Úvod do problematiky

Numerická matematika = matematická disciplina, která řeší matematické úlohy použitím konečného počtu elementárních

aritmetických $+\,;\,-\,;\,\cdot\,;\,:$

a logických $\neg;\wedge;\vee;\Rightarrow;\Leftrightarrow;$

operací.

Metody řešení úloh

přímé po konečném počtu elementárních operací (teoreticky) přesný výsledek (soustava lineárních rovnic…)

numerické po konečném počtu elementárních operací „jen“ přibližný výsledek (kvadratická rovnice, soustava nelineárních rovnic, určitý integrál…)

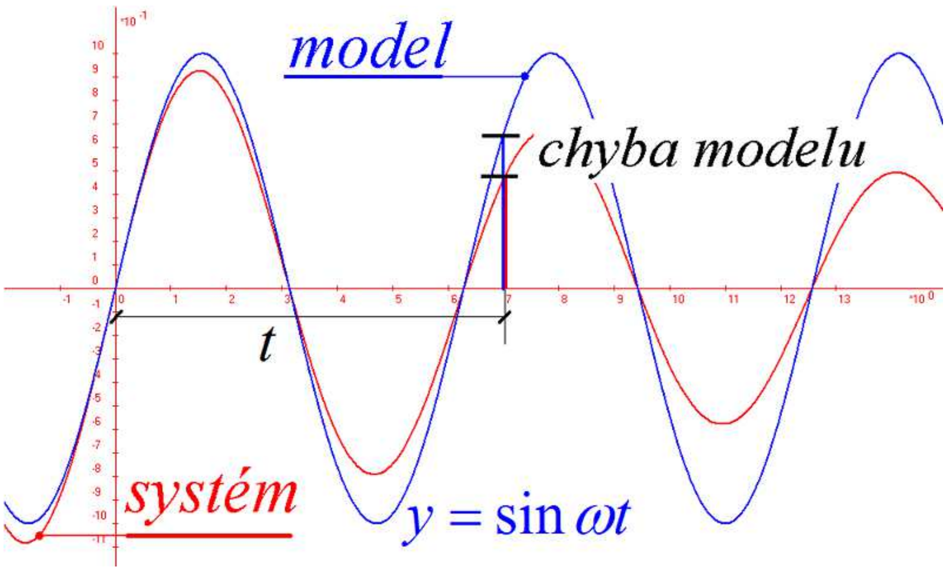
Chyba = rozdíl mezi zjištěnou a teoreticky přesnou hodnotou nebo výsledkem

Druhy chyb

Chyba matematického modelu:

pro potřeby matematického řešení je téměř vždy nutno reálný problém zjednodušit

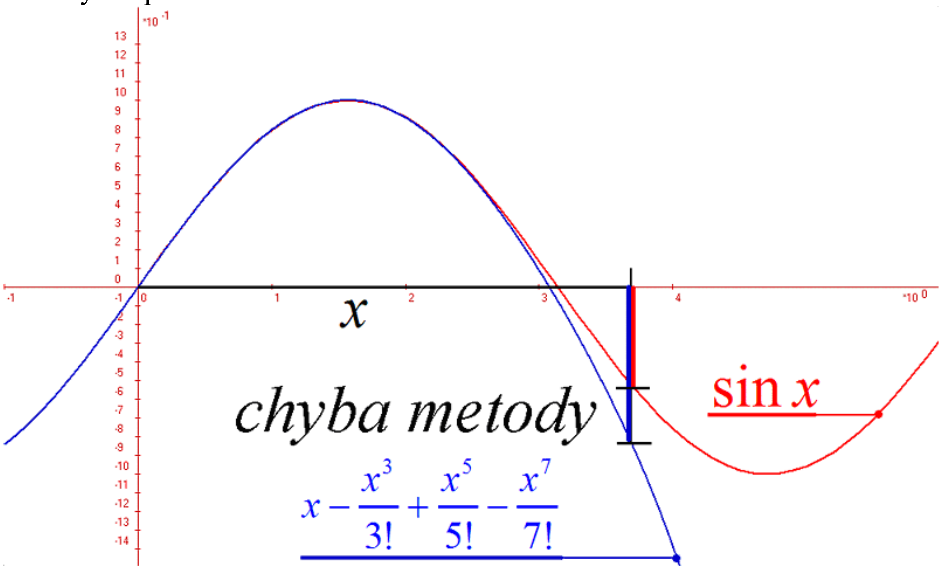
Ilustrační příklad: Úloha zjistit výchylku kmitající pružiny v čase t



Druhy chyb

Chyba metody:

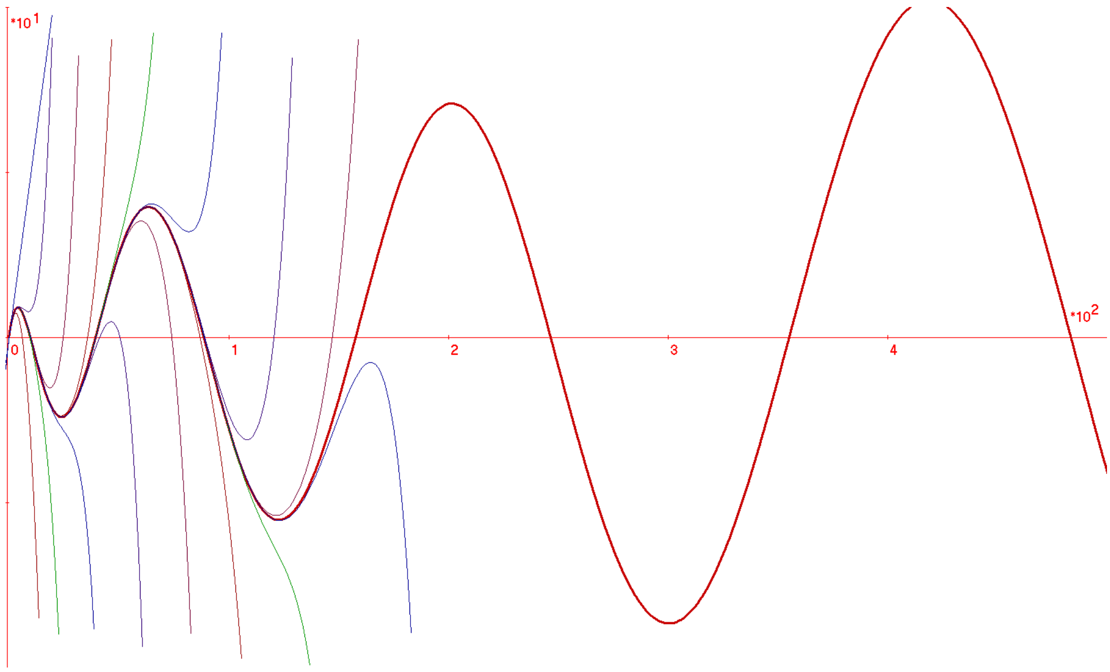
Ilustrační příklad: Úloha zjistit funkční hodnotu funkce $\sin x$ pomocí konečného počtu aritmetických operací



Druhy chyb

Zaokrouhlovací chyby:

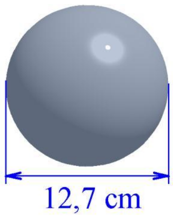
Ilustrační příklad: Úloha zjistit funkční hodnotu funkce $\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ pomocí konečného počtu aritmetických operací



Druhy chyb

Chyby vstupních dat:

Ilustrační příklad: Úloha zjistit hmotnost železné koule ze změřeného průměru



$$\rho = 7{,}86 \text{ g/cm}^3$$

$$m = V \cdot \rho \quad = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}7^3 \cdot 7{,}86$$

$$m = \frac{1}{6} \cdot 3.141\,592\,653\,589\,793 \cdot 12{,}7^3 \cdot 7{,}86 = 8\,430{,}092\,329\,745\,07 \text{ g}$$

$$d = 12{,}7 \pm 0{,}05 \text{ cm};\ \rho = 7{,}86 \pm 0{,}005 \text{ g/cm}^3;$$

$$m_1 = \frac{1}{6} \cdot 3.141\,592\,653\,589\,793 \cdot 12{,}65^3 \cdot 7{,}855 = 8\,325{,}616\,230\,9 \ldots\ldots \text{ g}$$

$$m_2 = \frac{1}{6} \cdot 3.141\,592\,653\,589\,793 \cdot 12{,}75^3 \cdot 7{,}865 = 8\,535{,}479\,106\,1 \ldots\ldots \text{ g}$$

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2}{2} \approx \frac{8\,326 + 8\,535}{2} = 8\,430{,}5 \text{ g}$$

$$\Delta m = \frac{m_2 - m_1}{2} \approx \frac{8\,535 - 8\,326}{2} = 104{,}5 \text{ g}$$

$$m = \bar{m} \pm \Delta m = 8\,430{,}5 \pm 104{,}5 \text{ g}$$

Platné cifry (cifry, které má smysl uvažovat):

Přibližná hodnota $x = d_1 \cdot 10^n + d_2 \cdot 10^{n-1} \ldots . d_k \cdot 10^{n-k+1} \ldots .$ čísla x má k-tou cifru platnou právě tehdy, když $\left|x - x\right| \le 5 \cdot 10^{n-k}$

$m_2 = 8535{,}5$	$x_2 = 100002{,}0$
$\bar{m} = 8430{,}5$	$\bar{x} = 99992{,}5$
$m_1 = 8325{,}5$	$x_1 = 99983{,}0$

Určení počtu platných cifer při výpočtu z dat zatížených chybou:

Nejlépe: **podle předchozího příkladu**

Většinou platí: **platná cifra je ta, která se přičtením či odečtením absolutní chyby nezmění (výjimky – např.** 7.95 ± 0.1**)**

Přinejhorším pravidlo: **výsledek má nejvýše tolik p. c., kolik jich má vstupní hodnota s nejmenším počtem p.c.**

Druhy chyb

Ilustrační příklad: Určen průměr kuličky $d = 12,7 \pm 0,05\ cm$
a průměr zemského rovníku $D = 12\,761 \pm 0,5\ km$

$$\Delta d = 0{,}05\ cm \ \wedge\ \Delta D = 0{,}5\ km \qquad \Rightarrow \boxed{\Delta d \ll \Delta D}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{0{,}05}{12{,}7} \approx 0{,}003\,9 = 3{,}9 \cdot 10^{-3} \quad \frac{\Delta D}{D} = \frac{0{,}5}{12\,761} \approx 0{,}000\,039 = 3{,}9 \cdot 10^{-5} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta d}{d} \gg \frac{\Delta D}{D}}$$

x - přesná hodnota; $\tilde{x}$- přibližná hodnota $\Rightarrow$ $\Delta x = max|x - \tilde{x}|$ absolutní chyba

$\frac{\Delta x}{x}$ relativní chyba

Ilustrační příklad - absolutní chyba podílu: $z = \dfrac{\bar{x} \pm E_x}{\bar{y} \pm E_y}$

Dolní mez:

$$z_1 = \frac{\bar{x} - E_x}{\bar{y} + E_y} = \frac{\bar{x} - E_x}{\bar{y} + E_y} \cdot \frac{\bar{y} - E_y}{\bar{y} - E_y} = \frac{\bar{x}\bar{y} + E_x E_y - \bar{x}E_y - \bar{y}E_x}{\bar{y}^2 - E_y^2} \approx \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x}E_y - \bar{y}E_x}{\bar{y}^2} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}E_y + \bar{y}E_x}{\bar{y}^2}$$

Horní mez

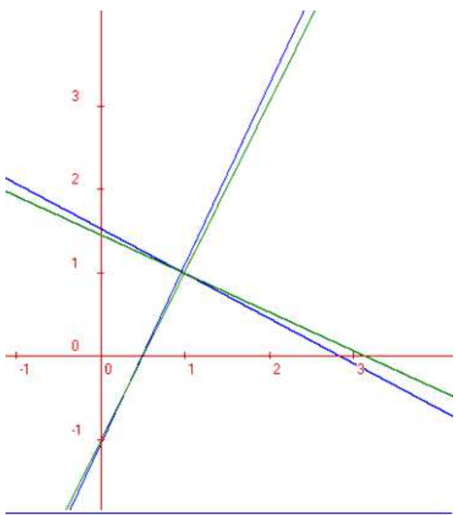
$$z_2 = \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y} - E_y} = \frac{\bar{x} + E_x}{\bar{y} - E_y} \cdot \frac{\bar{y} + E_y}{\bar{y} + E_y} = \frac{\bar{x}\bar{y} + E_x E_y + \bar{x}E_y + \bar{y}E_x}{\bar{y}^2 - E_y^2} \approx \frac{\bar{x}\bar{y} + \bar{x}E_y + \bar{y}E_x}{\bar{y}^2} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{\bar{x}E_y + \bar{y}E_x}{\bar{y}^2}$$

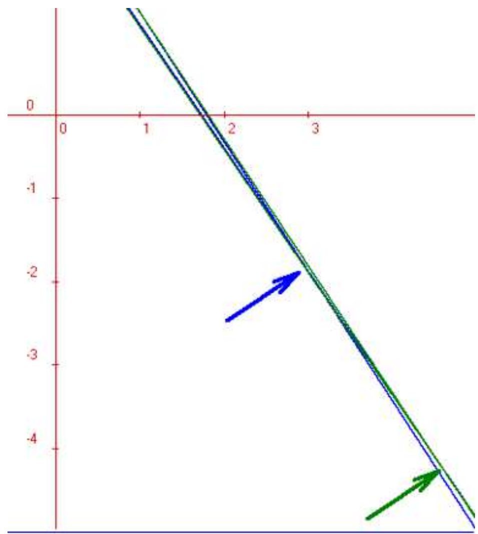
Soustavy lineárních rovnic

GEM program SLR/GEM/Gem_Pro.exe
Výběr hlavního prvku: program SLR/HlavPrvek/Gem_Pro.exe

Dobře podmíněná soustava: srovnej zadání:
SLR/GEM_Stab_1/Gem_Pro.exe
SLR/GEM_Stab_2/Gem_Pro.exe

Špatně podmíněná soustava: srovnej zadání:
SLR/GEM_NeStab_1/Gem_Pro.exe
SLR/GEM_NeStab_2/Gem_Pro.exe





Soustavy lineárních rovnic

Norma = zobecnění pojmu velikost:

Velikosti $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$, úseček $a;b;c$:

1) $\|a\| \geq 0$; $\|a\| = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; a = AA$

2) pro každé reálné r je $\|r \cdot a\| = |r| \cdot \|a\|$

3) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

Číslo $\|\mathbf{A}\|$ je norma matice právě tehdy, když pro každé dvě matice $\mathbf{A};\mathbf{B}$ platí

1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0$; $\quad \|\mathbf{A}\| = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathbf{A} = \mathbf{O}$

2) pro každé reálné r je $\|r \cdot \mathbf{A}\| = |r| \cdot \|\mathbf{A}\|$

3) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

4) $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$

$$\mathbf{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(euklidovská norma)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & a_{ij} & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Matlab: norm(A) (Frobeniova norma)

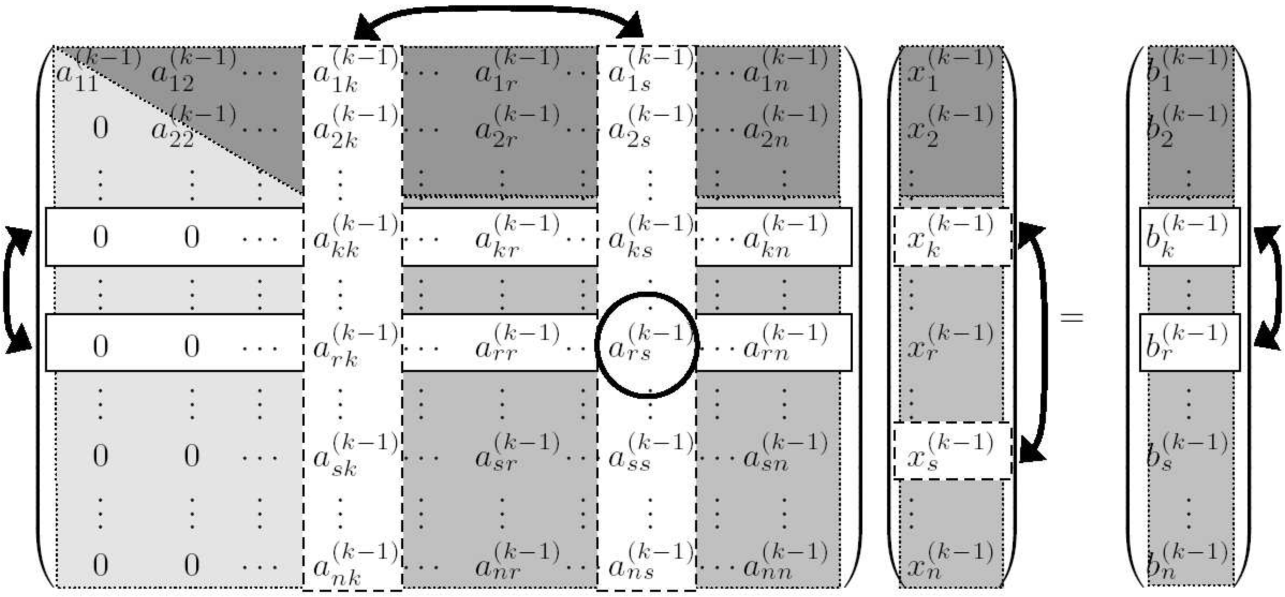
Číslo podmíněnosti: $k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ Matlab: k=norm(A)* norm(A^(-1)) k=cond(A)

$k(\mathbf{A}) \geq 1$ $\qquad k(\mathbf{A}) \to 1$ **OK** $\qquad k(\mathbf{A}) \gg 1$ **KO**

Částečný výběr hlavního prvku

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \cdots & a_{1k}^{(k-1)} & \cdots & a_{1n}^{(k-1)} \\ 0 & a_{22}^{(k-1)} & \cdots & a_{2k}^{(k-1)} & \cdots & a_{2n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rk}^{(k-1)} & \cdots & a_{rn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(k-1)} \\ b_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_r^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Úplný výběr hlavního prvku



Soustavy lineárních rovnic

LU - rozklad

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{L}\underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{y}}=\mathbf{b}:\quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{Ux}=\mathbf{y}\quad \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Ly}=\mathbf{b}\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

LU – rozklad – prográmek SLR\LU_Rozklad\LU_pro.exe

Soustavy lineárních rovnic

Rozklad Choleského

VĚTA: Je-li matice $\mathbf{A}$ pozitivně definitní a symetrická
pak existuje horní trojúhelníková matice $\mathbf{L}$ taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{L}^T\mathbf{L}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^\mathbf{T}\mathbf{L}: \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{12} = l_{11}l_{12} \quad \Rightarrow \quad l_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$$

$$a_{13} = l_{11}l_{13} \quad \Rightarrow \quad l_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$

$$a_{21} = l_{12}l_{11} = a_{12}$$

$$a_{22} = l_{12}^2 + l_{22}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^2}$$

$$a_{23} = l_{12}l_{13} + l_{22}l_{23} \quad \Rightarrow \quad l_{23} = \frac{a_{23} - l_{12}l_{13}}{l_{22}}$$

$$a_{33} = l_{13}^2 + l_{23}^2 + l_{33}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{13}^2 - l_{23}^2}$$

Iterační metody řešení soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\begin{array}{cccccc} 2,3 \cdot x_1 & -9,0 \cdot x_2 & +1,8 \cdot x_3 & = & 13,1 \\ 3,5 \cdot x_1 & +0,4 \cdot x_2 & +1,4 \cdot x_3 & = & 4,5 \\ 3,6 \cdot x_1 & +1,2 \cdot x_2 & -8,6 \cdot x_3 & = & -6,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 + 1,3 \cdot x_1 & -9,0 \cdot x_2 & +1,8 \cdot x_3 & = & 13,1 \\ 3,5 \cdot x_1 & x_2 - 0,6 \cdot x_2 & +1,4 \cdot x_3 & = & 4,5 \\ 3,6 \cdot x_1 & +1,2 \cdot x_2 & x_3 - 9,6 \cdot x_3 & = & -6,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & = & -1,3 \cdot x_1 & +9,0 \cdot x_2 & -1,8 \cdot x_3 & +13,1 \\ x_2 & = & -3,5 \cdot x_1 & +0,6 \cdot x_2 & -1,4 \cdot x_3 & +4,5 \\ x_3 & = & -3,6 \cdot x_1 & -1,2 \cdot x_2 & +9,6 \cdot x_3 & +6,2 \end{array}$$

Iterační metody řešení soustavy lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -1{,}3\cdot x_1 + 9{,}0\cdot x_2 - 1{,}8\cdot x_3 + 13{,}1\\
x_2 &= -3{,}5\cdot x_1 + 0{,}6\cdot x_2 - 1{,}4\cdot x_3 + 4{,}5\\
x_3 &= -3{,}6\cdot x_1 - 1{,}2\cdot x_2 + 9{,}6\cdot x_3 - 6{,}2
\end{aligned}
$$

Metoda prosté iterace

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -1{,}3\cdot x_1^{(k)} + 9{,}0\cdot x_2^{(k)} - 1{,}8\cdot x_3^{(k)} + 13{,}1\\
x_2^{(k+1)} &= -3{,}5\cdot x_1^{(k)} + 0{,}6\cdot x_2^{(k)} - 1{,}4\cdot x_3^{(k)} + 4{,}5\\
x_3^{(k+1)} &= -3{,}6\cdot x_1^{(k)} - 1{,}2\cdot x_2^{(k)} + 9{,}6\cdot x_3^{(k)} - 6{,}2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -1{,}3\cdot 0 + 9{,}0\cdot 0 - 1{,}8\cdot 0 + 13{,}1\\
x_2^{(1)} &= -3{,}5\cdot 0 + 0{,}6\cdot 0 - 1{,}4\cdot 0 + 4{,}5\\
x_3^{(1)} &= -3{,}6\cdot 0 - 1{,}2\cdot 0 + 9{,}6\cdot 0 - 6{,}2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x_1^{(1)} = 13{,}1;\ x_2^{(1)} = 4.5;\ x_3^{(1)} = -6.2}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -1{,}3\cdot 13{,}1 + 9{,}0\cdot 4{,}5 - 1{,}8\cdot(-6{,}2) + 13{,}1\\
x_2^{(2)} &= -3{,}5\cdot 13{,}1 + 0{,}6\cdot 4{,}5 - 1{,}4\cdot(-6{,}2) + 4{,}5\\
x_3^{(2)} &= -3{,}6\cdot 13{,}1 - 1{,}2\cdot 4{,}5 + 9{,}6\cdot(-6{,}2) - 6{,}2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x_1^{(2)} = 47{,}73;\ x_2^{(2)} = -29{,}97;\ x_3^{(2)} = -118{,}28}$$

Metoda zrychlené iterace

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -1{,}3\cdot x_1^{(k)} + 9{,}0\cdot x_2^{(k)} - 1{,}8\cdot x_3^{(k)} + 13{,}1\\
x_2^{(k+1)} &= -3{,}5\cdot x_1^{(k+1)} + 0{,}6\cdot x_2^{(k)} - 1{,}4\cdot x_3^{(k)} + 4{,}5\\
x_3^{(k+1)} &= -3{,}6\cdot x_1^{(k+1)} - 1{,}2\cdot x_2^{(k+1)} + 9{,}6\cdot x_3^{(k)} - 6{,}2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -1{,}3\cdot 0 + 9{,}0\cdot 0 - 1{,}8\cdot 0 + 13{,}1\\
x_2^{(1)} &= -3{,}5\cdot 13{,}1 + 0{,}6\cdot 0 - 1{,}4\cdot 0 + 4{,}5\\
x_3^{(1)} &= -3{,}6\cdot 13{,}1 - 1{,}2\cdot(-41{,}3) + 9{,}6\cdot 0 - 6{,}2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x_1^{(1)} = 13{,}1;\ x_2^{(1)} = -41{,}3;\ x_3^{(1)} = -3{,}7}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -1{,}3\cdot 13{,}1 + 9{,}0\cdot(-41{,}3) - 1{,}8\cdot(-3.7) + 13{,}1\\
x_2^{(1)} &= -3{,}5\cdot(-369{,}3) + 0{,}6\cdot(-41{,}3) - 1{,}4\cdot(-3.7) + 4{,}5\\
x_3^{(1)} &= -3{,}6\cdot(-369{,}3) - 1{,}2\cdot 1277{,}6 + 9{,}6\cdot(-3.7) - 6{,}2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x_1^{(1)} = -369{,}3;\ x_2^{(1)} = 1277{,}6;\ x_3^{(1)} = -245{,}6}$$

další prosté i zrychlené iterace s tímto zadáním provede prográmek SLR\Iter_DIV_DIV\Project1.exe

Iterační metody řešení soustavy lineárních rovnic

Otázka konvergence:
Používané normy matic

Norma řádková:

$$\|\mathbf{A}\|_r = \max_{i=1;\dots;n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$$

Norma sloupcová:

$$\|\mathbf{A}\|_s = \max_{j=1;\dots;n}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$$

Norma Frobeniova:

$$\|\mathbf{A}\|_f = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1{,}3 & 9{,}0 & -1{,}8\\ -3{,}5 & 0{,}6 & -1{,}4\\ 3{,}6 & -1{,}2 & 9{,}6 \end{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}12{,}1\\ 5{,}5\\ 14{,}4\end{matrix}} \overset{MAX}{\Rightarrow} \|\mathbf{A}\|_r = 14{,}4$$

$$\boxed{8{,}4\quad 10{,}8\quad 12{,}8} \overset{MAX}{\Rightarrow} \|\mathbf{A}\|_s = 12{,}8$$

$$\|\mathbf{A}\|_f = \sqrt{\begin{matrix} (-1{,}3)^2 & +9{,}0^2 & +(-1{,}8)^2\\ +(-3{,}5)^2 & +0{,}6^2 & (-1{,}4)^2\\ +3{,}6^2 & +(-1{,}2)^2 & +9{,}6^2 \end{matrix}} \approx 14{,}39$$

Iterační metody řešení soustavy lineárních rovnic

Matice: Norma matice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1,3 & 9,0 & -1,8 \\ -3,5 & 0,6 & -1,4 \\ 3,6 & -1,2 & 9,6 \end{pmatrix} \qquad \|\mathbf{A}\|_r=14,4 \qquad \|\mathbf{A}\|_s=12,8 \qquad \|\mathbf{A}\|_e\approx 14,39$$

Jestliže alespoň pro jednu mormu $\|\mathbf{A}\|$ matice $\mathbf{A}$ platí $\|\mathbf{A}\|<1$, pak metoda prosté i zrychlené iterace soustavy $\mathbf{x}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}$ konverguje

$$\begin{array}{rrrcr} 2,3\cdot x_1 & -9,0\cdot x_2 & +1,8\cdot x_3 & = & 13,1 \\ 3,5\cdot x_1 & +0,4\cdot x_2 & +1,4\cdot x_3 & = & 4,5 \\ 3,6\cdot x_1 & +1,2\cdot x_2 & -8,6\cdot x_3 & = & -6,2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrrrr} x_1 & = & -1,3\cdot x_1 & +9,0\cdot x_2 & -1,8\cdot x_3 & +13,1 \\ x_2 & = & -3,5\cdot x_1 & +0,6\cdot x_2 & -1,4\cdot x_3 & +4,5 \\ x_3 & = & -3,6\cdot x_1 & -1,2\cdot x_2 & +9,6\cdot x_3 & +6,2 \end{array}$$

konvergence není zaručena

$$\begin{array}{rrrcr} 2,3\cdot x_1 & x_2-10,0\cdot x_2 & +1,8\cdot x_3 & = & 13,1 \\ x_1+2,5\cdot x_1 & +0,4\cdot x_2 & +1,4\cdot x_3 & = & 4,5 \\ 3,6\cdot x_1 & +1,2\cdot x_2 & x_3-9,6\cdot x_3 & = & -6,2 \end{array} \quad \begin{array}{rcrrrr} 2,5\cdot x_1 & = & -x_1 & -0,4\cdot x_2 & -1,4\cdot x_3 & +4,5 \\ \Rightarrow 10\cdot x_2 & = & 2,3\cdot x_1 & +x_2 & +1,8\cdot x_3 & -13,1 \\ 9,6\cdot x_3 & = & -3,6\cdot x_1 & -1,2\cdot x_2 & +x_3 & +6,2 \end{array}$$

---

konvergence zaručena $\|\mathbf{A}\|_f=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2}\approx 0,76$

$$\begin{array}{rcrrrr} x_1 & = & -0,400\cdot x_1 & -0,160\cdot x_2 & -0,560\cdot x_3 & +1,800 \\ x_2 & = & 0,230\cdot x_1 & +0,100\cdot x_2 & +0,180\cdot x_3 & -1,310 \\ x_3 & = & -0,375\cdot x_1 & -0,125\cdot x_2 & +0,104\cdot x_3 & +0,645 \end{array}$$

Prostou i zrychlenou iteraci s tímto zadáním provede prográmek SLR/Iter/Project1.exe

Iterační metody řešení soustavy lineárních rovnic

Jacobiho a Gauss-Seidlova metoda

$$\begin{array}{llllllll} a_{11}\cdot x_1 & +a_{12}\cdot x_2 & \ldots\ldots & +a_{1i}x_i & \ldots\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & +a_{22}\cdot x_2 & \ldots\ldots & +a_{1i}x_i & \ldots\ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots \\ a_{i1}\cdot x_1 & +a_{i2}\cdot x_2 & \ldots\ldots & +a_{ii}x_i & \ldots\ldots & +a_{in}x_n & = & b_i \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 & +a_{n2}\cdot x_2 & \ldots\ldots & +a_{ni}x_i & \ldots\ldots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{a_{11}}\cdot\left(0\cdot x_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1i}x_i-\ldots\ldots-a_{1n}x_n+b_1\right) \\ x_2=\frac{1}{a_{22}}\cdot\left(-a_{21}\cdot x_1-0\cdot x_2-\ldots-a_{2i}x_i-\ldots\ldots-a_{2n}x_n+b_2\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i=\frac{1}{a_{ii}}\cdot\left(-a_{i1}\cdot x_1-a_{i2}\cdot x_2-\ldots-0\cdot x_i-\ldots\ldots-a_{in}x_n+b_i\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\frac{1}{a_{nn}}\cdot\left(-a_{n1}\cdot x_1-a_{n2}\cdot x_2-\ldots-a_{ni}x_i-\ldots\ldots-0\cdot x_n+b_n\right) \end{array}$$

$$\mathbf{x}=\overline{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b};\ \overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \ldots\ldots & \frac{a_{1i}}{a_{11}} & \ldots\ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \ldots\ldots & \frac{a_{2i}}{a_{22}} & \ldots\ldots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \ldots\ldots & \frac{a_{3i}}{a_{33}} & \ldots\ldots & \frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ii}} & \frac{a_{i2}}{a_{ii}} & \frac{a_{i3}}{a_{ii}} & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots & \frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \ldots\ldots & \frac{a_{ni}}{a_{nn}} & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Norma řádková:

$$\left\|\overline{\mathbf{A}}\right\|_r=\max_{i=1;\ldots;n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\right\}<1$$

Norma sloupcová:

$$\left\|\overline{\mathbf{A}}\right\|_s=\max_{j=1;\ldots;n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\right\}<1$$

V každém řádku matice $\mathbf{A}$ původní soustavy $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$:

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1;j\neq i}^{n}|a_{ij}| \qquad |a_{ii}|>\sum_{i=1;j\neq i}^{n}|a_{ij}|$$

Konvergence je zaručena, jestliže matice původní soustavy je ostře diagonálně dominantní

Jacobiho a Gauss-Seidlova metoda

$$
\begin{array}{llllllll}
a_{11}\cdot x_1 & +a_{12}\cdot x_2 & ..... & +a_{1i}x_i & ..... & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 & +a_{22}\cdot x_2 & ..... & +a_{1i}x_i & ..... & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & & ... \\
a_{i1}\cdot x_1 & +a_{i2}\cdot x_2 & ..... & +a_{ii}x_i & ..... & +a_{in}x_n & = & b_i \\
..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & & ... \\
a_{n1}\cdot x_1 & +a_{n2}\cdot x_2 & ..... & +a_{ni}x_i & ..... & +a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{a_{11}}\cdot\left(0\cdot x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1i}x_i - ..... - a_{1n}x_n + b_1\right)\\
x_2 &= \tfrac{1}{a_{22}}\cdot\left(-a_{21}\cdot x_1 - 0\cdot x_2 - ... - a_{2i}x_i - ..... - a_{2n}x_n + b_2\right)\\
&...\\
x_i &= \tfrac{1}{a_{ii}}\cdot\left(-a_{i1}\cdot x_1 - a_{i2}\cdot x_2 - ... - 0\cdot x_i - ..... - a_{in}x_n + b_i\right)\\
&...\\
x_n &= \tfrac{1}{a_{nn}}\cdot\left(-a_{n1}\cdot x_1 - a_{n2}\cdot x_2 - ... - a_{ni}x_i - ..... - 0\cdot x_n + b_n\right)
\end{aligned}
$$

matice soustavy je ostře diagonálně dominantní
(stačí součty v řádcích nebo ve sloupcích)

prostá iterace (Jacobiho)

zrychlená iterace (Gauss-Seidlova)

Numerické řešení libovolné SLR se zaručenou konvergencí

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b};\quad \det\left(\mathbf{A}\right)\neq 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{b}}$$

Gauss-Seidlova metoda bude konvergovat (viz prográmek SLR\Jacobi_Seidel\Project1.exe)