

Témata k bakalářské státní závěrečné zkoušce (ak. rok 24/25)

I. Obecná a lineární algebra, geometrie, diskrétní matematika

- 1) **Základní algebraické struktury**, operace a zákony, grupoidy, pologrupy a grupy, okruhy, tělesa a pole, svazy (základní vlastnosti, základní příklady).
- 2) **Obory integrity**: okruhy polynomů, dělitelnost v oboru integrity, Gaussovy a Eukleidovy okruhy (Eukleidův algoritmus), okruhy hlavních ideálů, teorie polí (konečná pole).
- 3) **Univerzální algebry**: definice univerzální algebry, podalgebry, izomorfismy a homomorfismy, kongruence a faktorové algebry, kongruence na grupách a okruzích, přímé součiny algeber.
- 4) **Uspořádání a svazy**: uspořádané množiny, svazy, úplné svazy a uzávěrové operátory, Galoisova konexe, Dedekindovo-MacNeillovo zúplnění.
- 5) **Základy teorie množin**: relace mezi množinami, zobrazení, relace na množině a jejich vlastnosti, tolerance a pokrytí, ekvivalence a rozklady, Axiom výběru a věty s ním ekvivalentní, ordinální a kardinální čísla
- 6) **Lineární prostory**: vektorové prostory a podprostory, lineární nezávislost, báze, dimenze; matice, determinanty, soustavy lineárních rovnic (Frobeniova věta), vlastní čísla, vlastní vektory.
- 7) **Afinní a unitární prostory**: analytická geometrie, skalární součin, Eukleidovské prostory, vektorový součin.
- 8) **Tenzory**: lineární formy a duální prostory, bilineární formy, kvadratické formy, polární tvar, Silvestrovo kritérium. Tenzorový prostor, vnější (Grasmanova) algebra, Hodgeova dualita, geometrická algebra.
- 9) **Diferenciální geometrie**: Křivky: základní pojmy, Frenetovy vzorce, křivost a torze křivky. Plochy: základní pojmy, první a druhá základní forma, Gaussova a střední křivost.
- 10) **Algebraické aplikace v informatice**: Booleovy svazy, Booleovy funkce a jejich aplikace (logické a spínačové obvody), formální jazyky, konečné automaty, gramatiky, samoopravné kódy (binární kódy, lineární a Hammingovy kódy).

II. Matematická analýza

1) **Posloupnosti a funkce jedné reálné proměnné:** axiomatické zavedení množiny reálných čísel, posloupnosti (monotonie a ohraničenost, limita a její vlastnosti, hromadné body, Cauchyovská posloupnost), funkce (definiční obor a obor hodnot, funkce prostá, surjektivní a bijektivní, sudost, lichost, periodičnost, ohraničenost, monotonie, konvexnost a konkávnost, složená funkce, inverzní funkce), základní elementární funkce, limita a spojitost funkce (věty o spojitosti).

2) **Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné:** derivace, derivace elementárních funkcí a pravidla pro derivování, diferencovatelnost a diferenciál, věty o derivaci (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova, l'Hospitalovo pravidlo), Taylorův polynom a Taylorova věta, aplikace diferenciálního počtu (průběh funkce).

3) **Integrační počet funkcí jedné reálné proměnné:** primitivní funkce, základní integrační techniky (metoda per-partes, substituční metody), Riemannův integrál (konstrukce a podmínky zaručující integrovatelnost, vlastnosti), Newtonova–Leibnizova formule, aplikace Riemannova integrálu, integrál jako funkce horní meze, nevlastní integrál.

4) **Funkce více reálných proměnných:** limita a spojitost, parciální derivace, derivace ve směru a gradient, diferencovatelnost a totální diferenciál funkce, Taylorův polynom a Taylorova věta, volné, vázané a globální extrém, zobrazení mezi prostory vyšší dimenze, funkce zadaná implicitně (jedné a více proměnných).

5) **Dvojný a trojný integrál:** klasická konstrukce na obdélníku (normální množině) a konstrukce skrze Jordanovu míru, Fubiniho věta, substituční věty (substituce do polárních, cylindrických a sférických souřadnic), aplikace dvojného a trojného integrálu.

6) **Křivkový a plošný integrál:** křivkový integrál 1. a 2. druhu, nezávislost na integrační cestě (potenciál), Greenova věta, aplikace křivkového integrálu, plošný integrál 1. a 2. druhu, Gaussova–Ostrogradského a Stokesova věta, aplikace plošného integrálu, základy teorie pole (skalární a vektorové pole, gradient, divergence a rotace, Laplaceův operátor).

7) **Nekonečné číselné a funkční řady:** konvergence a divergence číselné řady, kritéria konvergence, základní aritmetické operace s řadami, absolutní konvergence. bodová a stejnoměrná konvergence funkční řady (Weierstrassovo kritérium, spojitost součtové funkce, integrování a derivování funkční řady člen po členu).

8) **Taylorovy a Fourierovy řady:** mocninné a Taylorovy řady, bodová a stejnoměrná konvergence mocninných řad, rovnost funkce a její Taylorovy řady, aplikace, trigonometrické a Fourierovy řady, typy konvergence Fourierovy řady (bodová, stejnoměrná, v normě).

9) **Obyčejné diferenciální rovnice prvního a vyšších řádů:** obecný tvar počátečního problému, existence a jednoznačnost řešení, lineární rovnice (struktura prostoru řešení a metody řešení), okrajový problém pro rovnici druhého řádu.

10) **Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu:** obecný tvar počátečního problému, existence a jednoznačnost řešení, vztah k diferenciálním rovnicím vyšších řádů, lineární soustavy (struktura prostoru řešení a metody a metody řešení), integrační křivky a fázové trajektorie.

11) **Metrické prostory, normované lineární prostory, unitární prostory:** základní vlastnosti, vztahy mezi prostory, příklady prostorů posloupností a funkcí, Banachovy prostory, Hilbertovy prostory.

12) **Základy teorie lineárních parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu:** základní pojmy, klasifikace, rovnice matematické fyziky, metody řešení (metoda charakteristik, Fourierova metoda řad).

III. Pravděpodobnost a statistika, optimalizace, numerická matematika

- 1) **Náhodná veličina, náhodný vektor:** definice, funkční a číselné charakteristiky, základní typy rozdělení, funkce náhodné veličiny a náhodného vektoru, rozdělení transformovaných náhodných veličin a vektorů.
- 2) **Náhodný výběr, statistiky:** centrální limitní věta, náhodný výběr, statistiky, bodové odhady a jejich vlastnosti, intervalové odhady, testy hypotéz, testy hypotéz pro binomické a normální rozdělení.
- 3) **Regresní analýza:** mnohorozměrné normální rozdělení, podmíněné normální rozdělení, lineární regresní model, metoda nejmenších čtverců, analýza rozptylu, testy hypotéz o regresních parametrech, koeficient determinace, regresní diagnostika.
- 4) **Analýza závislosti náhodných proměnných:** kovarianční a korelační matice, koeficient mnohonásobné korelace, parciální korelační koeficient, kontingenční tabulky, chí-kvadrát test nezávislosti kategoriálních proměnných, multinomické rozdělení.
- 5) **Optimalizace:** úlohy matematického programování, jejich popis, prvky, základní vlastnosti a softwarové nástroje, úvodní poznatky o konvexních množinách a konvexních funkcích.
- 6) **Numerické metody řešení algebraických rovnic:** řešení jedné nelineární rovnice, řešení soustav nelineárních rovnic, řešení soustav lineárních rovnic (přímé a iterační metody).
- 7) **Interpolace a aproximace, numerické derivování a integrování:** pojem interpolace a aproximace, Lagrangeovy a Hermitovy interpolační polynomy, interpolační splajny, metoda nejmenších čtverců, numerické derivování a integrování.
- 8) **Numerické metody řešení počátečních problémů pro ODR:** diskretizace diferenciální rovnice, metody jednokrokové a vícečíslové, A-stabilita, tuhé problémy.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
garant studijního programu