MATEMATIKA I

Požadavky ke zkoušce pro 1. ročník, skupina A — 2020/21

I. Základy, lineární algebra a analytická geometrie

1. **Základní pojmy**
   (a) Základy teorie množin: množina a její prvky, podmnožina, průnik, sjednocení, doplněk a rozdíl množin, kartézský součin množin, relace, zobrazení, funkce.
   (b) Základy logiky: pojem výrok a jeho negace, konjunkce, disjunkce a implikace výroků. Negace konjunkce, disjunkce a implikace výroků.
   (c) Výroky s kvantifikátory $\exists$ a $\forall$ a jejich negace.
   (d) Čísla přirozená $\mathbb{N}$, celá $\mathbb{Z}$, racionální $\mathbb{Q}$, reálná $\mathbb{R}$ a komplexní $\mathbb{C}$. Operace s čísly. Uspořádání a absolutní hodnota. Číselné množiny a jejich zápis, maximum a supremum, minimum a infimum.

2. **Matice a vektory**
   (a) Pojem matice, transponovaná matice, násobek, součet a součin matic.
   (b) Pojem vektor, lineární kombinace vektorů, nezávislost vektorů.
   (c) Hodnost matice. Řádkové a sloupcové úpravy, které nemění hodnost matice, matice schodovitá (stupňovitá).
   (d) Determinant matice, výpočet podle definice a rozvojem podle řádku nebo sloupce. Křížové a Sarrusovo pravidlo. Výpočet determinantu pomocí řádkových a sloupcových úprav, výpočet velkých determinantů.
   (e) Čtvercové matice. Matice jednotková E, diagonální, trojúhelníková, symetrická, antisymetrická, regulární a singulární.
   (f) Matice inverzní a řešení maticových rovnic $AX = B$ a $XA = B$.
   (g) Metody výpočtu inverzní matice: algebraické doplňky, adjungovaná matice, výpočet pomocí řádkových úprav $(A|E) \rightsquigarrow (E|A^{-1})$.

3. **Soustavy lineárních rovnic (SLR)**
   (a) Pojem SLR, homogenní a nehogomenní SLR, maticový zápis.
   (b) Existence a jednoznačnost řešení SLR (Frobeniova věta).
   (c) Eliminační metody řešení SLR: Gaussova a Jordanova eliminace.
   (d) Výpočet řešení SLR pomocí determinantů (Cramerovo pravidlo).

4. **Analytická geometrie**
   (a) Body a vektory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, různá pojetí vektoru ve fyzice.
   (b) Skalární, vektorový a smíšený součin vektorů: analytická a geometrická definice, geometrický význam.
   (c) Rovnice přímky v $\mathbb{R}^2$, roviny v $\mathbb{R}^3$ (obecná, úseková, parametrická a vzájemný převod), vektor normály. Rovnice přímky v $\mathbb{R}^3$.
   (d) Vzájemná poloha přímek a rovin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.
   (e) Parametrické rovnice pro útvary v rovině a prostoru (polopřímka, úsečka, polorovina, úhel, pás, trojúhelník, . . .)
   (f) Kvadratické křivky v rovině (kuželosečky) v základní poloze.
   (g) Kvadratické plochy v prostoru (kvadriky) v základní poloze.

II. Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

1. **Posloupnosti**

   (a) Pojem posloupnosti a její limity (definice vlastní i nevlastní limity).
   (b) Limita násobku, součtu, součinu a podílu posloupností.
   (c) Limita neklesající posloupnosti.
   (d) Příklady konvergentní, divergentní a oscilující posloupnosti.

2. **Funkce**

   (a) Zobrazení $X \to Y$, definiční obor $\mathcal{D}$, obor hodnot $\mathcal{H}$. Zobrazení prosté (injektivní), na (surjektivní), vzájemně jednoznačné (bijektivní) a inverzní zobrazení.
   (b) Funkce, funkce sudá, lichá, periodická (nejmenší perioda); rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající a konstantní; konvexní, konkávní. Extrémy a inflexní bod.
   (c) Elementární funkce: e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$, x^n, x^p, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ – jejich definiční obory, obory hodnot, vlastnosti a grafy.
   (d) Polynomy, základní věta algebry, rozklad polynomu na kořenový součin. Kořeny a rozklad polynomu s reálnými koeficienty. Racionální lomené funkce, dělení polynomů, ryze racionální funkce a jejich rozklad na parciální zlomky.
   (e) Změna grafu funkce $f(x)$, jejího definičního oboru a oboru hodnot: $f(x \pm c)$, $f(ax)$, $f(|x|)$, $f(x) \pm c$, $af(x)$, $|f(x)|$ pro $c > 0$, $a > 1$, $0 < a < 1$, $-1 < a < 0$, $a < -1$.

3. **Limita a spojitost funkce**

   (a) Pojem limity funkce: definice, existence a jednoznačnost.
   (b) Limita násobku, součtu, součinu, podílu a složené funkce.
   (c) Základní limity pro $x \to 0$: $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$.
   (d) Nevlastní limity a limity funkce v nevlastních bodech, jednostranné limity.
   (e) Definice funkce spojité v bodě, spojité v bodě zleva a zprava.
   (f) Spojitost funkce na otevřeném a uzavřeném intervalu. Spojitost násobku, součtu, podílu funkcí a složené funkce.

4. **Derivace funkce**

   (a) Pojem derivace funkce, definice, geometrická interpretace, jednostranné derivace.
   (b) Derivace násobku, součtu, součinu a podílu funkcí. Derivace složené funkce. Derivace inverzní funkce.
   (c) Derivace elementárních funkcí: x^p, e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.
   (d) Derivace vyšších řádů.

5. **Aplikace derivace funkce**

   (a) Diferenciál funkce, Věta o střední hodnotě, Taylorův polynom a zbytek, vyjádření a odhad zbytku, aproximace hodnoty funkce.
   (b) Výpočet limity pomocí l'Hospitalova pravidla a Taylorova polynomu.
   (c) Křivka v rovině. Hladká a po částech hladká křivka. Výpočet tečného vektoru a tečny křivky. Výpočet směrnice tečny křivek zadané parametricky, rovnice tečny.

6. **Vyšetřování průběhu funkce**

   (a) Definiční obor. Spojitost funkce. Funkce sudá, lichá a periodická.
   (b) Nulové body, funkce kladná a záporná.

(c) Limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech, případně v $\pm\infty$.
(d) První derivace a funkce (ne)rostoucí a (ne)klesající.
(e) Stacionární (kritické) body funkce. Extrém ostrý (ryzí) a neostrý, lokální a absolutní (globální) extrémy, maximum a minimum.
(f) Asymptoty (bez směrnice) $x = c$ ve vlastním bodě a asymptoty $y = px + q$ (se směrnicí v nevlastním bodě, tj. pro $x \to \pm\infty$).
(g) Druhá derivace, funkce konvexní a konkávní, inflexní body.
(h) Náčrt grafu funkce pomocí výsledků z předchozích bodů.

III. Integrální počet jedné reálné proměnné

1. **Primitivní funkce, neurčitý integrál**

   (a) Pojem primitivní funkce, existence a jednoznačnost až na aditivní konstantu.
   (b) Primitivní funkce k funkci kladné, záporné, rostoucí, klesající.
   (c) Primitivní funkce elementárních funkcí.
   (d) Primitivní funkce násobku a součtu funkcí, výpočet metodou per partes (po částech).
   (e) Integrování racionální funkce (převod na ryze racionální funkce, rozklad na parciální zlomky a jejich integrace).
   (f) Výpočet metodou substituce prvního a druhého druhu.

2. **Určitý integrál**

   (a) Riemannova definice určitého integrálu, horní a dolní součty, horní a dolní integrál.
   (b) Geometrický význam určitého integrálu.
   (c) Zobecnění integrálu na neomezený interval a neomezené funkce. Případy, kdy určitý integrál ze spojité funkce neexistuje.
   (d) Vztah mezi primitivní funkcí a určitým integrálem, závislost na integračním oboru, praktický výpočet určitého integrálu.
   (e) Určitý integrál násobku a součtu funkcí, výpočet metodou per partes, a substituční metodou. Odhad hodnoty určitého integrálu.
   (f) Newtonův integrál z neomezené funkce na neomezeném intervalu, nevlastní integrál. Případy, kdy integrál neexistuje.

3. **Aplikace integrálu**

   (a) Výpočet plošného obsahu a souřadnic těžiště útvaru v rovině.
   (b) Výpočet délky grafu funkce nebo délky křivky zadané parametricky.
   (c) Výpočet objemu a povrchu a souřadnice těžiště rotačního tělesa.

Zkouška

Písemná část zkoušky (celkem 120 minut)

Silně doporučuji „tahák“, tj. *vlastnoručně vyrobený a podepsaný* seznam vzorců integrálů, derivací a pod. – (maximálně jeden list A4 oboustranně – Vzorce by měly být **správně!**)

Úloha 1 – Náčrt grafu a určení vlastností funkce (10 bodů)

- Určení definičního oboru dané funkce, případně oboru hodnot.
- Náčrt grafu funkce (elementární funkce transformovaná posunutím v x nebo y, násobkem hodnoty nebo argumentu; absolutní hodnoty; minimum či maximum dvou funkcí).
- Jedna teoretická otázka ze základů logiky a teorie funkcí (negace výroku s kvantifikátorem, definice vlastnosti funkce, atd.)

Úloha 2 – Lineární algebra a analytická geometrie (20 bodů)

- Výpočet determinantu matice, výpočet inverzní matice, vyjádření matice X z maticové rovnice $AX = B$, $XA^T = B$, $AXB = C$ a pod.
- Příklad z vektorového počtu nebo analytické geometrie.
- Řešení soustavy lineárních rovnic eliminací.
- Dvě teoretické otázky z lineární algebry nebo analytické geometrie (definice adjungované a inverzní matice a jejich vlastnosti, parametrické zadání geometrických útvarů, rozpoznání typu kvadratické plochy v základní poloze, atd.)

Úloha 3 – Diferenciální počet (20 bodů)

- Výpočet limity pomocí l'Hospitalova pravidla.
- Vyšetřování průběhu dané funkce: definiční obor, spojitost, limity v bodech nespojitosti, asymptoty, intervaly, kde je funkce rostoucí nebo klesající, konvexní nebo konkávní, náčrt funkce podle zjištěných vlastností.
- Sestavení Taylorova polynomu dané funkce a výpočet přibližné hodnoty.
- Dvě teoretické otázky z diferenciálního počtu (definice limity a derivace a jejich vlastnosti, odvození vzorce pro derivaci součtu a součinu funkcí, vyšetřování extrémů funkce atd.)

Úloha 4 – Integrální počet (25 bodů)

- Výpočet primitivní funkce racionální funkce (včetně určení intervalů).
- Výpočet primitivní funkce nebo určitého integrálu metodou per partes, pomocí substituce (se zadanou substitucí).
- Výpočet obsahu rovinného útvaru, délky křivky, objemu nebo povrchu rotačního tělesa.
- Jedna teoretická otázka z integrálního počtu (definice primitivní funkce, její vlastnosti, definice Riemannova a Newtonova integrálu, případy, kdy integrál neexistuje a pod.)

Teoretické otázky budou zadány v posledních 20 minutách písemné části zkoušky. Není při nich povoleno používat „tahák" ani jiné pomůcky.

Ústní část zkoušky:

Oprava písemky s jejím autorem, počítání derivace funkce (bez úprav) např. $\sin^3(2/x)\, e^{x^2+3x}$, $\ln\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)$, $\sqrt[3]{\frac{\sin x\, \cos(2x)}{x^3+x}}$, $(\sin x)^x, \ldots$, případně další otázky nebo jednoduché příklady. Bez teoretické a ústní části je hodnocení zkoušky F.

Hodnocení:

Do zkoušky se počítají body ze cvičení (max. 25 bodů) a písemné části (max. 75 bodů – z toho cca 18 bodů za teoretické otázky). Ústní část zkoušky může zvýšit nebo snížit počet bodů a změnit hodnocení celé zkoušky.

- 90–100 bodů — výborně (A),
- 80–89 bodů — velmi dobře (B),
- 70–79 bodů — dobře (C),
- 60–69 bodů — uspokojivě (D),
- 50–59 bodů — dostatečně (E),
- 0–49 bodů — nevyhovující (F).

Doporučené studijní materiály:

1. Přednášky na E-learningu FSI VUT.
2. Učební texty z Matematiky I na `http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu`.
3. Učební texty, řešené i neřešené příklady a kvízy na internetových stránkách: `http://mathonline.fme.vutbr.cz/`— Matematika I.
4. J. Nedoma: *Matematika I*, skripta FSI VUT 2004.
5. I. Mezník, J. Karásek, J. Miklíček: *Matematika I pro strojní fakulty*, SNTL, Praha 1992.
6. J. Musilová, P. Musilová: *Matematika I pro porozumění i praxi*, VUTIUM Brno 2006.
7. J. Slovák, M. Panák, M. Bulant: *Matematika drsně a svižně*, Masarykova univerzita, Brno 2013.
8. K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky I*, Prometheus, Praha 1995.
9. J. Škrášek, Z. Tichý: *Základy aplikované matematiky I a II*, SNTL, Praha 1989.

V Brně 19. prosince 2020 Jan Franců

Ukázka zadání zkoušky

1a–b Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$$f(x) = \left|(x+2)^2 - 4\right|\,, \qquad g(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left|\frac{2x-1}{3}\right|. \qquad (5 + 5 \text{ bodů})$$

2a Pomocí adjungované matice spočítejte matici inverzní k matici A a matici X, která je řešením maticové rovnice $AX = B^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 13 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7 \text{ bodů})$$

2b Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází bodem $A = [0, 0, 1]$ a je kolmá na rovinu $\rho \;:\; 3\,x - y - 2\,z = 10\,.$ (8 bodů)

2c Daná „předřešená“ soustava rovnic

$$\begin{aligned} u + 2v + 3x + 4y &= 5 \\ v + 2x + 3y + z &= 4 \\ 2x + 4y + 4z &= 6 \\ x + 2y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

Rozhodněte o existenci a počtu řešení. Všechna řešení, pokud existují, zapište! (5 body)

3a Spočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2(x)}$. (4 body)

3b Dána funkce $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}\,.$

1. Určete definiční obor a spojitost funkce.
2. Určete jednostranné limity v bodě nespojitosti a v nekonečnu.
3. Určete, kde je funkce rostoucí a klesající. Určete lokální extrémy.

4. Určete, kde je funkce konvexní a konkávní.
5. Na základě předchozích výsledků funkci načrtněte. (12 bodů)

3c Pomocí Taylorova polynomu druhého stupně spočítejte $\cos(0.1)$ a porovnejte s hodnotou z kalkulačky (pozor, funkce $\cos x$ je v radiánech). (4 body)

4a Určete primitivní funkci racionální funkce a intervaly na kterých je primitivní

$$\int \frac{x^3 - 2\,x^2 - 2}{x^3 + x}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (10 \text{ bodů})$$

4b Spočítejte objem tělesa omezeného křivkou $y = \sin x$ rotující okolo osy x mezi dvěma sousedními nulovými body. Náčrt! (10 bodů)

4c Spočítejte integrál $\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x\,.$ (5 body)

Teoretické otázky:

1c Negujte výrok: $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,n_0 > 0 \quad \forall n > n_0$ platí $\quad |\,a_n - A| < \varepsilon\,,$ který pojem tento výrok definuje? (4 body)

2d Co je to adjungovaná matice? Pro které matice je definovaná? Utvořte matici adjungovanou k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. (4 body)

2e Jakou plochu popisuje rovnice $x^2 + z^2 = 1 + y^2$? Určete střed a osu symetrie. (5 body)

3d Odvoďte vzorec pro derivaci součinu funkcí $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$. (4 body)

3e Jak zní a za jakých podmínek lze užít l'Hospitalovo pravidlo? (4 body)

4d Napište vzorec pro horní součet Riemannova integrálu. (4 body)

Ukázka dalších teoretických otázek

- Negujte výrok: „$\exists\,a\ \forall\,x$ platí $\quad x + a = x$.“
  Platí výrok nebo jeho negace? Které pojem tento výrok definuje?
- Negujte výrok: „$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \quad \forall x \in (a, a + \delta)$ platí $\ |\,f(x) - A| < \varepsilon$.“
  Který pojem tento výrok definuje?
- Co je to hodnost matice? Jaká je hodnost regulární matice? Může být hodnost matice větší než počet (a) řádků, (b) sloupců?
- Jak se v praxi určuje hodnost matice? Jaká je hodnost jednotkové matice?
- Co je to inverzní matice? Pro které matice je definovaná?
  Určete matici inverzní k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$!
- Co je to adjungovaná matice? Pro které matice je definovaná?
  Určete matici adjungovanou k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$!
- Kdy řekneme, že matice je regulární?
- Určete matici X z rovnice $A^T X B = C^{-1}$. Které matice musí být regulární?
- Jak počítáme determinant z „velké“ matice?
- Formulujte Frobeniovu větu pro existenci a počet řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých zapsaných v maticovém tvaru $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic o třech neznámých, která nemá řešení!
- Uveďte příklad soustavy tří lineárních rovnic o dvou neznámých, která má nekonečně mnoho řešení!

- Kterou kvadratickou plochu popisuje rovnice $x^2 - y - z^2 = 1$? Určete její střed, osu a plochu náčrtněte.
- Kterou kvadratickou plochu popisuje rovnice $x^2 + y^2 = 1 - 2z^2$? Určete její střed, osu a plochu načrtněte.
- Definujte skalární součin vektorů geometricky i analyticky (pomocí souřadnic). Uveďte jeho geometrický význam.
- Definujte vektorový součin vektorů geometricky i analyticky (pomocí souřadnic). Uveďte jeho geometrický význam, obrázek.
- Definujte smíšený součin vektorů geometricky i analyticky (pomocí souřadnic). Uveďte jeho geometrický význam, obrázek.
- Uveďte způsoby zápisu roviny v prostoru $\mathbb{R}^3$.
- Uveďte způsoby zápisu přímky v rovině $\mathbb{R}^2$ a v prostoru $\mathbb{R}^3$.
- Jaké jsou možnosti vzájemné polohy dvou rovin v prostoru $\mathbb{R}^3$? Jak se to pozná pomocí obecných rovnic rovin?
- Jaké jsou možnosti vzájemné polohy dvou přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$? Jak se to pozná pomocí bodů a směrových vektorů přímek?
- Napište, kdy podle definice „$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$“ $\quad [\Leftrightarrow\ \forall \dots\ \exists \quad \dots]$
- Definujte derivaci funkce $f(x)$ v bodě x. Jaký je její geometrický význam? Obrázek!
- Kdy řekneme (podle definice), že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0? Obrázek!
- Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \sqrt{x}$ se středem v bodě $x_0 = 1$.
- Ve kterých případech lze užít l'Hospitalovo pravidlo?
- Napište větu o střední hodnotě! Obrázek!
- Určete tečný vektor ke křivce dané parametricky $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$ v bodě daném $t = \pi/3$ a napište rovnici tečny v tomto bodě.
- Co je to stacionární (kritický) bod funkce? Z čeho je „podezřelý“?
- Kdy je ve stacionárním bodě funkce lokální minimum nebo maximum?
- Jaký je vztah mezi derivací funkce a skutečností, že funkce je neklesající?
- Definujte primitivní funkci k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b). Které funkce mají primitivní funkci a kolik těch primitivních funkcí je?
- Jaká je primitivní funkce k funkci (a) kladné, (b) záporné, (c) rostoucí?
- Ve kterých případech určitý integrál spojité funkce na intervalu není definován?
- Uveďte příklad spojité kladné funkce $f(x)$ takové, že platí (a) $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty$, (b) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \infty$.
- Napište rovnoměrné dělení intervalu $(5, 10)$ na 10 částí. Obrázek! Jaká je jeho norma?
- Co je to norma (jemnost) dělení intervalu?
- Napište vzorec z definice Riemannova integrálu pro (a) dolní (b) horní součet funkce $g(x)$ s dělením $1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$. Obrázek!
- Co je to (a) dolní (b) horní integrál? Kdy existuje Riemannův integrál? Obrázek!
- Jak se počítá těžiště plošného útvaru omezeného křivkami $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$? Obrázek!
- Jak se počítá délka grafu funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$? Obrázek!
- Jak se počítá délka křivky $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$? Obrázek!
- Jak se počítají souřadnice těžiště křivky $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$?

- Jak se počítá objem tělesa omezeného grafem funkce $y = f(x) > 0$ „rotujícím“ okolo osy x a rovinami $x = a$ a $x = b$? Obrázek!
- Jak se počítá plošný obsah plochy vzniklé rotací grafu funkce $y = f(x)$ pro $x \in (a, b)$ okolo osy x?
- Jak se počítá těžiště objemu omezeného rotujícím grafem funkce $y = f(x)$ kolem osy x na intervalu (a, b)? Obrázek!

Varování: Na internetu lze najít vypracování těchto otázek, mnohé odpovědi jsou však chybné!