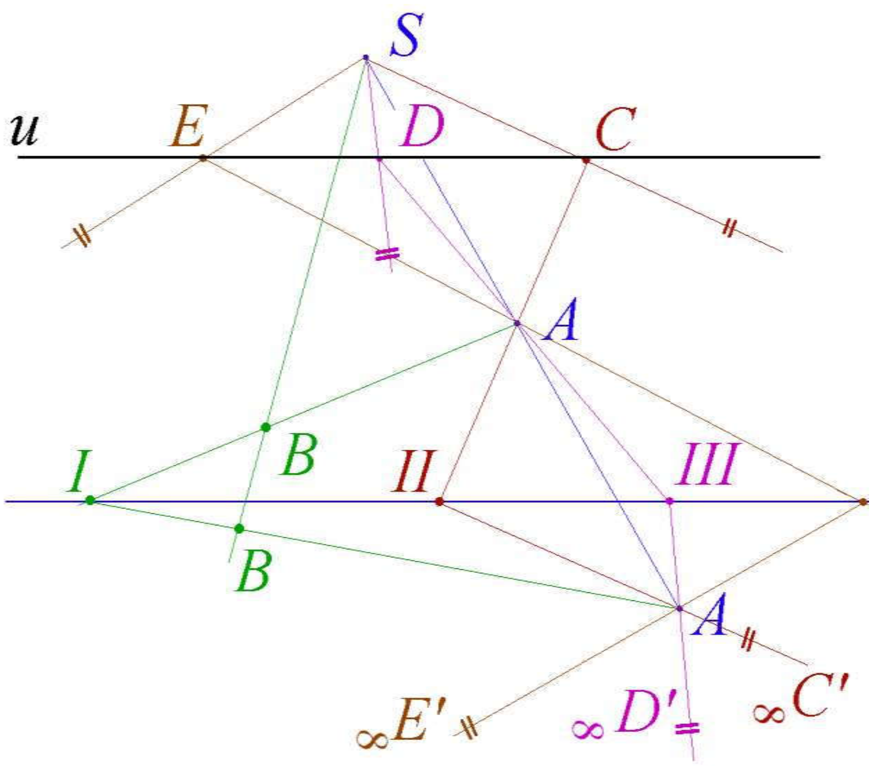
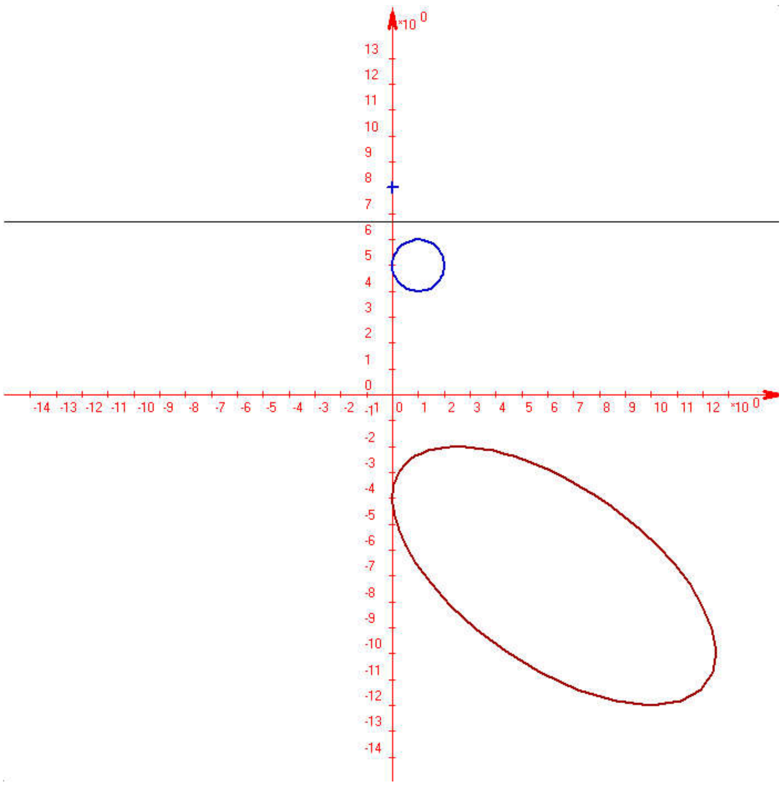
Kružnice ve středové kolineaci v rovině



1. $I \in AB \cap o$
2. IA'
3. SB
4. $B' \in SB \cap IA'$

1. $II \in AC \cap o$
2. IIA'
3. SC
4. $C' \in SC \cap IIA'$

Kružnice ve středové kolineaci v rovině

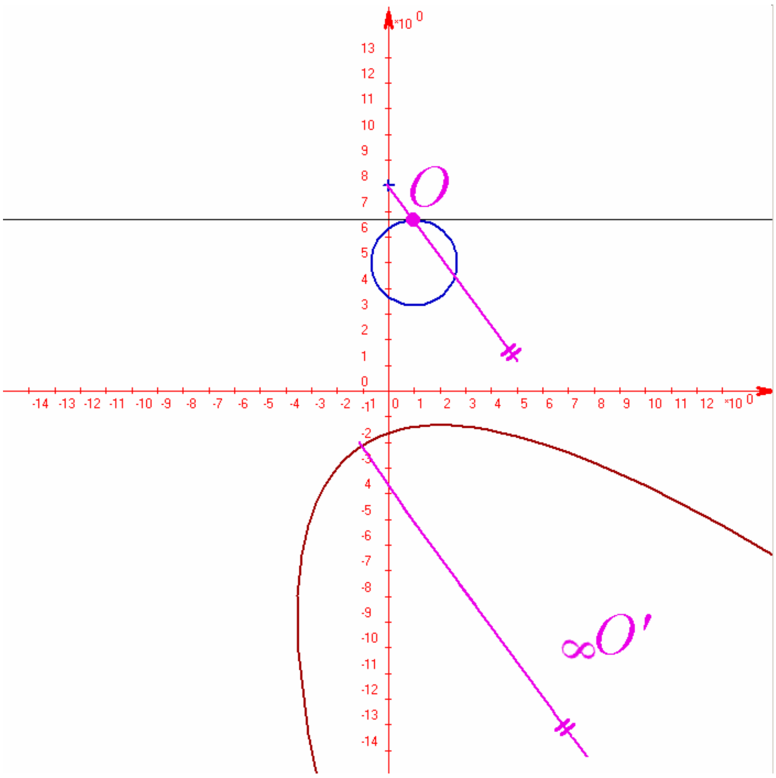


Kružnice nemá s úběžnicí žádný společný bod.

Obraz nemá žádný nevlastní bod.

Tímto obrazem je křivka zvaná ***elipsa****.*

Kružnice ve středové kolineaci v rovině

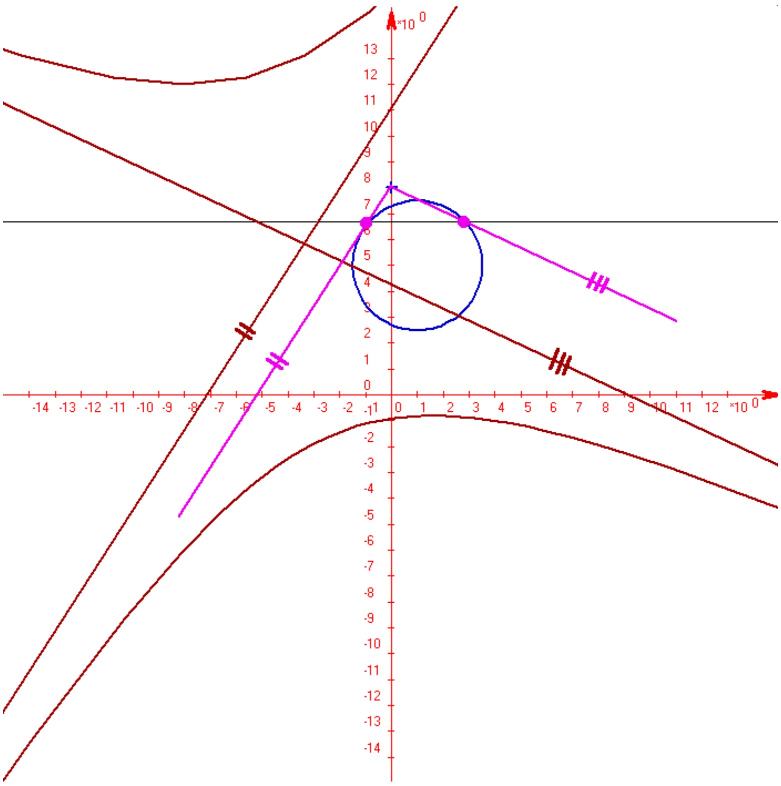


Kružnice má s úběžnicí právě jeden společný bod.

Obraz má právě jeden nevlastní bod

Tímto obrazem je křivka zvaná ***parabola****.*

Kružnice ve středové kolineaci v rovině

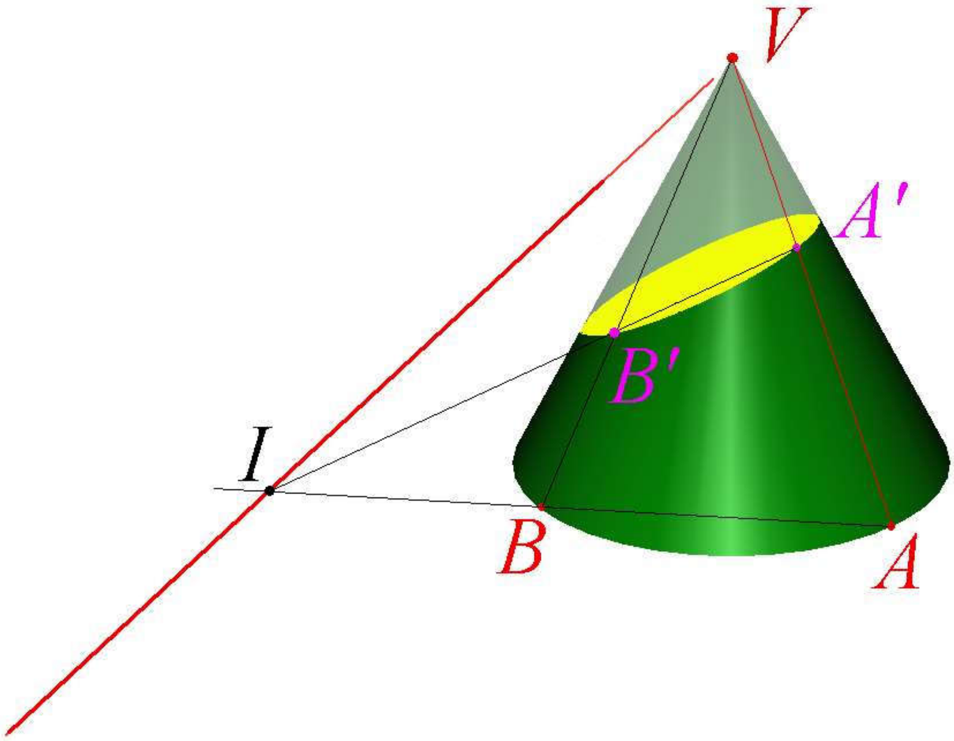


Kružnice má s úběžnicí právě dva společné body.

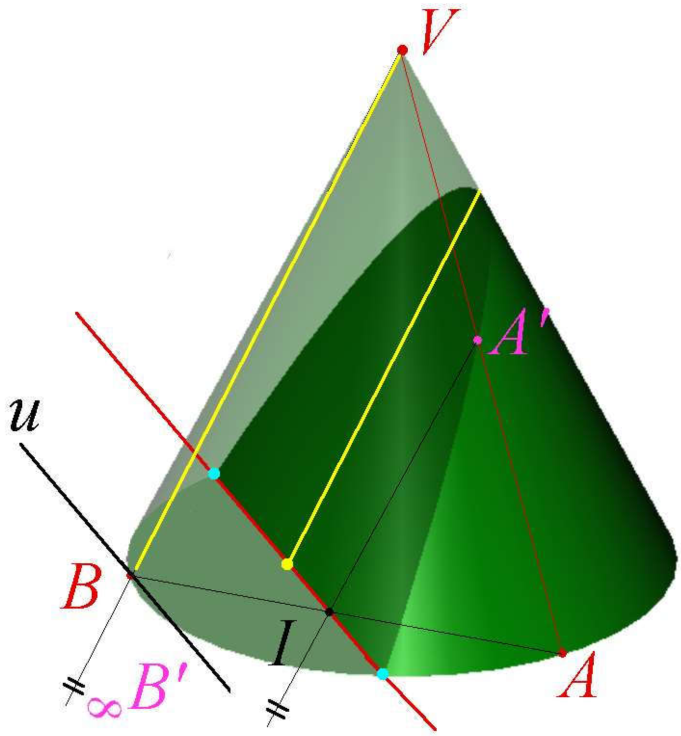
Obraz má právě dva nevlastní body.

Tímto obrazem je křivka zvaná ***hyperbola****.*

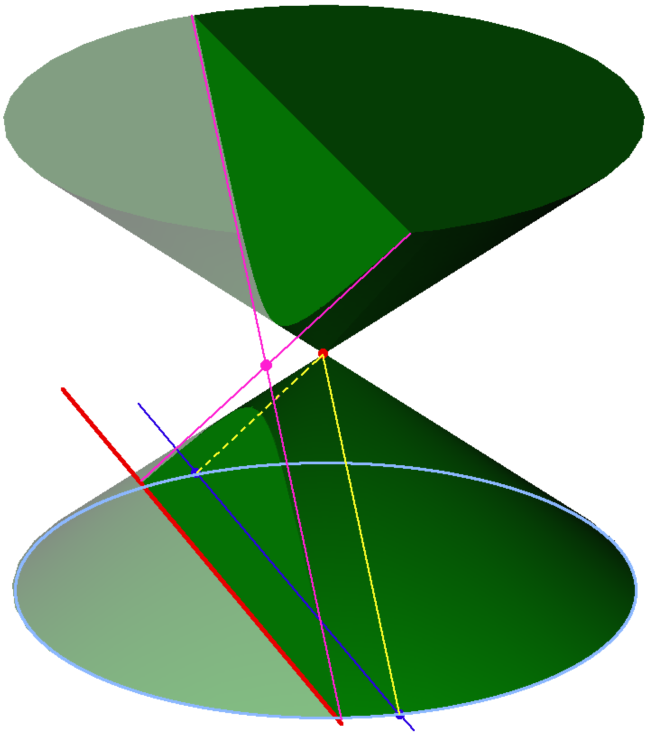
Kružnice ve středové kolineaci mezi rovinami



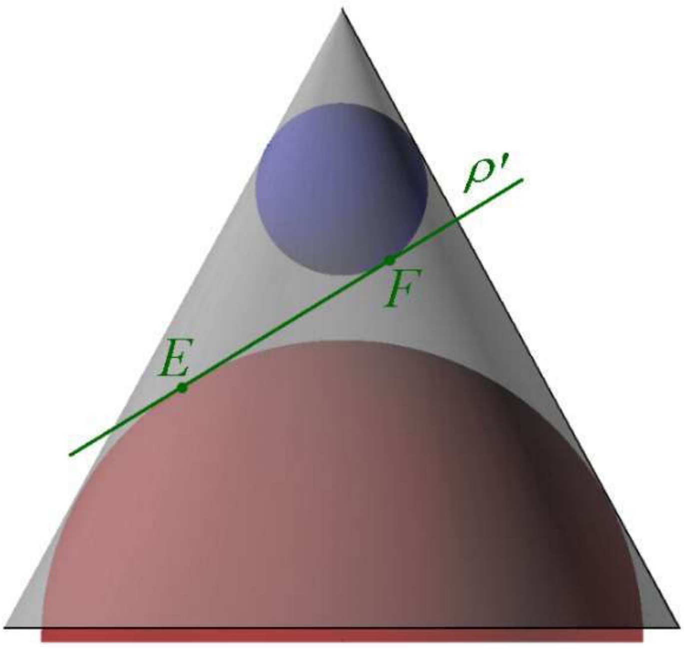
Kružnice ve středové kolineaci mezi rovinami

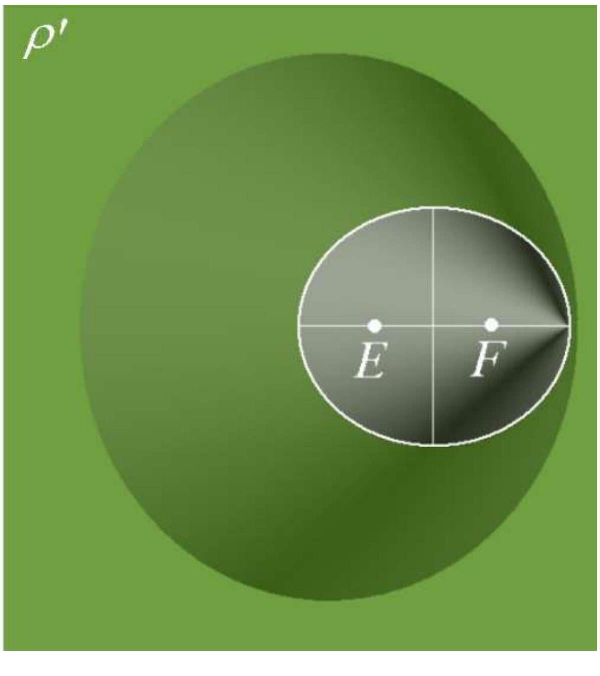


Kružnice ve středové kolineaci mezi rovinami

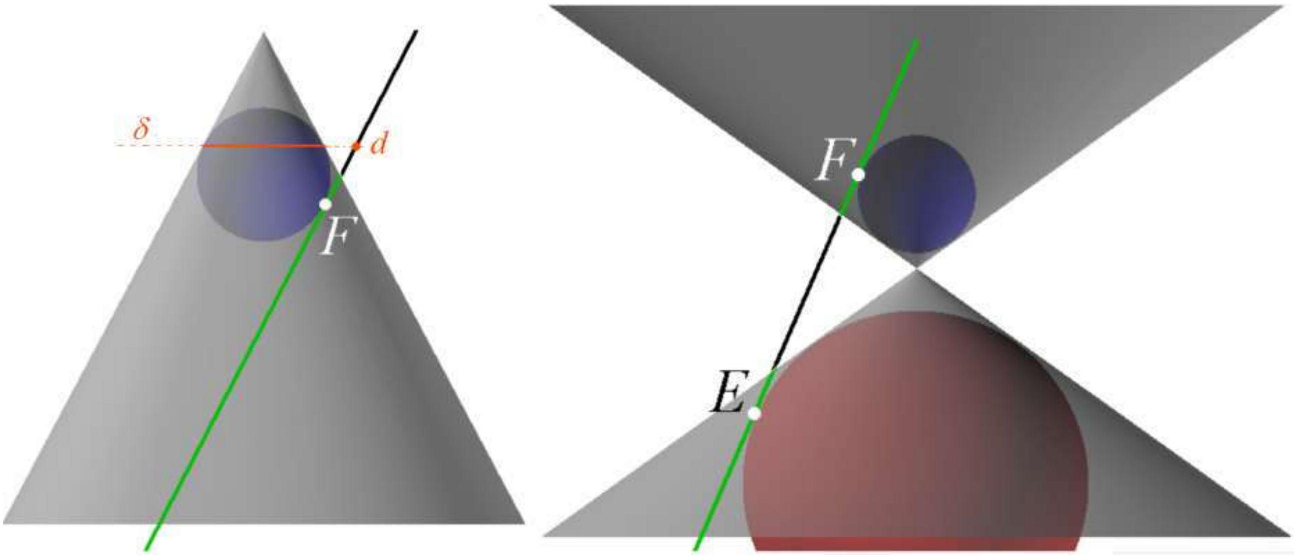


Ohniskové vlastnosti kuželoseček



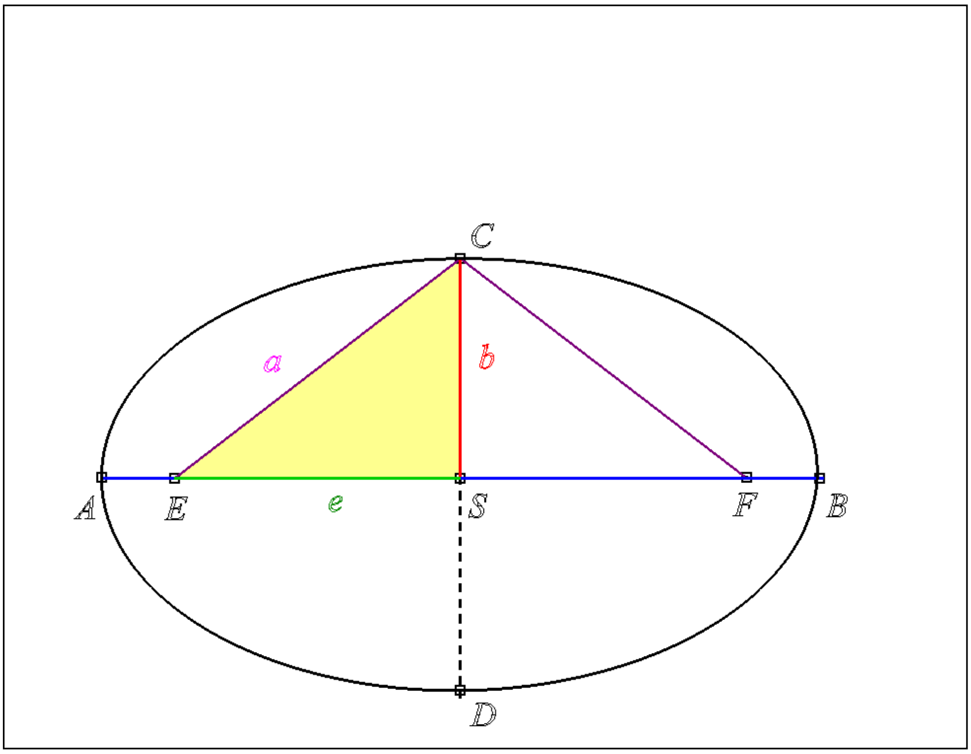


Ohniskové vlastnosti kuželoseček



Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Elipsa:



$E;F$ ohniska

$EM;FM$ průvodiče

$|EM|+|FM|=2a$

AB hlavní osa

CD vedlejší osa

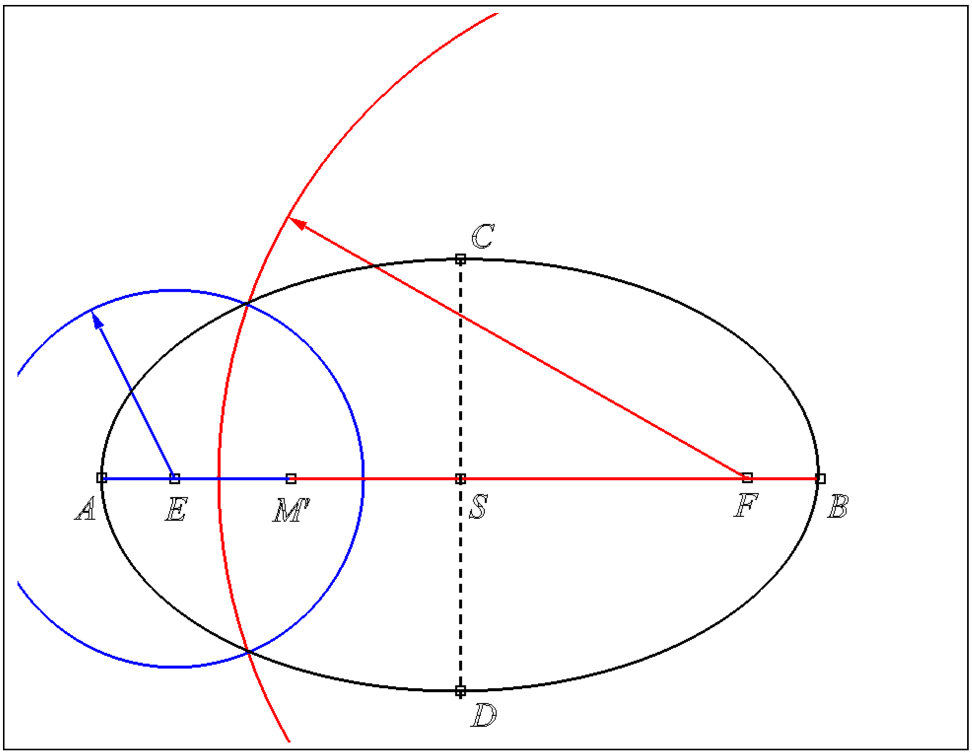
$|EC|=|FC|=a$

ΔECS charakteristický trojúhelník

$a^2=e^2+b^2$

Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Elipsa:

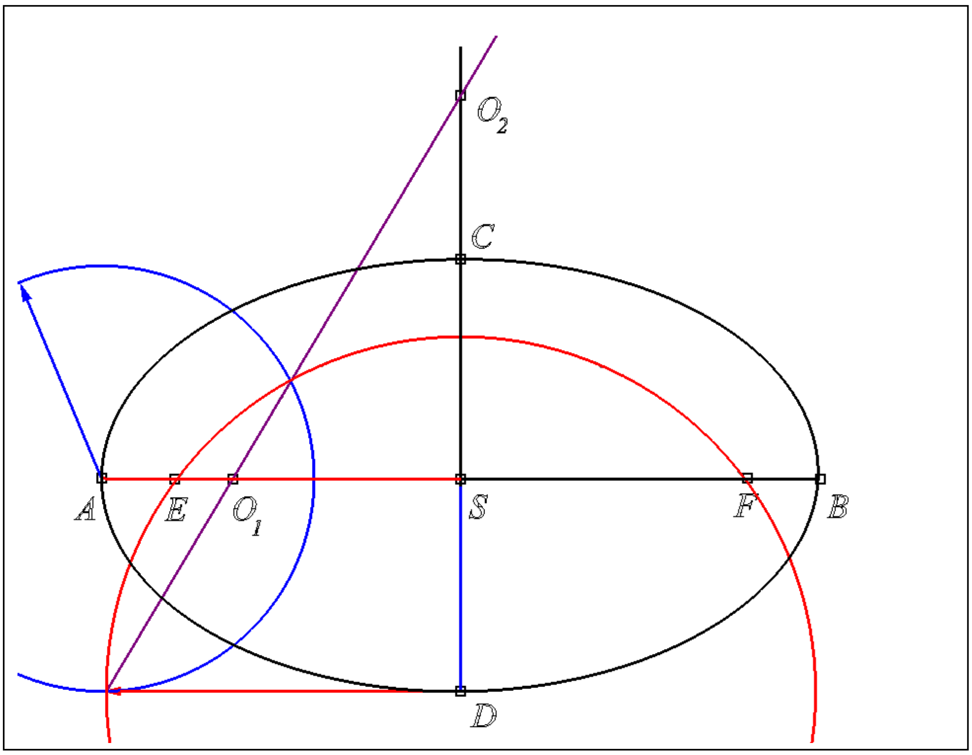


Bodová konstrukce

1. $M' \mu EF$
2. $k_1 \equiv (E; r = |AM'|)$
3. $k_2 \equiv (F; r = |BM'|)$

Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Elipsa:

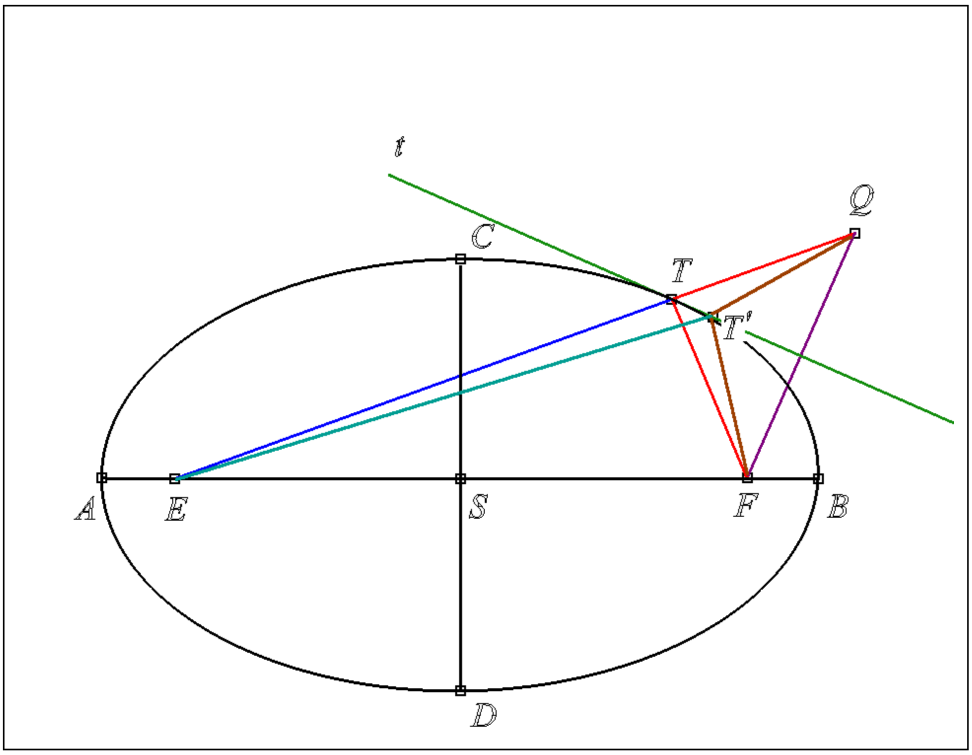


Oskulační kružnice

1. $k_1 \equiv (D; a)$
2. $k_2 \equiv (A; b)$
3. p
4. $O_1 \in p \cap CD$
5. $O_2 \in p \cap AB$
6. $o_1 \equiv (O_1; r = |O_1A|)$
7. $o_2 \equiv (O_2; r = |O_2D|)$

Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Elipsa:



1. Zvolme T

2 t: *osa* □ *FTG*

3. $Q: Q \in ET\,;\, FQ \perp t$

4. $T': T' \in t; T' \neq T$

$FT' \cong QT'$

$|ET'| + |QT'| = |ET'| + |FT'|$

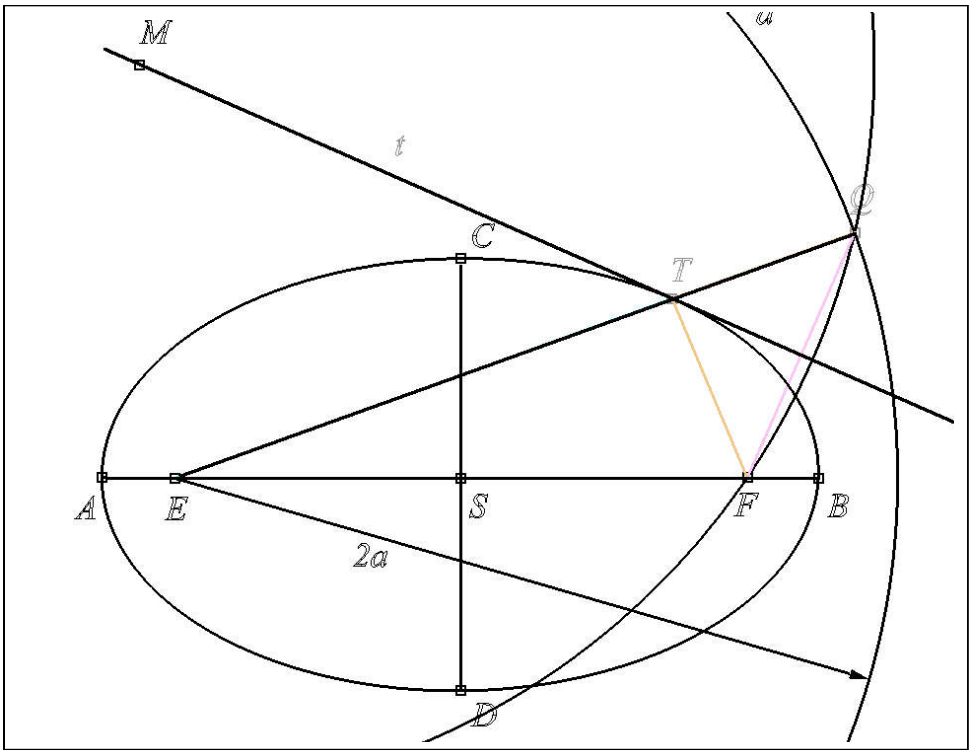
$|ET'| + |QT'| > |EQ| = 2a$

T' vně elipsy

t ***je tečna elipsy***

Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Elipsa:



Konstrukce tečny elipsy z daného bodu:

Q:

1. $d \equiv (E; 2a)$

2. $k \equiv (M; r = |MF|)$

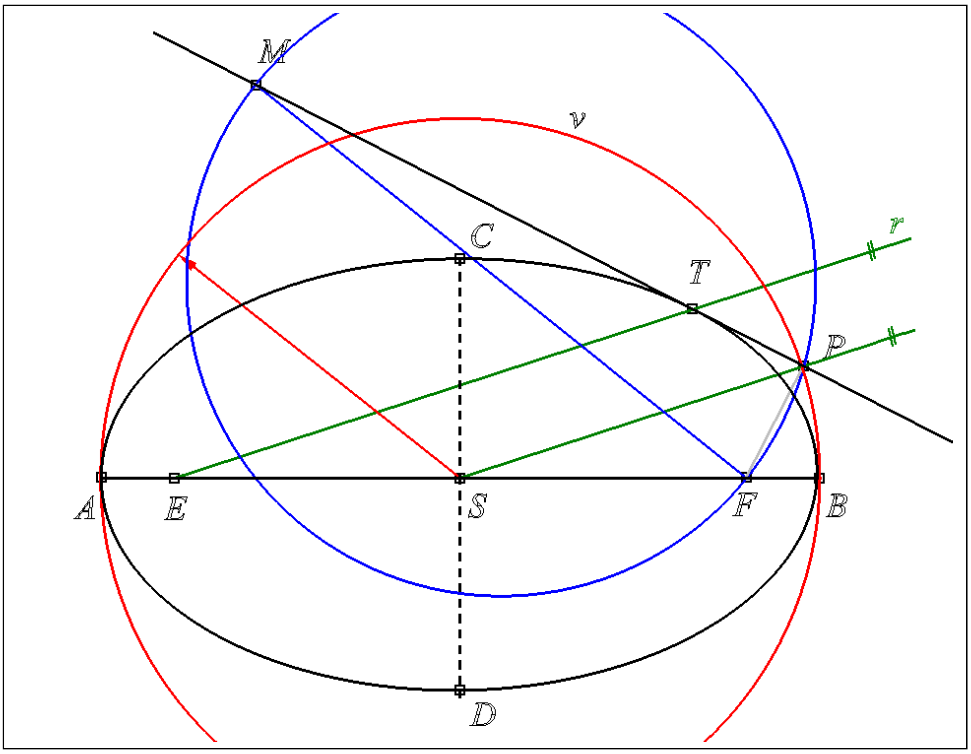
3. $Q \in d \cap k$

4. t : *osa FQ*

5. $T \in t \cap EQ$

Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Elipsa:



Konstrukce tečny elipsy z daného bodu:

P:

$|EQ| = 2a$

$|SP| = a$

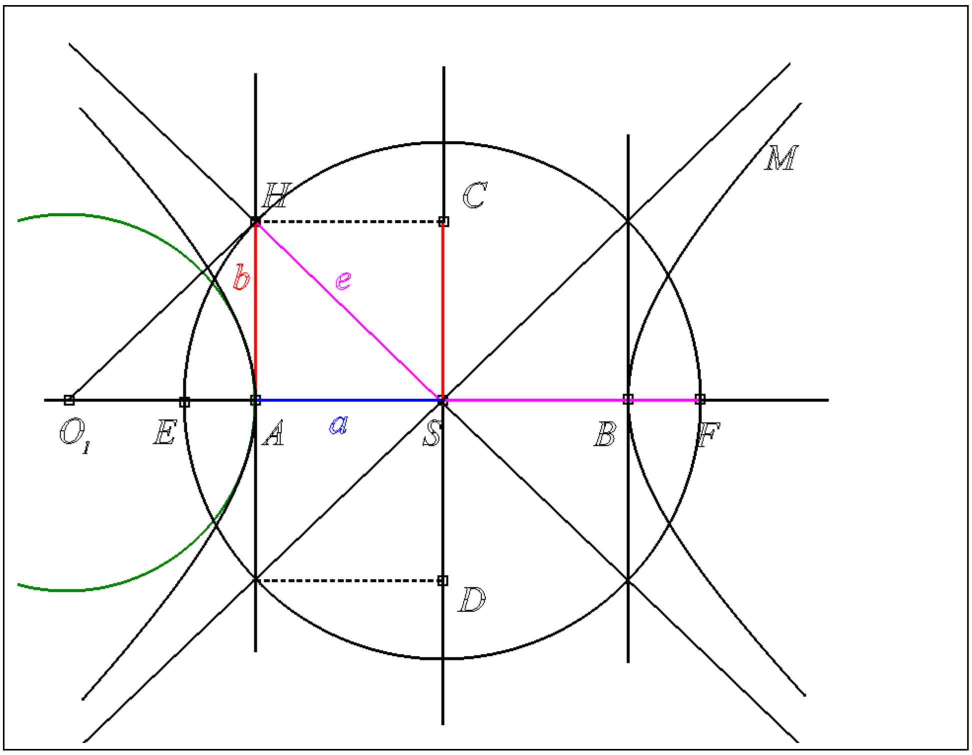
$P \in v \equiv (S;a)$

Konstrukce:

1. $v \equiv (S;a)$
2. k
   - Thaletova nad MF
4. $t \equiv MP$
5. $r : r \parallel SP; E \in r$

Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Hyperbola:



$|EM| - |FM| = \pm 2a$

ΔSHA charakteristický trojúhelník

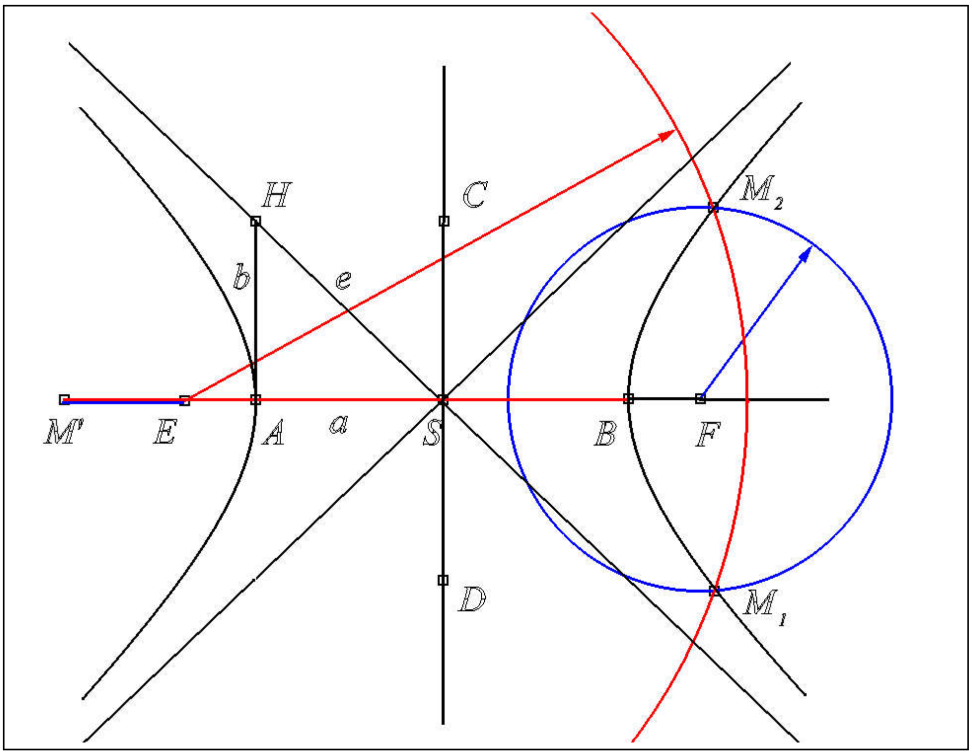
$e^2 = a^2 + b^2$

$O_1H \perp HS$

O_1 - střed oskulační kružnice

Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Hyperbola:



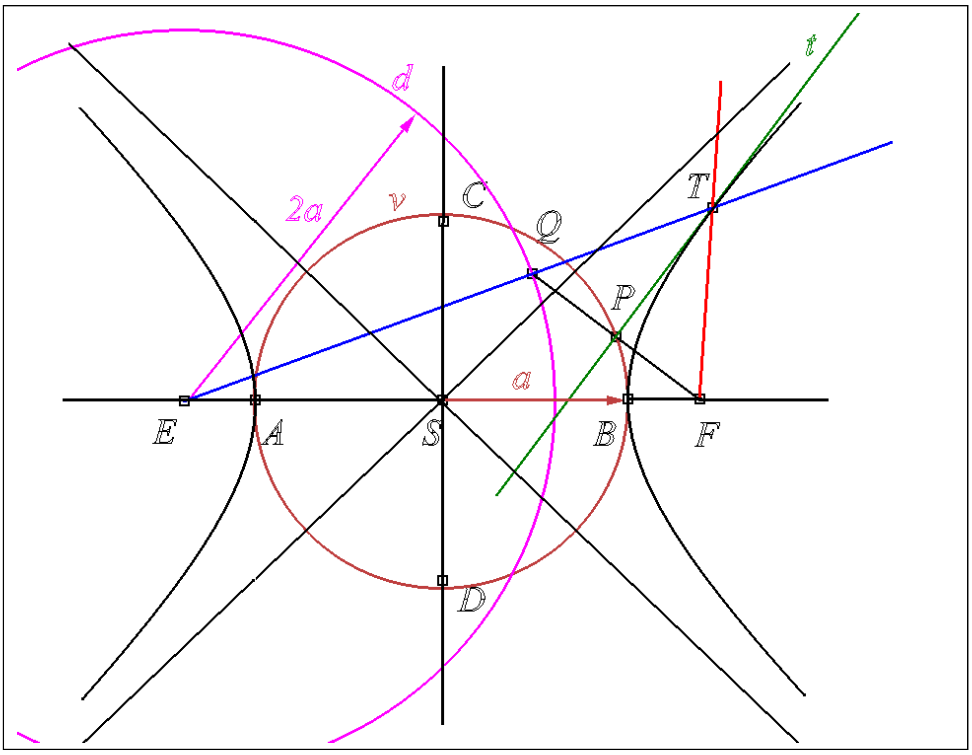
Bodová konstrukce:

Zvolím $M' : E \mu M' F$

1. $k_1 \equiv \left(E; r = |BM'|\right)$
2. $k_2 \equiv \left(F; r = |AM'|\right)$
3. $M \in k_1 \cap k_2$

Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Hyperbola:

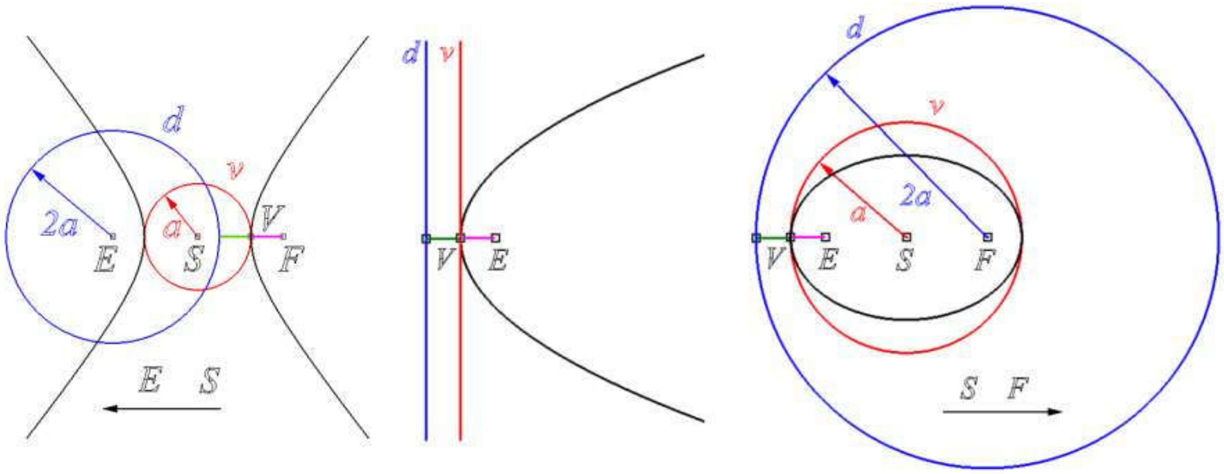


Tečna hyperboly

d - řídicí kružnice
v - vrcholová kružnice

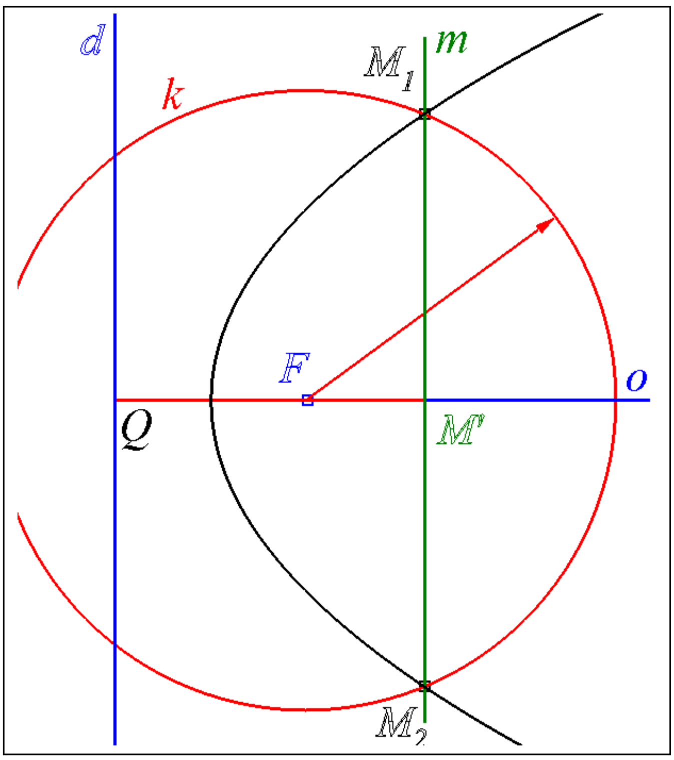
Ohniskové vlastnosti kuželoseček

Parabola:



Ohniskové vlastnosti kuželoseček

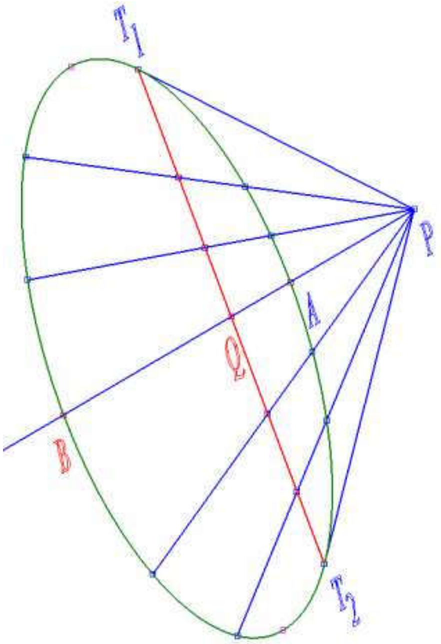
Parabola:

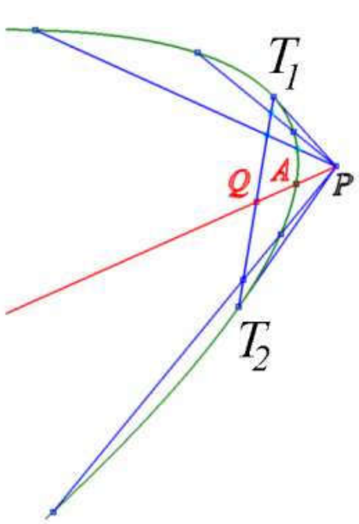


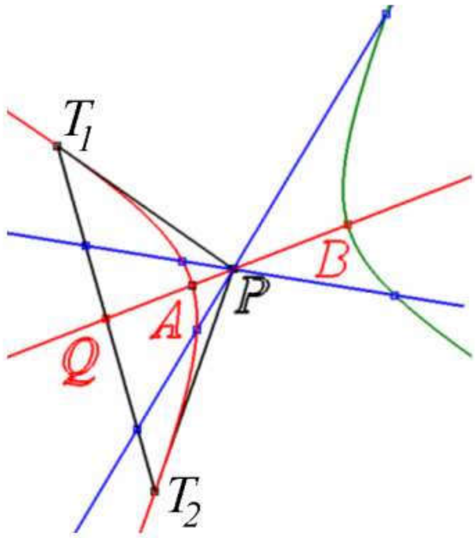
Bodová konstrukce:

1. Zvolím $M' \in o$
2. $m : M' \in m; m \parallel d$
3. $k \equiv \left(F; r = |dM'|\right)$
4. $M_1; M_2 \in k \cap d$

Projektivní vlastnosti kuželoseček

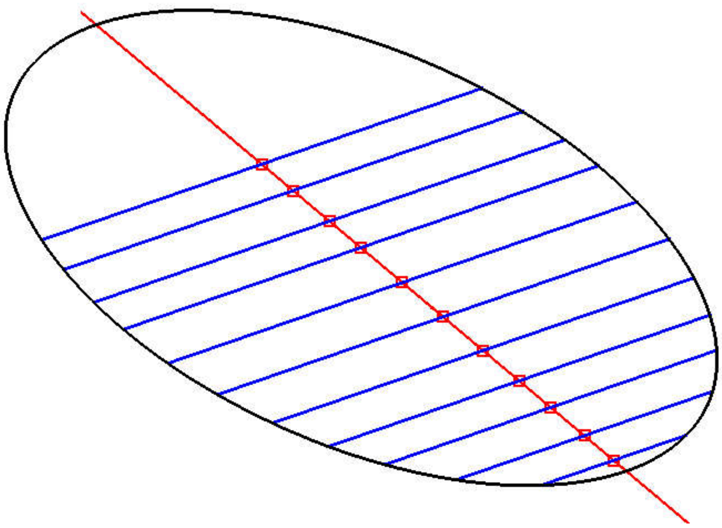






$(P;Q;A;B) = -1$ T_1T_2 *- polára vzhledem k* P *Je-li* Q *střed* T_1T_2*, pak* $P;Q$ *polárně sdružené*

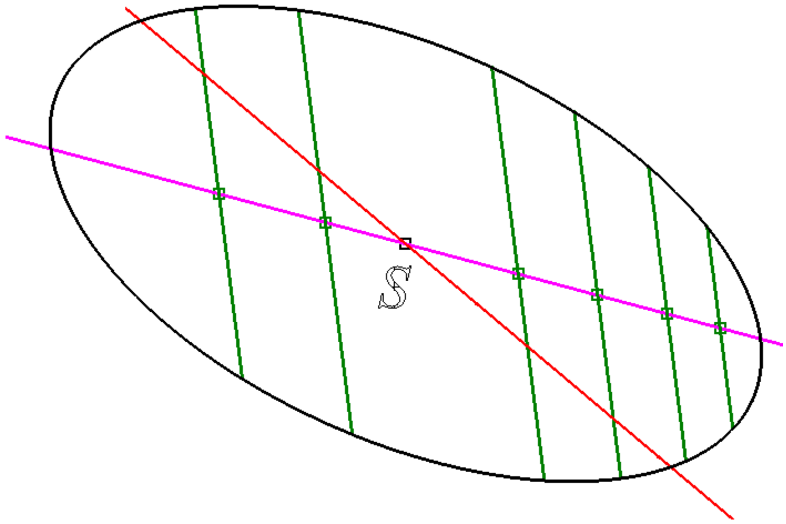
Průměry a střed kuželosečky



Středy všech vzájemně rovnoběžných tětiv kuželosečky leží na téže přímce

Průměr kuželosečky – *přímka určená středy dvou navzájem rovnoběžných tětiv*

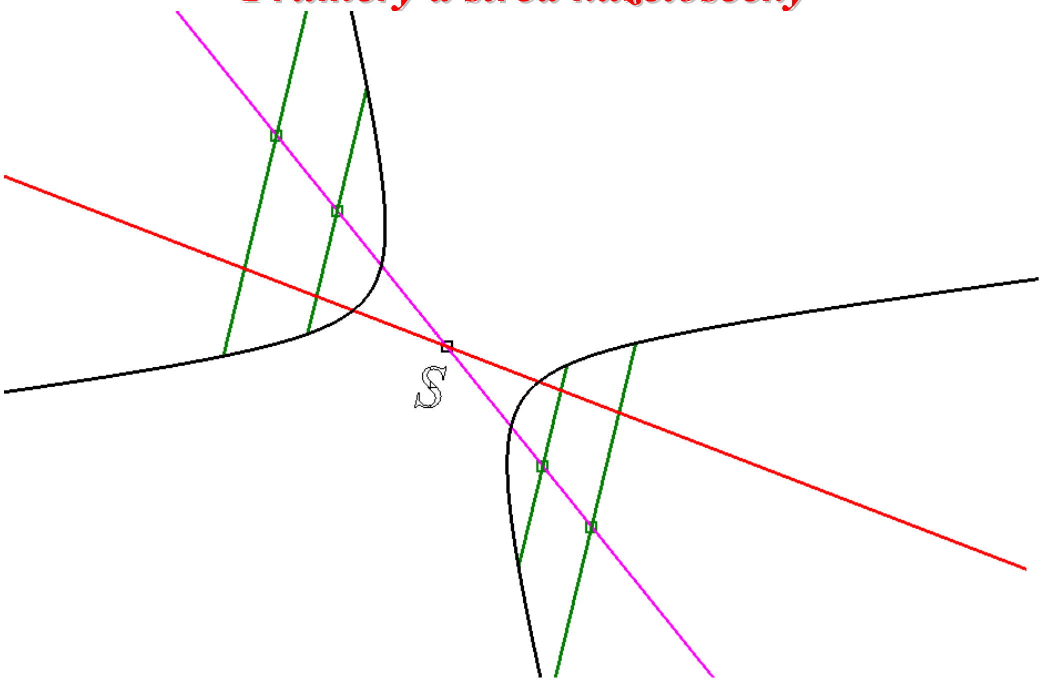
Průměry a střed kuželosečky



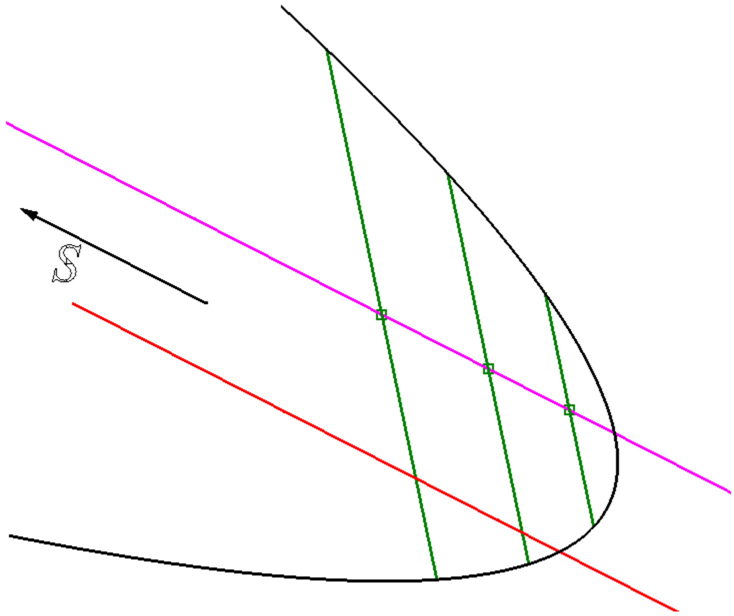
Všechny průměry kuželosečky se protínají v jednom bodě

***Střed kuželosečky** – průsečík dvou průměrů*

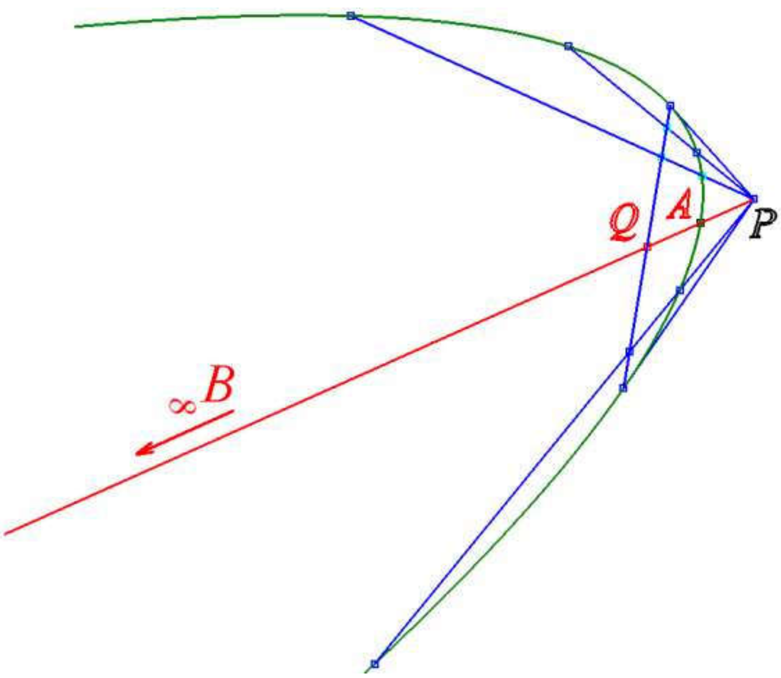
Průměry a střed kuželosečky



Průměry a střed kuželosečky



Projektivní vlastnosti kuželoseček



Q *polárně sdružený*

$(P;Q;A;B) = -1$

$(P;Q;A;{}_{\infty}B) = -1$

$(P;Q;A;{}_{\infty}B) = \dfrac{(P;Q;A)}{(P;Q;{}_{\infty}B)}$

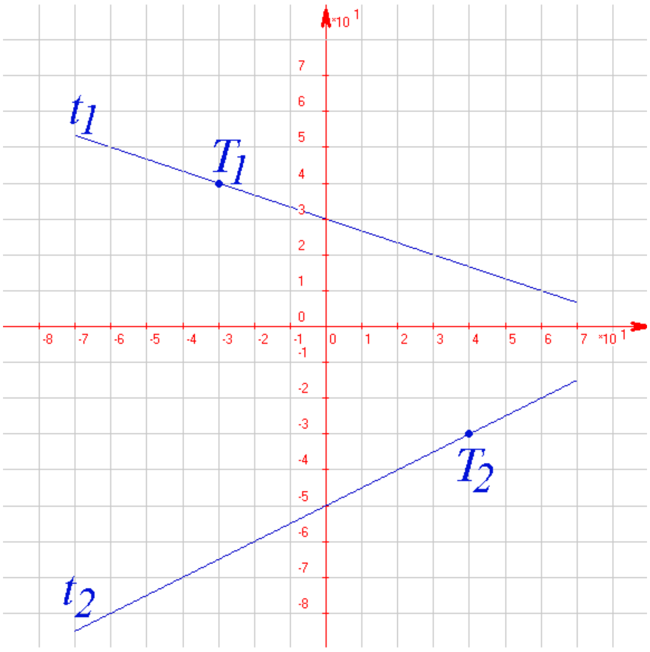
$= \dfrac{(P;Q;A)}{1}$

$\Rightarrow (P;Q;A) = -1$

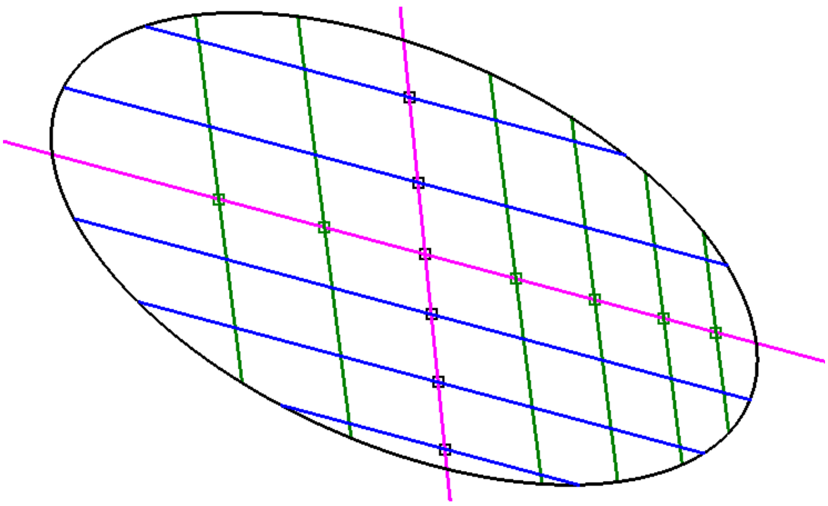
$\Rightarrow A$ *je střed* PQ

Konstrukční úloha

Sestrojte parabolu, jsou-li dány její tečny $t_1 \equiv y = 30 - \frac{x}{3}$, $t_2 \equiv y = \frac{x}{2} - 50$ *a na nich body dotyku* $T_1 = [-30;?]$; $T_2 = [?;-30]$.



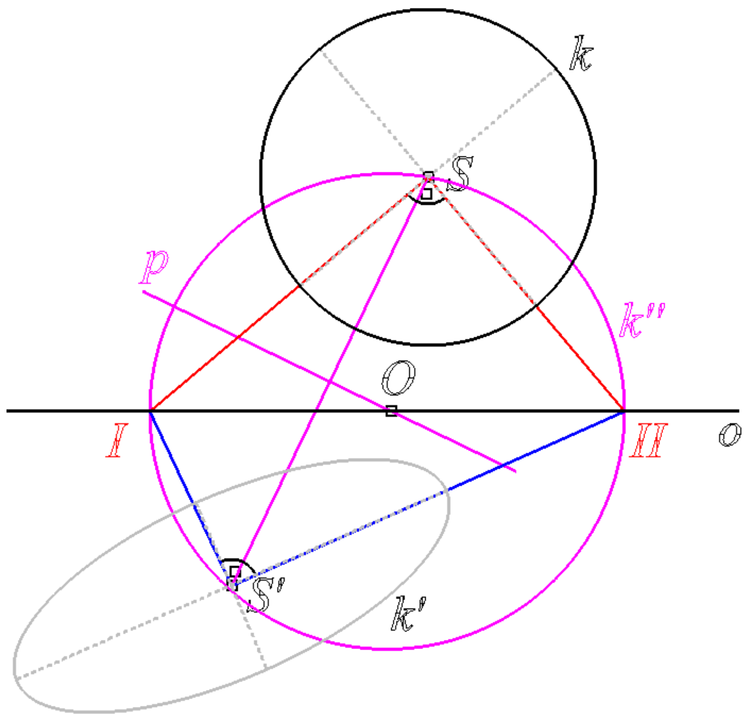
Sdružené průměry



Průměr kuželosečky je sdružený s tětivou právě tehdy, když prochází jejím středem

Průměry kuželosečky jsou vzájemně sdružené právě tehdy, když jeden je sdroženou tětivou druhému.

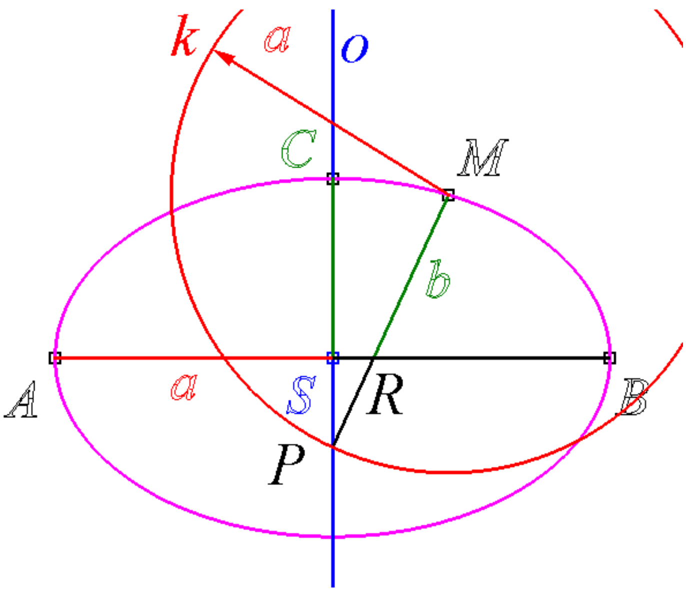
Afinita mezi kružnicí a elipsou



1. p - osa SS'
2. $O \in p \cap o$
3. $k'' = (o, r = SO)$
4. $I, II \in k'' \cap o$

Afinita mezi kružnicí a elipsou

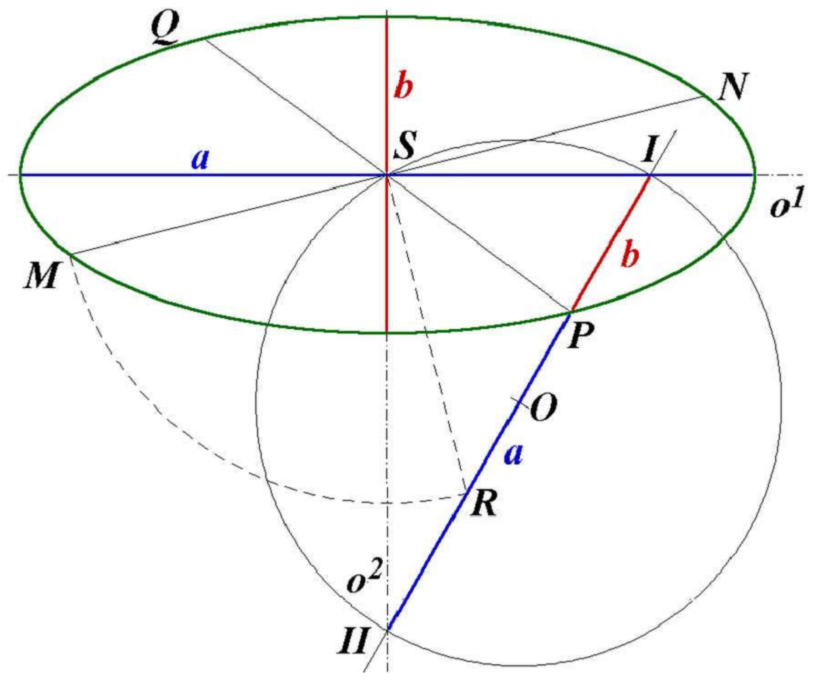
Využití proužkové konstrukce: Dáno A;B; obecný bod M



1. o - osa AB
2. $k \equiv (M; a)$
3. $P \in k \cap o$
4. $R \in PM \cap AB$
5. $b = |MR|$

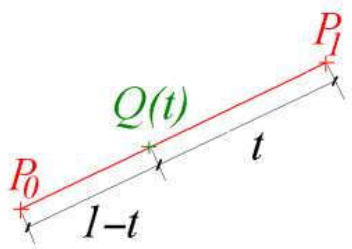
Afinita mezi kružnicí a elipsou

Rytzova konstrukce: Dány stružené průměry MN; PQ;



Bezierovy křivky

Navrhli: **Pierre Étienne Bézier** (1910 - 1999) pro firmu Renault.
Paul de Casteljau (nar. 1930) pro firmu Citroën



1. stupně – úsečka:

$$Q(t) = P_0 + (P_1 - P_0)t$$

$$Q(t) = P_0 + P_1 t - P_0 t$$

$$Q(t) = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$q_1(t) = p_{01} \cdot (1-t) + p_{11} \cdot t$$

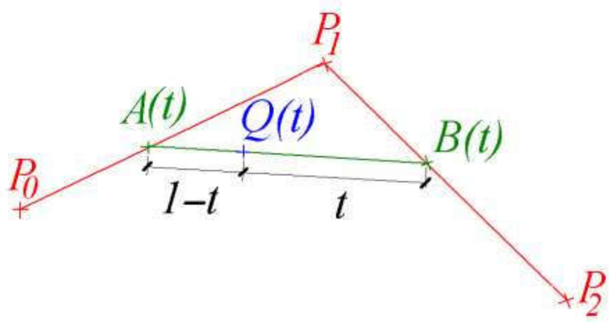
$$q_2(t) = p_{02} \cdot (1-t) + p_{12} \cdot t$$

Rhinoceros:

Křivka/Volný tvar/Řídicí body,
zadat stupeň 1

Bezierovy křivky

2. stupně:



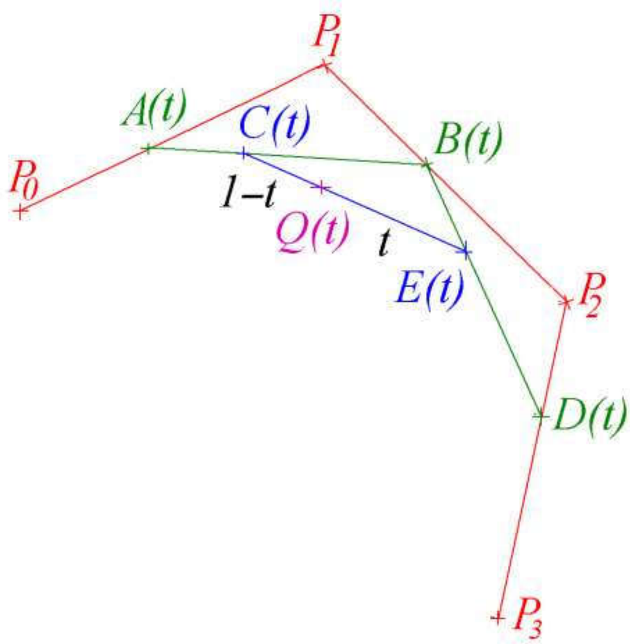
$$A(t) = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$
$$B(t) = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$
$$Q(t) = A(t) \cdot (1-t) + B(t) \cdot t$$
$$Q(t) = \left[P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t\right] \cdot (1-t) + B(t) \cdot t$$
$$Q(t) = \left[P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t\right] \cdot (1-t) +$$
$$+\left[P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t\right] \cdot t$$
$$Q(t) = P_0 \cdot (1-t)^2 + P_1 \cdot 2t \cdot (1-t) + P_2 \cdot t^2$$

Rhinoceros:

Křivka/Volný tvar/Řídicí body,
zadat stupeň 2

Bezierovy křivky

3. stupně:



$$A(t) = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$
$$B(t) = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$
$$C(t) = A(t) \cdot (1-t) + B(t) \cdot t$$
$$D(t) = P_2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot t$$
$$E(t) = B(t) \cdot (1-t) + D(t) \cdot t$$
$$Q(t) = C(t) \cdot (1-t) + E(t) \cdot t$$
$$Q(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_i(t)$$
$$B_0^{(3)}(t) = (1-t)^3; \qquad B_1^{(3)}(t) = 3t(1-t)^2;$$
$$B_2^{(3)}(t) = 3t^2(1-t); \quad B_3^{(3)}(t) = t^3$$

Rhinoceros:
Křivka/Volný tvar/Řídicí body,
zadat stupeň 3

B-splajn křivky

Křivka: $\boldsymbol{Q}(t) = c_0(t)\cdot\boldsymbol{P}_0 + c_1(t)\cdot\boldsymbol{P}_1 + \ldots + c_n(t)\cdot\boldsymbol{P}_n$

$c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_n(t) = 1$

Bázové funkce - $c_0(t);c_1(t);\ldots;c_n(t)$ *jsou lineárně nezávislé*

Splajnové funkce $c_0(t);c_1(t);\ldots;c_n(t)$ *umožňují napojování až do hladkosti* $G^{(n-1)}$

Bázové splajnové funkce = bázové + splajnové

Bázové splajnové křivky (B splajn křivky) – určeny bázovými splajnovými funkcemi

Nedostatky B-splajn křivek:

1) *Nelze přesně modelovat eliptické a hyperbolické oblouky*
2) *Nejsou invariantní vůči projektivním transformacím*

NURBS křivky

$\boldsymbol{P}_0;\boldsymbol{P}_1;\ldots;\boldsymbol{P}_n$ *euklidovští reprezentanti bodů projektivního prostoru,*

$f_0(t);f_1(t);\ldots;f_n(t)$ *bázové funkce takové, že* $\forall t \in D:\ f_0(t)+f_1(t)+\ldots+f_n(t)=1$

NURBS křivka v projektivním prostoru:

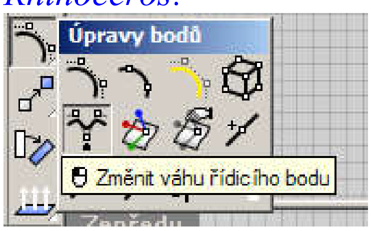
$$\boldsymbol{Q}(t) = \omega_0 f_0(t)\cdot\boldsymbol{P}_0 + \omega_1 f_1(t)\cdot\boldsymbol{P}_1 + \ldots + \omega_n f_n(t)\cdot\boldsymbol{P}_n = \sum_{i=0}^{n}\omega_i f_i(t)\cdot\boldsymbol{P}_i$$

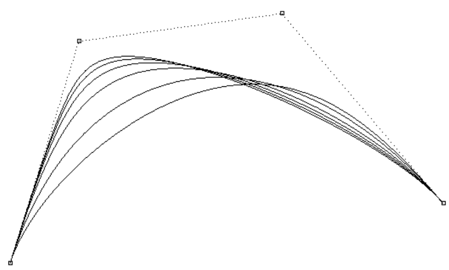
$\omega_0;\omega_1;\ldots;\omega_n$ *– váhy bodů* $\boldsymbol{P}_0;\boldsymbol{P}_1;\ldots;\boldsymbol{P}_n$

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_0;\omega_1;\ldots;\omega_n)$ *– váhový vektor*

Geometrický význam váhy

Rhinoceros:





Změna vah všech bodů ve stejném poměru nemá vliv na tvar křivky

Non-Uniform Rational Basic Spline Curves

V projektivním prostoru

$$\boldsymbol{Q}(t) = \omega_0 f_0(t)\cdot \boldsymbol{P}_0 + \omega_1 f_1(t)\cdot \boldsymbol{P}_1 + \ldots + \omega_n f_n(t)\cdot \boldsymbol{P}_n$$

Rational

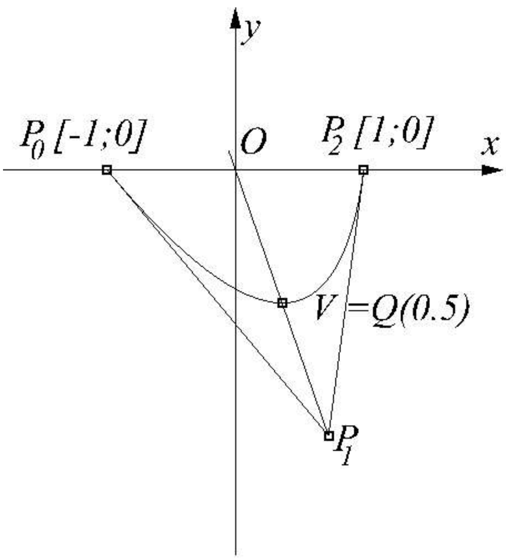
$$\boldsymbol{Q}(t) = \omega_0 f_0(t)\cdot(p_{01};p_{02};1) + \omega_1 f_1(t)\cdot(p_{11};p_{12};1) + \ldots + \omega_n f_n(t)\cdot(p_{n1};p_{n2};1)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}(t) = \big(&\omega_0 f_0(t)\,p_{01} + \omega_1 f_1(t)\,p_{11} + \ldots + \omega_n f_n(t)\,p_{n1};\\ &\omega_0 f_0(t)\,p_{02} + \omega_1 f_1(t)\,p_{12} + \ldots + \omega_n f_n(t)\,p_{n2};\\ &\omega_0 f_0(t) + \omega_1 f_1(t) + \ldots + \omega_n f_n(t)\big)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \left(\sum \omega_i f_i(t)\,p_{i1}; \sum \omega_i f_i(t)\,p_{i2}; \sum \omega_i f_i(t)\right)$$

Kartézské souřadnice:

$$Q(t) = \left[\frac{\sum \omega_i f_i(t)\,p_{i1}}{\sum \omega_i f_i(t)}; \frac{\sum \omega_i f_i(t)\,p_{i2}}{\sum \omega_i f_i(t)}\right]$$



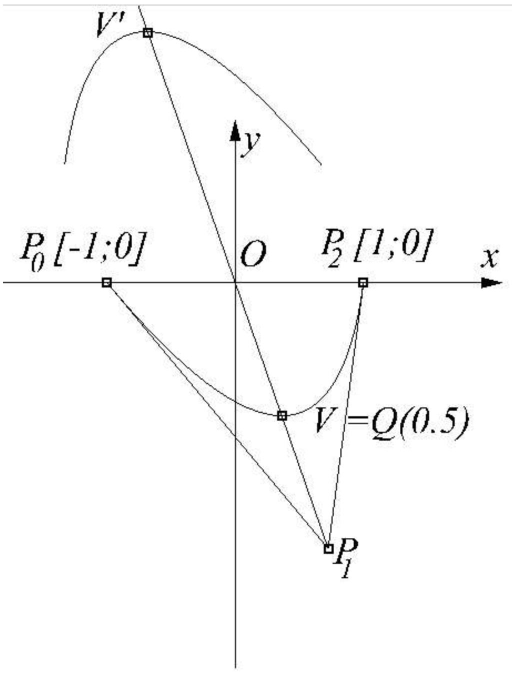
NURBS křivka 2. stupně

$$(\omega_0;\omega_1;\omega_2) = (1;\omega;1); \qquad 0 \le t \le 1$$

$$V = Q\left(\tfrac{1}{2}\right) \qquad \overrightarrow{OV} = \frac{\omega}{1+\omega}\cdot\overrightarrow{OP_1}$$

$$\omega = 1 \Rightarrow \overrightarrow{OV} = \frac{\omega}{1+\omega}\cdot\overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OP_1}$$

$(P_1;O;V) = -1$ a $(P_1;O;V;V') = -1 \qquad \Rightarrow$ parabola



NURBS křivka 2. stupně

$$(\omega_0;\omega_1;\omega_2)=(1;\omega;1); \quad 0\le t\le 1$$

$$V=Q\left(\tfrac{1}{2}\right) \qquad \overrightarrow{OV}=\frac{\omega}{1+\omega}\cdot\overrightarrow{OP_1}$$

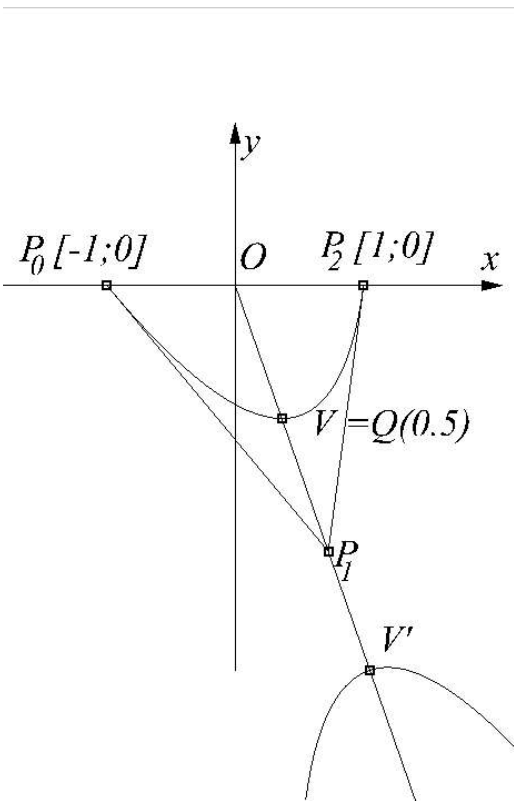
$$\omega<1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\omega}{1+\omega}<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OV}\right|<\left|\overrightarrow{VP_1}\right|$$

$$(P_1;O;V)=\frac{(P_1;V)}{(O;V)}<-1$$

$$(P_1;O;V;V')=\frac{(P_1;O;V)}{(P_1;O;V')}=\underbrace{(P_1;O;V)}_{<-1}\cdot\underbrace{\frac{(O;V')}{(P_1;V')}}_{(0;1)}=-1\Rightarrow$$

$$(P_1;V')>(O;V')\Rightarrow \text{elipsa}$$



NURBS křivka 2. stupně

$$(\omega_0;\omega_1;\omega_2)=(1;\omega;1); \quad 0\le t\le 1$$

$$V=Q\left(\tfrac{1}{2}\right) \qquad \overrightarrow{OV}=\frac{\omega}{1+\omega}\cdot\overrightarrow{OP_1}$$

$$\omega>1\Rightarrow \frac{\omega}{1+\omega}>\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OV}\right|>\left|\overrightarrow{VP_1}\right|\Rightarrow$$

$$-1<(P_1;O;V)=\frac{(P_1;V)}{(O;V)}<0$$

$$(P_1;O;V;V')=\frac{(P_1;O;V)}{(P_1;O;V')}=\underbrace{(P_1;O;V)}_{(-1;0)}\cdot\underbrace{\frac{(O;V')}{(P_1;V')}}_{>1}=-1\Rightarrow$$

$$(P_1;V')<(O;V')\Rightarrow \text{hyperbola}$$

Rhinoceros:

Zobrazit jakoukoli kružnici, elipsu, parabolu, hyperbolu a podívat se na váhy