Příklady k procvičení - numerické metody

Tento soubor slouží jako podpora pro studenty předmětu numerické metody (2nu). Obsahuje vybrané početní příklady k procvičení. V případě potíží s výpočtem lze konzultovat se cvičícím. Soubor bude průběžně aktualizován. Není-li uvedeno jinak či nevyžaduje-li zadání úlohy větší nároky na přesnost výpočtů, výsledky zaokrouhlujte na 4 desetinná místa.

Poslední aktualizace: (13. března 2019)

1 Odhad chyby, podmíněnost úlohy

Příklad 1.1 *Nechť* $x = 3.02 \pm 5 \cdot 10^{-3}$, $y = -2.321 \pm 0.003$, $z = 4.21 \pm 0.05$. *Určete aproximaci funkční hodnoty* $f(x, y, z) = x + \frac{y^2 \sin z}{z}$, *odhad absolutní a relativní chyby výsledku a počet platných cifer výsledku.*

Příklad 1.2 *Určete odhad absolutní chyby výpočtu funkční hodnoty* $f(x, y, z) = \cos(xy) - yz^2 + x/z$, *kde* $x = 2.34 \pm 0.005$, $y = -3.400 \pm 4 \cdot 10^{-3}$, $z = 6.0200 \pm 0.0003$.

Příklad 1.3 *Určete odhad relativní chyby výpočtu funkční hodnoty* $f(x, y) = \arctan(xy) - x^2 - \ln(3x + 2)$, *kde* $x = 0.34$, $y = -6.40$ *a kde pro relativní chyby máme* $|\Delta x/x| \leq 0.5\%$ *a* $|\Delta y/y| \leq 0.1\%$.

Příklad 1.4 Určete aproximaci funkční hodnoty $f(x) = \sin(x)/\exp(2x)$, je-li $x = -0.2134 \pm 5 \cdot 10^{-5}$. Určete navíc odhad absolutní a relativní chyby výpočtu této hodnoty a počet jejích platných cifer, počet platných desetinných míst a odhad čísla podmíněnosti pro tuto úlohu.

Příklad 1.5 Určete aproximaci funkční hodnoty $f(x, y) = x^2 \arctan(x-y) + y^2 \cos x$, je-li $x = 4.7 \pm 5 \cdot 10^{-2}$, $y = 3.569 \pm 0.002$. Určete navíc odhad absolutní a relativní chyby výpočtu této hodnoty a počet jejích platných cifer.

2 Řešení soustav lineárních rovnic

Příklad 2.1 *Určete řešení soustavy lineárních rovnic* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 0, \\ 12x_1 + 3x_2 - x_3 &= 21, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavního prvku. Výsledek každé provedené operace zaokrouhlete na 2 desetinná místa. Spočtěte determinant matice $\mathbf{A}$. *Určete residuum.*

Příklad 2.2 *Určete Choleského rozklad matice* $\mathbf{A}$, *kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 49 & 21 & -21 \\ 21 & 13 & -9 \\ -21 & -9 & 90 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.3 Jsou dány čtvercové matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8.5 & 2 & 1 & 4 \\ 2.1 & 14 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & -21 & 1 \\ 2 & 0.4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.5 & 2 & 1 & 4 \\ 0.6 & 1.4 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4.5 & 2 & 1 & 4 \\ 2.1 & 17 & 4 & -5 \\ -21 & 4 & -1 & 1 \\ 6 & 0.7 & 2.3 & 5.4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -8.4 & 2.7 & 1.8 & -7.2 \\ 0.1 & 17 & 2.7 & 0 \\ 10 & 40 & -20 & 10 \\ -2 & 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

a vektory

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešte soustavy lineárních rovnic pomocí GEM s částečným výběrem hlavního prvku (LU - rozklad):

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{d},$$

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{Bx} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{Bx} = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{Bx} = \mathbf{d},$$

$$\mathbf{Cx} = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{Cx} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{Cx} = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{Cx} = \mathbf{d},$$

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{Dx} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{Dx} = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{Dx} = \mathbf{d}.$$

Pro každou soustavu určete vektor rezidua. Určete $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{D}^{-1}$. Určete čísla podmíněnosti κ_∞ matic A, B, C, D.

Příklad 2.4 *Určete číslo podmíněnosti $\kappa_\infty(\mathbf{A})$ matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.15 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.5 *U soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 6x_3 &= -13, \\ 12x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= -21, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 &= 19. \end{aligned}$$

určete řešení Jacobiovou a Gaussovou-Seidelovou metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = [3, -1, 2]$ a volbě $\epsilon = 0.01$. (Lze použít programy ze cvičení). Nejdříve však upravte soustavu tak, aby metody konvergovaly. Kolik iterací je zapotřebí?

Příklad 2.6 U soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_3 &= -3. \end{aligned}$$

určete $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$, Jacobiovou iterační metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]$. Určete, z jakého intervalu musí být ε, aby za podmínky pro zastavení výpočtu $||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}||_\infty \leq \varepsilon$ byla poslední vypočtenou aproximací $\mathbf{x}^{(2)}$.

3 Aproximace funkcí

Příklad 3.1 Mějme body $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, 3$ dané tabulkou

x_i	-1	2	3
y_i	3	2	-1

Určete a načrtněte interpolační polynom procházející těmito body, a sice

a) globální - metodou Lagrangeovou, metodou Newtonovou;

b) po částech lineární (tj. lineární interpolační splajn).

Určete v obou případech (tj. a) i b)) přibližnou hodnotu $y(2.7)$.

Příklad 3.2 *Jsou dány hodnoty funkce $y(x)$ a její derivací:*

x_i	*-1*	*1*
$y(x_i)$	*3*	*-1*
$y'(x_i)$	*-4*	*0*
$y''(x_i)$	*10*	–

Nalezněte Hermitův interpolační polynom bodů daných tabulkou. Určete hodnoty $H(0.5)$ a $H'(0.5)$.

Příklad 3.3 *Určete Hermitův interpolační polynom splňující podmínky dané tabulkou:*

a)

x_i	*-2*	*0*	*1*
y	*23*	*7*	*20*
y'	*-4*	–	*29*
y''	*-52*	–	–

b)

x_i	*1*	*3*
y	*8*	*932*
y'	*16*	*1768*
y''	*50*	–
y'''	*162*	–
$y^{(4)}$	*432*	–

Příklad 3.4 *Jsou dány body*

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*
y_i	*-4*	*-0.6*	*1*	*3*

. *Metodou nejmenších čtverců proložte body funkcí*

a) $R(x) = ax + b/x, \qquad a, b \in \mathbb{R}$;

b) $R(x) = a + b/x, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$

Určete v obou případech residua.

Příklad 3.5 *Jsou dány body*

x_i	-1	0	1	2	3	4
y_i	1	-1	-4	-0.6	1	3

. Metodou nejmenších čtverců proložte body funkcí

a) $R(x) = a + bx, \qquad a, b \in \mathbb{R};$

b) $R(x) = a + bx + cx^2, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$

Určete v obou případech residua.