Řešení nelineárních rovnic

Obecný tvar rovnice o jedné neznámé: $f(x) = 0$

Řešení nelineárních rovnic

Obecný tvar rovnice o jedné neznámé: $f(x) = 0$

Lineární rovnice = rovnice, která lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar $ax + b = 0$

Řešení nelineárních rovnic

Obecný tvar rovnice o jedné neznámé: $f(x) = 0$

Lineární rovnice = rovnice, která lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar $ax + b = 0$

Všechny ostatní jsou **rovnice nelineární**.

Řešení nelineárních rovnic

Obecný tvar rovnice o jedné neznámé: $f(x) = 0$

Lineární rovnice = rovnice, která lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar $ax + b = 0$

Všechny ostatní jsou **rovnice nelineární**.

Nelineární rovnice řešitelné přímo $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\exp\left(\frac{5}{x^2 + 10} + 4.5\right) - 100 = 0$$

$$2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2.1 = 0$$

Řešení nelineárních rovnic

Obecný tvar rovnice o jedné neznámé: $f(x) = 0$

Lineární rovnice = rovnice, která lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar $ax + b = 0$

Všechny ostatní jsou **rovnice nelineární**.

Nelineární rovnice řešitelné přímo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\exp\left(\frac{5}{x^2 + 10} + 4.5\right) - 100 = 0$$

$$2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2.1 = 0$$

neřešitelné přímo

$$0.2x + 0.4 + 3\sin x = 0$$

Řešení nelineárních rovnic

Obecný tvar rovnice o jedné neznámé: $f(x) = 0$

Lineární rovnice = rovnice, která lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar $ax + b = 0$

Všechny ostatní jsou **rovnice nelineární**.

Nelineární rovnice řešitelné přímo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\exp\left(\frac{5}{x^2 + 10} + 4.5\right) - 100 = 0$$

$$2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2.1 = 0$$

neřešitelné přímo $0.2x + 0.4 + 3\sin x = 0$

Rovnice, které nejsou řešitelné přímo, řešíme numericky.

Řešení nelineárních rovnic

Obecný tvar rovnice o jedné neznámé: $f(x) = 0$

Lineární rovnice = rovnice, která lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar $ax + b = 0$

Všechny ostatní jsou **rovnice nelineární**.

Nelineární rovnice řešitelné přímo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\exp\left(\frac{5}{x^2 + 10} + 4.5\right) - 100 = 0$$

$$2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2.1 = 0$$

neřešitelné přímo $0.2x + 0.4 + 3\sin x = 0$

Rovnice, které nejsou řešitelné přímo, řešíme numericky.

Fáze numerického řešení:

1) Separace kořenů

2) Zpřesňování aproximací

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x) = 0$

Úkolem je zjistit, kolik kořenů rovnice má, a dále určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen rovnice

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Úkolem je zjistit, kolik kořenů rovnice má, a dále určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen rovnice. Možnosti:

a) Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$:

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Úkolem je zjistit, kolik kořenů rovnice má, a dále určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen rovnice. Možnosti:

a) Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$: ve vybraných bodech definičního oboru zjistíme, zda je zde funkce kladná či záporná. V intervalu, kde funkce změní znaménko se nachází kořen rovnice (samozřejmě za předpokladu, že $f(x)$ je na něm spojitá).

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x) = 0$

Úkolem je zjistit, kolik kořenů rovnice má, a dále určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen rovnice. Možnosti:

a) Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$: ve vybraných bodech definičního oboru zjistíme, zda je zde funkce kladná či záporná. V intervalu, kde funkce změní znaménko se nachází kořen rovnice (samozřejmě za předpokladu, že $f(x)$ je na něm spojitá).

Příklad: $f(x) = 0.2x + 0.4 + 3\sin x$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x) = 0$

Úkolem je zjistit, kolik kořenů rovnice má, a dále určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen rovnice. Možnosti:

a) Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$: ve vybraných bodech definičního oboru zjistíme, zda je zde funkce kladná či záporná. V intervalu, kde funkce změní znaménko se nachází kořen rovnice (samozřejmě za předpokladu, že $f(x)$ je na něm spojitá).

Příklad: $f(x) = 0.2x + 0.4 + 3\sin x$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-

⇒ tři kořeny: $x_1 \in (-4; -3)$; $x_2 \in (-1; 0)$; $x_3 \in (4; 5)$;

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Úkolem je zjistit, kolik kořenů rovnice má, a dále určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen rovnice. Možnosti:

b) Grafické řešení hrubou silou

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

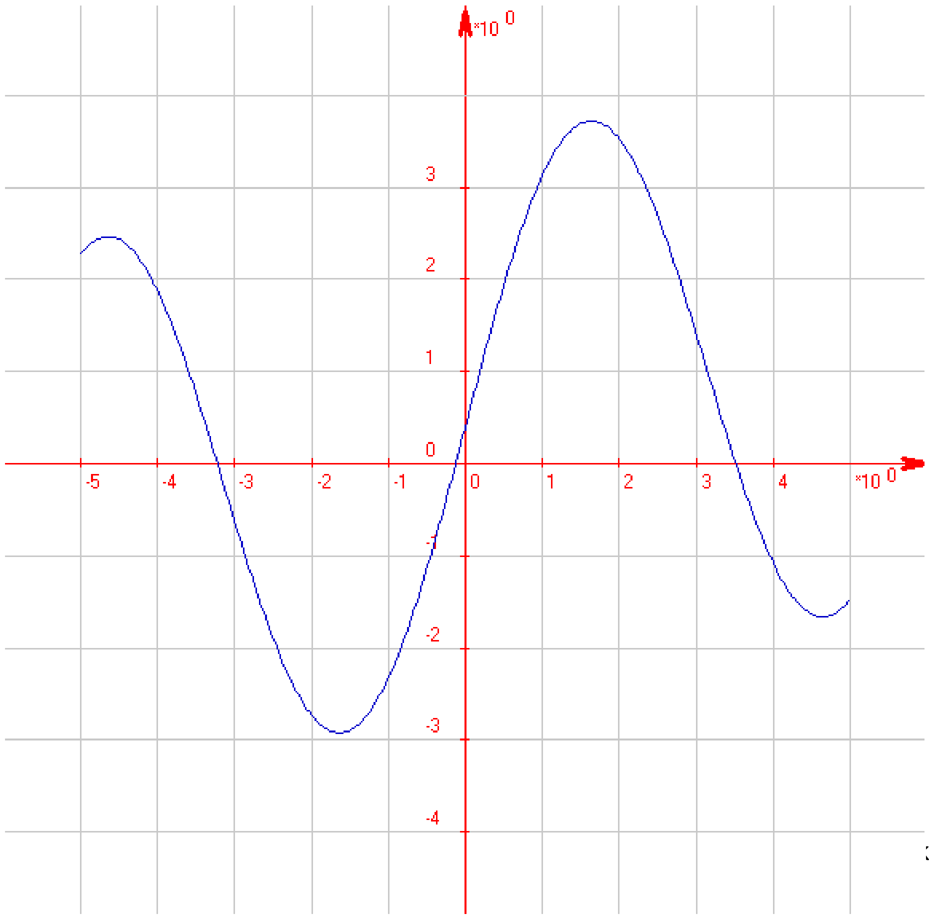
Úkolem je zjistit, kolik kořenů rovnice má, a dále určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen rovnice. Možnosti:

b) Grafické řešení hrubou silou: Graf funkce $f(x)$ necháme sestrojit vhodným software, kořeny jsou v průsečících grafu funkce $f(x)$ s osou x

$\Rightarrow$ tři kořeny: $x_1 \in (-4;-3)$;

$x_2 \in (-1;0)$;

$x_3 \in (4;5)$;



Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Zásadní nedostatek: nemusíme objevit vždy všechny kořeny, a to buď vinou:

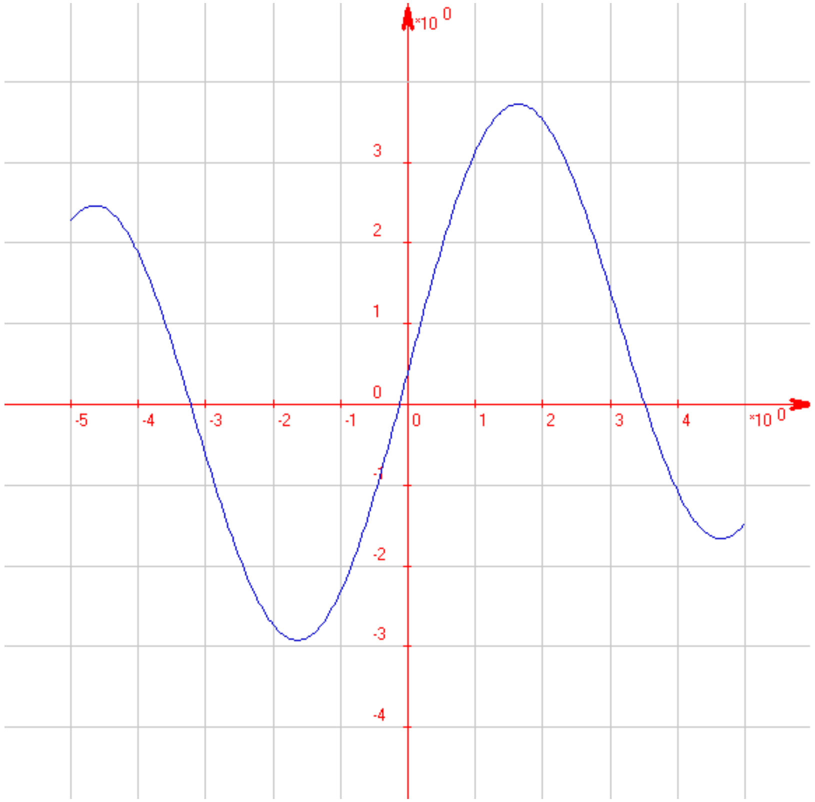
Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Zásadní nedostatek: nemusíme objevit vždy všechny kořeny, a to buď vinou:

a) nesprávné volby intervalu:

tři kořeny ?



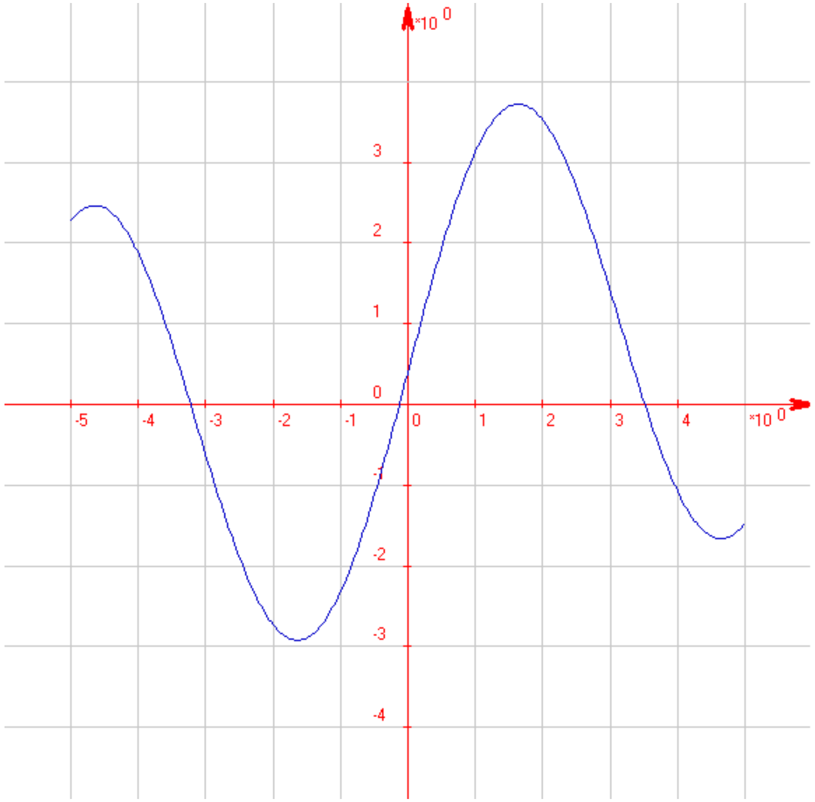
Řešení nelineárních rovnic

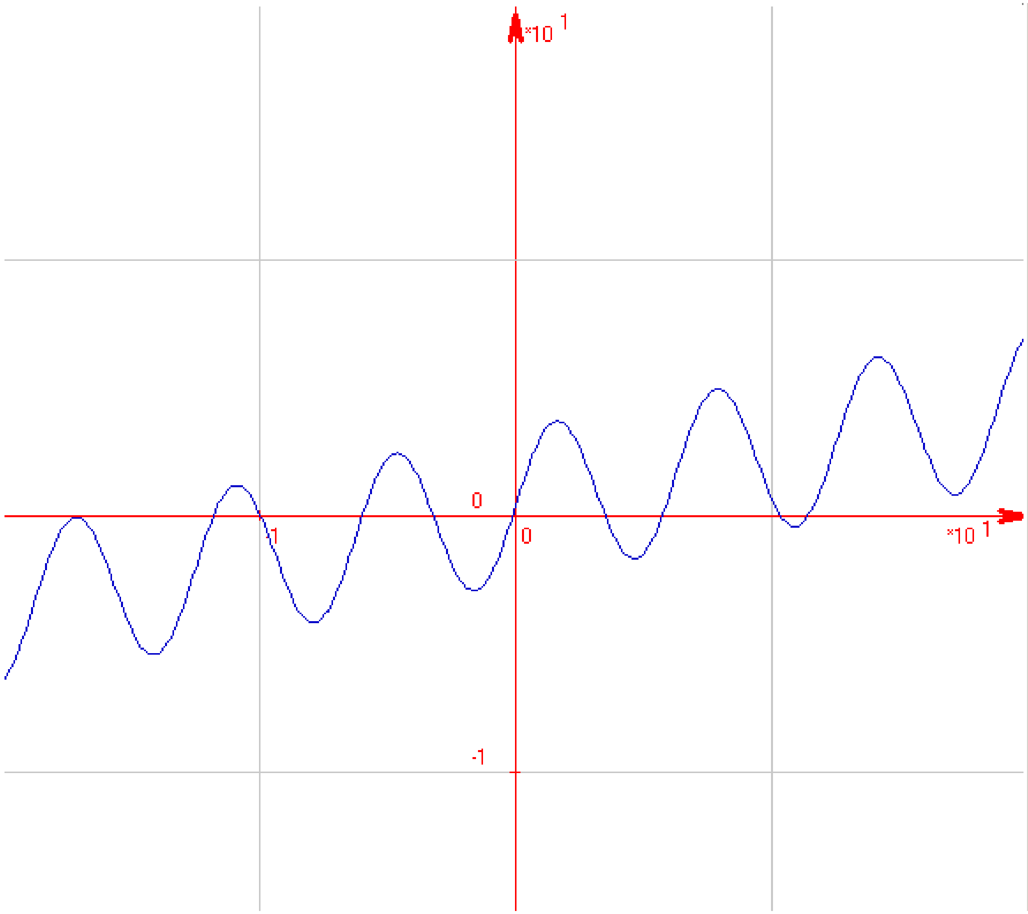
Separace kořenů rovnice $f(x) = 0$

Zásadní nedostatek: nemusíme objevit vždy všechny kořeny, a to buď vinou:

a) nesprávné volby intervalu:

tři kořeny ?





Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Zásadní nedostatek: nemusíme objevit vždy všechny kořeny, a to buď vinou:

b) nedostatečného rozlišení

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x) = 0$

Zásadní nedostatek: nemusíme objevit vždy všechny kořeny, a to buď vinou:

b) nedostatečného rozlišení

$$\sin x - \frac{1}{50}\operatorname{arctg} 100x = 0$$

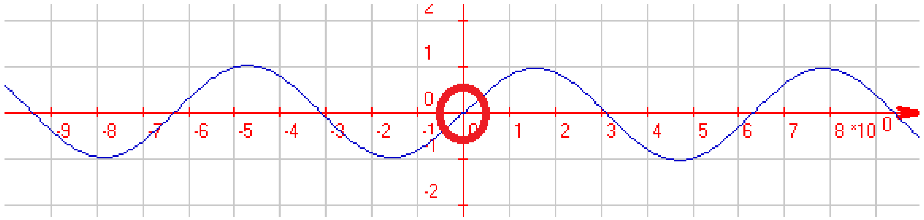
Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Zásadní nedostatek: nemusíme objevit vždy všechny kořeny, a to buď vinou:

b) nedostatečného rozlišení

$$\sin x - \frac{1}{50}\operatorname{arctg} 100x \; = 0$$



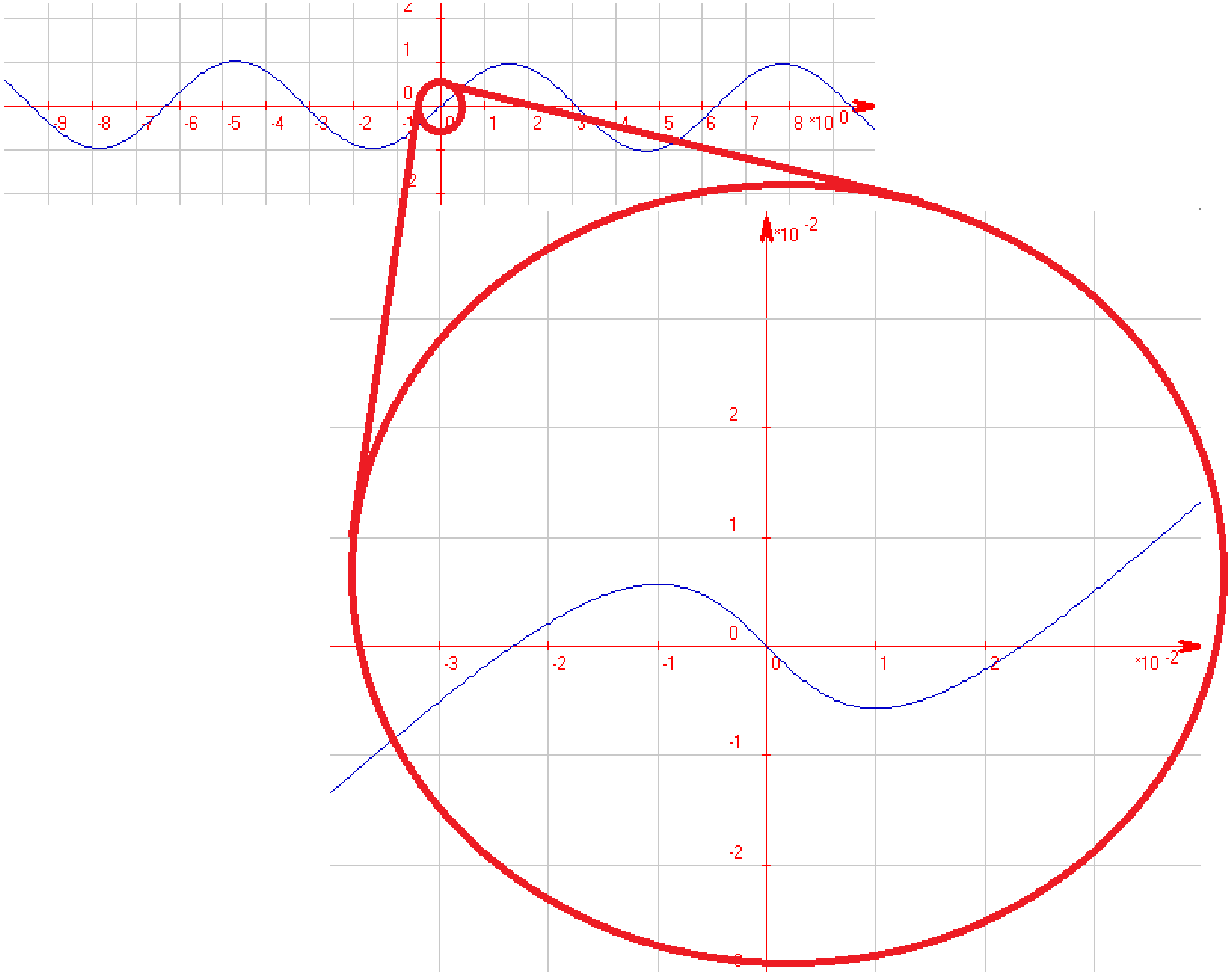
Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Zásadní nedostatek: nemusíme objevit vždy všechny kořeny, a to buď vinou:

b) nedostatečného rozlišení

$$\sin x - \frac{1}{50}\,\mathrm{arctg}\,100x = 0$$



Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Nejlépe tedy (pokud možno)

c) využít znalosti grafů elementárních funkcí:

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x) = 0$

Nejlépe tedy (pokud možno)

c) využít znalosti grafů elementárních funkcí: $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = f_2(x)$

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x) = 0$

Nejlépe tedy (pokud možno)

c) využít znalosti grafů elementárních funkcí: $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = f_2(x)$

hledáme x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $f_1(x)$; $f_2(x)$

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Nejlépe tedy (pokud možno)

c) využít znalosti grafů elementárních funkcí: $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad f_1(x)=f_2(x)$

hledáme x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $f_1(x)$; $f_2(x)$

$$0.2x+0.4+3\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad 3\sin x=-0.2x-0.4$$

Řešení nelineárních rovnic

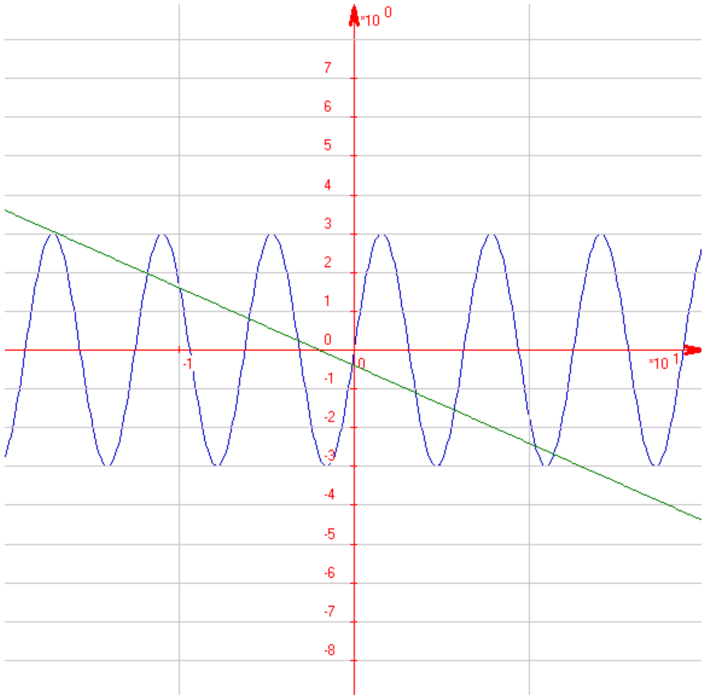
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Nejlépe tedy (pokud možno)

c) využít znalosti grafů elementárních funkcí: $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad f_1(x)=f_2(x)$

hledáme x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $f_1(x)$; $f_2(x)$

$$0.2x+0.4+3\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad 3\sin x=-0.2x-0.4$$



Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Nejlépe tedy (pokud možno)

c) využít znalosti grafů elementárních funkcí: $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad f_1(x)=f_2(x)$

hledáme x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $f_1(x)$; $f_2(x)$

$$\sin x - \frac{1}{50}\operatorname{arctg} 100x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{50}\operatorname{arctg} 100x$$

Řešení nelineárních rovnic

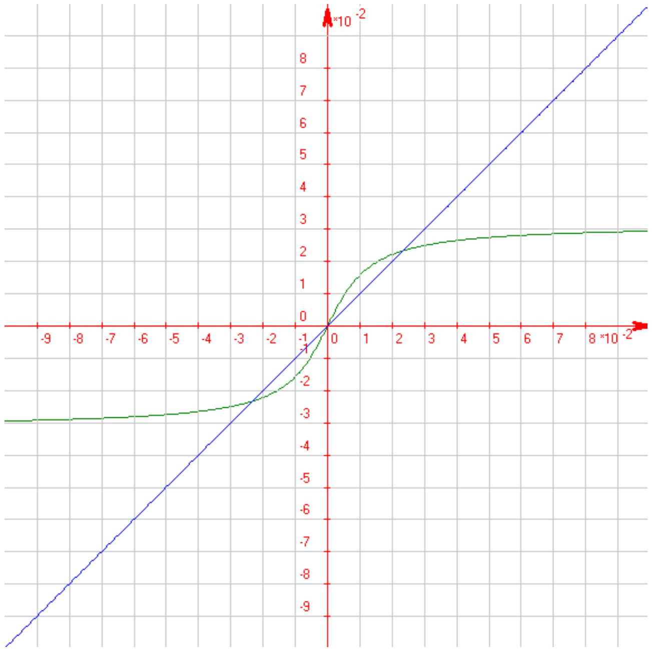
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

Nejlépe tedy (pokud možno)

c) využít znalosti grafů elementárních funkcí: $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad f_1(x)=f_2(x)$

hledáme x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $f_1(x)$; $f_2(x)$

$$\sin x - \frac{1}{50}\operatorname{arctg} 100x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{50}\operatorname{arctg} 100x$$



Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení nelineárních rovnic

Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení:

$$\sqrt{x+2}=\frac{x}{3}+1$$

Řešení nelineárních rovnic

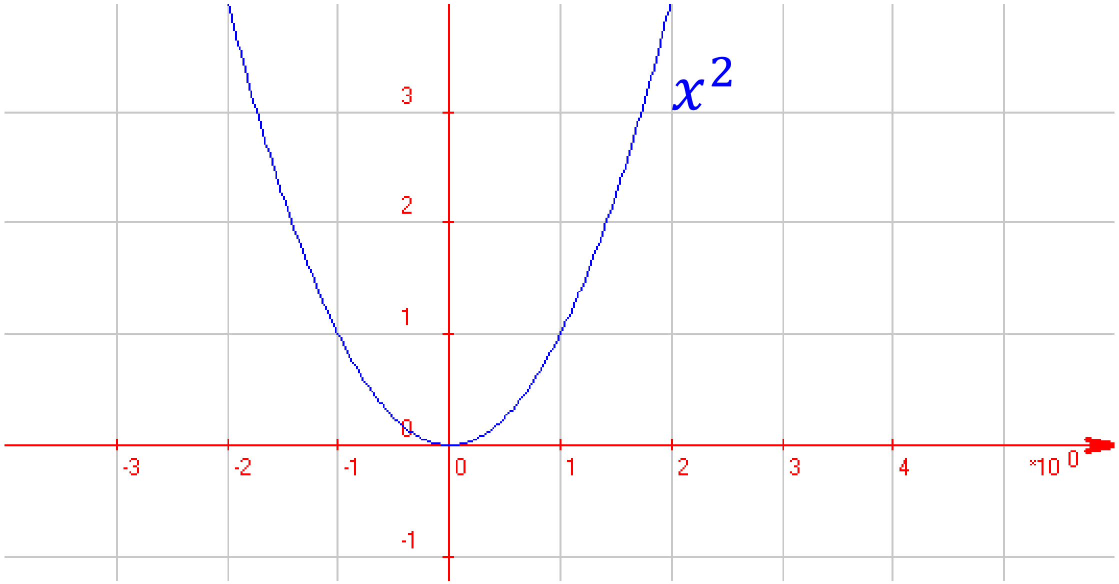
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení:

$$\sqrt{x+2}=\frac{x}{3}+1$$



Řešení nelineárních rovnic

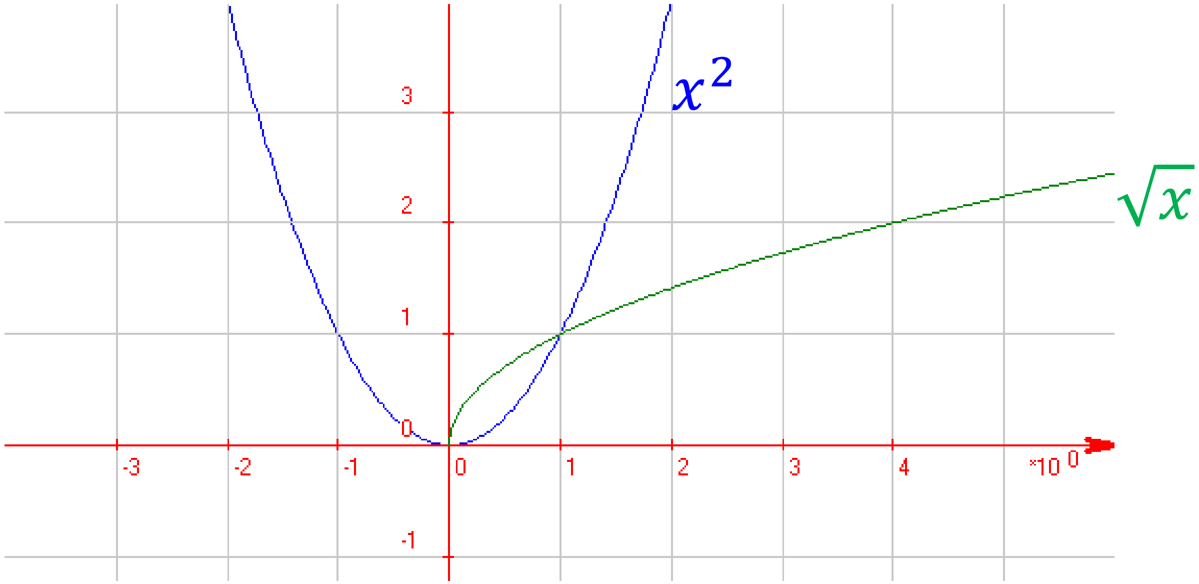
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení:

$$\sqrt{x+2}=\frac{x}{3}+1$$



Řešení nelineárních rovnic

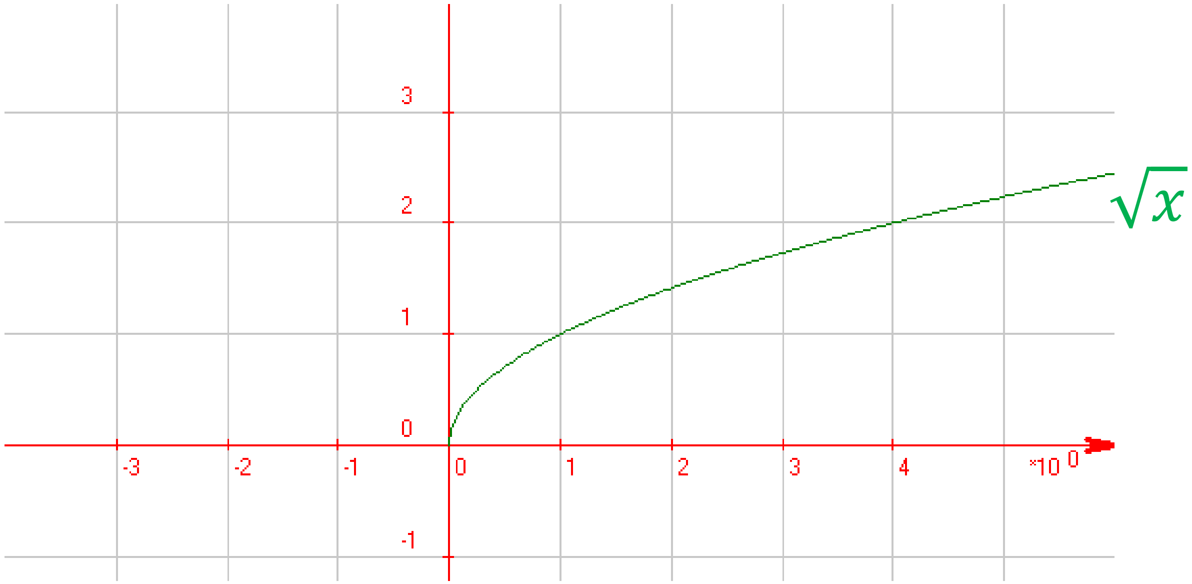
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení:

$$\sqrt{x+2}=\frac{x}{3}+1$$



Řešení nelineárních rovnic

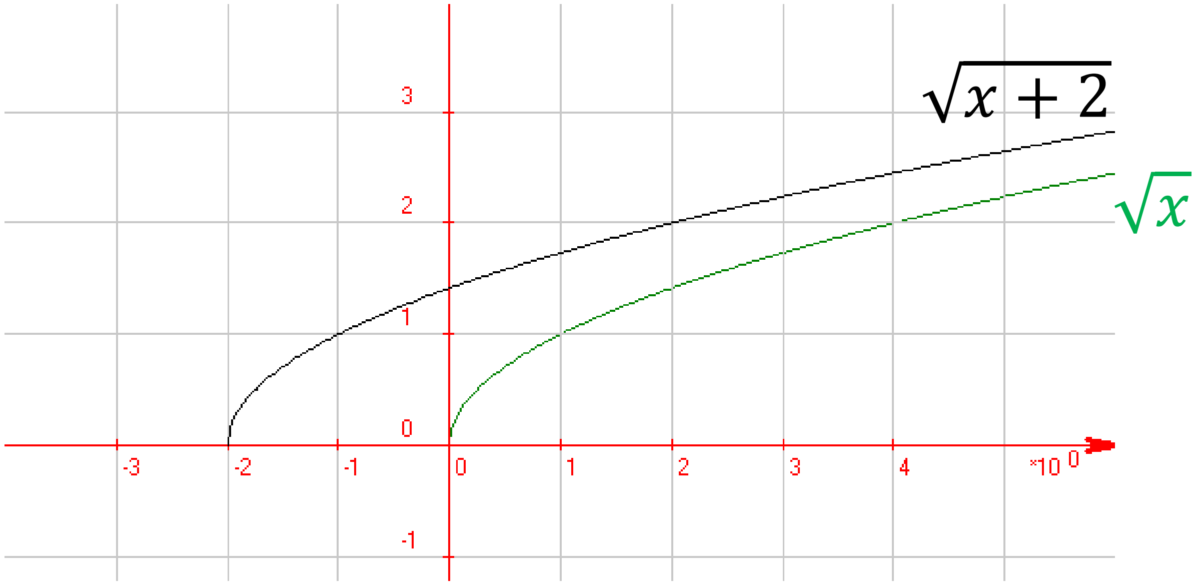
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení:

$$\sqrt{x+2}=\frac{x}{3}+1$$



Řešení nelineárních rovnic

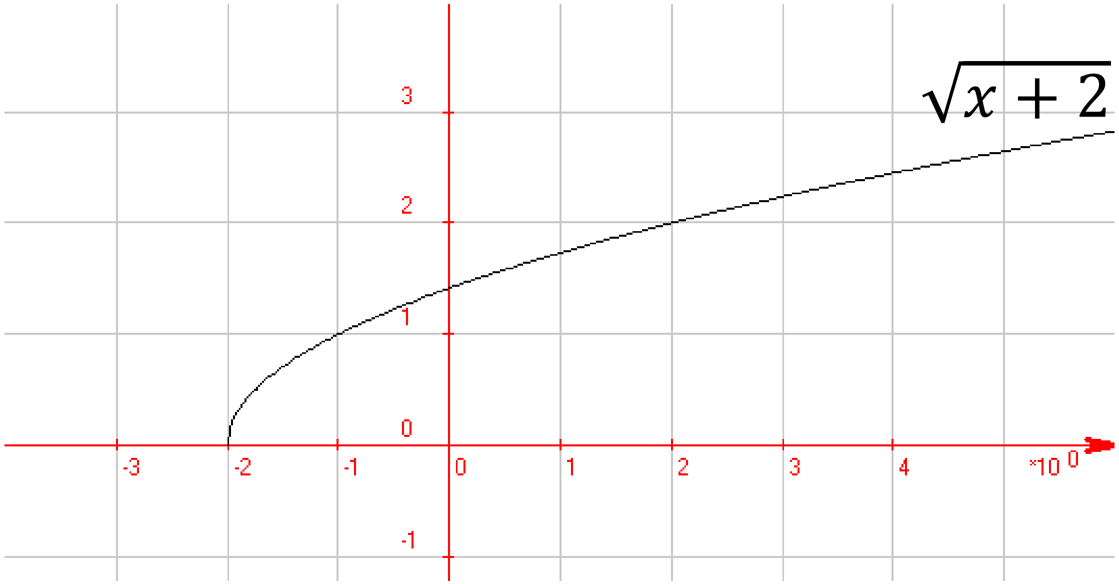
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení:

$$\sqrt{x+2}=\frac{x}{3}+1$$



Řešení nelineárních rovnic

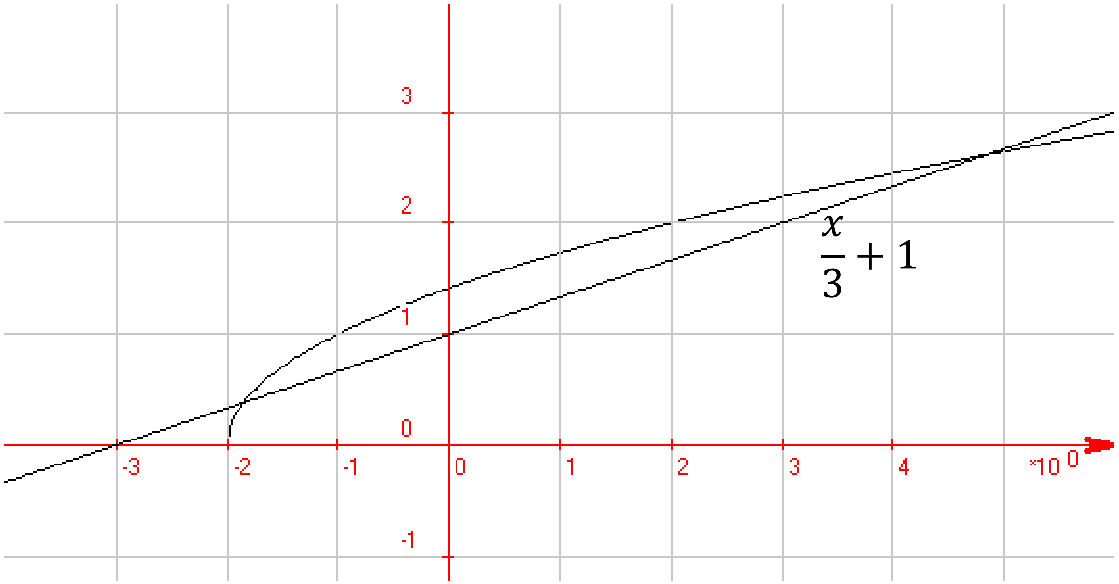
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení:

$$\sqrt{x+2}=\frac{x}{3}+1$$



Řešení nelineárních rovnic

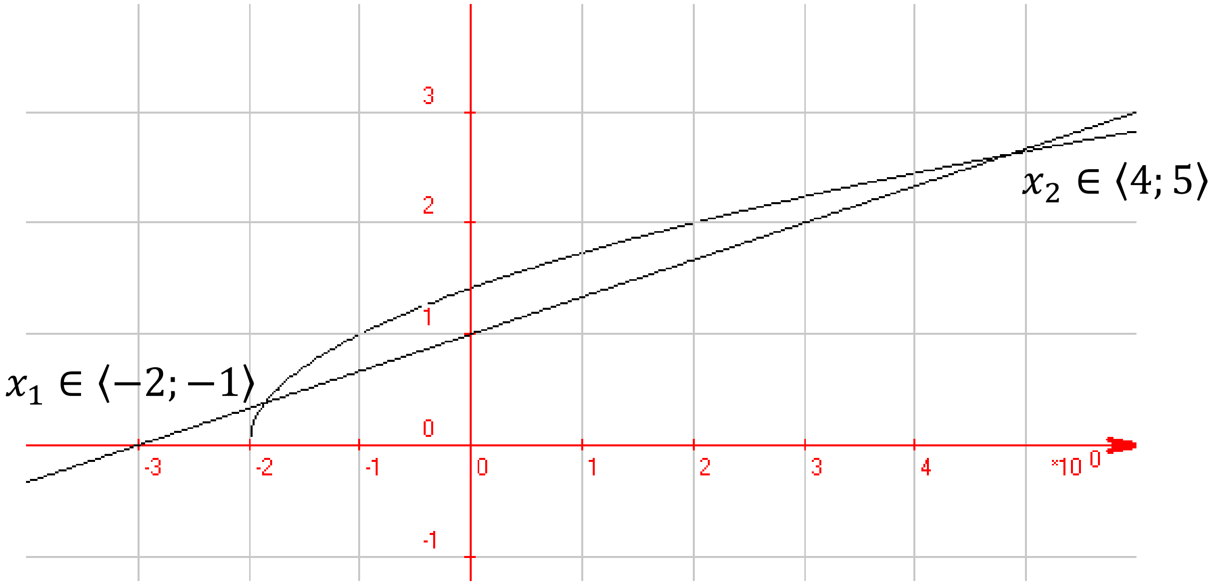
Separace kořenů rovnice $f(x)=0$

1 Příklad: separujme kořeny rovnice

$$\sqrt{x+2}-\frac{x}{3}-1=0$$

Řešení:

$$\sqrt{x+2}=\frac{x}{3}+1$$



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

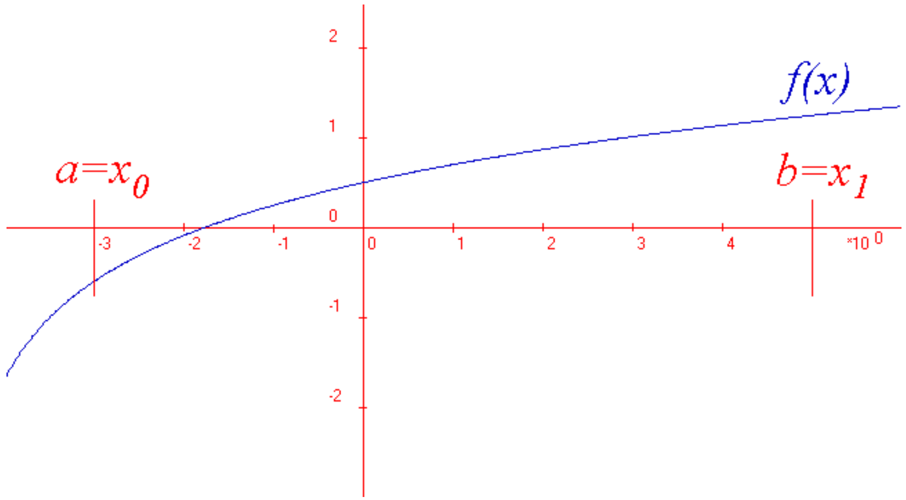
Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$



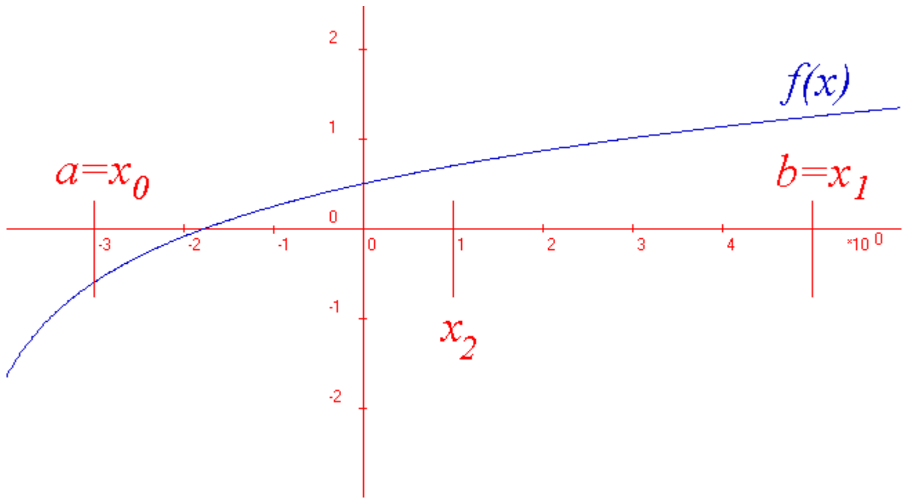
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme:

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

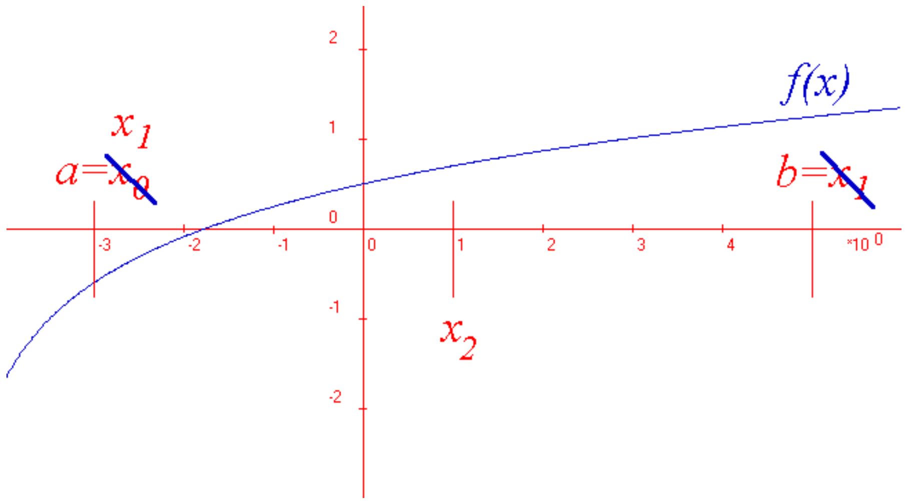


Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme: $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$. Dále půlíme interval, ve kterém je kořen.

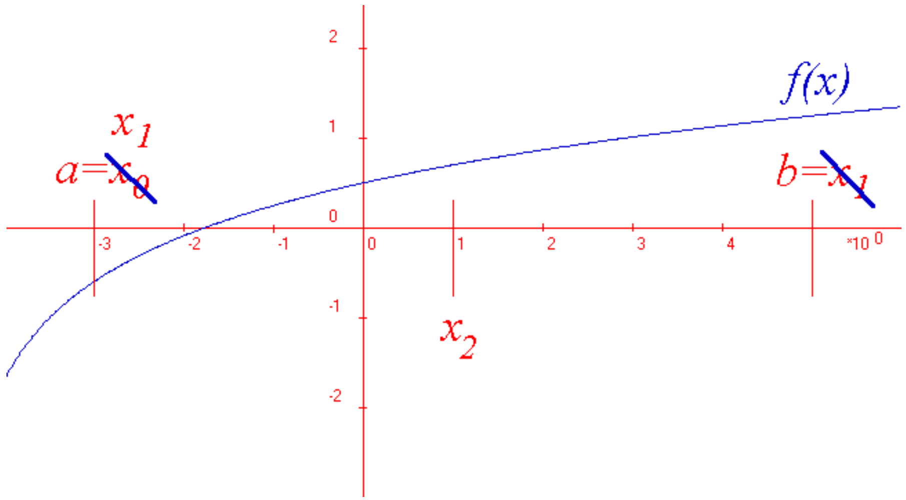


Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme: $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$. Dále půlíme interval, ve kterém je kořen. V programu tedy $f(x_0)\,f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 := x_0$



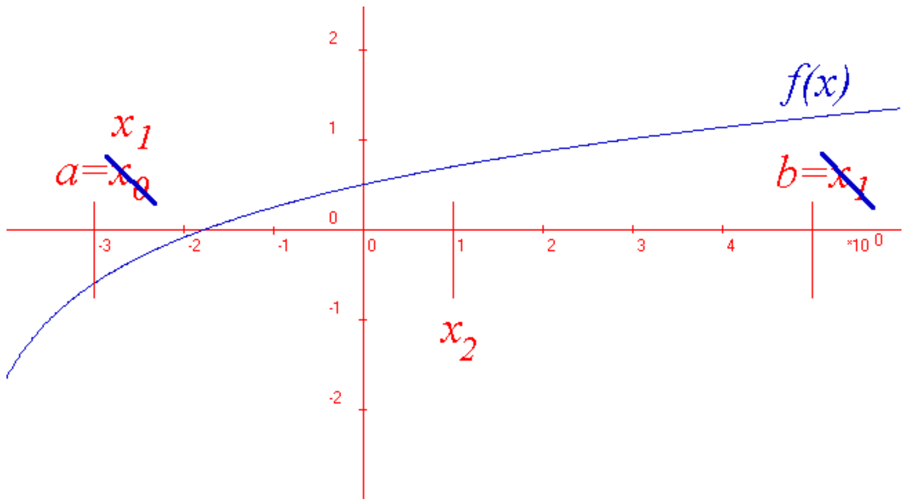
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme: $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$. Dále půlíme interval, ve kterém je kořen. V programu tedy $f(x_0)\, f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 := x_0$

Stejným způsobem pokračujeme



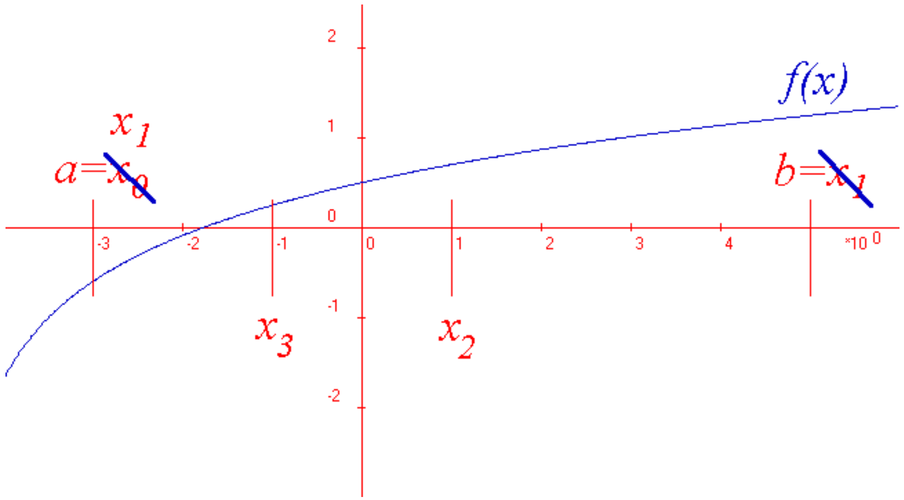
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme: $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$. Dále půlíme interval, ve kterém je kořen. V programu tedy $f(x_0)\,f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 := x_0$

Stejným způsobem pokračujeme



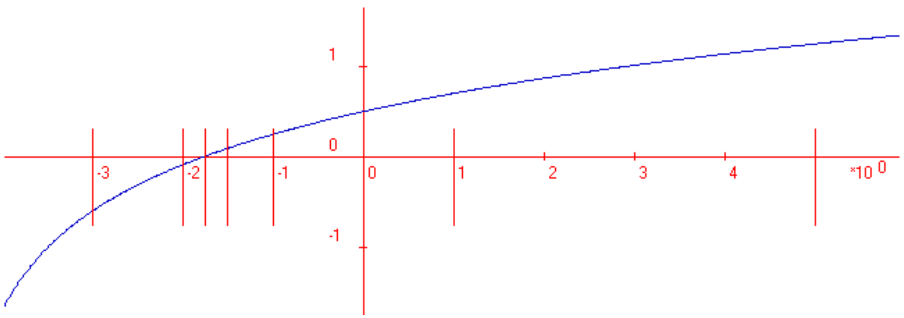
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme: $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$. Dále půlíme interval, ve kterém je kořen. V programu tedy $f(x_0)\, f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 := x_0$

Stejným způsobem pokračujeme



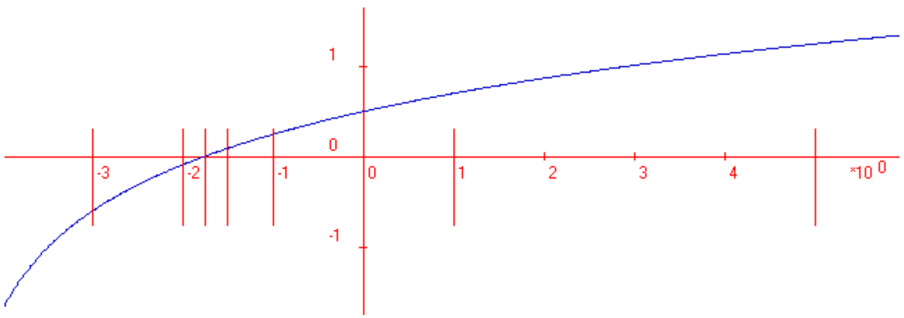
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme: $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$. Dále půlíme interval, ve kterém je kořen. V programu tedy $f(x_0)\,f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 := x_0$

Stejným způsobem pokračujeme, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.



Řešení nelineárních rovnic

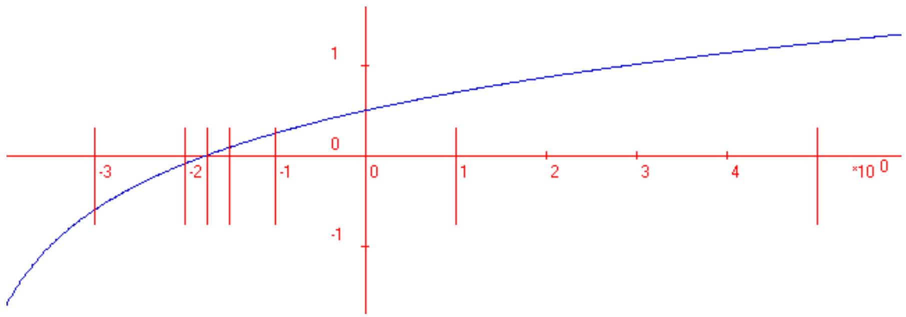
Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme: $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$. Dále půlíme interval, ve kterém je kořen. V programu tedy $f(x_0)\,f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 := x_0$

Stejným způsobem pokračujeme, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.

Obecný postup: $x_{i+1} = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$; $f(x_{i-1})\,f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$**;** $x_{i+2} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

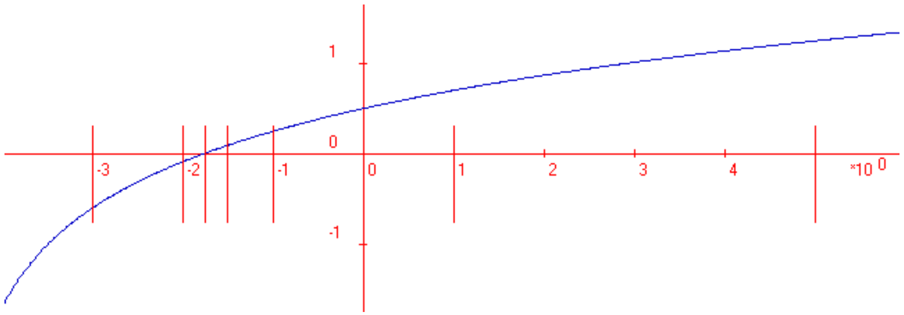
Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu): Krajní body intervalu označíme $x_0; x_1$ a bodem x_2 ho rozpůlíme: $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$. Dále půlíme interval, ve kterém je kořen. V programu tedy $f(x_0)\,f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 := x_0$

Stejným způsobem pokračujeme, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.

Obecný postup: $x_{i+1} = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$; $f(x_{i-1})\,f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$; $x_{i+2} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Stop kritérium (kdy půlení zastavit?): $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ (ε je požadovaná přesnost).



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu) – kdy a jak konverguje?

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu) – kdy a jak konverguje?

Jsou-li splněny výše uvedené podmínky, konverguje vždy **– velká výhoda**

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu) – kdy a jak konverguje?

Jsou-li splněny výše uvedené podmínky, konverguje vždy **– velká výhoda.**

Ve srovnání s dalšími metodami většinou velmi pomalu: každým krokem se výchozí interval zkrátí na polovinu. Má-li tedy výchozí interval jednotkovou délku, pak na jedno desetinné místo ($\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$) potřebujeme $2^{-n} < 5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow n \geq 5$ kroků.

– může být velká nevýhoda (např. při zpracování obrazu můžeme potřebovat pro každý pixel řešit jinou rovnici ⇒ řešení statisíců až milionů rovnic, rychlost je tedy velmi důležitá).

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu) – kdy a jak konverguje?

Rychlost konvergence obecně: Je dána tzv. řádem konvergence. Je to číslo p, pro které platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

kde E_n resp. E_{n+1} je chyba po n-tém resp. $n+1$ ním kroku. Čím vyšší je číslo konvergence, tím rychleji metoda konverguje.

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Po separaci kořenů pracujeme v jednotlivých intervalech, které obsahují vždy po jednom kořenu – pokud tomu tak je, pak v krajních bodech $a; b$ každého intervalu mají funkční hodnoty $f(a); f(b)$ opačná znaménka (předpokládáme, že na pracovním intervalu je funkce spojitá). Každý takový kořen pak můžeme určit s předem danou přesností.

Metoda bisekce (půlení intervalu) – kdy a jak konverguje?

Rychlost konvergence obecně: Je dána tzv. řádem konvergence. Je to číslo p, pro které platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

kde E_n resp. E_{n+1} je chyba po n-tém resp. $n+1$ ním kroku. Čím vyšší je číslo konvergence, tím rychleji metoda konverguje.

Metoda bisekce je řádu jedna (její konvergence je lineární).

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

2 Příklad: Metodou bisekce určeme kořeny rovnice z př. 1 na šest desetinných míst.

Řešení naprogramujeme v Matlabu:

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

2 Příklad: Metodou bisekce určeme kořeny rovnice z př. 1 na šest desetinných míst.

Řešení naprogramujeme v Matlabu:

```
% bisekce
clc; format long
f = @(x) sqrt(x+2)-x/3-1
a=-2;b=-1;           % pro kořen x1; pro x2 nastavíme a=4;b=5;
Epsilon=5*10^(-7)  % požadovaná přesnost
Chyba=1; % aktuální chyba; před vstupem do cyklu může být nastaveno
         % libovolné číslo větší než epsilon
PocetKroku=0;
while Chyba>Epsilon
    PocetKroku=PocetKroku+1;
    c=(a+b)/2;       % pokud si nepotřebujeme pamatovat všechny aproximace,
                     % místo x(1); x(2); atd. vystačíme jen s proměnnými a, b, c
    Chyba = abs(c-a);
    if f(a)*f(c)<0 b=c; else a=c;end; %rozhodneme, ve kterém intervalu pokračovat
end;                 % while
Koren=c
Chyba
PocetKroku
```

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

2 Příklad: Metodou bisekce určeme kořeny rovnice z př. 1 na šest desetinných míst.

Řešení naprogramujeme v Matlabu:

```
% bisekce
clc; format long
f = @(x) sqrt(x+2)-x/3-1
a=-2;b=-1;          % pro kořen x1; pro x2 nastavíme a=4;b=5;
Epsilon=5*10^(-7)  % požadovaná přesnost
Chyba=1; % aktuální chyba; před vstupem do cyklu může být nastaveno
         % libovolné číslo větší než epsilon
PocetKroku=0;
while Chyba>Epsilon
    PocetKroku=PocetKroku+1;
    c=(a+b)/2;     % pokud si nepotřebujeme pamatovat všechny aproximace,
                   % místo x(1); x(2); atd. vystačíme jen s proměnnými a, b, c
    Chyba = abs(c-a);
    if f(a)*f(c)<0 b=c; else a=c;end; %rozhodneme, ve kterém intervalu pokračovat
end;               % while
Koren=c
Chyba
PocetKroku
```

$x1 \approx -1.854101$; chyba $\approx 4.8*10^{-7}$; Počet kroků = 21
$x2 \approx 4.854102$; chyba $\approx 4.8*10^{-7}$; Počet kroků = 21

Řešení nelineárních rovnic

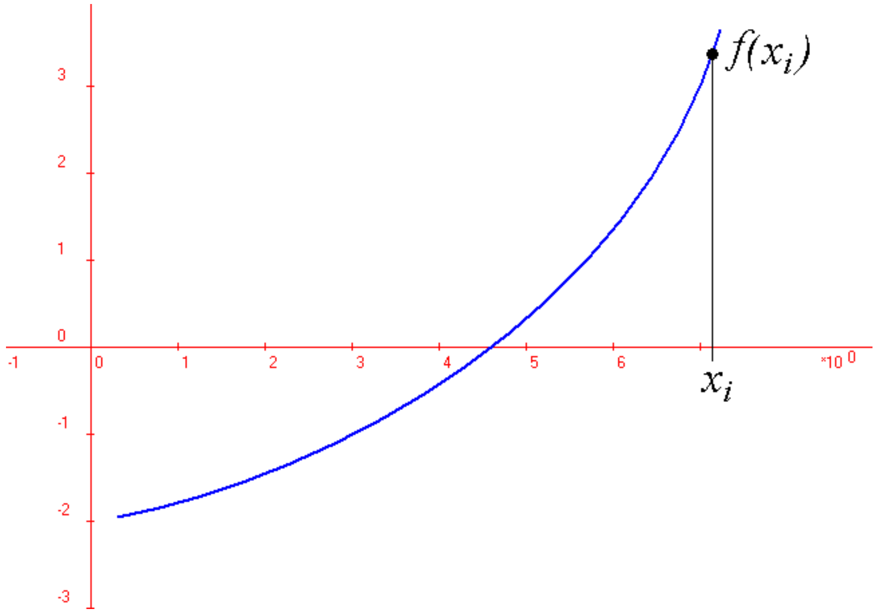
Zpřesňování aproximací:

Dalších několik metod je založeno na aproximaci funkce $f(x)$ přímkou

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

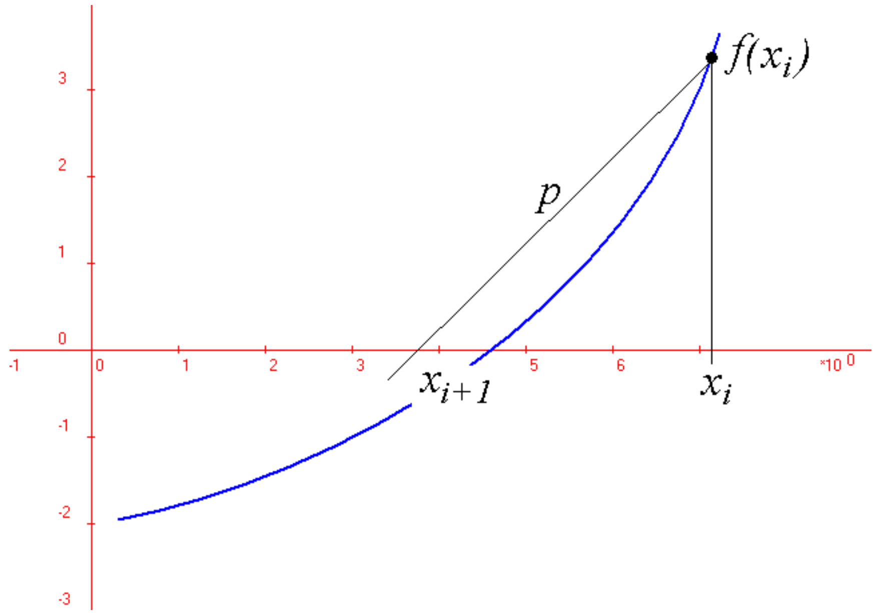
Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně):



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

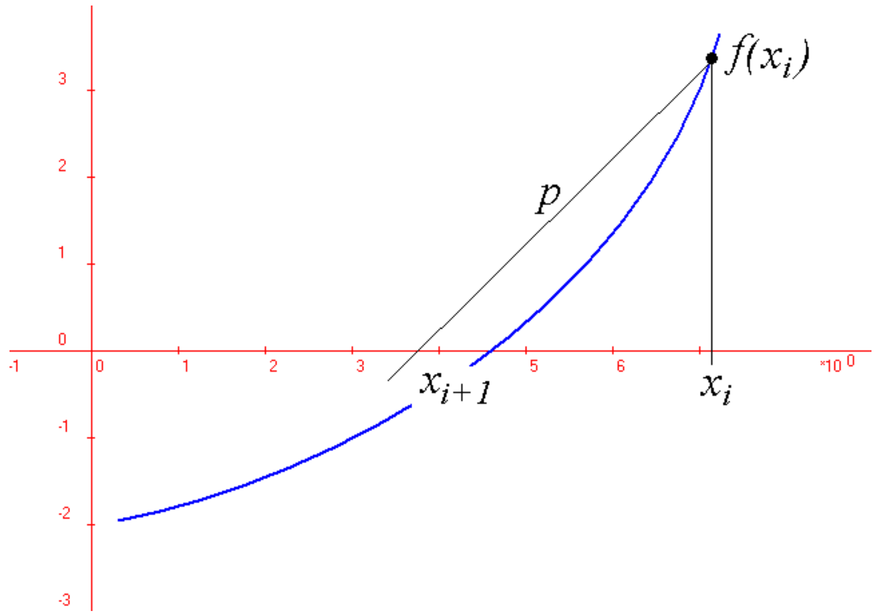
Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně): předpokládejme, že máme předchozí přibližnou hodnotu x_i kořene rovnice - na začátku procesu např. jednu z krajních hodnot intervalu ze separace (ozn. x_0) . Bodem $[x_i; f(x_i)]$ vedeme (zatím blíže nespecifikovanou) přímku p. Za další přibližnou hodnotu x_{i+1} pak prohlásíme průsečík této přímky s osou x:



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně): předpokládejme, že máme předchozí přibližnou hodnotu x_i kořene rovnice - na začátku procesu např. jednu z krajních hodnot intervalu ze separace (ozn. x_0) . Bodem $[x_i; f(x_i)]$ vedeme (zatím blíže nespecifikovanou) přímku p. Za další přibližnou hodnotu x_{i+1} pak prohlásíme průsečík této přímky s osou x. Než budeme přímku p blíže specifikovat, vypočtěme obecně její směrnici:

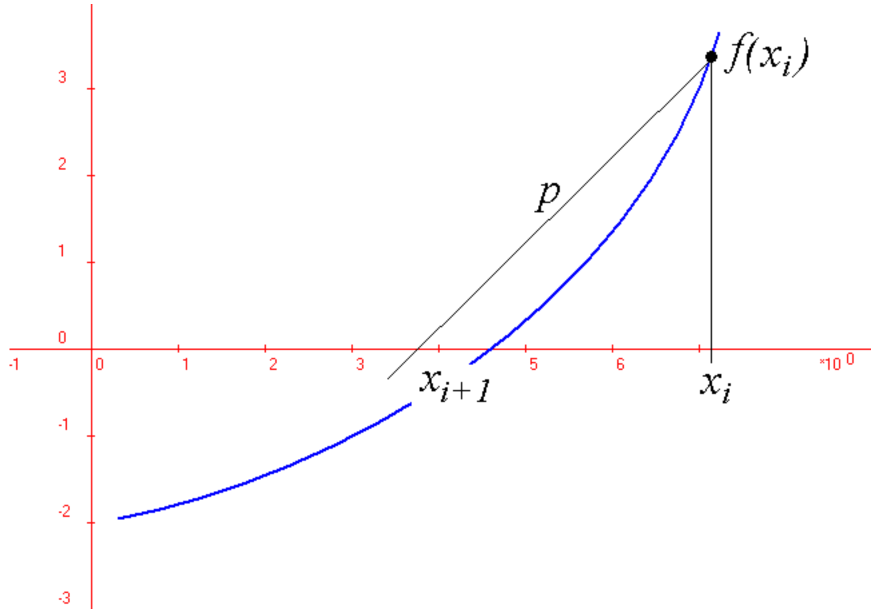


Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně): předpokládejme, že máme předchozí přibližnou hodnotu x_i kořene rovnice - na začátku procesu např. jednu z krajních hodnot intervalu ze separace (ozn. x_0) . Bodem $[x_i; f(x_i)]$ vedeme (zatím blíže nespecifikovanou) přímku p. Za další přibližnou hodnotu x_{i+1} pak prohlásíme průsečík této přímky s osou x. Než budeme přímku p blíže specifikovat, vypočtěme obecně její směrnici.

$$k = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

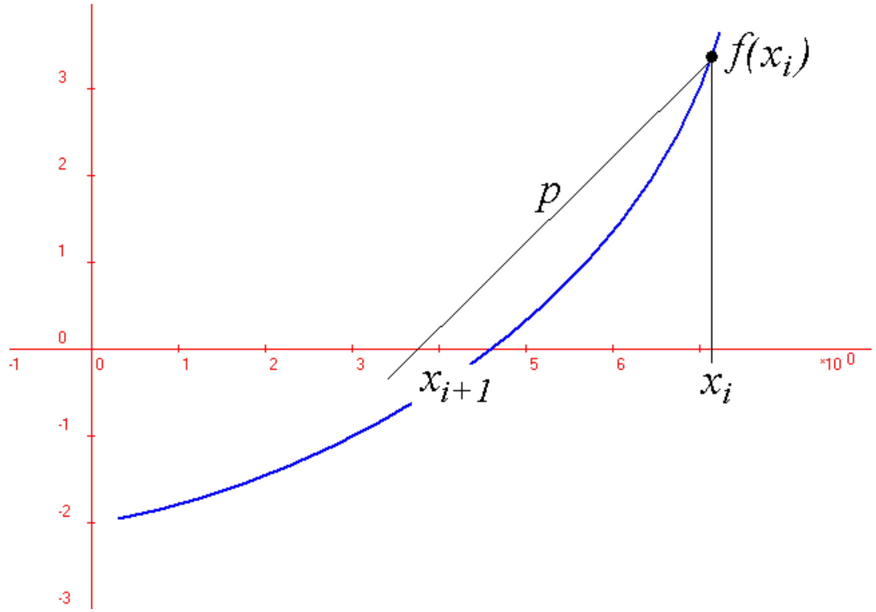


Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně): předpokládejme, že máme předchozí přibližnou hodnotu x_i kořene rovnice - na začátku procesu např. jednu z krajních hodnot intervalu ze separace (ozn. x_0) . Bodem $[x_i; f(x_i)]$ vedeme (zatím blíže nespecifikovanou) přímku p. Za další přibližnou hodnotu x_{i+1} pak prohlásíme průsečík této přímky s osou x. Než budeme přímku p blíže specifikovat, vypočtěme obecně její směrnici. Tato směrnice bude ovšem dána konkrétní volbou přímky. Nás zajímá hodnota x_{i+1}:

$$k = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

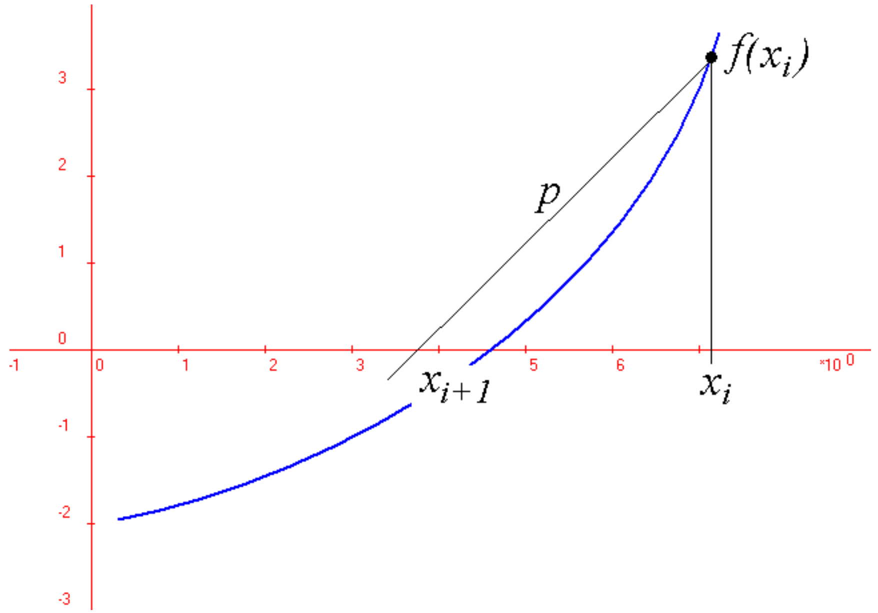


Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně): předpokládejme, že máme předchozí přibližnou hodnotu x_i kořene rovnice - na začátku procesu např. jednu z krajních hodnot intervalu ze separace (ozn. x_0) . Bodem $[x_i; f(x_i)]$ vedeme (zatím blíže nespecifikovanou) přímku p. Za další přibližnou hodnotu x_{i+1} pak prohlásíme průsečík této přímky s osou x. Než budeme přímku p blíže specifikovat, vypočtěme obecně její směrnici. Tato směrnice bude ovšem dána konkrétní volbou přímky. Nás zajímá hodnota x_{i+1}:

$$k = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}$$



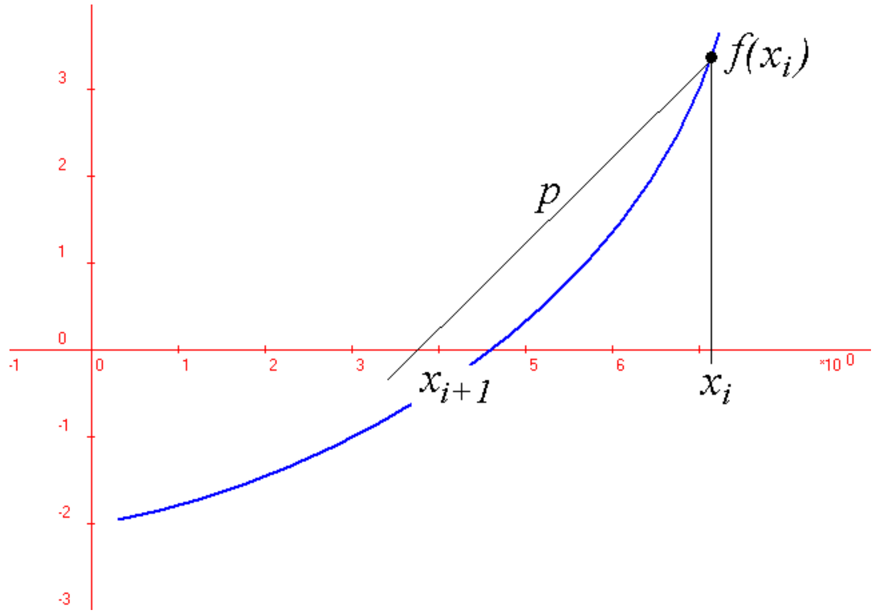
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně): předpokládejme, že máme předchozí přibližnou hodnotu x_i kořene rovnice - na začátku procesu např. jednu z krajních hodnot intervalu ze separace (ozn. x_0) . Bodem $[x_i; f(x_i)]$ vedeme (zatím blíže nespecifikovanou) přímku p. Za další přibližnou hodnotu x_{i+1} pak prohlásíme průsečík této přímky s osou x. Než budeme přímku p blíže specifikovat, vypočtěme obecně její směrnici. Tato směrnice bude ovšem dána konkrétní volbou přímky. Nás zajímá hodnota x_{i+1}:

$$k = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \quad \Rightarrow \boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}}$$

společný vzoreček několika metod, které se liší volbou přímky.



Řešení nelineárních rovnic

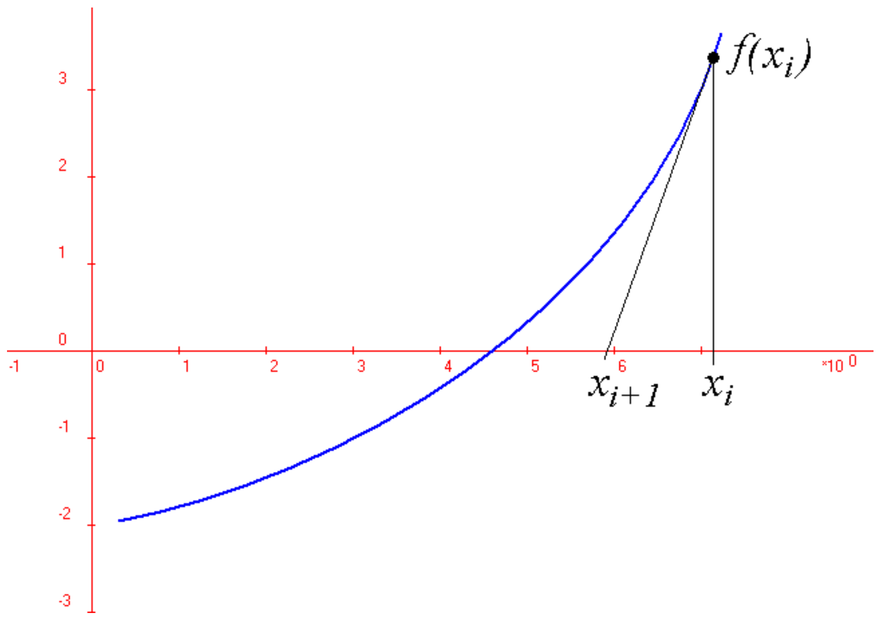
Zpřesňování aproximací:

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně): $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{k}$

Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně): $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{k}$

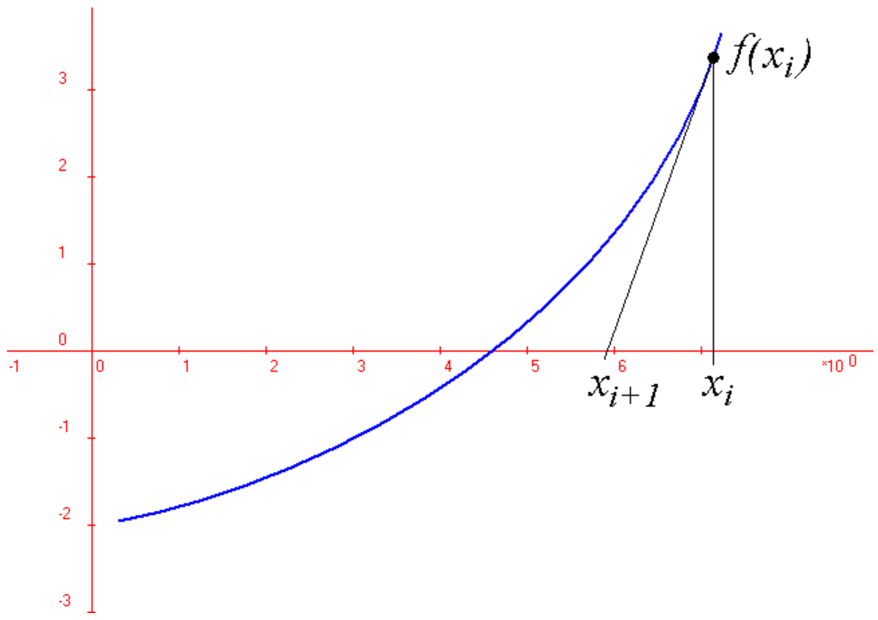
Metoda Newtonova: p je tečna v bodě $\left[x_i; f(x_i)\right] \quad \Rightarrow \quad k = f'(x_i)$



Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou (obecně):** $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{k}$

Metoda Newtonova: p je tečna v bodě $[x_i; f(x_i)]$ $\Rightarrow$ $k = f'(x_i)$

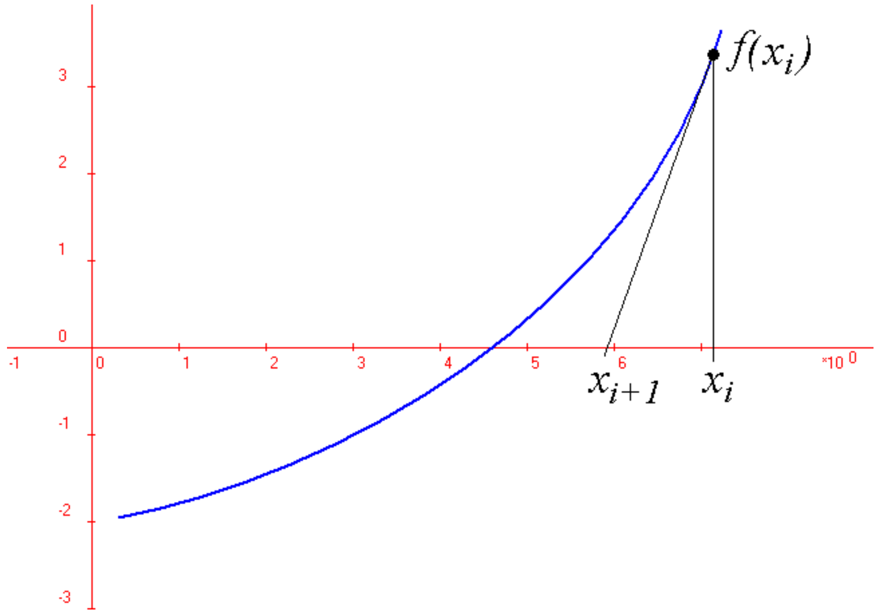


Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou (obecně):** $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{k}$

Metoda Newtonova: p je tečna v bodě $\left[x_i; f(x_i)\right]$ $\Rightarrow$ $k = f'(x_i)$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

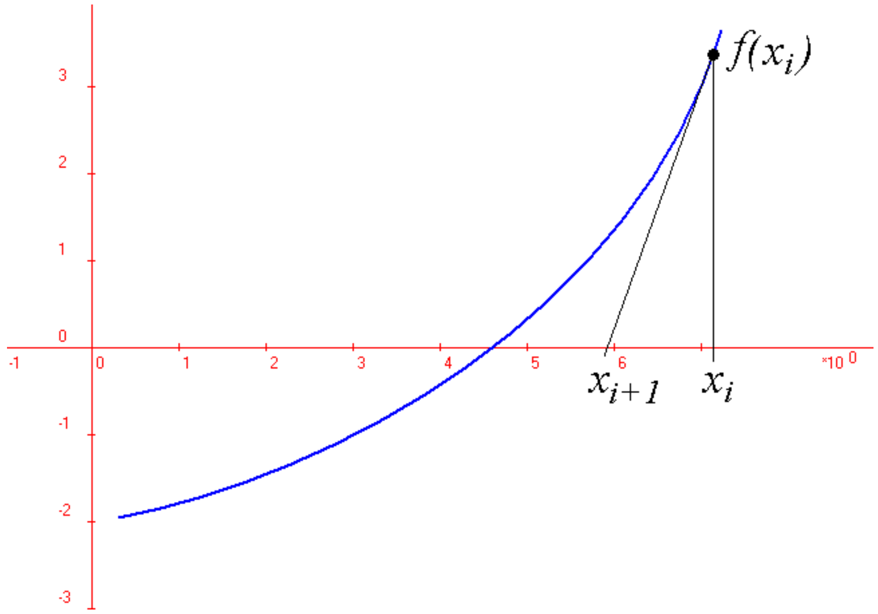


Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou (obecně):** $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{k}$

Metoda Newtonova: p je tečna v bodě $\left[x_i; f(x_i)\right] \Rightarrow k = f'(x_i)$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$



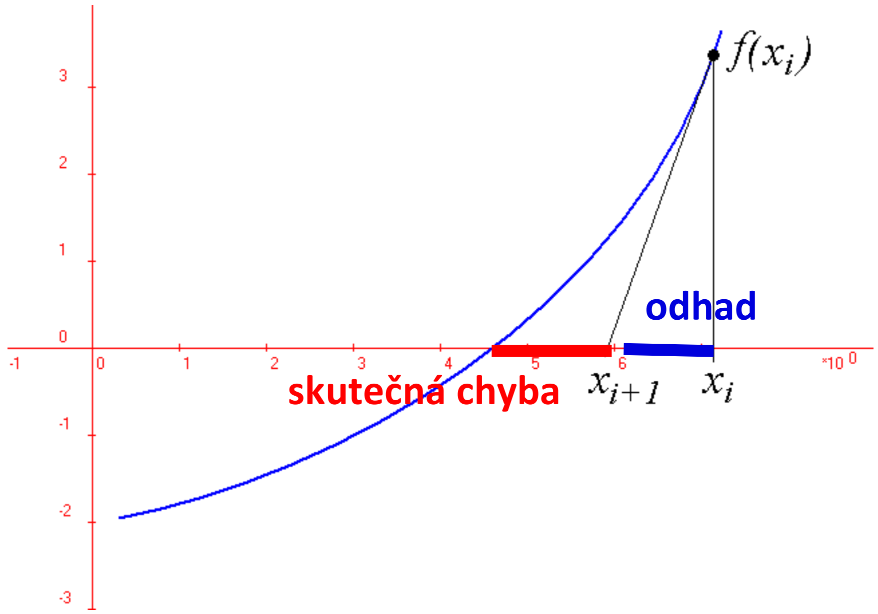
Stop kritérium (kdy metodu zastavit?):

Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou (obecně):** $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{k}$

Metoda Newtonova: p je tečna v bodě $[x_i; f(x_i)]$ $\Rightarrow$ $k = f'(x_i)$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$



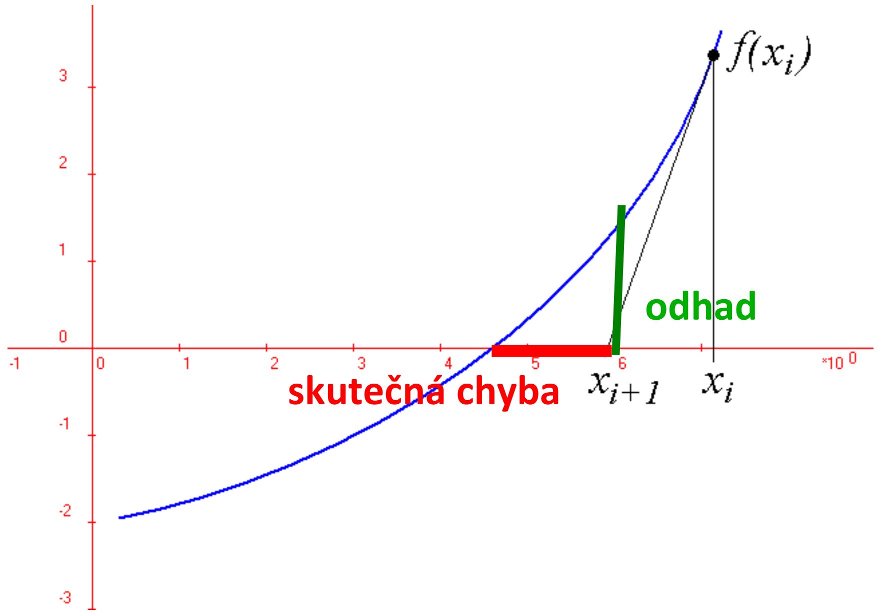
Stop kritérium (kdy metodu zastavit?): dvě možnosti: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou (obecně):** $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{k}$

Metoda Newtonova: p je tečna v bodě $\left[x_i; f(x_i)\right]$ $\Rightarrow$ $k = f'(x_i)$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

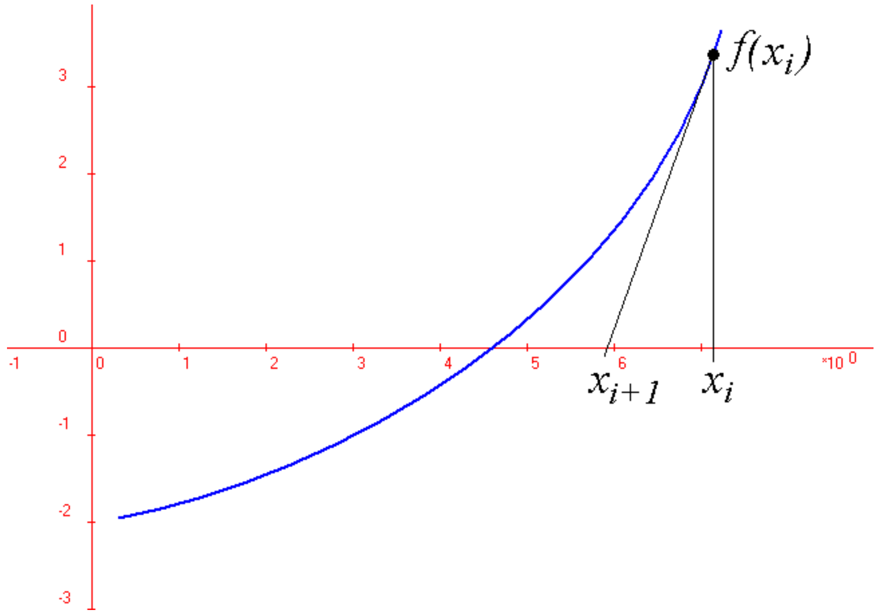


Stop kritérium (kdy metodu zastavit?): nebo $|f(x_{i+1})| < \varepsilon$

Řešení nelineárních rovnic

Metoda Newtonova: Každý kořen je po separaci ohraničen intervalem se dvěma krajními body. Každý krok Newtonovy metody však (na rozdíl např. od půlení intervalu) pracuje jen s jedním bodem.

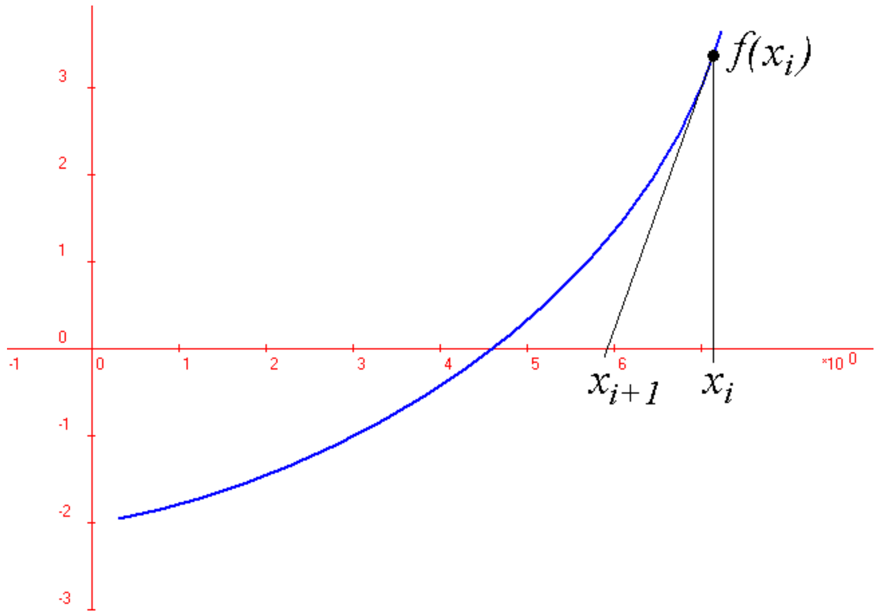
Důležitá otázka:



Řešení nelineárních rovnic

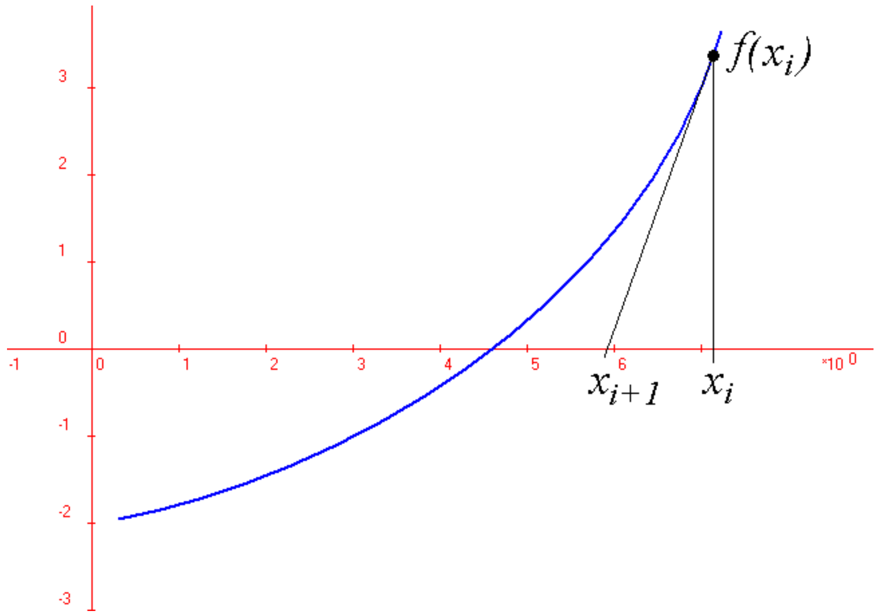
Metoda Newtonova: Každý kořen je po separaci ohraničen intervalem se dvěma krajními body. Každý krok Newtonovy metody však (na rozdíl např. od půlení intervalu) pracuje jen s jedním bodem.

Důležitá otázka: Ze kterého bodu Newtonovu metodu startovat?



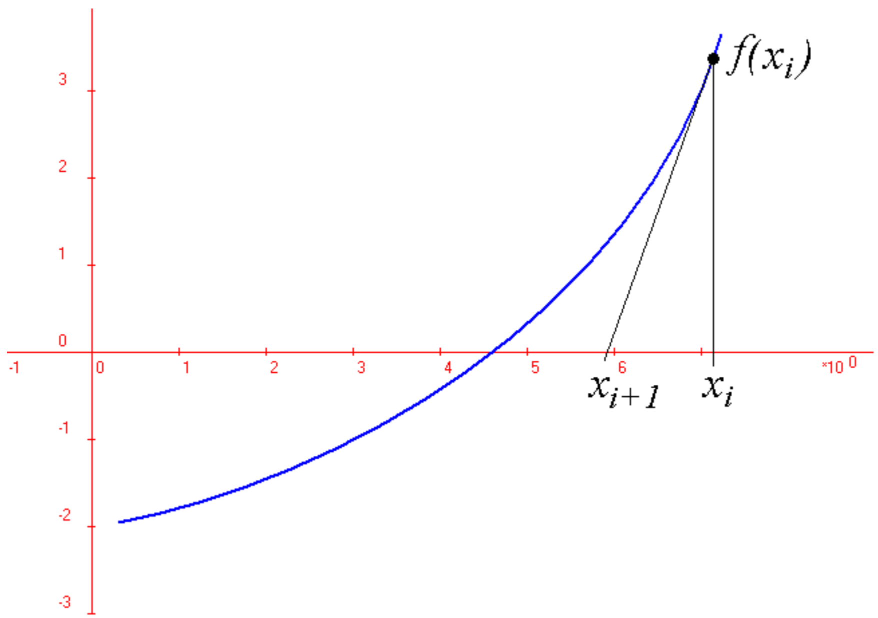
Řešení nelineárních rovnic

Metoda Newtonova: Každý kořen je po separaci ohraničen intervalem se dvěma krajními body. Každý krok Newtonovy metody však (na rozdíl např. od půlení intervalu) pracuje jen s jedním bodem.
Důležitá otázka: Ze kterého bodu Newtonovu metodu startovat? V situaci dle obrázku zřejmě zprava.



Řešení nelineárních rovnic

Metoda Newtonova: Každý kořen je po separaci ohraničen intervalem se dvěma krajními body. Každý krok Newtonovy metody však (na rozdíl např. od půlení intervalu) pracuje jen s jedním bodem.
Důležitá otázka: Ze kterého bodu Newtonovu metodu startovat? V situaci dle obrázku zřejmě zprava. Takový obrázek však většinou k dispozici nemáme.



Řešení nelineárních rovnic

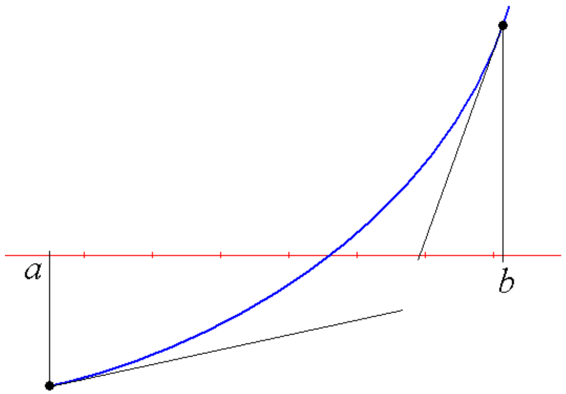
Fourierova podmínka:

Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:

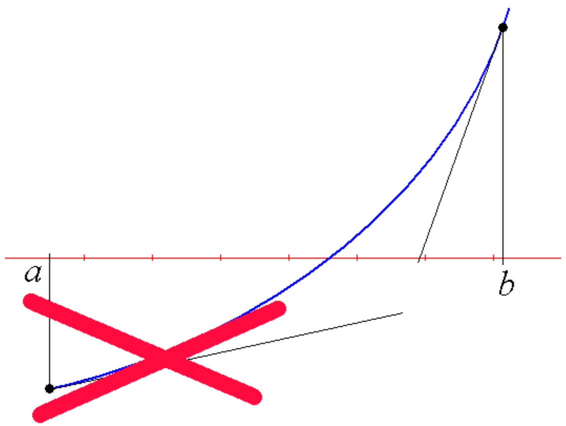
Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



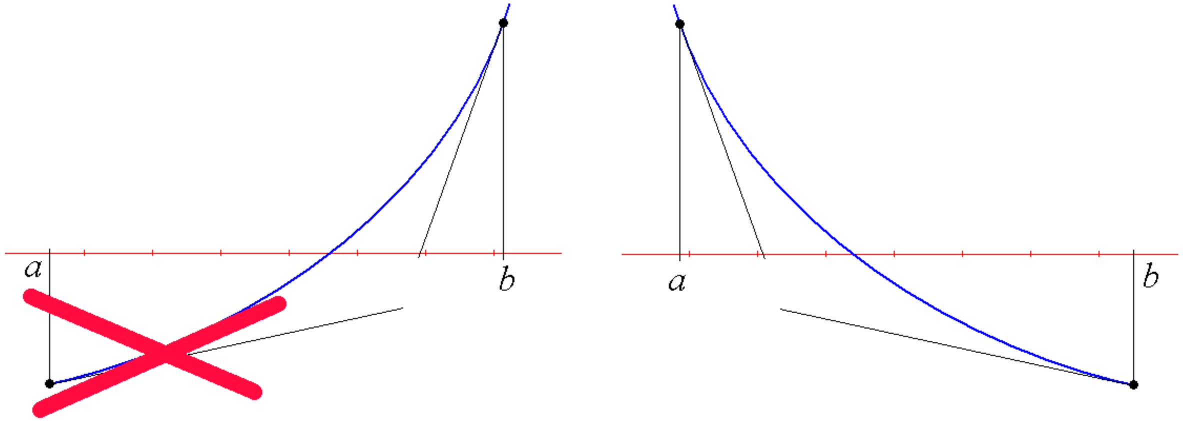
Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b \rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



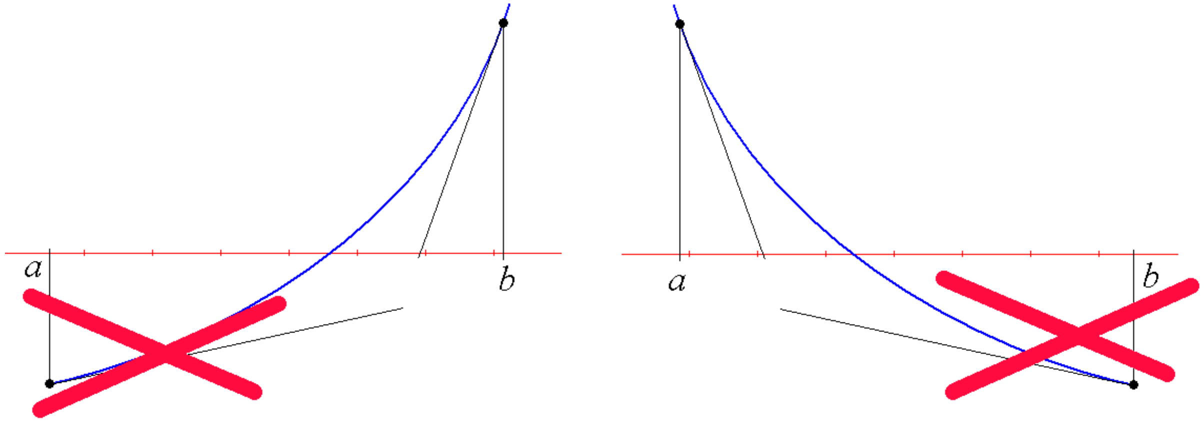
Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



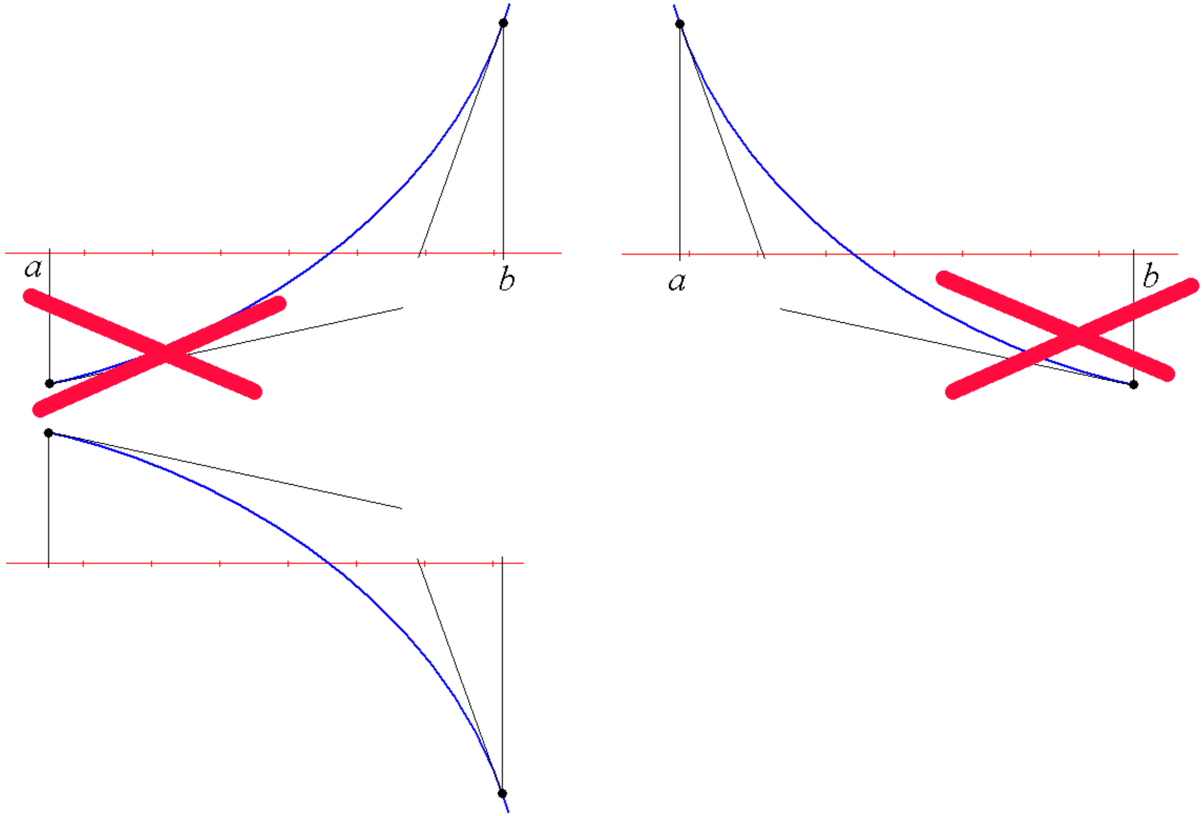
Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



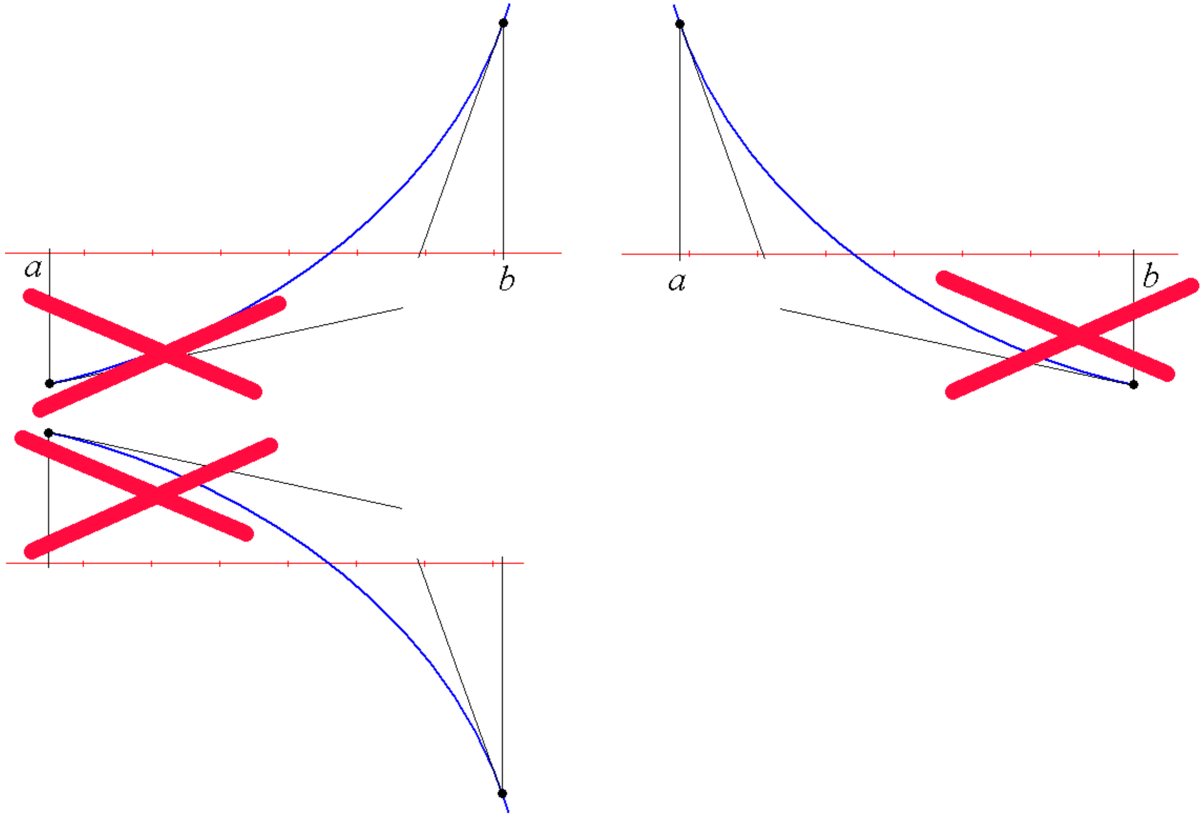
Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



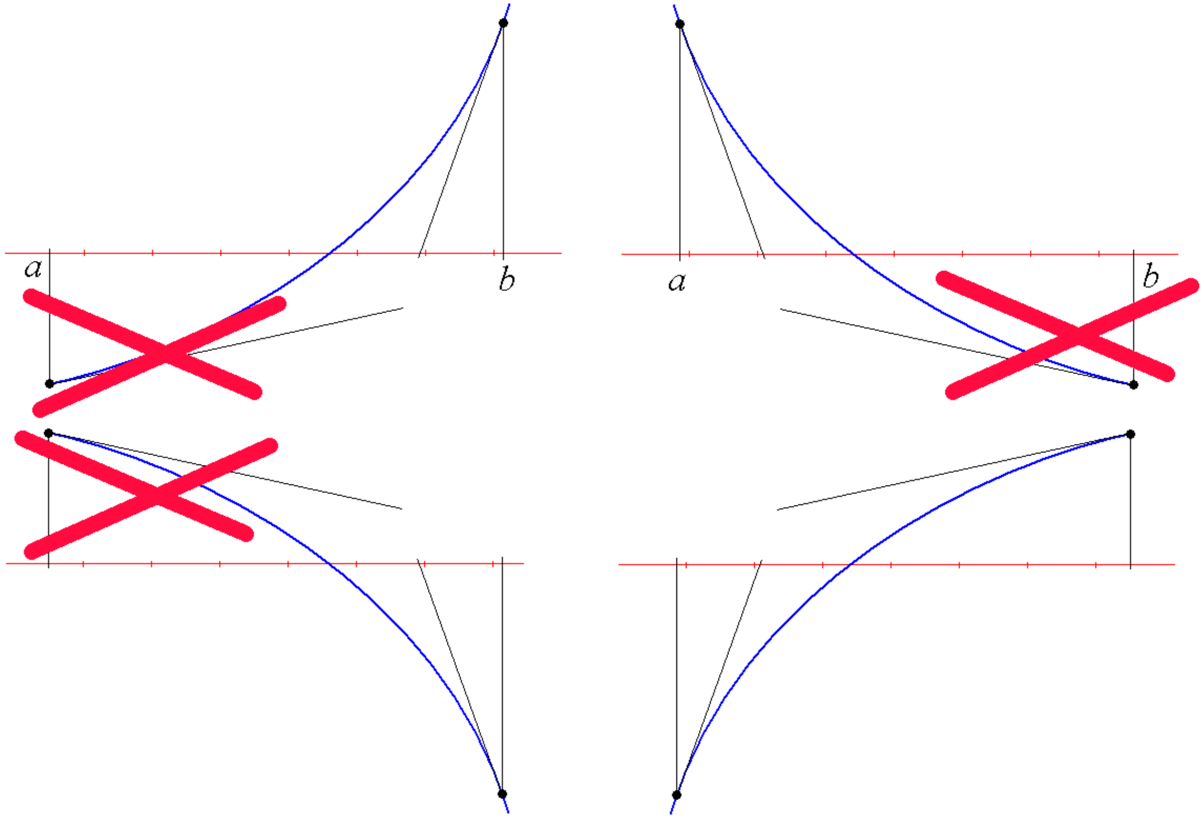
Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



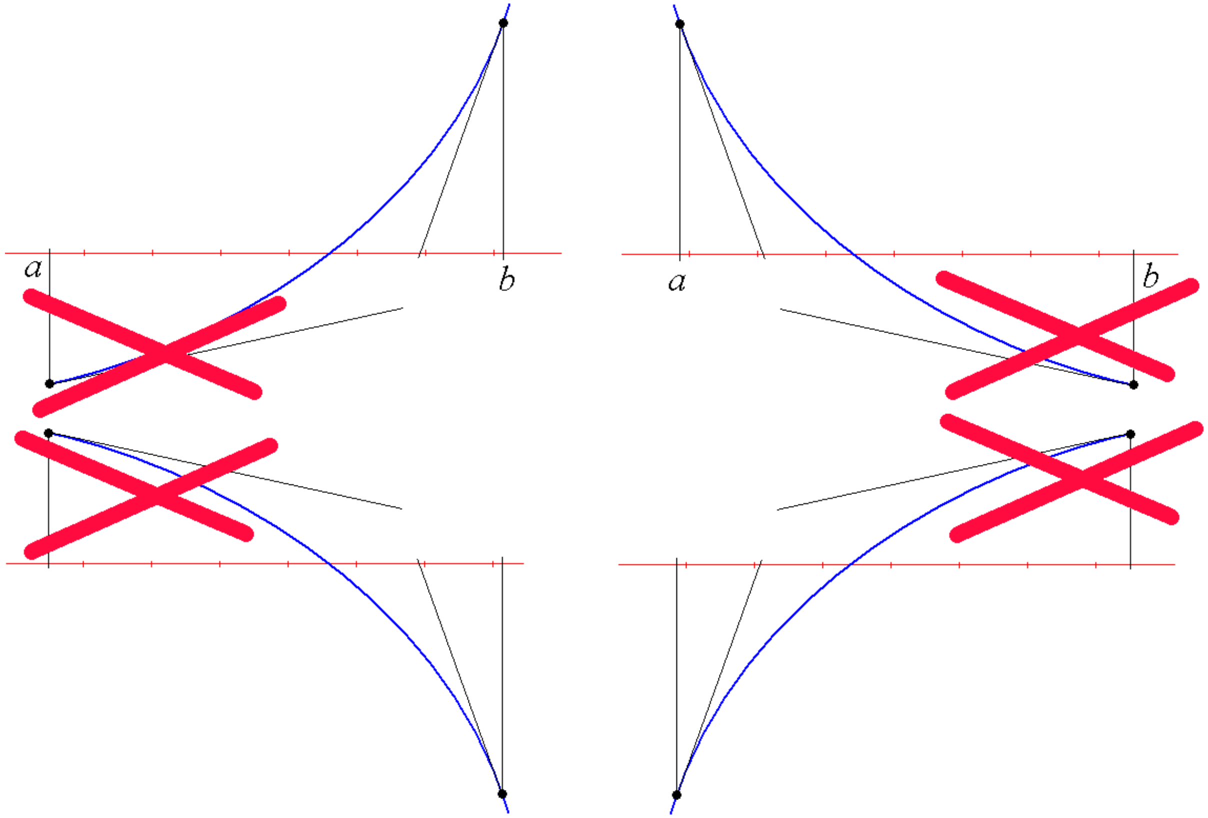
Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



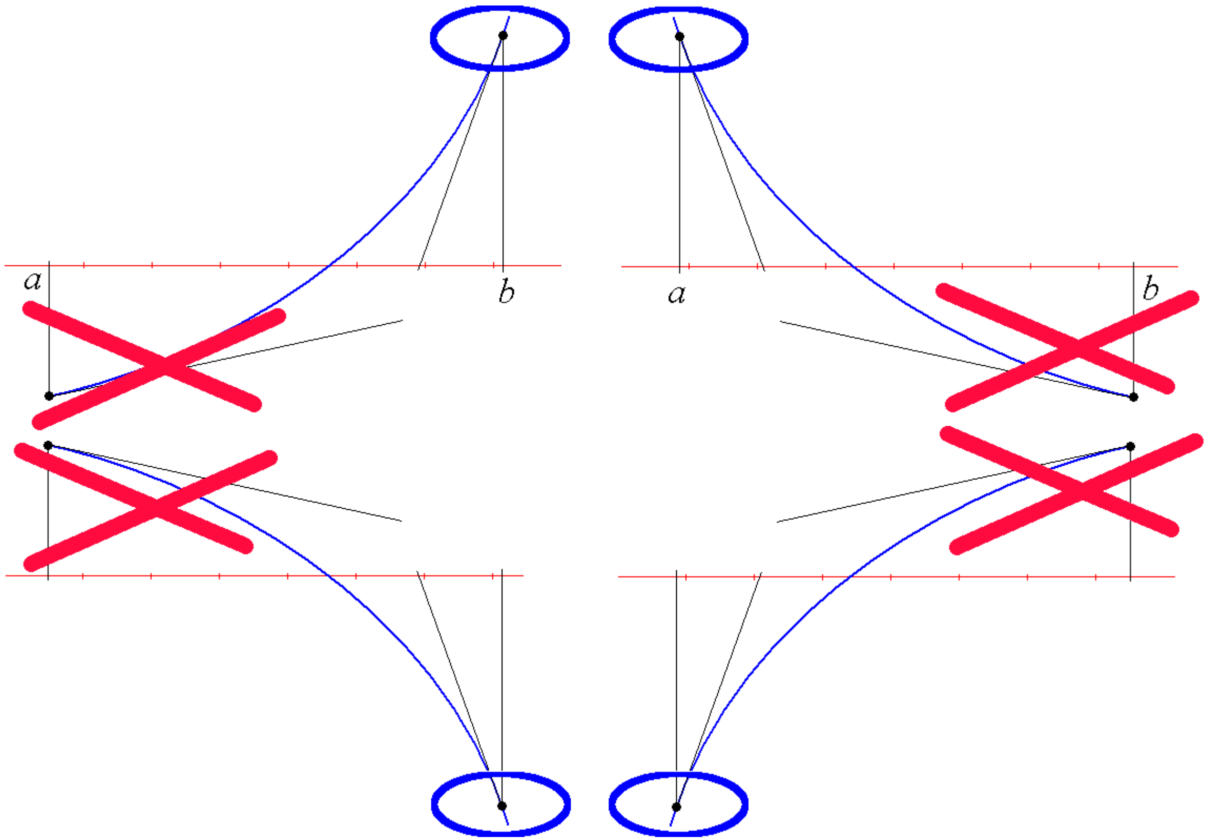
Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



Řešení nelineárních rovnic

Fourierova podmínka: Za předpokladu, že $f'(x)$ n a $f''(x)$ nemění na intervalu $\langle a; b\rangle$ znaménko, mohou nastat čtyři situace:



Fourierova podmínka: startujeme z bodu, ve kterém mají funkční hodnota a druhá derivace stejná znaménka, tj. $\boxed{f(a)\cdot f''(a)>0}$

Řešení nelineárních rovnic

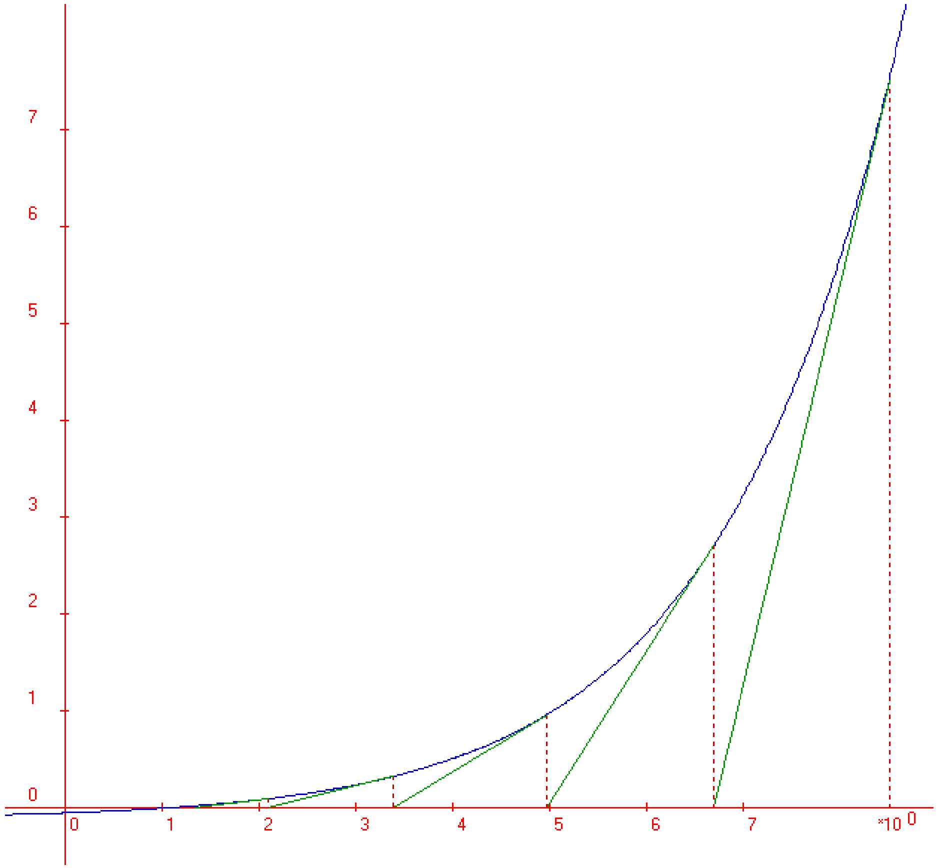
Konvergence Newtonovy metody:

a) **Fourierova podmínka** je postačující (je-li splněna, Newtonova metoda vždy konverguje). V praxi se bohužel většinou špatně ověřuje

Řešení nelineárních rovnic

Konvergence Newtonovy metody:

b) **Fourierova podmínka** je postačující (je-li splněna, Newtonova metoda vždy konverguje). V praxi se bohužel většinou špatně ověřuje



Řešení nelineárních rovnic

Konvergence Newtonovy metody:

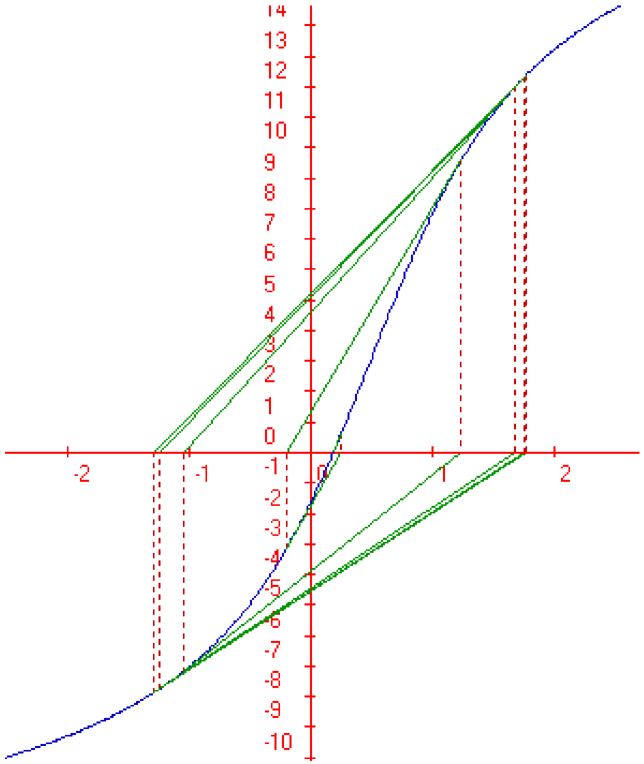
a) **Fourierova podmínka** je postačující (je-li splněna, Newtonova metoda vždy konverguje). V praxi se bohužel většinou špatně ověřuje
b) Newtonova metoda **konverguje**, startujeme-li ji **„dostatečně blízko“** kořene (Fourierova podmínka nemusí být splněna)

Řešení nelineárních rovnic

Konvergence Newtonovy metody:

a) **Fourierova podmínka** je postačující (je-li splněna, Newtonova metoda vždy konverguje). V praxi se bohužel většinou špatně ověřuje

b) Newtonova metoda **konverguje**, startujeme-li ji **„dostatečně blízko"** kořene (Fourierova podmínka nemusí být splněna)



Řešení nelineárních rovnic

Konvergence Newtonovy metody:

a) **Fourierova podmínka** je postačující (je-li splněna, Newtonova metoda vždy konverguje). V praxi se bohužel většinou špatně ověřuje
b) Newtonova metoda **konverguje**, startujeme-li ji **„dostatečně blízko“** kořene (Fourierova podmínka nemusí být splněna)
c) Newtonova metoda je řádu **dvě** (její konvergence je kvadratická).

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

3 Příklad: Newtonovou metodou určeme kořeny rovnice z př. 1 na šest desetinných míst.

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

3 Příklad: Newtonovou metodou určeme kořeny rovnice z př. 1 na šest desetinných míst.

Řešení opět naprogramujeme v Matlabu. Pro každý kořen však musíme nejdřív určit startovací bod. Zkusíme nejdřív ověřit Fourierovu podmínku:

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1; f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}}$$

Pro $x \in (-2; -1)$ ani první ani druhá derivace nemění znaménko (první je stále kladná, druhá stále záporná).

Bod $x_0 = -2$ nesplňuje Fourierovu podmínku (derivace v ní neexistují).

$$f(-1) = \sqrt{-1+2} - \frac{(-1)}{3} - 1 = +\frac{1}{3}; \ \ f''(-1) = -\frac{1}{4}(-1+2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}$$

Ani bod $x_0 = -1$ nesplňuje Fourierovu podmínku. Metodu však nemusíme startovat z krajních bodů pracovního intervalu. Vyzkoušejme např. $x_0 = -1.9$:

$$f(-1.9) = \sqrt{-1.9+2} - \frac{(-1.9)}{3} - 1 \approx -0{,}05; \ \ f''(-1{,}9) = -\frac{1}{4}(-1{,}9+2)^{-\frac{3}{2}} \approx -7{,}9$$

Ani pro $x \in (4; 5)$ nemění derivace znaménka (obě jsou záporné). Pro $x_0 = 5$ je

$$f(5) = \sqrt{5+2} - \frac{5}{3} - 1 \approx -0{,}02; \ \ f''(5) = -\frac{1}{4}(7+2)^{-\frac{3}{2}} \approx -7{,}9$$

Pro kořen x_1 si tedy půjdeme z bodu $x_0 = -1.9$; pro x_2 z bodu $x_0 = 5$.

```
%Newton
clc
format long
syms x
f=inline('sqrt(x+2)-x/3-1');
diff(f(x),x);
fc=inline(diff(f(x),x),'x');
a=-1.9;    %startovací bod pro x1; pro x2 bude a=5
Epsilon=5*10^(-7);
Chyba=1;
PocetKroku=0;
while Chyba>Epsilon
    PocetKroku=PocetKroku+1;
    b=a-f(a)/fc(a);
    Chyba= abs(b-a);
    a=b;
  end;
Koren=a
Chyba
PocetKroku
```

$x_1 \approx -1.854102$; chyba $\approx 1.12 \cdot 10^{-8}$; Počet kroků = 4
$x_2 \approx 4.854102$; chyba $\approx 4.95 \cdot 10^{-8}$; Počet kroků = 3

Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ přímkou (obecně):

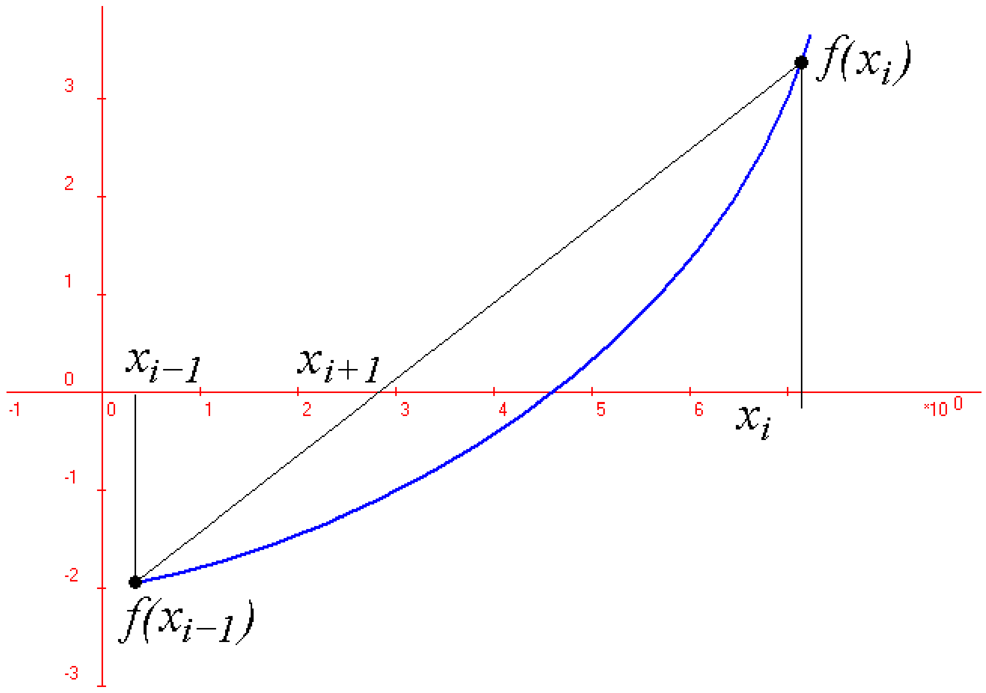
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}$$

Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou (obecně):**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}$$

Metoda sečen: p je sečna procházející body $[x_{i-1}; f(x_{i-1})]$; $[x_i; f(x_i)]$



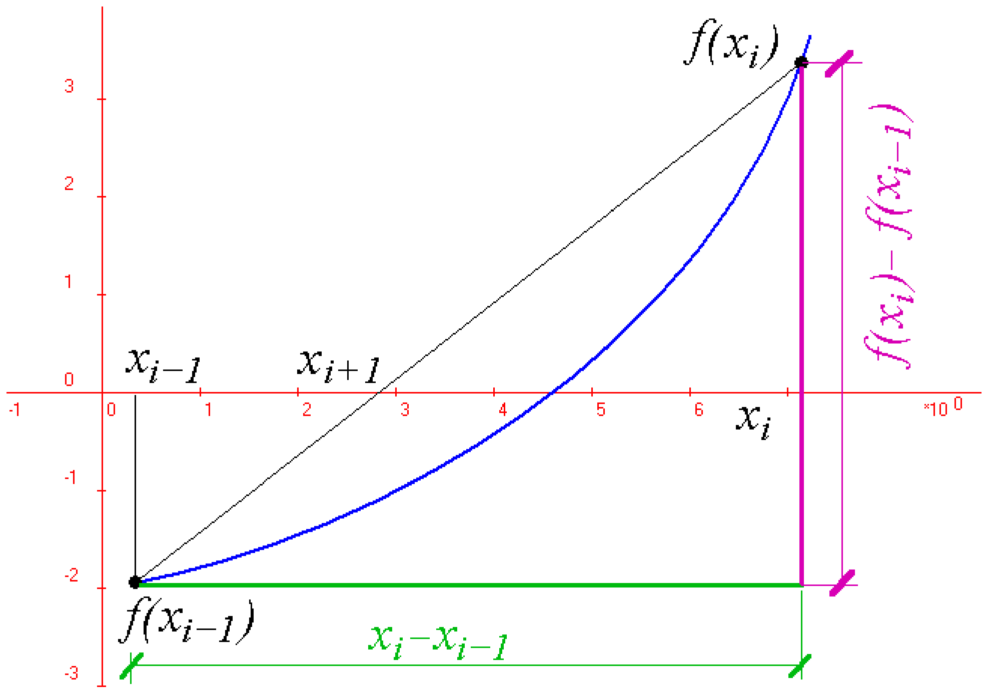
Řešení nelineárních rovnic

Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou (obecně):**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}$$

Metoda sečen: p je sečna procházející body $[x_{i-1}; f(x_{i-1})]$; $[x_i; f(x_i)]$

$$k = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$



Řešení nelineárních rovnic

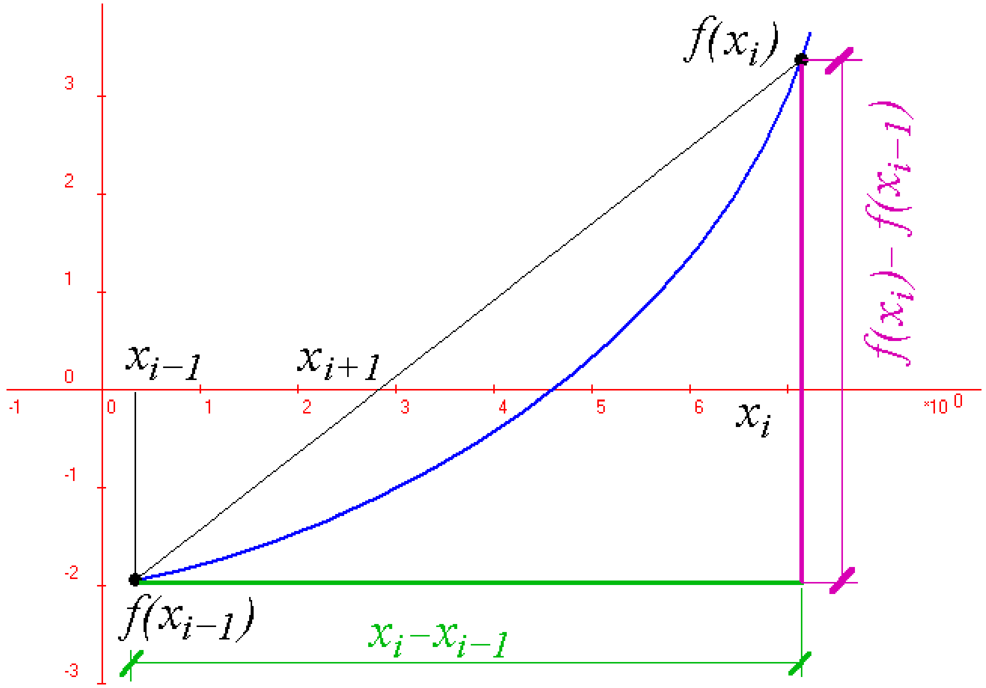
Aproximace funkce $f(x)$ **přímkou (obecně):**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k}$$

Metoda sečen: p je sečna procházející body $[x_{i-1}; f(x_{i-1})]$; $[x_i; f(x_i)]$

$$k = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{k} = \boxed{x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)}$$



Řešení nelineárních rovnic

4 Příklad: Metodou sečen určeme kořeny rovnice z př. 1 na šest desetinných míst.

Řešení opět naprogramujeme v Matlabu.

```
% Metoda secen
clc;format long
f = @(x) sqrt(x+2)-x/3-1
a=-2;b=-1;
Epsilon=5*10^(-7);  Chyba=1; PocetKroku=0;
MaxPocetKroku=500;                % u metody sečen nemáme zaručenou konvergenci
while (Chyba>Epsilon)&(PocetKroku<MaxPocetKroku)%pojistka pro případ divergence
    PocetKroku=PocetKroku+1;
    k=(f(a)-f(b))/(a-b);
    c=a-f(a)/k;
    Chyba = abs(c-a);
    a=c;
 end;                   % while
Koren=c
Chyba
PocetKroku
```

Počet kroků dosáhl maximálního počtu, aniž bychom dosáhli požadované přesnosti. Údajný kořen je dokonce komplexní číslo, což je nesmysl – v některém kroku se metoda zřejmě dostala mimo definiční obor reálné odmocniny a program s ní začal pracovat jako s odmocninou z komplexního čísla… **Metoda diverguje**

Řešení nelineárních rovnic

4 Příklad: Metodou sečen určeme kořeny rovnice z př. 1 na šest desetinných míst.

Řešení opět naprogramujeme v Matlabu.

```
% Metoda secen
clc;format long
f = @(x) sqrt(x+2)-x/3-1
a=-1;b=-2;
Epsilon=5*10^(-7);  Chyba=1; PocetKroku=0;
MaxPocetKroku=500;                % u metody sečen nemáme zaručenou konvergenci
while (Chyba>Epsilon)&(PocetKroku<MaxPocetKroku)%pojistka pro případ divergence
    PocetKroku=PocetKroku+1;
    k=(f(a)-f(b))/(a-b);
    c=a-f(a)/k;
    Chyba = abs(c-a);
    a=c;
 end;                  % while
Koren=c
Chyba
PocetKroku
```

Ovšem pozor – stačí zaměnit počáteční body $a; b$ a metoda konverguje: po 24 krocích je

x1 ≈-1.854101; chyba ≈ 4.2*10^(-7)

Řešení nelineárních rovnic

4 Příklad: Metodou sečen určeme kořeny rovnice z př. 1 na šest desetinných míst.

Řešení opět naprogramujeme v Matlabu.

```
% Metoda secen
clc;format long
f = @(x) sqrt(x+2)-x/3-1
a=4;b=5;
Epsilon=5*10^(-7);  Chyba=1; PocetKroku=0;
MaxPocetKroku=500;                % u metody sečen nemáme zaručenou konvergenci
while (Chyba>Epsilon)&(PocetKroku<MaxPocetKroku)%pojistka pro případ divergence
    PocetKroku=PocetKroku+1;
    k=(f(a)-f(b))/(a-b);
    c=a-f(a)/k;
    Chyba = abs(c-a);
    a=c;
 end;                  % while
Koren=c
Chyba
PocetKroku
```

x1 ≈ 4.854101; chyba ≈ 3.3*10^(-7); počet kroků: 4

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

V i-tém kroku sestrojí sečnu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

V i-tém kroku sestrojí sečnu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

a než přejde k dalšímu, rozhodne, na kterém ze dvou vzniklých subintervalů bude pokračovat

$$f(x_{i-1}) f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$$

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

V i-tém kroku sestrojí sečnu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

a než přejde k dalšímu, rozhodne, na kterém ze dvou vzniklých subintervalů bude pokračovat

$$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$$

Díky tomu vždy konverguje.

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

V i-tém kroku sestrojí sečnu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

a než přejde k dalšímu, rozhodne, na kterém ze dvou vzniklých subintervalů bude pokračovat

$$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$$

Regula falsi: **srovnej** **půlení intervalu**

i-tá sečna $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$

pohlídej
znaménko: $f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$

i+1 sečna $x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \cdot f(x_{i+1})$

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

V i-tém kroku sestrojí sečnu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

a než přejde k dalšímu, rozhodne, na kterém ze dvou vzniklých subintervalů bude pokračovat

$$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$$

	Regula falsi:	**srovnej**	**půlení intervalu**
i-tá sečna	$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$	i-té půlení	$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$
pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$		
i+1 sečna	$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \cdot f(x_{i+1})$		

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

V i-tém kroku sestrojí sečnu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

a než přejde k dalšímu, rozhodne, na kterém ze dvou vzniklých subintervalů bude pokračovat

$$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$$

Regula falsi:		**srovnej**	**půlení intervalu**
i-tá sečna	$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$	i-té půlení	$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$
pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$	pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$
i+1 sečna	$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \cdot f(x_{i+1})$		

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

V i-tém kroku sestrojí sečnu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

a než přejde k dalšímu, rozhodne, na kterém ze dvou vzniklých subintervalů bude pokračovat

$$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$$

Regula falsi:		**srovnej**	**půlení intervalu**
i-tá sečna	$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$	i-té půlení	$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$
pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$	pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$
i+1 sečna	$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \cdot f(x_{i+1})$	i+1 půlení	$x_{i+2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Řešení nelineárních rovnic

Metoda regula falsi = metoda sečen „hlídající znaménka“: kombinuje metodu sečen a metodu bisekce.

V i-tém kroku sestrojí sečnu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

a než přejde k dalšímu, rozhodne, na kterém ze dvou vzniklých subintervalů bude pokračovat

$$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$$

	Regula falsi:	**srovnej**	**půlení intervalu**
i-tá sečna	$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$	i-té půlení	$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$
pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$	pohlídej znaménko:	$f(x_{i-1})\, f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow x_i := x_{i-1}$
i+1 sečna	$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \cdot f(x_{i+1})$	i+1 půlení	$x_{i+2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
Stop – kriterium:	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert < \varepsilon$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert < \varepsilon$	

Kód v Matlabu

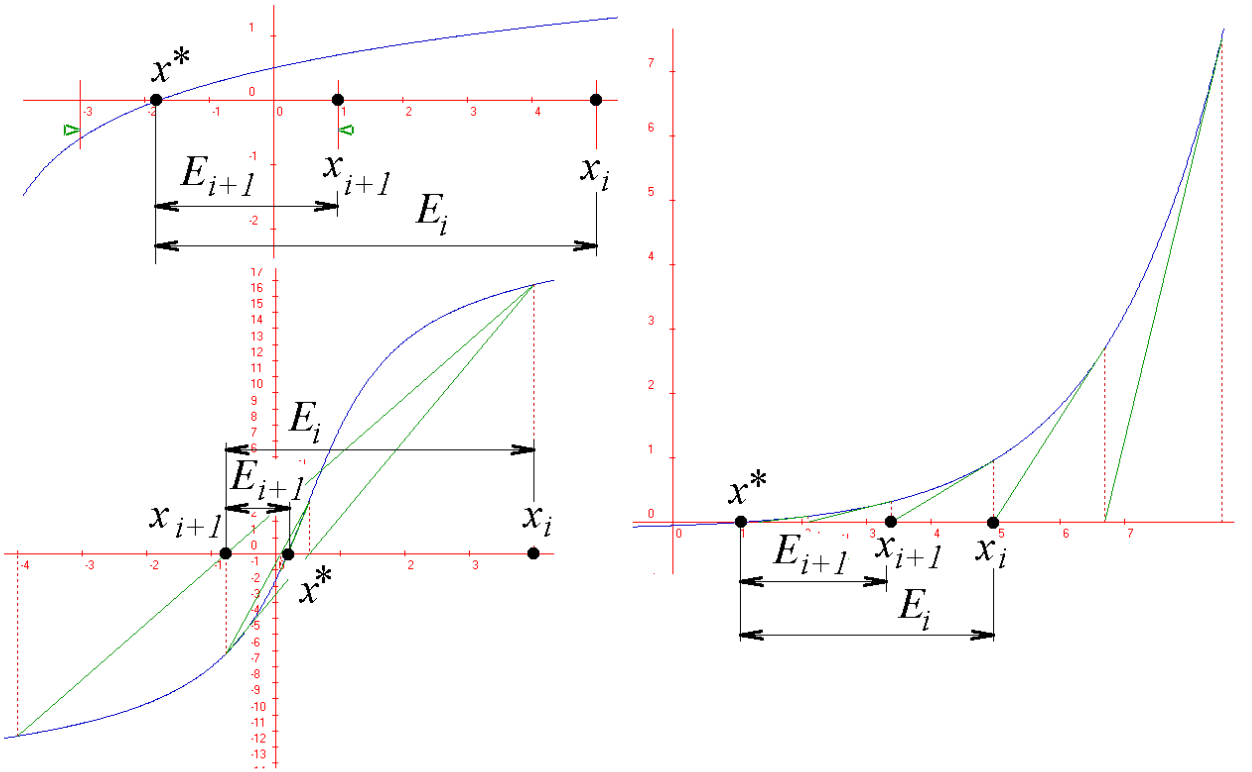
```
% Regula Falsi
clc;format long
f = @(x) sqrt(x+2)-x/3-1
a=-1; b=-2;
Epsilon=5*10^(-7);  % požadovaná přesnost
Chyba=1; PocetKroku=0; MaxPocetKroku=500;
while (Chyba>Epsilon) & (PocetKroku<MaxPocetKroku)
    % toto jsou kroky metody sečen
    PocetKroku=PocetKroku+1;
    k=(f(a)-f(b))/(a-b);
    c=a-f(a)/k;
    Chyba = abs(c-a);
    % toto jsou kroky půlení intervalu
    if f(a)*f(c)<0 b=c;    % pokračujeme v levém intervalu
    else a=c;              % pokračujeme v pravém intervalu
    end;           % if
  end;             % while
Koren=c
Chyba
PocetKroku
```

Řešení nelineárních rovnic

Řád metody:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

kde E_n resp. E_{n+1} je chyba po n-tém resp. $n+1$ ním kroku. Čím vyšší je číslo konvergence, tím rychleji metoda konverguje.



Řešení nelineárních rovnic

Řád metody:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

kde E_n resp. E_{n+1} je chyba po n-tém resp. $n+1$ ním kroku. Čím vyšší je číslo konvergence, tím rychleji metoda konverguje.

řád	konvergence	metoda

Řešení nelineárních rovnic

Řád metody:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

kde E_n resp. E_{n+1} je chyba po n-tém resp. $n+1$ ním kroku. Čím vyšší je číslo konvergence, tím rychleji metoda konverguje.

řád	konvergence	metoda
$p=1$	lineární	půlení intervalu
		regula falsi

Řešení nelineárních rovnic

Řád metody:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

kde E_n resp. E_{n+1} je chyba po n-tém resp. $n+1$ ním kroku. Čím vyšší je číslo konvergence, tím rychleji metoda konverguje.

řád	konvergence	metoda	
$p=1$	lineární	půlení intervalu	
		regula falsi	
$1<p<2$	superlineární	sečen	$p_s = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

Řešení nelineárních rovnic

Řád metody:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

kde E_n resp. E_{n+1} je chyba po n-tém resp. $n+1$ ním kroku. Čím vyšší je číslo konvergence, tím rychleji metoda konverguje.

řád	**konvergence**	**metoda**	
$p=1$	lineární	půlení intervalu	
		regula falsi	
$1<p<2$	superlineární	sečen	$p_s = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$
$p=2$	kvadratická	tečen	

Domácí úloha: **Vypočtěte na kalkulačce** $p_s = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$**;**

Řešení nelineárních rovnic

Řád metody:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

kde E_n resp. E_{n+1} je chyba po n-tém resp. $n+1$ ním kroku. Čím vyšší je číslo konvergence, tím rychleji metoda konverguje.

řád	**konvergence**	**metoda**	
$p = 1$	lineární	půlení intervalu	
		regula falsi	
$1 < p < 2$	superlineární	sečen	$p_s = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$
$p = 2$	kvadratická	tečen	

Domácí úloha: **Vypočtěte na kalkulačce** $p_s = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$**;**

poté mačkejte opakovaně tlačítko 1/x 😊

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$

b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$

c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

(následující aproximaci tedy dostaneme jako funkční hodnotu funkce g v aproximaci předcházející)

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

(následující aproximaci tedy dostaneme jako funkční hodnotu funkce g v aproximaci předcházející)

Ad a) Možností, jak upravit rovnici $f(x) = 0$ na tvar $x = g(x)$, je nekonečně mnoho. Např:

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

(následující aproximaci tedy dostaneme jako funkční hodnotu funkce g v aproximaci předcházející)

Ad a) Možností, jak upravit rovnici $f(x) = 0$ na tvar $x = g(x)$, je nekonečně mnoho. Např

Příklad 5: $f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\sqrt{x+1} - 3$

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$

b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$

c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

(následující aproximaci tedy dostaneme jako funkční hodnotu funkce g v aproximaci předcházející)

Ad a) Možností, jak upravit rovnici $f(x) = 0$ na tvar $x = g(x)$, je nekonečně mnoho. Např

Příklad 5: $f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\sqrt{x+1} - 3$

$f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2 - 2$

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

(následující aproximaci tedy dostaneme jako funkční hodnotu funkce g v aproximaci předcházející)

Ad a) Možností, jak upravit rovnici $f(x) = 0$ na tvar $x = g(x)$, je nekonečně mnoho.

Příklad 5: $f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\sqrt{x+2} - 3$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2 - 2$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x^2}{3x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x^2 + 3x}{3\sqrt{x+2}}$$

atd.

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

(následující aproximaci tedy dostaneme jako funkční hodnotu funkce g v aproximaci předcházející)

Fungování této metody je zřejmé z geometrického názoru

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

(následující aproximaci tedy dostaneme jako funkční hodnotu funkce g v aproximaci předcházející)

Fungování této metody je zřejmé z geometrického názoru

(hledáme průsečík grafů funkcí x; $g(x)$):

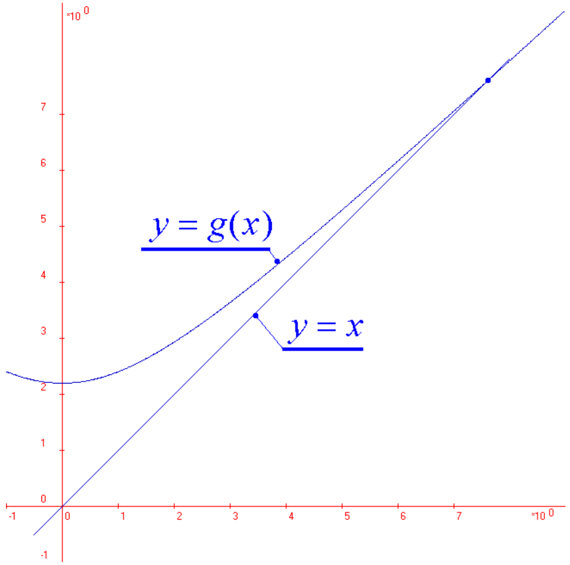
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

d) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
e) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
f) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

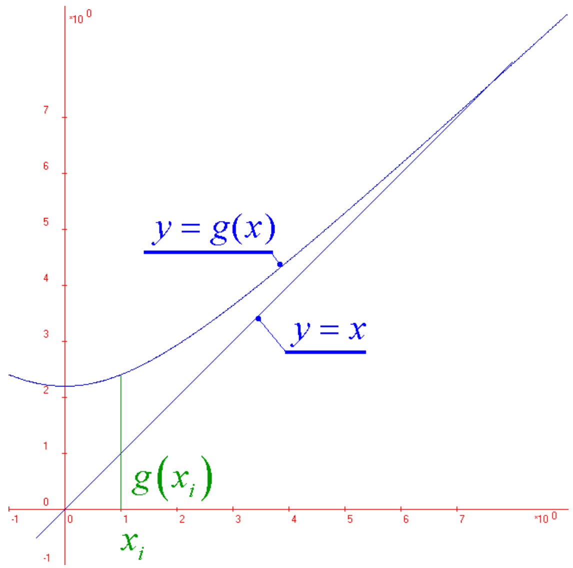
Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$

b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$

c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



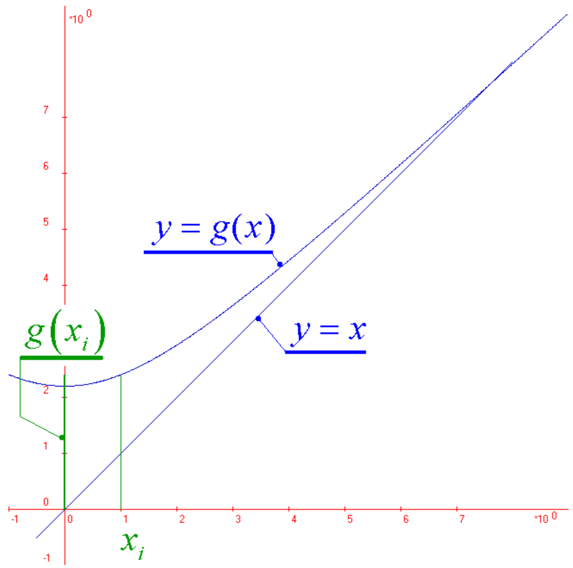
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

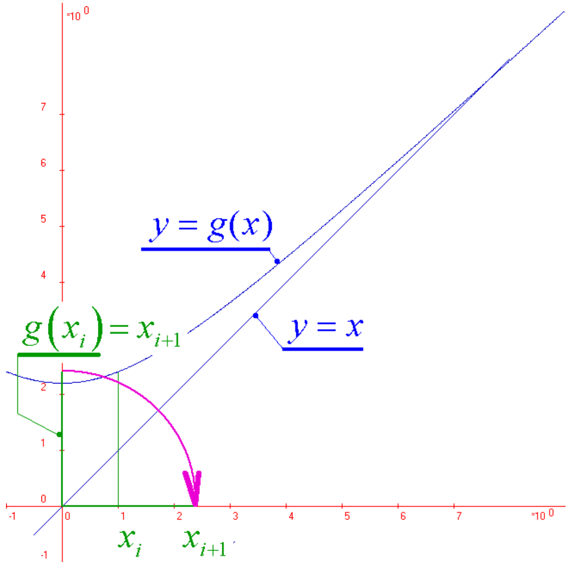
Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$

b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$

c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



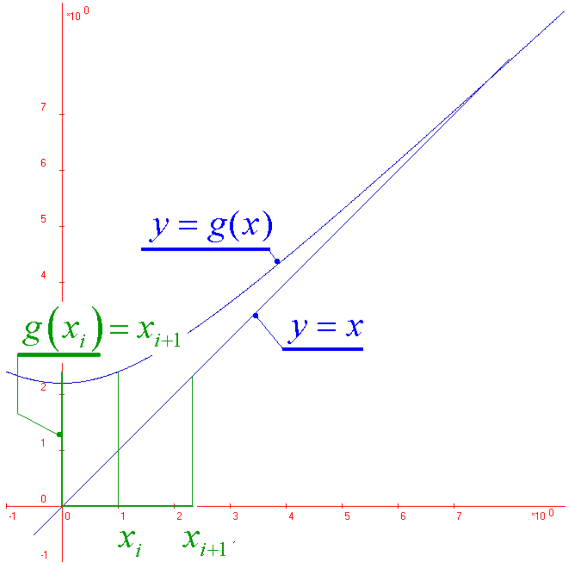
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

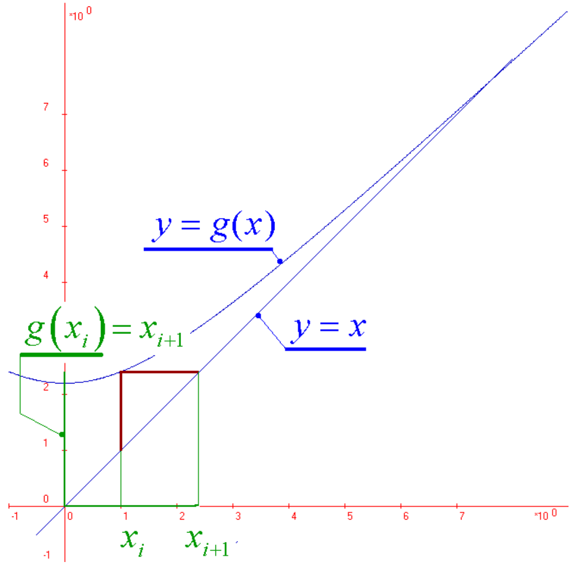
Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$

b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$

c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

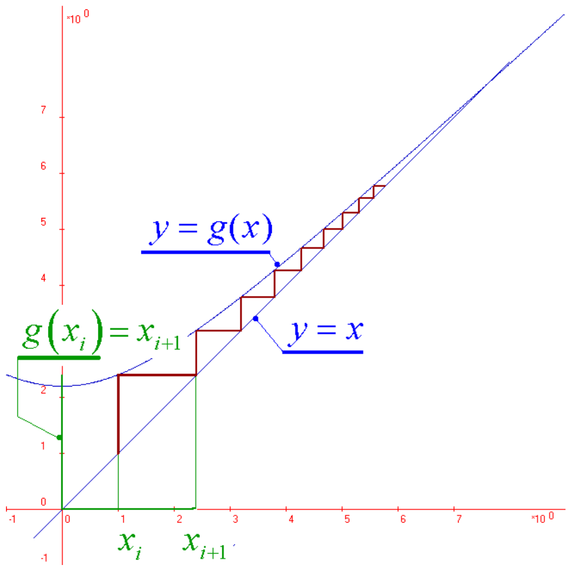
Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$

b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$

c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

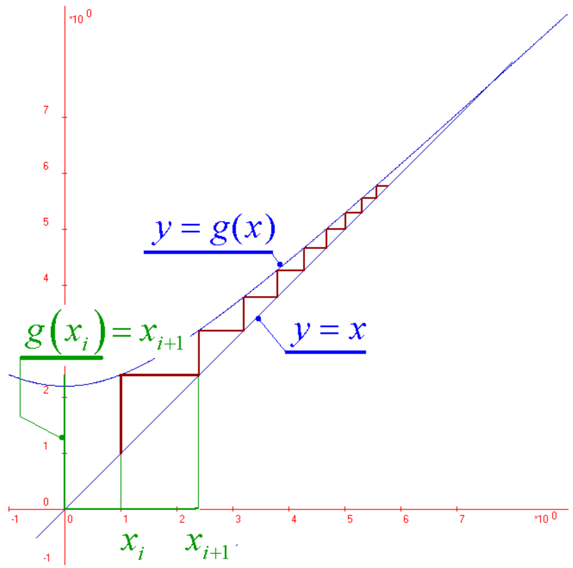
Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$

b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$

c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Takto ovšem metoda nefunguje vždy.

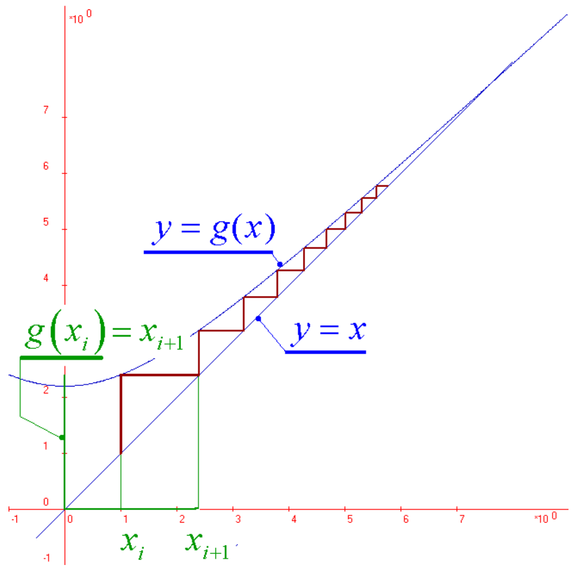
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Takto ovšem metoda nefunguje vždy. Všimněte si, že pro funkci $g(x)$ dle obrázku platí:

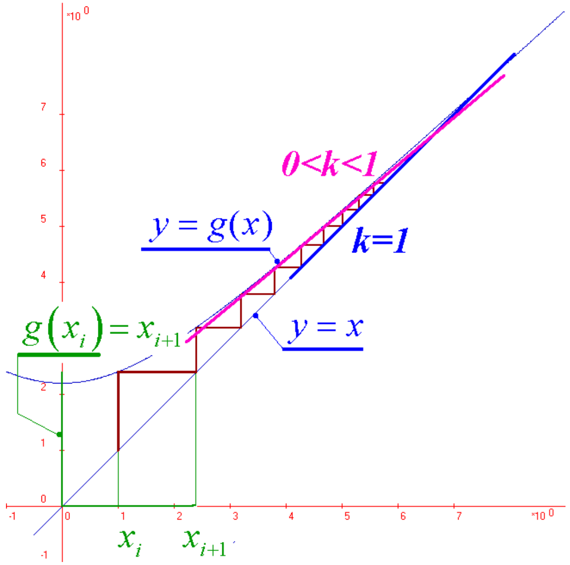
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Takto ovšem metoda nefunguje vždy. Všimněte si, že pro funkci $g(x)$ dle obrázku platí:

$$0 < g'(x) < 1$$

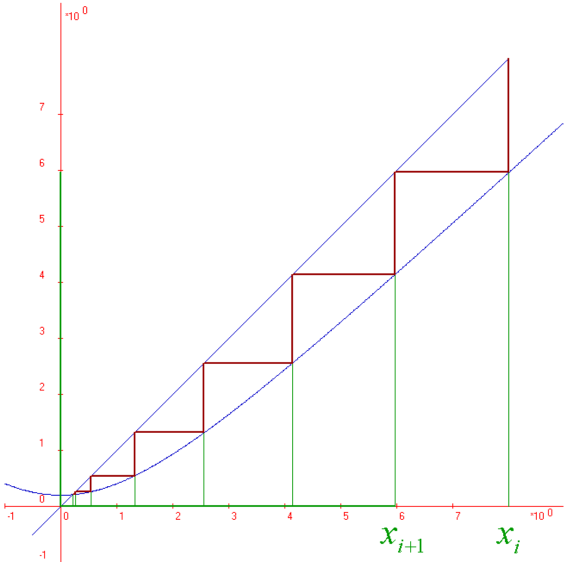
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Takto ovšem metoda nefunguje vždy. Všimněte si, že pro funkci $g(x)$ dle obrázku platí:

$$0 < g'(x) < 1$$

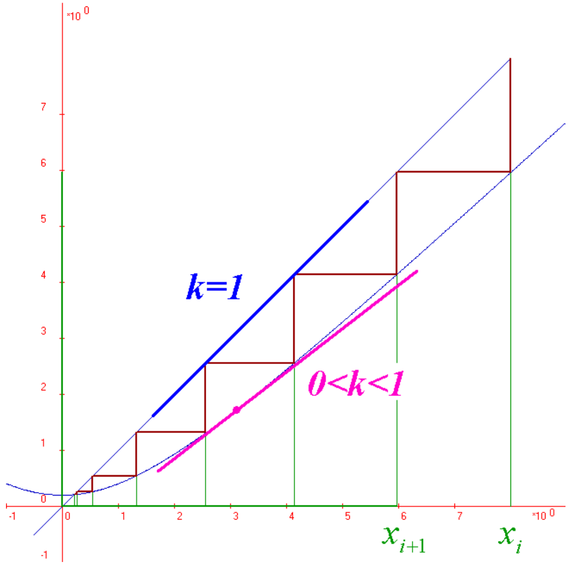
Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$



Takto ovšem metoda nefunguje vždy. Všimněte si, že pro funkci $g(x)$ dle obrázku platí:

$$0 < g'(x) < 1$$

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

Další možností je

Řešení nelineárních rovnic

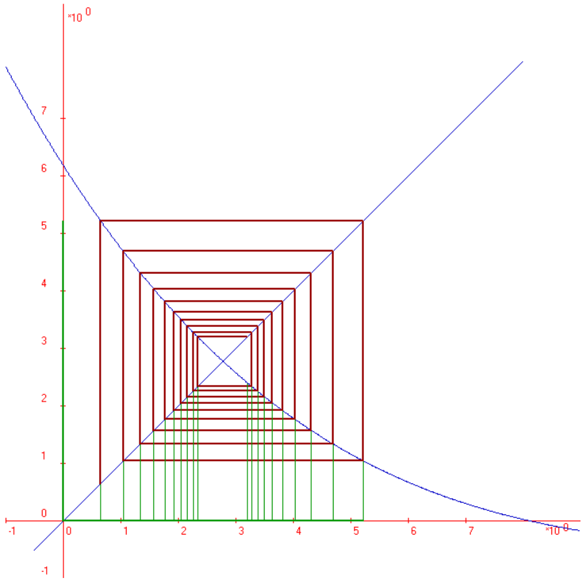
Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

Další možností je



Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

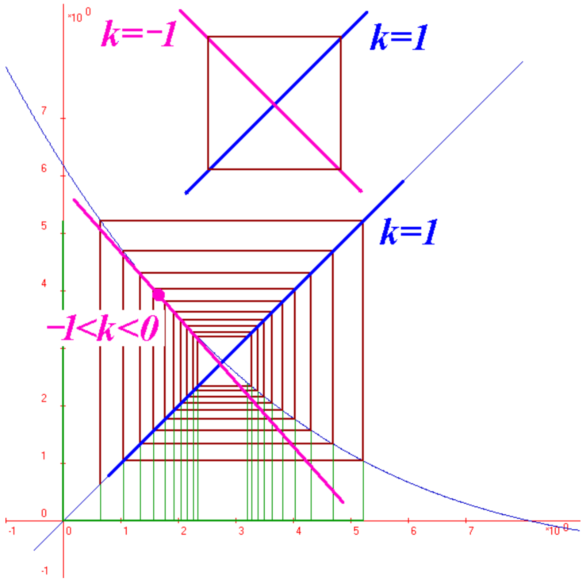
a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$

b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$

c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

Další možností je



$$-1 < g'(x) < 0$$

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

V jiných případech tato metoda nemusí fungovat.

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

Postačující podmínkou konvergence tedy je

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

Postačující podmínkou konvergence tedy je

$$\boxed{|g'(x)| < 1}$$

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b\rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

Postačující podmínkou konvergence tedy je

$$\boxed{|g'(x)| < 1}$$

Tato podmínka musí platit na celém pracovním intervalu $\langle a; b\rangle$.

Řešení nelineárních rovnic

Zpřesňování aproximací:

Obecná iterační metoda:

a) rovnici $f(x) = 0$ upravíme na tvar $x = g(x)$
b) zvolíme startovací bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$
c) další aproximace získáváme následovně:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

Postačující podmínkou konvergence tedy je

$$\boxed{|g'(x)| < 1}$$

Tato podmínka musí platit na celém pracovním intervalu $\langle a; b \rangle$. Krok a) tedy musí být proveden tak, aby funkce $g(x)$ tuto podmínku splňovala.

Matlab:

```
clc
format long
g = @(x)  ______ ;  % sem je třeba zadat funkci g(x)
a=-1.5;
Epsilon=5*10^(-7);
Chyba=1;
PocetKroku=0;
MaxPocetKroku=1000;
while (Chyba>Epsilon) & (PocetKroku<MaxPocetKroku)
    PocetKroku=PocetKroku+1;
    b=g(a);
    Chyba = abs(b-a);
    a=b;
end
Koren=b
Chyba
PocetKroku
```

Příklad 6: obecnou iterační metodou řešme rovnici z př. 5

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3\sqrt{x+2} - 3 \quad g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+2}}$$

$g'(x)$ je klesající funkce, pro $x \in (-2; -1\rangle$ je $g'(x) \in \langle\frac{3}{2}; \infty)$, k nalezení kořenu v tomto intervalu tuto funkci nelze použít. Pro $x \in \langle 4; 5\rangle$ je však $g'(x) \in \langle\frac{3}{2\sqrt{7}}; \frac{3}{2\sqrt{6}}\rangle \approx \langle 0.57; 0.61\rangle$. Pro startovací bod $x_0 = 4$ výše uvedený kód dává `x1≈4.854101; chyba` $\approx 3.5 * 10^{\wedge}(-7)$`; počet kroků = 26.` Jako zajímavost uveďme, že i v případě volby $x_0 = -1.5 \in (-2; -1\rangle$ metoda konverguje, ovšem nikoliv ke kořenu $x_2 \in (-2; -1\rangle$, ale k již uvedenému `x1≈4.854101.`

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{3} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2 - 2 \quad g'(x) = \frac{2(x+3)}{9}$$

$g'(x)$ je tentokrát rostoucí přímka; pro $x \in \langle -2; -1\rangle$ je $g'(x) \in \langle\frac{2}{9}; \frac{4}{9}\rangle$; tuto funkci tedy použijeme k nalezení druhého kořene. Volba $x_0 = -1.5 \in (-2; -1\rangle$ dá po jedenácti iteracích hodnotu $x_2 \approx -1.854101$ s chybou $\approx 3.5 * 10^{\wedge}(-7)$. V intervalu $x \in \langle 4; 5\rangle$ podmínka konvergence splněna není. Pro startovací bod $x_0 = 4 \in \langle 4; 5\rangle$ metoda “dezertuje” ke kořenu `x1≈4.854101`; pro $x_0 = 5$ metoda diverguje.