$ je metrický prostor. Zobrazení A prostoru $\mathcal{X}$ do prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *kontraktivní* (nebo *kontrakce*), existuje-li takové číslo $\alpha<1$, že pro libovolné dva body $x,y\in X$ platí nerovnost

$$\varrho(Ax,Ay)\le\alpha\varrho(x,y). \tag{5.1}$$

Poznámka 5.2. Místo $A(x),A(A(x)),\dots$ zde po řadě píšeme $Ax,A^2x,\dots$

Věta 5.3. *Každé kontraktivní zobrazení je spojité.*

Důkaz. Jestliže $x_n\to x$, potom podle (5.1) také $Ax_n\to Ax$. □

Definice 5.4. Bod x se nazývá *pevný bod zobrazení A*, jestliže $Ax=x$. Jinak řečeno, pevné body jsou řešení rovnice $Ax=x$.

Věta 5.5 (BPPB). *Každé kontraktivní zobrazení definované v neprázdném úplném metrickém prostoru $\mathcal{X}$ má právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Nechť $x_0\in\mathcal{X}$ je libovolný bod. Položme $x_1=Ax_0$, $x_2=Ax_1=A^2x_0$, atd.; obecně nechť $x_n=Ax_{n-1}=A^nx_0$.
Ukážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská: předpokládáme-li pro určitost, že $m\ge n$, dostaneme podle (5.1)

$$\varrho(x_n,x_m)=\varrho(A^nx_0,A^mx_0)\le\alpha^n\varrho(x_0,x_{m-n})\le$$
$$\le\alpha^n[\varrho(x_0,x_1)+\varrho(x_1,x_2)+\dots+\varrho(x_{m-n-1},x_{m-n})]\le$$
$$\le\alpha^n\varrho(x_0,x_1)(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{m-n-1})=\alpha^n\varrho(x_0,x_1)\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha}\le\alpha^n\varrho(x_0,x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Protože $\alpha<1$, je pro dostatečně velká přirozená čísla n tento výraz libovolně malý. Vzhledem k úplnosti prostoru $\mathcal{X}$ posloupnost $\{x_n\}$, která je cauchyovská, má v tomto prostoru limitu. Položme

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Potom vzhledem k větě 5.3 platí

$$Ax=A\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}Ax_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

Existence pevného bodu je tedy dokázána. Dokážeme ještě jeho *jednoznačnost*: jestliže

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

potom z nerovnosti (5.1) plyne nerovnost

$$\varrho(x, y) \leq \alpha\varrho(x, y),$$

odkud vzhledem k tomu, že $\alpha < 1$, plyne $\varrho(x, y) = 0$, tj. $x = y$. □

6. Aplikace BPPB

BPPB lze použít k důkazu vět o existenci a jednoznačnosti řešení pro rovnice různých typů. Kromě důkazu existence a jednoznačnosti řešení rovnice $Ax = x$ dává BPPB také praktickou metodu přibližného výpočtu tohoto řešení (nazývanou *metoda postupných aproximací*).

Příklad 6.1. Nechť funkce f, která je definována na intervalu $\langle a, b\rangle$, splňuje na tomto intervalu Lipschitzovu podmínku

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1|$$

s konstantou $K < 1$ a zobrazuje interval $\langle a, b\rangle$ do intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom f je kontraktivní zobrazení a podle věty 5.5 posloupnost

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

konverguje k jedinému kořenu rovnice $x = f(x)$.

Příklad 6.2. Nechť A je zobrazení prostoru všech n-tic reálných čísel do sebe definované soustavou lineárních rovnic

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Je-li A kontraktivní zobrazení, můžeme k řešení rovnice $x = Ax$ použít metodu postupných aproximací.

Za jakých podmínek bude zobrazení A kontraktivní? Odpověď na tuto otázku závisí na volbě metriky v prostoru. Uvedeme tři varianty:

a) V prostoru $\mathbb{R}^n_0$, kde

$$\varrho(x, y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|,$$

platí

$$\varrho(y', y'') = \max_{1\leq i\leq n} |y'_i - y''_i| = \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x'_j - x''_j)\right| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x'_j - x''_j| \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\leq j\leq n} |x'_j - x''_j| = \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \varrho(x', x'').$$

Odtud plyne tato (dostatečná) podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{6.1}$$

b) V prostoru $\mathbb{R}^n_1$, kde

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

platí

$$\varrho(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} |y_i' - y_i''| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'') \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j' - x_j''| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \varrho(x', x'').$$

Odtud plyne (dostatečná) podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1 \quad (j = 1, \dots, n). \tag{6.2}$$

c) V prostoru $\mathbb{R}^n$, kde

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

platí na základě Cauchy-Buňakovského nerovnosti

$$\varrho^2(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'') \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \varrho^2(x', x'').$$

Odtud plyne tato (dostatečná) podmínka kontraktivnosti:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leq \alpha < 1. \tag{6.3}$$

Z každé z podmínek (6.1) – (6.3) plyne, že

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

tedy existuje právě jeden takový bod $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, že

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i.$$

Přitom postupné aproximace konvergující (vzhledem k příslušné metrice na $\mathbb{R}^n$) k tomuto bodu, tj. k řešení dané soustavy lineárních rovnic, mají tvar

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}), \\ x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{(n)} &= (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}), \end{aligned}$$

kde

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

a za $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ lze vzít libovolný bod prostoru $\mathbb{R}^n$.
Pokud jde o podmínku (6.1), lze dokázat, že je také nutnou podmínkou pro kontraktivnost zobrazení $y = Ax$ z prostoru $\mathbb{R}_0^n$ do prostoru $\mathbb{R}_0^n$.

II. LINEÁRNÍ NORMOVANÉ PROSTORY

7. Definice a příklady lineárních normovaných prostorů

Pojem lineárního prostoru je jedním z nejdůležitějších pojmů matematiky. Bude mít velký význam nejen v této části, ale i v celém dalším výkladu. V celém textu budeme číselným tělesem rozumět (komutativní) těleso reálných nebo komplexních čísel.

Definice 7.1. Nechť $\mathcal{L}$ je neprázdná množina prvků $x, y, z, \ldots$ a nechť je splněno těchto osm podmínek:

I. $\mathcal{L}$ je komutativní grupa, tj. ke každým dvěma prvkům $x, y \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek ležící v $\mathcal{L}$, který je nazývaný jejich *součet* a označovaný $x + y$, přičemž platí tyto čtyři axiomy:
   1. $x + y = y + x \quad$ (*komutativita*),
   2. $x + (y + z) = (x + y) + z \quad$ (*asociativita*),
   3. v $\mathcal{L}$ existuje takový prvek (značíme jej θ), že $x + \theta = x$ pro všechny prvky $x \in \mathcal{L}$ (*existence nulového prvku*),
   4. Ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ existuje prvek, který značíme $-x$, takový, že $x + (-x) = \theta$ (*existence opačného prvku*).

II. Ke každému číslu α nějakého číselného tělesa T a ke každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen prvek $\alpha x \in \mathcal{L}$ (tzv. *součin prvku x a čísla α*), přičemž platí tyto dva axiomy:
   1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \alpha, \beta \in T, x \in \mathcal{L}$,
   2. $1 \cdot x = x, \quad 1 \in T, x \in \mathcal{L}$.

III. Obě operace (tj. *sčítání prvků* a *násobení prvku číslem*) jsou svázány těmito dvěma *distribučními zákony*:
   1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \alpha, \beta \in T, x \in \mathcal{L}$,
   2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \alpha \in T, x, y \in \mathcal{L}$.

   Množinu $\mathcal{L}$ potom nazýváme *lineárním* nebo *vektorovým prostorem* nad číselným tělesem T. Podle toho, zda čísly $\alpha, \beta, \ldots$ rozumíme komplexní čísla, resp. reálná čísla, mluvíme krátce o *komplexním*, resp. *reálném lineárním prostoru.* Prvky lineárního prostoru $\mathcal{L}$ často nazýváme *body* nebo *vektory*, kdežto čísla $\alpha, \beta, \ldots$ nazýváme *skaláry.* Všude, kde nebude uvedeno něco jiného, budou naše úvahy platit pro reálné lineární prostory.

Definice 7.2. Lineární prostor $\mathcal{L}$ se nazývá *normovaný*, jestliže každému prvku $x \in \mathcal{L}$ je přiřazeno reálné nezáporné číslo $\|x\|$, které se nazývá *norma* prvku x, přičemž pro každé $x, y \in \mathcal{L}$ a $\alpha \in T$ platí:
1. $\|x\| = 0$, když a jen když $x = \theta$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad$ (*homogenita*);
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Protože se zabýváme pouze lineárními prostory, budeme lineární normované prostory stručně nazývat *normovanými prostory.*

Snadno je vidět, že každý lineární normovaný prostor i každá jeho podmnožina je současně metrickým prostorem; stačí položit $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Platnost axiomů metrického prostoru bezprostředně vyplývá z první a třetí vlastnosti normy.

Definice 7.3. *Úplný* lineární normovaný prostor se nazývá *Banachovým prostorem.*

Uvedeme některé příklady lineárních normovaných prostorů a ponecháváme na čtenáři, aby si v každém z nich ověřil platnost axiomů lineárního prostoru.

Příklad 7.4. Číselné těleso T je normovaný prostor (nad T) s normou danou absolutní hodnotou. Např. reálná osa $\mathbb{R}^1$, tj. množina všech reálných čísel s obvyklými aritmetickými operacemi sčítání a násobení, je lineárním prostorem. Prostor $\mathbb{R}^1$ se stane normovaným prostorem jestliže pro každé číslo $x \in \mathbb{R}^1$ položíme $\|x\| := |x|$.

Příklad 7.5. Množina všech uspořádaných n-tic reálných, popř. komplexních čísel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde sčítání n-tic a násobení n-tic konstantou je definováno vztahy

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

je lineárním prostorem, který budeme nazývat *n-rozměrným prostorem.* Jde-li o n-tice reálných čísel a jsou-li multiplikativní konstanty také reálná čísla, budeme mluvit o *reálném n-rozměrném prostoru* a používat označení $\mathbb{R}^n$. (Připomeňme, že jsme v oddíle o metrických prostorech označili symbolem $\mathbb{R}^n$ *metrický* prostor všech n-tic reálných čísel s některou z ekvivalentních metrik a zde stejným způsobem označujeme lineární prostor všech n-tic, kde je definován součet dvou n-tic a součin n-tice a reálného čísla. Jde sice o určitou nedůslednost, ale nemá smysl rozlišovat označení jenom proto, že si jednou všímáme „metrických“ vlastností a jindy „algebraických“ vlastností téže množiny. Totéž platí o prostorech $C^0\langle a, b\rangle$, l_2, M^∞ atd.). Jde-li však o n-tice komplexních čísel a jsou-li skaláry také komplexní čísla, budeme mluvit o *komplexním n-rozměrném prostoru* a používat označení C^n. Reálný n-rozměrný prostor je tedy reálným lineárním prostorem a komplexní n-rozměrný prostor komplexním lineárním prostorem.

Normu v reálném n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ s prvky $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definujeme předpisem

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}. \tag{7.1}$$

Vztah

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

definuje v prostoru $\mathbb{R}^n$ tutéž metriku, kterou jsme zavedli v příkladu 1.4.

V lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$ lze definovat normu také předpisem

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{7.2}$$

nebo

$$\|x\|_0 = \max_{1 \le k \le n} |x_k|. \tag{7.3}$$

Norma (7.2), resp. (7.3) definuje v prostoru $\mathbb{R}^n$ metriku, kterou jsme zavedli v příkladu 1.5, resp. 1.6.

V komplexním n-rozměrném prostoru C^n lze zavést normu vztahem

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

nebo kteroukoliv z norem (7.2), (7.3).

V n-rozměrném lineárním prostoru (jak $\mathbb{R}^n$, tak $\mathbb{C}^n$) je možné také definovat normu vektoru x vztahem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \ge 1).$$

Příklad 7.6. Množina všech spojitých reálných funkcí reálné proměnné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (popř. spojitých komplexních funkcí reálné proměnné) s běžnými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce číslem je reálný (popř. komplexní) lineární prostor, který je jedním z nejdůležitějších v matematické analýze. Značíme jej $C^0\langle a, b\rangle$ nebo zkráceně $C\langle a, b\rangle$.
V prostoru $C^0\langle a, b\rangle$ definujeme normu vztahem

$$\|f\| = \max_{a\le t\le b} |f(t)|. \tag{7.4}$$

Odpovídající metriku jsme uvažovali v příkladu 1.7.

Příklad 7.7. Nechť $C_2^0\langle a, b\rangle$ opět sestává ze všech spojitých funkcí, ale norma je definována vztahem

$$\|f\| = \left(\int_a^b [f(t)]^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.5}$$

Všechny axiomy normy jsou zde splněny; odpovídající metriku jsme uvažovali v příkladu 1.9.

Příklad 7.8. Prostor l_2 všech posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, které splňují podmínku

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty, \tag{7.6}$$

se stane lineárním normovaným prostorem, definujeme-li, že součet dvou prvků

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad \text{a} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$$

z l_2 je roven

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots)$$

a že součin čísla α a prvku $x \in l_2$ je dán vztahem

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

Skutečnost, že součet dvou posloupností splňujících podmínku (7.6) také vyhovuje této podmínce, plyne z elementární nerovnosti

$$|a_k + b_k|^2 \le 2|a_k|^2 + 2|b_k|^2.$$

Normu v l_2 definujeme vztahem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}. \tag{7.7}$$

Příklad 7.9. Prostor c sestává ze všech konvergentních posloupností. Prostor c_0 sestává z posloupností $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ reálných čísel, které splňují podmínku

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Sčítání prvků a násobení prvku skalárem se definují v prostorech c a c_0 stejně jako v příkladu 7.8 a norma je dána vztahem

$$\|x\| = \max_{1\le n\le\infty} |x_n|. \tag{7.8}$$

Příklad 7.10. Množina M^{∞} všech ohraničených posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ reálných (popř. komplexních) čísel s týmiž operacemi jako v příkladu 7.8 je lineární prostor. Normu v něm můžeme zavést vztahem

$$\|x\| = \sup_{1\le n\le\infty} |x_n|. \tag{7.9}$$

Axiomy lineárního prostoru se v každém z uvedených prostorů prověřují bez obtíží. Skutečnost, že v příkladech 7.4 – 7.8 jsou splněny axiomy normy, se dokazuje zcela stejně jako platnost axiomů metrického prostoru.
Všechny zde uvedené prostory s výjimkou prostoru $C_2^0\langle a,b\rangle$ jsou Banachovými prostory.

Definice 7.11 (Lineární nezávislost). Množina vektorů $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se nazývá *lineárně závislá*, jestliže existují takové konstanty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, a platí

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta. \tag{7.10}$$

V opačném případě se tato množina nazývá *lineárně nezávislá.* Jinak řečeno, množina se nazývá lineárně nezávislá, jestliže z rovnosti (7.10) plyne, že

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Nekonečná podmnožina prostoru $\mathcal{L}$ se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže každá její konečná množina je lineárně nezávislá.

Výraz $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ nazýváme lineární kombinací prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Jestliže v prostoru $\mathcal{L}$ lze najít n lineárně nezávislých prvků, ale libovolné $n+1$ prvky jsou již lineárně závislé, říkáme, že prostor $\mathcal{L}$ má *dimenzi* (*rozměr*) n. Jestliže v prostoru $\mathcal{L}$ lze nalézt nekonečný systém lineárně nezávislých prvků, říkáme, že *prostor $\mathcal{L}$ má nekonečnou dimenzi. (Lineární) bází v n-rozměrném prostoru $\mathcal{L}$* nazýváme libovolný systém n lineárně nezávislých prvků. Prostory $\mathbb{R}^n$ v reálném případě a $\mathbb{C}^n$ v komplexním případě mají, jak lze snadno ověřit, dimenzi n.
Ponecháváme čtenáři, aby si ověřil, že každý z prostorů uvedených v příkladech 7.6 až 7.10 má nekonečnou dimenzi.

Definice 7.12 (Podprostory lineárního prostoru). Neprázdná podmnožina $\mathcal{L}^*$ lineárního prostoru $\mathcal{L}$ se nazývá *podprostor* prostoru $\mathcal{L}$, jestliže sama tvoří lineární prostor vzhledem k operacím sčítání prvků a násobení prvku skalárem, které jsou definovány v prostoru $\mathcal{L}$. Jinak řečeno, $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ je podprostor, jestliže

$$x, y \in \mathcal{L}^* \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \mathcal{L}^*$$

pro libovolná čísla α, β.

V každém lineárním prostoru $\mathcal{L}$ existuje podprostor, který se skládá pouze z nulového prvku θ a nazývá se *nulový podprostor.* Také celý prostor $\mathcal{L}$ lze považovat za podprostor prostoru $\mathcal{L}$. Podprostor různý od prostoru $\mathcal{L}$ a obsahující aspoň jeden nenulový prvek se nazývá *vlastní podprostor.*

Příklad 7.13. a) Nechť $\mathcal{L}$ je libovolný lineární prostor a x jeho nenulový prvek. Množina prvků $\{\lambda x\}$, kde λ probíhá všechna čísla (reálná, popř. komplexní), tvoří podprostor o dimenzi 1. Tento podprostor je vlastní, jestliže dimenze prostoru $\mathcal{L}$ je větší než 1.
b) Mějme prostor $C^0\langle a,b\rangle$ a v něm množinu $P\langle a,b\rangle$ všech polynomů jedné neurčité. Zřejmě $P\langle a,b\rangle$ tvoří vlastní podprostor prostoru $C^0P\langle a,b\rangle$, a to nekonečné dimenze. Množina $P_k\langle a,b\rangle$ všech polynomů stupně menšího než k tvoří k-dimenzionální podprostor prostoru $C^0P\langle a,b\rangle$.
c) Uvažujme prostory l_2, c_0, c a M^∞. Každý z těchto prostorů uvažovaný pouze jako lineární prostor je vlastním podprostorem prostoru následujícího.

Definice 7.14. *Průnik libovolného systému $\{\mathcal{L}_\gamma\}$ podprostorů lineárního prostoru $\mathcal{L}$ je zřejmě opět podprostor.* (Opravdu, jestliže $\mathcal{L}^* = \bigcap\limits_\gamma \mathcal{L}_\gamma$ a $x, y \in \mathcal{L}^*$, potom také $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}^*$ pro všechna čísla α, β.) Nechť $\{x_\alpha\}$ je libovolná neprázdná množina prvků lineárního prostoru $\mathcal{L}$. Průnik všech podprostorů obsahujících množinu $\{x_\alpha\}$ nazveme *podprostorem* *vytvořeným (generovaným) množinou* $\{x_\alpha\}$ nebo *lineárním obalem množiny* $\{x_\alpha\}$. Tento podprostor budeme označovat $L\{x_\alpha\}$. Je to nejmenší podprostor obsahující množinu $\{x_\alpha\}$.

Definice 7.15. Jsou-li $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^*$ lineární prostory nad tímtéž tělesem T, pak zobrazení $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^*$ se nazývá lineární, jestliže pro libovolné prvky $x, y \in \mathcal{L}$ a libovolné $\alpha \in T$ platí

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Je-li f navíc bijekce, pak se nazývá izomorfismus. Prostory $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^*$ se nazývají izomorfní, jestliže mezi nimi existuje izomorfismus.

Je snadné ukázat, že izomorfismus vektorových prostorů je izomorfismus (příslušných) grup. Izomorfní vektorové prostory se tedy liší jen označením svých prvků (a operací sčítání vektorů a jejich násobení skalárem), proto je považujeme za totožné.

8. Normované prostory konečné dimenze

Tvrzení 8.1. *Každý lineární prostor $X(n)$ konečné dimenze n je izomorfní s euklidovským prostorem $\mathbb{R}^n$, a proto můžeme považovat prvky uvažovaného prostoru $X(n)$ za n-tice reálných čísel.*

Důkaz. Nechť $e_1, e_2, \dots, e_n$ je nějaká báze prostoru $X(n)$. Jak známo, každý prvek $x \in X(n)$ může být jednoznačně vyjádřen ve tvaru

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Přiřadíme-li prvku x vektor $\overline{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, stanovíme tím vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi $X(n)$ a $\mathbb{R}^n$, která je lineárním izomorfizmem, protože platí

$$x \leftrightarrow \overline{x}, y \leftrightarrow \overline{y} \quad \Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \leftrightarrow \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}.$$

□

Položme

$$e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad \text{(jednička na } k\text{-tém místě).}$$

S užitím tohoto označení můžeme zapsat vektor

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \tag{8.1}$$

takže

$$\|x\| \le \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \cdot \|e_k\| = \sum_{k=1}^{n} a_k |\xi_k|, \tag{8.2}$$

kde $a_k = \|e_k\|$ nezávisí na x.

Věta 8.2 (Riesz). *Nechť $X(n)$ je normovaný prostor konečné dimenze n. Aby posloupnost $\{x_\nu\} \subset X(n)$, kde*

$$x_\nu = (\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \dots, \xi_n^{(\nu)}),$$

konvergovala k prvku $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}) \in X(n)$, je nutné a stačí, aby

$$\xi_k^{(\nu)} \to \xi_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{8.3}$$

Důkaz. Dostatečnost. Ze (8.2) a (8.3) plyne

$$\|x_\nu - x_0\| \le \sum_{k=1}^{n} a_k |\xi_k^{(\nu)} - \xi_k^{(0)}| \to 0.$$

Nutnost. Nejprve dokážeme jedno lemma.

Lemma 8.3. *Je-li posloupnost $\{x_\nu\}$ ohraničená, potom je ohraničená i každá posloupnost $\{\xi_k^{(\nu)}\}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.*

Důkaz. Zavedeme označení

$$\sigma_\nu := \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(\nu)}| \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

a dokážeme, že posloupnost $\{\sigma_\nu\}$ je ohraničená. V opačném případě by bylo možno z ní vybrat podposloupnost konvergující k nekonečnu. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\sigma_\nu \to +\infty$. Položme

$$y_\nu = \frac{x_\nu}{\sigma_\nu}; \quad y_\nu = (\eta_1^{(\nu)}, \eta_2^{(\nu)}, \dots, \eta_n^{(\nu)})$$

$$\left(\eta_k^{(\nu)} = \frac{\xi_k^{(\nu)}}{\sigma_\nu}; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \nu = 1, 2, \dots\right).$$

Je zřejmé, že každá z posloupností $\{\eta_k^{(\nu)}\}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ je ohraničená $(|\eta_k^{(\nu)}| \le 1)$, takže přejdeme-li (pokud je to nutné) k podposloupnostem, dostaneme z Bolzano-Weierstrassovy věty, že existují limity

$$\lim_{\nu\to\infty} \eta_k^{(\nu)} = \eta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Na základě již dokázané dostatečnosti odtud plyne, že $y_\nu \to y$, kde $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Ale na druhé straně

$$\|y_\nu\| = \frac{x_\nu}{\sigma_\nu} \to 0,$$

tj. $y_\nu \to \mathbf{0}$ a $y = \mathbf{0}$. Jinými slovy, $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n = 0$. To je ale nemožné, protože

$$\sum_{k=1}^{n} |\eta_k^{(\nu)}| = 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Tím je lemma dokázáno. □

Nyní již snadno dokážeme nutnost podmínky (8.3). Zřejmě stačí uvažovat případ, kdy $x_0 = \mathbf{0}$, tj. kdy $x_\nu \to \mathbf{0}$. Posloupnost $\left\{\frac{x_\nu}{\|x_\nu\|}\right\}$ je ohraničená, takže podle lemmatu jsou ohraničeny posloupnosti $\left\{\frac{\xi_k^{(\nu)}}{\|x_\nu\|}\right\}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, což je možné pouze v případě, když $\lim_{\nu\to\infty} \xi_k^{(\nu)} = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. □

Důsledek 8.4. *Každý normovaný prostor konečné dimenze je úplný.*

Důkaz. Nechť $\{x_\nu\} \subset X(n)$ je cauchyovská posloupnost. Dokážeme, že je ohraničená: Zvolme $\varepsilon = 1$. Potom existuje $N = N(1)$ tak, že $\|x_\nu - x_\mu\| < 1$ pro $\mu, \nu > N$. Platí

$$\|x_k\| \le K, \quad k = 1, \dots, N \quad (K = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_{N+1}\|\}),$$

$$\|x_j\| = \|x_j + x_{N+1} - x_{N+1}\| \le \|x_{N+1}\| + \|x_j - x_{N+1}\| \le K + 1 \quad (j = N+1, N+2, \dots),$$

čímž je ohraničenost $\{x_\nu\}$ dokázána.

Nechť $x_\nu = (\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \dots, \xi_n^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \dots)$. Potom podle předchozího lemmatu je pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ číselná posloupnost $\{\xi_j^{(\nu)}\}$ ohraničená. Proto podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje posloupnost přirozených čísel $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k < \cdots$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \xi_j^{(\nu_k)} = \xi_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Podle (8.3) platí $x_{\nu_k} \to x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$, tedy

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{\nu_k} - x_0\| = 0, \tag{8.4}$$

kde $x_0 \in X(n)$. Protože posloupnost $\{x_\nu\}$ je cauchyovská, platí podle (8.4)

$$\|x_\nu - x_0\| \leq \|x_\nu - x_{\nu_k}\| + \|x_{\nu_k} - x_0\| \to 0,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

III. HILBERTOVY PROSTORY

9. Unitární prostory a jejich základní vlastnosti

Definice 9.1. *Skalárním součinem v reálném lineárním prostoru R* nazýváme zobrazení $(-,-) : R \times R \to \mathbb{R}$, tedy reálnou funkci (x, y) definovanou pro každou dvojici prvků $x, y \in R$, která splňuje tyto čtyři podmínky ($x, x_1, x_2, y \in R$, λ je reálné číslo):

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$, když a jen když $x = \theta$.

Definice 9.2. Lineární prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá *unitární prostor*. V unitárním prostoru R se norma zavádí vztahem

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{9.1}$$

Ukážeme, že z podmínek 1 – 4 skalárního součinu plyne, že všechny požadavky kladené na normu jsou přitom splněny.
Skutečně, splnění podmínek 1 a 2 z definice 7.2 je zřejmé; platnost trojúhelníkové nerovnosti vyplyne z Cauchy-Buňakovského nerovnosti

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{9.2}$$

kterou nejprve dokážeme.
Nechť λ je libovolné reálné číslo a uvažujme $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$, pak platí:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \|x\|^2\lambda^2 + 2(x, y)\lambda + \|y\|^2 \tag{9.3}$$

a navíc vzhledem k vlastnosti 4 skalárního součinu platí $\varphi(\lambda) \geq 0$. Aby vzniklá kvadratická nerovnost byla splněna pro všechna λ (a pro pevnou dvojici x, y, jinak libovolnou), musí mít $\varphi(\lambda)$ buď jeden dvojnásobný reálný kořen, nebo dvojici komplexně sdružených kořenů, tj. diskriminant tohoto kvadratického trojčlenu musí být nekladný:

$$4(x, y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0.$$

To je však jinak napsaná nerovnost (9.2). (Jiný důkaz (9.2) viz věta 32.5.)
Vraťme se k důkazu trojúhelníkové nerovnosti pro normu (9.1). Vzhledem k (9.2) dostaneme

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

což po odmocnění dá dokazovanou nerovnost.

Máme-li v prostoru R zaveden skalární součin, můžeme v tomto prostoru zavést nejen normu (tj. velikost) vektoru, ale také úhel vektorů; kosinus úhlu φ dvou nenulových vektorů x a y se totiž definuje vztahem

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{9.4}$$

Z Cauchy-Buňakovského nerovnosti (9.2) plyne, že absolutní hodnota výrazu na pravé straně nerovnosti (9.4) není větší než 1, a tedy vztah (9.4) skutečně definuje pro libovolné vektory x a y nějaký úhel φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$.
Jestliže $(x, y) = 0$, potom z (9.4) dostaneme, že $\varphi = \frac{\pi}{2}$; takové vektory x a y se nazývají *ortogonální*.
Množina $\{x_\alpha\}$ nenulových vektorů $x_a \in R$ se nazývá *ortogonální* soustava, jestliže

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \quad \text{pro} \quad \alpha \neq \beta.$$

Soustava nenulových vektorů $x_\alpha \in R$ se nazývá *ortonormální*, jestliže

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{pro } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Je zřejmé, že je-li $\{x_\alpha\}$ ortogonální soustava, potom $\{x_\alpha/\|x_\alpha\|\}$ je ortonormální soustava.

Věta 9.3. *Je-li $\{x_\alpha\}$ ortogonální soustava, jsou vektory x_α lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \cdots + a_n x_{\alpha_n} = \theta.$$

Protože $\{x_\alpha\}$ je ortogonální soustava, platí

$$0 = (x_{\alpha_i}, \theta) = (x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \cdots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i});$$

avšak $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$, takže $a_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Definice 9.4. Množina $\{x_\alpha\} \subseteq R$ se nazývá úplný systém vektorů, jestliže uzávěr podprostoru generovaného množinou $\{x_\alpha\}$ je celý prostor R. Je-li $\{x_\alpha\}$ navíc ortogonální (ortonormální) soustavou, nazýváme ji *ortogonální (ortonormální) báze.*

Poznámka 9.5. Pokud má prostor R konečnou dimenzi, pak je každá jeho ortogonální báze (lineární) bází. Ovšem toto neplatí pro prostory nekonečné dimenze, neboť báze vygeneruje pouze hustou podmnožinu v prostoru R, což nemusí být celý prostor R (viz příklad 9.7).

Příklad 9.6. Konečně rozměrný prostor $\mathbb{R}^n$, jehož prvky jsou všechny n-tice reálných čísel

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

s obvyklými operacemi sčítání n-tic a násobení konstantou a se skalárním součinem

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{9.5}$$

je dobře známým příkladem unitárního prostoru. (Takto zavedený skalární součin definuje v prostoru $\mathbb{R}^n$ normu

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

a tedy i euklidovskou metriku.). Ortonormální bázi tohoto prostoru (jednu z nekonečně mnoha možných) tvoří vektory

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Příklad 9.7. Prostor l_2 s prvky

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty,$$

a se skalárním součinem

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{9.6}$$

je unitární prostor. Skutečně, konvergence řady na pravé straně vztahu (9.6) plyne z nerovnosti (1.1). Podmínky 1 – 4 skalárního součinu lze ověřit přímo. Nejjednodušší ortonormální bázi v prostoru l_2 tvoří vektory

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \dots), \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{9.7}$$

Ortogonálnost a normovanost této soustavy jsou zřejmé; zároveň soustava (9.7) je úplná: Nechť $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ je libovolný vektor prostoru l_2 a $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Potom $x^{(n)}$ je lineární kombinace vektorů $e_1, \dots, e_n$ a

$$\|x^{(n)} - x\| \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Tedy každý prvek v l_2 leží v uzávěru vygenerovaného prostoru a z příkladu 4.3e) víme, že prostor l_2 je úplný. Ovšem soustava vektorů e_n netvoří bázi prostoru l_2, neboť prostor generovaný touto soustavou obsahuje pouze posloupnosti, které mají pouze konečný počet nenulových členů (jedná se o prostor polynomů $\mathbb{R}[X]$).

Příklad 9.8. Prostor $C_2^0\langle a, b\rangle$ všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$ se skalárním součinem definovaným vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t, \tag{9.8}$$

je také unitární prostor, ale neúplný (jeho neúplnost je dokázána v příkladu 4.3f). Mezi různými ortogonálními bázemi, které lze v něm uvést, je nejdůležitější soustava trigonometrických funkcí

$$1, \quad \cos\frac{2\pi nt}{b-a}, \quad \sin\frac{2\pi nt}{b-a}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{9.9}$$

Má-li interval $\langle a, b\rangle$ délku 2π, např. je-li $a = -\pi$, $b = \pi$, potom příslušná trigonometrická soustava je

$$1, \quad \cos nt, \quad \sin nt, \quad n = 1, 2, \dots$$

10. Existence ortogonálních bází, ortogonalizace

Ve zbývajících kapitolách se omezíme na vyšetřování separabilních unitárních prostorů (tj. takových, které obsahují spočetnou hustou množinu). Každý z prostorů uvedených v předchozí kapitole je separabilní.

Věta 10.1. *Nechť R je separabilní unitární prostor. V takovém prostoru je každý ortogonální systém nejvýše spočetný.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že uvažovaný systém $\{\varphi_\alpha\}$ je nejen ortogonální, ale také ortonormální (jinak bychom jej nahradili systémem $\{\varphi_\alpha/\|\varphi_\alpha\|\}$. Potom

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{(\varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta)} = \sqrt{(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) - 2(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) + (\varphi_\beta, \varphi_\beta)} = \sqrt{2} \quad (\alpha \neq \beta).$$

Mějme množinu koulí $B(\varphi_\alpha, \frac{1}{2})$. Tyto koule jsou disjunktní. Je-li A spočetná množina hustá v prostoru R, potom $\varphi_\alpha \in \overline{A}$ pro každé α, tedy v každé takové kouli je alespoň jeden prvek množiny A. Proto těchto koulí (a tedy také prvků φ_a) je nejvýše spočetně mnoho. □

Věta 10.2 (Schmidtova věta o ortogonalizaci). *Nechť*

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \tag{10.1}$$

je lineárně nezávislý systém prvků v unitárním prostoru R. Potom v prostoru R existuje systém prvků

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots, \tag{10.2}$$

který splňuje tyto podmínky:

1. *Systém (10.2) je ortonormální.*
2. *Každý prvek φ_n je lineární kombinací prvků $f_1, f_2, \dots, f_n$,*
$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \dots + a_{nn} f_n, \tag{10.3}$$
přičemž $a_{nn} \neq 0$.
3. *Každý prvek f_n lze vyjádřit ve tvaru*
$$f_n = b_{n1} \varphi_1 + \dots + b_{nn} \varphi_n, \tag{10.4}$$
přičemž $b_{nn} \neq 0$.

Každý prvek systému (10.2) je určen podmínkami 1 – 3 až na znaménko jednoznačně.

Důkaz. Prvek φ_1 budeme hledat ve tvaru

$$\varphi_1 = a_{11} f_1;$$

přitom koeficient a_{11} se určí z podmínky

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1,$$

odkud

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

Je zřejmé, že prvek φ_1 je tím určen až na znaménko jednoznačně.
Nechť prvky φ_k $(k < n)$, které splňují podmínky 1 – 3, jsou již sestrojeny. Dokážeme nejprve, že potom lze prvek f_n vyjádřit ve tvaru

$$f_n = b_{n1} \varphi_1 + \dots + b_{n,n-1} \varphi_{n-1} + h_n, \tag{10.5}$$

kde

$$(h_n, \varphi_k) = 0 \quad (k < n). \tag{10.6}$$

Skutečně, podle (10.5) platí

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1} \varphi_1 - \ldots - b_{n,n-1} \varphi_{n-1}, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) - b_{nk} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Položíme-li

$$b_{nk} = (f_n, \varphi_k), \tag{10.7}$$

potom z posledního vztahu plyne, že pro prvek

$$h_n := f_n - b_{n1} \varphi_1 - \ldots - b_{n,n-1} \varphi_{n-1} \tag{10.8}$$

platí vztahy (10.6), přičemž pro f_n platí vyjádření (10.5) a toto vyjádření je jednoznačné. Je zřejmé, že $(h_n, h_n) > 0$ (v případě $(h_n, h_n) = 0$ by podle vlastnosti 4 z definice 9.1 bylo $h_n = \theta$, takže vztah (10.8) by byl (vzhledem k indukčnímu předpokladu) ve sporu s lineární nezávislostí systému (10.1)). Položme

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}. \tag{10.9}$$

Potom z (10.8) plyne vztah (10.3), kde

$$a_{nk} = -\frac{b_{nk}}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \quad (k < n), \quad a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0, \tag{10.10}$$

kde b_{nk} $(k < n)$ jsou dány vztahy (10.7). Tedy podmínka 2 je splněna. Dále podle (10.6) a (10.9)

$$(\varphi_n, \varphi_k) = 0 \quad (k < n), \quad (\varphi_n, \varphi_n) = 1, \tag{10.11}$$

takže podmínka 1 je splněna. Konečně podle (10.5) a (10.9) platí (10.4), kde

$$b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0, \tag{10.12}$$

takže také podmínka 3 je splněna. □

Přechod od systému (10.1) k systému (10.2), který splňuje podmínky 1 – 3, se nazývá *ortonormalizace.*
Je zřejmé, že podprostory vytvořené systémy (10.1) a (10.2) jsou totožné, takže je-li jeden z těchto systémů úplný v prostoru R, je úplný v prostoru R i druhý.

Důsledek 10.3. *V separabilním unitárním prostoru R existuje ortonormální báze.*

Důkaz. Nechť $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots\}$ je spočetná množina hustá v prostoru R. Vyberme z ní úplný systém $\{f_n\}$ lineárně nezávislých prvků: z posloupnosti $\{\psi_n\}$ vyloučíme všechny takové prvky ψ_k, z nichž každý lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků ψ_i při $i < k$. Jestliže na takto vzniklý úplný systém lineárně nezávislých prvků použijeme ortonormalizační proces, dostaneme ortonormální bázi. □

11. Besselova nerovnost. Uzavřené ortogonální systémy

Je-li $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormální báze n-rozměrného unitárního prostoru $\mathbb{R}^n$, potom každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \tag{11.1}$$

kde

$$c_k = (x, e_k). \tag{11.2}$$

Vysvětlíme, jak lze zobecnit rozklad (11.1) na případ unitárního prostoru, který má nekonečnou dimenzi. Nechť

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \tag{11.3}$$

je ortonormální systém v unitárním prostoru R a f je libovolný prvek prostoru R. Přiřadíme prvku $f \in R$ posloupnost čísel

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{11.4}$$

kter8 budeme nazývat *souřadnicemi* nebo *Fourierovými koeficienty prvku f vzhledem k systému* $\{\varphi_k\}$, a nekonečnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \tag{11.5}$$

kterou nazveme *Fourierovou řadou prvku f vzhledem k systému* $\{\varphi_k\}$.
Vzniká ovšem otázka, zdali řada (11.5) konverguje, tj. zdali konverguje posloupnost jejích částečných součtů (ve smyslu metriky prostoru R) k nějaké limitě, a jestliže konverguje, zdali se její součet rovná prvku f.

Dá se ukázat, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ konverguje a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2. \tag{11.6}$$

Uvedenou nerovnost nazýváme *Besselovou nerovností.*

Definice 11.1. Ortonormální systém (11.3) se nazývá *uzavřený*, jestliže mezi každým vektorem $f \in R$ a jeho Fourierovými koeficienty c_k platí tzv. *Parsevalova rovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \tag{11.7}$$

Slovo „uzavřený“ má zde jiný význam než pojem zavedený v kapitolách 2 a 3 v souvislosti s uzavřenými množinami (tj. množina M se nazývá uzavřená, když $\overline{M} = M$). Který z významů slova „uzavřený“ bude přicházet v úvahu, bude vždy zřejmé ze souvislosti.
Uzavřenost systému (11.3) je ekvivalentní s tím, že pro každý vektor $f \in R$ konverguje posloupnost částečných součtů Fourierovy řady $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ k prvku f.
Pojem uzavřenosti ortonormálního systému úzce souvisí s dříve zavedeným pojmem úplnosti systému:

Věta 11.2. *V separabilním unitárním prostoru R je každý úplný ortonormální systém uzavřený a naopak.*

Důkaz. Nechť systém $\{\varphi_n\}$ je uzavřený; potom posloupnost částečných součtů Fourierovy řady prvku $f \in R$ konverguje k prvku f. To znamená, že lineární kombinace prvků systému $\{\varphi_n\}$ tvoří množinu hustou v prostoru R, tj. systém $\{\varphi_n\}$ je úplný.
Obráceně, nechť systém $\{\varphi_n\}$ je úplný, tj. libovolný prvek $f \in R$ lze s libovolnou přesností aproximovat lineární kombinací

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

prvků systému $\{\varphi_n\}$. Lze ukázat, že částečný součet

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

Fourierovy řady příslušné prvku f dává neméně přesnou aproximaci. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

tedy konverguje k prvku f a Parsevalova rovnost platí. □

V předchozí kapitole jsme dokázali existenci úplných ortonormálních systémů v separabilním unitárním prostoru. Protože pro ortonormální systémy pojmy uzavřenosti a úplnosti splývají, není třeba dokazovat existenci uzavřených ortonormálních systémů v prostoru R a příklady úplných ortonormálních systémů, které jsme uvedli v kapitole 9, jsou zároveň příklady uzavřených systémů.
Doposud jsme předpokládali, že uvažované ortogonální systémy jsou ortonormální. Lze nově zavést pojmy Fourierových koeficientů, Fourierovy řady atd. i pro libovolné ortogonální systémy. Nechť $\{\varphi_n\}$ je libovolný ortogonální systém. Vzhledem k němu lze sestrojit normovaný systém, vytvořený z prvků $\psi_n = \varphi_n / \|\varphi_n\|$. Pro libovolný prvek $f \in R$ platí

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|}(f, \varphi_n)$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n,$$

kde

$$a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{11.8}$$

Koeficienty a_n definované vztahem (11.8) nazveme *Fourierovými koeficienty v ortogonálním* (*nenormovaném*) *systému* $\{\varphi_n\}$. Dosadíme-li do nerovnosti (11.6) za c_n podle vztahu (11.8), dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 a_n^2 \leq \|f\|^2,$$

což je Besselova nerovnost pro libovolný ortogonální systém.

Příklad 11.3. Uvažujme v unitárním prostoru $C_2^0\langle -\pi, \pi\rangle$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ se skalárním součinem daným vztahem $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ úplný ortogonální systém goniometrických funkcí, tedy systém

$$1, \quad \cos nt, \quad \sin nt, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{(viz příklad 9.8).}$$

Tento systém není ortonormální, k němu příslušný ortonormální systém tvoří funkce

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Nechť f je funkce z prostoru $C_2^0\langle -\pi, \pi\rangle$. Fourierovy koeficienty této funkce vzhledem k systému $1, \cos nt, \sin nt$ se většinou značí $\frac{a_0}{2}, a_n$ a b_n. V souladu s obecnými vzorci pro Fourierovy koeficienty tedy máme

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{tj. } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{a}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t.$$

Fourierova řada funkce f vzhledem k systému goniometrických funkcí má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a konverguje k f (podle věty 11.2).

12. Úplné unitární prostory. Rieszova-Fischerova věta

Od kapitoly 10 jsme uvažovali separabilní unitární prostory; v dalším budeme kromě toho předpokládat, že uvažované prostory jsou úplné.

Nechť tedy R je úplný separabilní unitární prostor a $\{\varphi_n\}$ nějaký ortonormální systém v prostoru R (nemusí být úplný). Z Besselovy nerovnosti plyne, že k tomu, aby čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ byla Fourierovými koeficienty nějakého prvku v prostoru R, je nutné, aby řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

konvergovala. V úplném prostoru tato podmínka není pouze nutná, ale také postačující. Platí totiž tato věta:

Věta 12.1 (**Riesz-Fischer**). *Nechť $\{\varphi_n\}$ je libovolný ortonormální systém v úplném unitárním prostoru R a nechť čísla*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

jsou taková, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{12.1}$$

konverguje. Potom existuje takový prvek $f \in R$, že

$$c_k = (f, \varphi_k) \tag{12.2}$$

a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2. \tag{12.3}$$

Důkaz. Položme

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k. \tag{12.4}$$

Potom

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \cdots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Protože řada (12.1) konverguje, výše uvedený součet při n jdoucím do nekonečna konverguje k 0. Tedy f_n je Cauchyovská posloupnost a vzhledem k úplnosti prostoru R konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ k nějakému prvku $f \in R$:

$$\|f - f_n\| \to 0, \quad \text{když} \quad n \to \infty. \tag{12.5}$$

Dále platí

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i), \tag{12.6}$$

přičemž první sčítanec na pravé straně se pro $n \geq i$ rovná podle (12.4) číslu c_i, a druhý sčítanec při pevném i konverguje podle (12.5) k nule pro $n \to \infty$, protože

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|.$$

Levá strana rovnosti (12.6) nezávisí na indexu n; proto přejdeme-li v této rovnosti k limitě pro $n \to \infty$, dostaneme, že

$$(f, \varphi_i) = c_i;$$

tedy platí (12.2).
Podle (12.4) a (12.5) platí

$$\|f - f_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, f - \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j\right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \varphi_k) - \sum_{j=1}^{n} c_j (f, \varphi_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j c_k (\varphi_j, \varphi_k) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Tedy platí (12.3). □

13. Hilbertovy prostory. Věta o izomorfismu

Doposud nás nezajímalo, zdali unitární prostor má konečnou nebo nekonečnou dimenzi. Nyní zavedeme tuto definici:

Definice 13.1. Úplný unitární prostor o nekonečné dimenzi se nazývá *Hilbertův prostor*.

Jinými slovy, *Hilbertovým prostorem* nazýváme množinu H prvků $f, g, \ldots$, která splňuje tyto podmínky (axiomy):

I. H je unitární prostor (tj. lineární prostor, v němž je zaveden skalární součin).
II. Prostor H je úplný ve smyslu metriky $\varrho(f, g) = \|f - g\|$.
III. Prostor H má *nekonečnou* dimenzi, tj. je v něm možno ke každému přirozenému číslu n najít n lineárně nezávislých prvků.

V literatuře není Hilbertův prostor definován jednotně. Někteří autoři například vynechávají podmínku III, jiní Hilbertovým prostorem rozumějí separabilní Hilbertův prostor. Protože v dalším výkladu budeme vyšetřovat pouze separabilní Hilbertovy prostory, budeme slovo „separabilní" většinou vynechávat.
Dva unitární prostory R a R^* se nazveme *izomorfní*, jestliže existuje lineární bijektivní zobrazení $f : R \to R^*$, že
pro libovolné prvky $x, y \in R$ platí

$$(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Jinak řečeno, izomorfizmus unitárních prostorů je izomorfismus vektorových prostorů zachovávající skalární součiny.
Jak známo, libovolné dva n-rozměrné unitární prostory jsou izomorfní, takže každý unitární n-rozměrný prostor je izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^n$. Unitární prostory nekonečné dimenze nemusejí být izomorfní. Například prostory l_2 a $C_2^0\langle a, b\rangle$ nejsou izomorfní. Vyplývá to např. z toho, že první z nich je úplný, kdežto druhý úplný není. Platí však tato věta:

Věta 13.2 (O izomorfismu). *Každé dva separabilní Hilbertovy prostory jsou izomorfní.*

Důkaz. Dokážeme, že každý separabilní Hilbertův prostor H je izomorfní s prostorem l_2. Tím bude tvrzení věty dokázáno. Zvolme v prostoru H libovolný úplný ortonormální systém $\{\varphi_n\}$ a přiřaďme prvku $f \in H$ posloupnost $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ jeho Fourierových koeficientů odpovídajících tomuto systému. Protože $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$, patří posloupnost $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ do prostoru l_2. Obráceně, podle Rieszovy–Fischerovy věty každému prvku $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ prostoru l_2 přísluší takový prvek $f \in H$, jehož Fourierovými koeficienty jsou čísla $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$. Uvedené přiřazení mezi prvky prostorů H a l_2 definuje bijektivní zobrazení. Dále, jestliže

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots), \quad g \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots),$$

potom

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n, \dots),$$
$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, \dots, \alpha c_n, \dots),$$

tj. toto zobrazení zachovává operace sčítání a násobení konstantou.
Konečně, protože platí

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

a

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2,$$

z Parsevalovy rovnosti, tj. rovnosti levých stran, plyne :

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n.$$

Uvedené zobrazení mezi prostory H a l_2 tedy skutečně definuje izomorfizmus. □

Z dokázané věty vyplývá, že až na izomorfizmus existuje jenom jeden separabilní Hilbertův prostor a že prostor l_2 lze považovat za jeho realizaci, podobně jako prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ lze považovat za realizaci n-rozměrného unitárního prostoru, daného axiomaticky.

14. Charakteristická vlastnost unitárních prostorů

Nechť R je normovaný prostor. Chceme vědět, jaké doplňující podmínky musí splňovat norma definovaná v prostoru R, aby prostor R byl unitární, tj. aby v něm norma byla definována nějakým skalárním součinem. Jinak řečeno, chceme vědět, jak je třeba charakterizovat unitární prostory v třídě všech normovaných prostorů. Takovou charakteristiku dává tato věta:

Věta 14.1. *Normovaný prostor je unitární, když a jen když pro libovolné dva prvky $f, g \in R$ platí rovnost*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2). \tag{14.1}$$

Důkaz. Nutnost. Nechť R je unitární prostor. Podle definice normy pomocí skalárního součinu platí

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = (f+g, f+g) + (f-g, f-g) =$$
$$= (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) + (f,f) - (f,g) - (g,f) + (g,g) = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Dostatečnost podmínky (14.1) se dokazuje obtížněji, a proto odkazujeme čtenáře na literaturu. □

Poznámka 14.2. Vztah (14.1) je zobecněním známé vlastnosti rovnoběžníku v rovině: *Součet druhých mocnin délek úhlopříček rovnoběžníku se rovná součtu druhých mocnin délek jeho stran.* Vzhledem k tomu, že $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$, plyne uvedená vlastnost z dvojího užití kosinové věty a následného součtu výsledků.

Příklad 14.3. Mějme prostor $\mathbb{R}_p^n$, v němž je norma definována vztahem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro $p \geq 1$ platí všechny axiomy normy, ale unitárním prostorem bude prostor $\mathbb{R}_p^n$ pouze pro $p = 2$. Skutečně, mějme v prostoru $\mathbb{R}_p^n$ dva vektory

$$f = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0), \quad g = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0).$$

Potom

$$f + g = (2, 0, 0, \ldots, 0), \quad f - g = (0, 2, 0, \ldots, 0).$$

Odtud

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}, \quad \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2,$$

takže rovnoběžníková identita (14.1) v případě $p \neq 2$ neplatí.

Příklad 14.4. Mějme prostor $C^0\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi\right\rangle$ všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi\right\rangle$. Položme

$$f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin t.$$

Platí

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

a

$$\|f+g\| = \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2},$$
$$\|f-g\| = \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |\cos t - \sin t| = 1.$$

Odtud

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Normu v prostoru $C^0\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ tedy nelze definovat pomocí žádného skalárního součinu. Zobecněním tohoto příkladu se snadno dokáže, že ani prostor $C^0\langle a, b\rangle$ všech spojitých funkcí definovaných na libovolném intervalu $\langle a, b\rangle$ není unitárním prostorem.