Algebraická teorie řízení

26. dubna 2018

Obsah

1 Úvod do teorie řízení

1.1 Základy lineárních dynamických systémů

Lineárním spojitým dynamickým systémem se vstupem $u(t)$ a výstupem $y(t)$ rozumíme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ &= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u, \end{aligned} \tag{1}$$

kde výraz $f^{(i)}$ znamená i-tou derivaci funkce $f(t)$ přičemž předpokládáme, že platí $m \leq n$. Tato podmínka se v teorii řízení uvádí jako podmínka realizovatelnosti. Spojitý lineární dynamický systém se řeší aparátem Laplaceovy transformace (viz. [5]) definované vztahem

$$L\{f\} = \int_0^\infty f(t) e^{st} \mathrm{d}t.$$

Přímočarým výpočtem odvodíme Laplaceovy obrazy

$$\begin{aligned} L\{a\} &= \frac{a}{s} \\ L\{t\} &= \frac{1}{s^2} \\ L\{e^{-at}\} &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

a především pravidla, linearity

$$L\{af + bg\} = aL\{f\} + bL\{g\}$$

a derivace

$$L\{f^{(1)}\} = sL\{f\} - f\{0\}.$$

Tyto dvě pravidla aplikujeme na rovnici spojitého lineárního dynamického systému (1) doplněného o počáteční podmínky pro řešení
$y^{(n)}(0) = y^{(n-1)}(0) = y^{(1)}(0) = y(0) = 0$
a počáteční podmínky pro vstup
$u^{(m)}(0) = u^{(m-1)}(0) = u^{(1)}(0) = u(0) = 0$
Z čehož celkově dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} &a_n s^n L\{y\} + a_{n-1} s^{n-1} L\{y\} + \dots + a_1 s L\{y\} + a_0 L\{y\} \\ &= b_m s^m L\{u\} + b_{m-1} s^{m-1} L\{u\} + \dots + b_1 L\{u\} + b_0 L\{u\}. \end{aligned}$$

Po jednoduché úpravě dostaneme racionální lomenou funkci, v teorii řízení označovanou jako přenos dynamického systému

$$G(s) := \frac{L\{y\}}{L\{u\}} = \frac{b_m s^n + b_{m-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \tag{2}$$

Z definice přenosu (2) je zřejmé, že pokud na vstup systému přivedeme signál u stačí přenosem G vynásobit jeho Laplaceův obraz $L\{u\}$ a dostaneme Laplaceův obraz výstupu $L\{y\} = G(s)L\{u\}$. Dále, odezva systému na (Diracův) jednotkový impuls $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{-\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

se v teorii řízení označuje jako impulsní funkce $g(t)$ a její graf impulsní charakteristika. Protože Laplaceův obraz Diracova impulzu je $L\{\delta(t)\} = 1$ dostáváme interpretaci přenosu

$$G(s) = \frac{L\{y\}}{L\{u\}} = \frac{L\{g\}}{L\{\delta\}} = L\{g\}$$

jako Laplaceova obrazu impulsní funkce. Odezva systému na jednotkový skok $\eta(t)$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

se nazývá přechodová funkce $h(t)$ a její Laplaceův obraz je $L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}$. Přechodová charakteristika je pak grafem přechodové funkce. Vzájemný vztah impulzní a přechodové funkce je pak vidět z následujících výpočtů

$$G(s) = \frac{L\{y\}}{L\{u\}} = \frac{L\{h\}}{L\{\eta\}} = \frac{H(s)}{\frac{1}{s}} = s \cdot H(s)$$

$$\frac{1}{s}G(s) = H(s) = L\{h(t)\} \Rightarrow h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$G(s) = s \cdot H(s) = L^{-1}\{h^{(1)}\} \Rightarrow g(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow h(t) = \int_0^t g(t)\mathrm{d}t$$

1.2 Pravidla blokové algebry

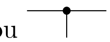
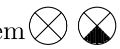
Základní pravidla

Přenosový člen $G(s)$ znázorňujeme obdélníkovým blokem

$$U(s) \quad \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow \quad Y(s)$$

a pokud máme více přenosových členů tvoříme z nich blokové diagramy, přičemž používáme následující pravidla:

- složitější systémy lze rozdělit na spojení elementárních členů
- přenosový člen znázorňujeme obdélníkovým blokem $\boxed{G(s)}$, který je popsán svým přenosem $G(s)$
- vstup znázorněn šipkou do bloku, výstup šipkou z bloku $\longrightarrow \boxed{} \longrightarrow$

- místo, kde se signál rozdvojuje se značí tečkou 
- místo, kde se signál sčítá (odčítá) se značí kolečkem s křížkem 
  - pokud se daný signál odečítá, pak příslušné „čtvrtkolečko“ vybarvíme
  - pokud se přičítá, pak je ponecháme bílé

Návrh blokových schémat

Sériové zapojení Sériové zapojení je zapojení členů „za sebou“ – viz následující schéma:

Přenos levého členu je:

$$G_1(s) = \frac{M(s)}{U(s)} \Rightarrow M(s) = G_1(s) \cdot U(s)$$

Přenos pravého členu je:

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} \Rightarrow Y(s) = G_2(s) \cdot M(s)$$

Nyní dosadíme vztah odvozený z přenosu levého členu do vztahu odvozeného z přenosu pravého členu:

$$Y(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot U(s)$$

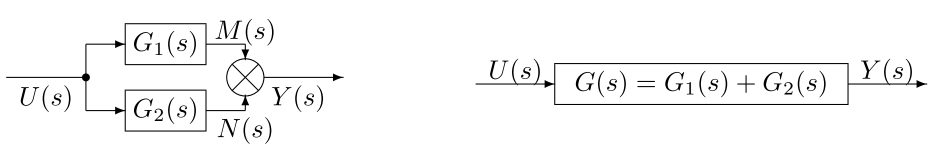
Z čehož lze snadno vyjádřit přenos celého zapojení následovně:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

resp. obecně jako:

$$G(s) = \prod G_i(s)$$

Paralelní zapojení Paralelní zapojení je zapojení členů „vedle sebe“ – viz následující schéma:



Přenos horního členu je:

$$G_1(s) = \frac{M(s)}{U(s)} \Rightarrow M(s) = G_1(s) \cdot U(s)$$

Přenos dolního členu je:

$$G_2(s) = \frac{N(s)}{U(s)} \Rightarrow N(s) = G_2(s) \cdot U(s)$$

Nyní dosadíme výstupy obou členů (vyjádřené pomocí jejich vstupu a jejich přenosů) jako vstup sčítacího (resp. odčítacího) členu:

$$Y(s) = \pm M(s) \pm N(s) = (\pm G_1(s) \pm G_2(s)) \cdot U(s)$$

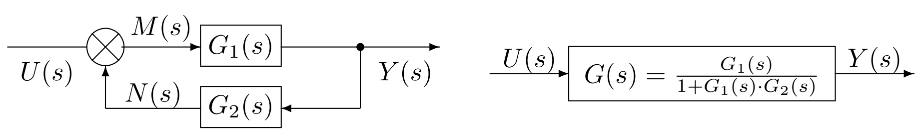
Z čehož lze snadno vyjádřit přenos celého zapojení následovně:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \pm G_1(s) \pm G_2(s)$$

resp. obecně jako:

$$G(s) = \sum G_i(s)$$

Antiparalelní (zpětnovazebné) zapojení Paralelní zapojení je zapojení členů do obvodu s tzv. „zpětnou vazbou“ tedy takovým způsobem, kdy z výstupu odebíráme signál a kterým upravujeme signál vstupní – viz následující schéma:



Přenos členu v přímé větvi je:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} \Rightarrow M(s) = \frac{Y(s)}{G_1(s)}$$

Přenos členu ze zpětné vazby je:

$$G_2(s) = \frac{N(s)}{Y(s)} \Rightarrow N(s) = Y(s) \cdot G_2(s)$$

Odčítací (sčítací) člen se chová následovně:

$$M(s) = U(s) \mp N(s).$$

Z čehož dosazením vztahů plynoucích z přenosu v přímé větvi a ve zpětné vazbě můžeme vyjádřit:

$$\frac{Y(s)}{G_1(s)} = U(s) \mp Y(s) \cdot G_2(s)$$

Osamostatníme-li vstupní signál, dostáváme:

$$U(s) = \frac{Y(s)}{G_1(s)} \pm Y(s) \cdot G_2(s) = Y(s) \left(\frac{1}{G_1(s)} \pm G_2(s) \right) = Y(s) \frac{1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)}{G_1(s)}$$

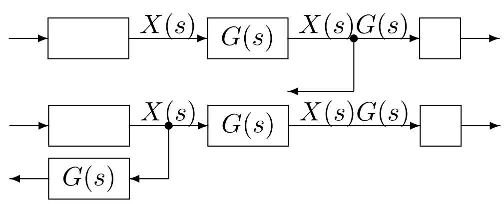
A odtud vylomením Laplaceova obrazu výstupu Laplaceovým obrazem vstupu dostaneme přenos celého zapojení:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

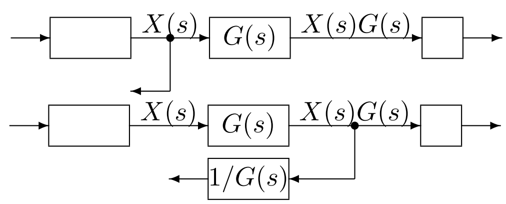
Překřížené vazby

- Pokud lze obvod rozdělit na bloky, v nichž je jedno ze zmíněných zapojení, pak není problém takový obvod popsat jeho přenosem - viz předchozí odstavce.
- Nelze-li obvod rozdělit na bloky, znamená to, že jsou překříženy vazby v paralelních nebo zpětnovazebných zapojeních (tzn. že se zpětná vazba vazba odvedená po ukončení jiného zpětnovazebného zapojení vrací do jeho přímé větve)
- Řešením je přesun vhodných bloků - buď po, nebo proti směru signálu, tak abychom mezi zapojeními v jednotlivých blocích získali jen nám již známé a výše popsané, kterým tak lze snadno určit jejich výsledný přenos.

posunutí proti směru signálu



posunutí po směru signálu



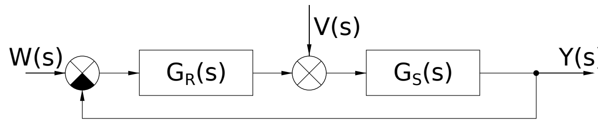
Spojité a diskrétní obvody

Pravidla blokové algebry byla představena pro spojité systémy, pro diskrétní však platí stejné. V diskrétním obvodu se však může objevit i spojitý člen a s ním se objevují i vzorkovače. Podle polohy vzorkovače se pak rozlišují různá zapojení s různým přenosem.

Standardní zapojení

Pravidla blokové algebry platí pro obecná bloková schémata, můžeme je tedy aplikovat pro případ regulačního obvodu.

Přenos řízení



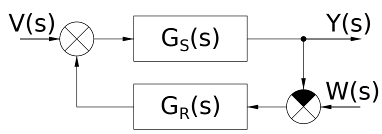
Obrázek 1: Blokové schéma obvodu zpětnovazebného řízení uspořádané pro výpočet přenosu řízení

Přenos řízení $G_W(s)$ - viz obr. 1. pro $V(s) = 0$

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_S(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)},$$

kde $G_0(s) = G_S(s) \cdot G_R(s)$ je tzv. přenos rozpojeného obvodu

Přenos poruchy



Obrázek 2: Blokové schéma obvodu zpětnovazebného řízení uspořádané pro výpočet přenosu poruchy

Přenos řízení $G_V(s)$ - viz obr. 2. pro $W(s) = 0$

$$G_V(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)}$$

1.3 Diskrétní lineární dynamické systémy

Diskrétní lineární dynamické systémy jsou určeny diferenční rovnicí

$$\begin{aligned} &a_0 y_n(kT) + a_1 y_{n-1}(kT) + \cdots + a_{n-1} y_1(kT) + a_n y(kT) \\ &= b_0 u_m(kT) + b_1(kT) u_{m-1} + \cdots + b_{m-1} u_1(kT) + b_m u(kT), \end{aligned} \tag{3}$$

kde $y(kT)$ a $u(kT)$ jsou diskrétní funkce (posloupnosti hodnot v diskrétně snímaných časových okamžicích) pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ a $T > 0$ je perioda vzorkování. Stejnou roli jako Laplaceova transformace pro spojité systémy hraje pro diskrétní systémy Z-transformace

$$Z\{f\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

pro kterou platí diskrétní verze linearity a vztah pro Z-obraz diference (jež je analogií vztahu pro Laplaceův obraz derivace známý ze spojitých obvodů) takže dostáváme pro nulovou vstupní podmínku diskrétní přenos

$$\begin{aligned} G(z) = \frac{Z\{y\}}{Z\{u\}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} = \\ \frac{b_0 z^{n-m} + b_1 z^{n-(m+1)} + \cdots + b_{m-1} z^{-(m-1)} + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} =: G(z^{-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Diskrétní impulsní funkce $g(kT)$ je pak odezva systému na diskrétní jednotkový impuls $\delta(kT)$

$$\delta(kT) = \begin{cases} \infty & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-\infty} \delta(kT) = 1$$

a její Z–obraz je $Z\{\delta(kT)\} = 1$. Impulsní charakteristika je opět graf impulsní funkce a dostáváme

$$G(z) = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}} = \frac{Z\{g(kT)\}}{Z\{\delta(kT)\}} = Z\{g(kT)\}.$$

Z–přenos je tedy Z–obraz diskrétní impulsní funkce. Dále, přechodová funkce $h(kT)$ je odezva systému na jednotkový skok $\eta(kT)$

$$\eta(kT) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

ale její Z–transformace se tentokrát od Laplaceovy transformace liší

$$Z\{\eta(kT)\} = \frac{z}{z-1}$$

Přechodová charakteristika je opět graf přechodové funkce a je vidět, že

$$G(z) = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}} = \frac{Z\{h(kT)\}}{Z\{\eta(kT)\}} = \frac{H(z)}{\frac{z}{z-1}}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot H(z) \Rightarrow \frac{z}{z-1} G(z) = H(z) = Z\{h(kT)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1} G(z)\right\}$$

2 Teorie okruhů

Pro pochopení dalších souvislosti je nutné vybudovat algebraický aparát teorie okruhů. Jedná se o zobecnění pojmu reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jako množiny se dvěma binárními operacemi. Obecně mějme nějakou množinu M se dvěma binárními operacemi, tedy mějme množinu M a dvě zobrazení přiřazující uspořádané dvojici prvků z množiny M prvek z množiny M, tj. zobrazení

$$\begin{aligned} + &: M \times M \to M, \\ \cdot &: M \times M \to M. \end{aligned}$$

Dobře známým příkladem jsou kromě číselného oboru reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ také například číselný obor celých čísel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nebo přirozených čísel s nulou $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$. Okruh netvoří například množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ s operací sčítání. Příkladem s konečnou množinou může být binární aritmetika $\{0, 1\}$, tedy konečné těleso $\mathbb{Z}_2$ chápané jako množina $\{0, 1\}$ spolu s operacemi definovanými následovně:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Jinými slovy symbol $\mathbb{Z}_2$ znamená, že na množině $\{0, 1\}$ počítáme modulo 2 (počítáme zbytek po dělení číslem 2), tedy například

$$1 \cdot 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 1, \text{ nebo } -1 = 1, \dots$$

Operace $+$ je tedy vlastně operací XOR a operace $\cdot$ operací AND. Počítání modulo můžeme zobecnit na libovolný základ, například v množině $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ počítáme modulo 5 tedy za výsledek vezmeme zbytek po dělení číslem pět což je právě jedno z čísel množiny $\mathbb{Z}_5$. Například $3 \cdot 3 = 9 = 1 \cdot 5 + 4 = 4 (\mathrm{mod}\ 5)$. Obecně $\mathbb{Z}_n$ znamená, že na množině $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ počítáme modulo n. Všechny tyto množiny tvoří spolu s definovanými operacemi takzvaný okruh, který si obecně zadefinujeme axiomaticky. Mějme množinu M spolu s definovanými operacemi $+$, $\cdot$ a následující axiomy:

(A1) $a + b \in M,\ a, b \in M$ (uzavřenost)

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c),\ a, b, c \in M$ (asociativita)

(A3) $a + b = b + a, \quad a, b, c \in M$ (komutativita)

(A4) $\exists 0 \in M$ takový, že $0 + a = a$ (nulový prvek)

(A5) $\forall a \in M \exists -a \in M$ takový, že $a + (-a) = 0$ (opačný prvek)

Množina s jednou binární operací $(M, +)$ splňující axiomy (A1–5) se nazývá komutativní (či též Abelovská) grupa. Z příkladů výše tvoří abelovské grupy množiny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ spolu s operací sčítání. Množina přirozených čísel nesplňuje pro sčítání axiom (A5). Zbytkové třídy tvoří komutativní grupu pro sčítání při jakémkoli základu, například v $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ jsou opačné prvky popořadě $\{0, 4, 3, 2, 1\}$, tedy $\mathbb{Z}_5$ splňuje axiom (A5). Pro struktury se dvěma operacemi uvažujeme ještě následující axiomy pro násobení:

(M1) $a \cdot b \in M,\ a, b \in M$ (uzavřenost)

(M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad a, b, c \in M$ (asociativita)

(M3) $a \cdot b = b \cdot a \in, \quad a, b \in M$ (komutativita)

(M4) $\exists 1 \in M$ takový, že $1 \cdot a = a$ (jednička)

(M5) $\forall a \in M,\ a \neq 0,\ \exists a^{-1} \in M$ takový, že $a \cdot (a^{-1}) = 1$ (inverzní prvek)

a jako poslední přidáme axiom svazující obě binární operace

(D) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributivita).

Dále množinu se dvěma binárními operacemi $(M, +, \cdot)$ nazýváme

(O) Okruh pokud splňuje axiomy A1-5, M1-2, M4, D

(KO) Komutativní okruh pokud splňuje axiomy A1-5, M1-4, D

Všimněme si, že pokud $0 = 1$ dostaneme $a = 1a = 0a = 0$ a tedy $M = \{0\}$. Takový okruh se nazývá triviální, pokud $0 \neq 1$ pak netriviální.

(T) Těleso splňuje axiomy A1-5, M1-5, D, $0 \neq 1$.

Příklady nekonečných těles jsou $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, konečná tělesa jsou například $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo. Komutativní okruh který není tělesem je například $\mathbb{Z}_4$, kde prvek 2 nemá inverzi, skutečně

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 0 &= 0 \\
2 \cdot 1 &= 2 \\
2 \cdot 2 &= 0 \\
2 \cdot 3 &= 2
\end{aligned}
$$

tedy neexistuje $a \in \mathbb{Z}_4$ takové, že $2a = 1$, čímž je porušen axiom (M5), celkově $\mathbb{Z}_4$ tvoří komutativní okruh. Příkladem nekonečného okruhu, který není tělesem, jsou například matice 2×2 nad reálnými čísly $\mathbb{R}_{2,2}$. Připomeňme, že čtvercová matice je invertibilní (existuje k ní inverze) právě tehdy když má nenulový determinant a v případě matic z $\mathbb{R}_{2,2}$ můžeme inverzi vyjádřit předpisem

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},
$$

kde výraz $ad - bc$ je determinant matice 2×2. Tedy například nenulová matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má determinant nula a není tedy invertibilní, navíc matice nejsou obecně komutativní, například máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a okruh $\mathbb{R}_{2,2}$ tedy není ani komutativní.

Nakonec definujeme dělitele nuly, jako prvky $a \in M$ pro které existuje $b \in M$, $b \neq 0$ takové, že $ab = 0$, nebo $ba = 0$ (levý resp. pravý dělitel nuly).

(OI) Obor integrity je komutativní okruh, $1 \neq 0$, kde 0 je jediný dělitel nuly.

Tedy například $\mathbb{Z}_4$ není (OI), protože prvek 2 je dělitelem nuly, skutečně $2 \cdot 2 = 0$. Stejně tak okruh $\mathbb{R}_{2,2}$ obsahuje dělitele nuly, například

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podstatné, je že v (OI) platí zákony o krácení, tj. pokud platí rovnost $ax = ay$, kde $a \neq 0$ pak platí rovnost $x = y$. Skutečně, v okruhu platí $ax = ay \Rightarrow ax - ay = 0 \Rightarrow a(x - y) = 0$ a v oboru integrity pak buď $a = 0$, nebo $x - y = 0$ tedy pokud $a \neq 0$ platí $x = y$. Obráceně, pokud je splněn zákon o krácení pak protože v okruhu můžeme rovnost $ab = 0$ přepsat na $ab = a0$ a použitím zákona o krácení dostaneme $b = 0$. Tedy 0 je jediný dělitel nuly. Tato vlastnost je důležitá pro řešení rovnic. Například v $\mathbb{Z}_{10}$, který není (OI) je prvek 2 dělitel nuly a skutečně rovnice $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 9 = 8$ která triviálně platí by musela implikovat rovnici $4 = 9$, která zjevně neplatí.

2.1 Polynomy

Polynomem s proměnnou z^{-1} nad reálnými čísly $\mathbb{R}$ rozumíme formální zápis tvaru

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-n},$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, n je stupeň polynomu, píšeme $\partial p = n$. Množinu takových polynomů označujeme $\mathbb{R}[z^{-1}]$. Řádem polynomu rozumíme index nejmenšího nenulového koeficientu α_i a značíme $\eth p = i$. Tedy například pro $p = z^{-3} + 2z^{-5}$ máme $\partial p = 5$ a $\eth p = 3$.

Následující pojmy jsou platné obecně pro teorii okruhů:

- Jednotkou okruhu rozumíme takový prvek $e \in M$ pro který $\exists e^{-1} \in M$
- Asociované prvky jsou takové prvky $a, b \in M$ pro které existuje jednotka e taková, že $a = be$, píšeme $a \sim b$.
- Prvek $b \in M$ je dělitel prvku $a \in M$ pokud $\exists c$ takové, že $a = bc$, píšeme $b \mid a$.
- Největší společný dělitel dvou prvků $a, b \in M$ je prvek $c \in M$ pro který platí $(c \mid a) \wedge (c \mid b)$ a současně $(d \mid a) \wedge (d \mid b) \Rightarrow d \mid c$, píšeme $c = (a, b)$.
- Říkáme, že prvky $a, b \in M$ jsou nesoudělné pokud platí, že $(a, b) = 1$
- Ireducibilní prvek $d \in M$ je takový prvek, který není jednotka a současně platí $c \mid d \Rightarrow c \sim d$.

Reálná čísla tvoří těleso a jednotkou je tam každý nenulový prvek, v celých číslech jsou jednotky jen ± 1. V reálných číslech jsou spolu asociované všechny nenulové prvky a samostatně nula sama se sebou. V celých čísel jsou asociované prvky $\pm p$. V polynomech $\mathbb{R}[z^{-1}]$ jsou jednotky konstantní nenulové polynomy, protože pokud

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_n z^{-m})(\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_n z^{-n}) \\ &= \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) z^{-1} + \cdots + \alpha_0 \beta_0 z^{-(m+n)} \end{aligned}$$

se má rovnat konstantnímu polynomu 1, musí $m + n = 0$, protože $\mathbb{R}$ je (OI) a $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$. Asociované prvky jsou tedy násobky nenulových polynomů a nulový polynom sám se sebou. Násobení polynomů je komutativní a pokud vynásobíme polynom p stupně n a polynom q stupně m dostaneme polynom stupně $n + m$. Ukážeme, že okruh $\mathbb{R}[z^{-1}]$ tvoří (OI). Konkrétně máme $p \cdot q = (a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n})(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}) = a_0 b_0 + \cdots + a_n b_m z^{-m-n}$ a protože $a_n, b_m \in \mathbb{R}$ a tedy pokud $a_n \neq 0$ a $a_n b_m = 0$ pak $b_m = 0$ a tedy postupně dostaneme $b_i = 0$, $i = 0, \ldots, m$ protože $\mathbb{R}$ je obor integrity.

V (OI) platí, že pokud $(a, b) = d$, kde $a, b, d \in M$ existují prvky okruhu $p, q \in M$ takové, že platí

$$ap + bq = d,$$

této rovnici se říká Bezoutova rovnost a prvkům $p, q \in M$ se říká Bezoutovy koeficienty. Současně platí, že existují prvky $r, s \in M$ okruhu takové, že platí

$$ar + bs = 0.$$

Algoritmus pro výpočet největšího společného dělitele, koeficientů Bezoutovy rovnosti $p, q \in M$ a prvků $r, s \in M$ je následující. Mějme polynomy $a, b \in \mathbb{T}[z^{-1}]$. Sestrojíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

a pomocí řádkových elementárních úprav ji převedeme na matici tvaru

$$\begin{pmatrix} p & q & d \\ r & s & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $d = (a, b)$, polynomy p a q jsou koeficienty Bezoutovy rovnosti a prvky r a s koeficienty rovnice výše.

Skutečně, kromě toho, že z Bezoutovy věty existují koeficienty p, q existují i koeficienty r, s takové, že

$$ar + bs = 0.$$

Toto tvrzení je triviální, protože můžeme volit například $r = b$ a $s = -a$ (nebo $r = -b$ a $s = a$). Polynomy a, b musí tedy splňovat soustavu rovnic určenou rozšířenou maticí soustavy:

$$\begin{pmatrix} p & q & d \\ r & s & 0 \end{pmatrix}.$$

Soustava $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ má triviálně řešení a, b a pokud rozšířenou matici soustavy převedeme pomocí řádkových elementárních úprav množinu řešení tím nezměníme. Řešením $\begin{pmatrix} p & q & d \\ r & s & 0 \end{pmatrix}$ je tedy opět a, b. Pro takto nalezené koeficienty p, q, r, s, d platí

$$\begin{aligned} ap + bq &= d \\ ar + bs &= 0 \end{aligned}$$

Ukážeme, že $d = (a, b)$, pokud nějaký prvek d_0 dělí a i b musí dělit i d, stačí tedy ověřit, že $d|a$ a $d|b$. Protože jsme při úpravě, používali řádkové elementární úpravy, jsou naše úpravy invertibilní a protože původní matice soustavy je jednotková (tedy invertibilní) je matice $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ také invertibilní, existuje tedy matice $\begin{pmatrix} u & t \\ v & w \end{pmatrix}$ taková, že platí

$$\begin{pmatrix} u & t \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} ud \\ vd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

dostaneme tedy fakt, že $d|a$ a $d|b$ čímž jsme hotovi.

Platí tedy, že

$$(z^{-5} + 2z^{-4} - z^{-3} - 3z^{-2} + 1, z^{-4} + 2z^{-3} + 2z^{-2} + 2z^{-1} + 1) = 1z^{-2} + 2z^{-1} + 1$$

a příslušné Bezoutovy koeficienty bychom mohli dostat postupným zpětným dosazováním. Dělení polynomu se zbytkem můžeme tedy použít pro nalezení

NSD a následně Bezoutových koeficientů, postupným dělením. Největší společný dělitel můžeme vypočítat opakovaným použitím dělení polynomů polynomem. Pro $a, b \in \mathbb{R}[z^{-1}]$ vydělíme polynomy se zbytkem

$$a = bp_1 + r_1$$

a v dalším kroku pak podělíme se zbytkem polynomy b s r_1, tedy dostaneme

$$b = r_1 p_2 + r_2$$

v dalším kroku pak podělíme se zbytkem polynomy r_1 a r_2 a dělení opakujeme dokud $r_i \neq 0$. Pokud $r_i = 0$ pak

$$(a, b) = r_{i-1}.$$

2.2 Formální mocninné řady

Formální mocninnou řadou nad tělesem $\mathbb{R}$ rozumíme formální zápis

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-n} + \cdots$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, množinu formálních mocninných řad označujeme $\mathbb{R}(z^{-1})$. Formální mocninnou řadu můžeme zapisovat ve formě posloupnosti jejich koeficientů

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}.$$

Řádem formální mocninné řady rozumíme index nejmenšího nenulového koeficientu α_i a značíme $\eth p = i$. Na okruhu $\mathbb{R}(z^{-1})$ definujeme operaci sčítání

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\} + \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots\} = \{\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots\}$$

a násobení

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\} \cdot \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots\} = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots\},$$

kde $\gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j$. Formální mocninné řady s výše definovanými operacemi tvoří okruh, a to dokonce komutativní. Důkaz se provede ověřením axiomů (KO), ukážeme si například, že nulou okruhu je prvek $o = 0 = \{0, 0, \dots\}$, opačným prvek k prvku $p = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ je prvek $-p = \{-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots\}$, jedničkou okruhu je prvek $e = 1 = \{1, 0, 0, \dots\}$, atd.

Další otázkou je, zda se jedná i o obor integrity. Nejprve ověříme, zda tento okruh má dělitele nuly (různé od nuly okruhu). Chceme tedy dokázat, že

$$p \cdot q = 0 \Rightarrow p = 0 \vee q = 0.$$

Nechť $p = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $q = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ a dále označme $p \cdot q = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $c_k = 0$, $\forall k$. Předpokládejme např. že $a_0 \neq 0$ (případná opačná volba nemá vzhledem ke komutativitě vliv).

$$\begin{aligned}
0 = c_0 &= a_0 \cdot b_0 && \Rightarrow b_0 = 0 \\
0 = c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_1 && \Rightarrow b_1 = 0 \\
0 = c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_2 && \Rightarrow b_2 = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

obdobně lze dokázat, že $b_k = 0, \ \forall k$. Předpokládejme nyní, že $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, dostaneme

$$\begin{aligned}
0 = c_0 & = 0 \cdot b_0 & \\
0 = c_1 & = 0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = a_1 \cdot b_0 & \Rightarrow b_0 = 0 \\
0 = c_2 & = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = a_1 \cdot b_1 & \Rightarrow b_1 = 0 \\
& \vdots &
\end{aligned}$$

Tedy celkem musí být $a_k = 0 \ \forall k$. Z toho vyplývá, že $\mathbb{R}(z^{-1})$ je (OI). Nyní hledáme jednotky okruhu, tedy invertibilní prvky: $p \cdot q = 1$. Nechť $p = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $q = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ a dále označme $p \cdot q = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $c_0 = 1$ a $c_k = 0, \ \forall k > 0$

$$\begin{aligned}
1 = c_0 & = a_0 \cdot b_0 & \Rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0} \\
0 = c_1 & = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot \tfrac{1}{a_0} & \Rightarrow b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2} \\
0 = c_2 & = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_2 - \tfrac{a_1^2}{a_0^2} + \tfrac{a_2}{a_0} & \Rightarrow b_2 = \frac{-a_2}{a_0^2} + \frac{a_1^2}{a_0^3} \\
& \vdots &
\end{aligned}$$

tedy celkem, jednotkami okruhu $\mathbb{R}(z^{-1})$ jsou mocninné řady $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, takové, že $\alpha_0 \neq 0$, tj. $\eth p = 0$

Formální mocninné řady jsou zobecněním pojmu polynomy, tak jak jsou popsány v předchozí kapitole a můžeme psát

$$\mathbb{R}[z^{-1}] \subseteq \mathbb{R}(z^{-1})$$

Definice 1 *Polynom $p \in \mathbb{R}[z^{-1}]$ nazveme kauzální, pokud $\exists$ jemu příslušná mocninná řada $p^{-1} \in \mathbb{R}(z^{-1})$, která je jemu inverzí*

Poznámka 1 *V polynomu jmenovatele musí být absolutní člen, aby byl tento polynom invertibilní. Pak ovšem lze takový polynomiální zlomek přepsat na formální mocninnou řadu, která má fyzikální význam přenosu po diskretizaci.*

3 Vnitřní a vnější popis soustavy

Pod pojmem diskrétní rozumíme spíše spojitou soustavu pozorovanou v diskrétních okamžicích než soustavu diskrétní svou povahou. Pokud tedy hovoříme o diskrétní soustavě myslíme tím spojitou soustavu s pevně zvolenou periodou vzorkování. Pracujeme nad nějakým pevně zvoleným tělesem $\mathbb{T}$, tělesa můžou být $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, případně $\mathbb{F}_{p^n}$. My budeme pracovat s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ a ukážeme si příklad o pro dvouprvkové konečné těleso $\mathbb{Z}_2$. Po zvolení příslušného tělesa $\mathbb{T}$ definujeme množiny:

$$\begin{aligned} \text{Vstup: } & I = \mathbb{T}^m \\ \text{Výstup: } & O = \mathbb{T}^l \\ \text{Prostor stavů: } & X = \mathbb{T}^n \end{aligned}$$

a zobrazení

$$\begin{aligned} A &:= X \to X, \\ B &:= I \to X, \\ C &:= C \to O, \\ D &:= I \to O, \end{aligned}$$

t.ž. pro $x_i \in X$, $u_i \in I$ a $y_i \in O$ máme diferenční rovnice:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k + Du_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Čtveřici $\{A, B, C, D\}$ nazýváme vnitřní popis soustavy a pokud jsou zobrazení $\{A, B, C, D\}$ matice příslušných rozměrů nazýváme tuto soustavu lineární.

V dalším budeme pracovat nad reálnými čísly, tedy $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Vnějším popisem rozumíme polynomiální zlomek (racionální lomenou funkci), který vypočteme pomocí vzorce:

$$S = D + z^{-1}C(I_n - z^{-1}A)^{-1}B,$$

kde I_n je jednotková matice příslušné dimenze. Vskutku, použitím Z–transformace převedeme rovnice (5) na rovnice

$$zX_k + zX_0 = AX_k + BU_k, \tag{6}$$

$$Y_k = CX_k + DU_k. \tag{7}$$

a protože předpokládáme $X_0 = 0$ dostaneme

$$(zI_n - A)X_k = zX_k - AX_k = BU_k$$

a

$$Y_k = CX_k + DU_k = C(zI_n - A)^{-1}BU_k + DU_k = (C(zI_n - A)^{-1}B + D)U_k$$

a celkově

$$S = \frac{Y_k}{U_k} = C(zI_n - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}(z).$$

My bychom ale chtěli přenos vyjádřit jako prvek $\mathbb{R}(z^{-1})$ Připomeňme, že inverzní matici k matici M můžeme vyjádřit jako $\frac{1}{det(M)}M^*$ kde M^* je matice adjungovaná. Platí, že

$$(z^{-1}M)^* = M^*(z^{-1}I_n)^* = M^*z^{-(n-1)}I_n$$

a tedy

$$(z^{-1}M)^{-1} = \frac{1}{det(M)z^{-n}} M^* z^{-(n-1)} I_n = zM^{-1}.$$

Celkově dostaneme

$$S = z^{-1}C(I_n - z^{-1}A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}(z^{-1}).$$

Hodnota

Hodnotou na tělese $\mathbb{T}$ rozumíme zobrazení $H : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, které splňuje následující čtyři axiomy:

(H1) $H(a) \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$

(H2) $H(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(H3) $H(ab) = H(a)H(b), \ \forall a, b \in \mathbb{T}$

(H4) $H(a + b) \leq H(a) + H(b), \ \forall a, b \in \mathbb{T}$

Na okruhu reálných čísel $\mathbb{R}$ můžeme zavést dvě kanonické hodnoty:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= |x|, \\ H_2(x) &= 1, \ \text{pro } x \neq 0, \\ &= 0, \ \text{pro } x = 0. \end{aligned}$$

Stabilitou rozumíme schopnost soustavy vrátit se po vychýlení zpět do rovnovážného stavu. Formálně hovoříme o soustavě jako stabilní pokud posloupnost

$$x_0, Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, \ldots$$

konverguje k nule vzhledem ke zvolené hodnotě. To v případě H_1 znamená, že se hodnota na vnitřních stavech zmenšuje, v případě H_2 musí být nulová po konečném počtu kroků.

Nakonec řekneme, že formální mocninná řada je stabilní vzhledem k hodnotě H_i pokud posloupnost jejich koeficientů $\{a_0, a_1, \ldots\}$ konverguje k nule vzhledem k hodnotě H_i. Množinu všech kauzálních stabilních mocninných řad označujeme $\mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$. Polynom p nazveme stabilní pokud jeho inverze je stabilní formální mocninná řada.

Polynom $\det(zI_n - A)$ se nazývá charakteristický polynom soustavy a jeho stabilita souvisí se stabilitou systému. Polynom $\det(I_n - z^{-1}A)$ se nazývá pseudocharakeristický polynom soustavy a také souvisí se stabilitou, rozdíl je následující, například pro matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dostaneme

$$\det(zI_n - A) = \det\left(\begin{pmatrix} z & -1 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) = z^2$$

jako charakteristický polynom a $\det(I_n - z^{-1}A) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$ je pseudocharakteristický polynom. Rozdíl je v tom, že v případě pseudocharakteristického polynomu se sice část informace ztrácí, ale je vhodný pro analýzu stability. Charakteristický polynom nemusí být invertibilní i když je soustava stabilní, jako například vidíme v našem případě:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Přenos ve formě podílu dvou polynomů, kde ve jmenovateli máme máme kauzální polynom (podmínka realizovatelnosti) můžeme napsat ve tvaru formální kauzální mocninné řady. V dalším budeme rozlišovat s pro reprezentaci přenosu formální mocninou řadou a S pro reprezentací polynomiálním zlomkem.

Takzvané časově diskrétní zpoždění ve formě mocninné řady můžeme vyjádřit i maticově jako

$$s = \Sigma_0 + \Sigma_1 z^{-1} + \Sigma_2 z^{-2} + \cdots \tag{8}$$

kde dostaneme pomocí vzorců:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= D \\ \Sigma_k &= CA^{k-1}B, \text{ kde k= 1, 2, } \ldots \end{aligned}$$

Vnitřní popis soustavy tedy jednoznačně určuje vnější, opak obecně neplatí, klíčovým pojmem je minimální realizace. Čtveřice $\{A, B, C, D\}$, kde $A \in \mathbb{R}_n$ je minimální realizace, pokud platí, že hodnost blokových matic $(B, AB, \ldots A^{n-1}B)$ a $(C, CA, C \ldots A^{n-1})^T$ je n. Například pro čtveřici

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \right\}$$

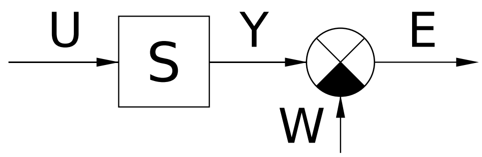
máme

$$h\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right) = 2, \quad h\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)^T = 2,$$

kde symbolem $h(M)$ rozumíme hodnost matice M.

4 Přímovazební deterministické řízení

V případě přímovazebního deterministického řízení hledáme vstupní posloupnost U takovou, že výstup Y postupně konverguje k žádané posloupnosti W.



Obrázek 3: Přímovazební obvod

Přímovazební deterministické řízení je určeno definicemi

$$
\begin{aligned}
\text{Přenos soustavy} &- S \\
\text{Žádaná posloupnost} &- W \\
\text{Řídící posloupnost} &- U \\
\text{Výstupní posloupnost} &- Y \\
\text{Odchylka řízení} &- E
\end{aligned}
$$

a rovnicemi

$$
\begin{aligned}
E &= W - Y \\
Y &= SU
\end{aligned}
$$

4.1 Konečné časově optimální řízení

Hledáme U takové, že E je konečná posloupnost trvale nulová po uplynutí minimální doby. Připomeňme, že lineární diofantická rovnice

$$ax + by = c$$

má řešení právě tehdy když $(a,b)|c$ a pokud x_0, y_0 je partikulární řešení pak všechna řešení jsou ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{b}{(a,b)}t \\
y &= y_0 - \frac{a}{(a,b)}t
\end{aligned}
$$

kde $t \in \mathbb{T}[z^{-1}]$, více informací je možné nalézt v [2]. Skutečně se jedná o řešení

$$a\left(x_0 + \frac{b}{(a,b)}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{(a,b)}t\right) = ax_0 + \frac{ab}{(a,b)}t + by_0 - \frac{ba}{(a,b)}t = ax_0 + by_0 = c$$

Partikulární řešení (x_0, y_0) nalezneme pomocí koeficientů Bezoutovy rovnosti $(\bar{x}, \bar{y})$, pro které platí

$$a\bar{x} + b\bar{y} = d := (a, b)$$

jako:

$$x_0 = \frac{\bar{x}c}{d},\ \ y_0 = \frac{\bar{y}c}{d}$$

a všechna řešení jsou pak ve tvaru:

$$x = \frac{\bar{x}c}{d} + \frac{b}{d}t$$
$$y = \frac{\bar{y}c}{d} - \frac{a}{d}t$$

Skutečně

$$a(\frac{\bar{x}c}{d} + \frac{b}{d}t) + b(\frac{\bar{y}c}{d} - \frac{a}{d}t) = (a\bar{x} + b\bar{y})\frac{c}{d} = d\frac{c}{d} = c,$$

klíčové je, že $(a, b)|c$ a tedy výraz $\frac{c}{d}$ je polynom $\mathbb{R}[z^{-1}]$.

Naším cílem, je pro soustavu s přenosem $S = \frac{\beta}{\alpha}$ nastavit řídící posloupnost U tak aby chyba řízení pro požadovanou posloupnost $W = \frac{\delta}{\gamma}$ měla tvar polynomu minimálního stupně (konečné časově optimální řízení). Volíme $\alpha_0 = \frac{\alpha}{(\alpha,\gamma)}$, $\gamma_0 = \frac{\gamma}{(\alpha,\gamma)}$ a dostaneme

$$E = W - SU = \frac{\delta\alpha_0 - \gamma_0\beta U}{\gamma\alpha_0} \in \mathbb{T}[z^{-1}]$$

tedy

$$\delta\alpha_0 - \gamma_0\beta U = \gamma\alpha_0 E$$

z toho je vidět, že α_0 musí dělit U a můžeme vyjádřit

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0}u_0$$

a postupnými úpravami rovnice dostaneme:

$$\delta\alpha_0 - \gamma_0\beta\frac{\alpha_0}{\gamma_0}u_0 = \gamma\alpha_0 E$$

$$\delta\alpha_0 - \beta\alpha_0 u_0 = \gamma\alpha_0 E$$

po vydělení α_0

$$\delta - \beta u_0 = \gamma E$$

a nakonec Diofantickou rovnici napíšeme ve tvaru

$$\gamma E + \beta u_0 = \delta$$

kterou vyřešíme.

Pro soustavy, které nejsou jednoduché, tedy pro soustavy, kde přenosem není polynomiální zlomek, ale matice polynomiálních zlomků musíme prvně vyjádřit matici přenosu ve tvaru rozkladu

$$S = B_1 A_2^{-1},$$

kde

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

kde všechny matice jsou příslušných rozměrů a matice B_{11} je plné sloupcové hodnosti. Pak $W = \frac{Q}{p}$, kde $(p, Q) = 1$ po složkách.

$$E = W - SU = W - B_1 A_2^{-1} U = W - \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \end{pmatrix} A_2^{-1} U = \frac{Q}{p} - B_{11} U =: Y$$

a Y musí být polynomiální matice. Zavedeme $A_2^{-1} U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ a dostaneme

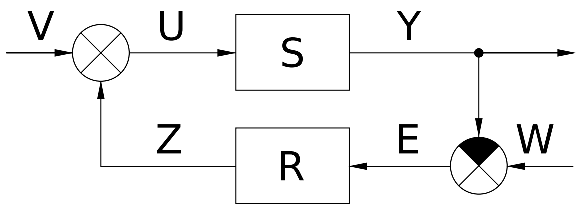
$$pY = Q - pB_{11} U_1$$

a vyjádříme $U_1 = \frac{X}{p}$ pak řešíme diofantickou rovnici

$$B_{11} X + pY = Q$$

5 Zpětnovazební obvod

Zpětnovazební obvod je určený následujícím diagramem, máme řízenou soustavu se vstupem U a výstupem Y a požadovanou výstupní posloupnost W. Chyba výstupní posloupností je pak vstupem pro řídící soustavu.



Obrázek 4: Zpětnovazební obvod

Příslušné rovnice řídícího systému jsou pak v následujícím tvaru:

$$Y = SU, \quad Z = RE,$$
$$E = W - Y, \quad U = V + Z.$$

tedy

$$W = E + Y = E + SU,$$
$$V = U - Z = U - RE,$$

a maticově

$$\begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S \\ -R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ U \end{pmatrix}$$

Ověříme, že následující bloková matice je k matici předešlé soustavy inverzní

$$\begin{pmatrix} (I+SR)^{-1} & -S(I+RS)^{-1} \\ R(I+SR)^{-1} & (I+RS)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ -R & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a současně platí

$$R(I+SR)^{-1} = (I+SR)^{-1}R$$
$$S(I+SR)^{-1} = (I+SR)^{-1}S$$

tedy dostaneme

$$\begin{pmatrix} E \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S \\ -R & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{1+SR} \begin{pmatrix} 1 & -S \\ R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix}$$

dostaneme přenos $\mathcal{K} = K_{W,V/E,U}$.

5.1 Pravý a levý nesoudělný rozklad

Pro matici kauzálních formálních mocninných řad S můžeme najít polynomiální matice příslušných rozměrů A_1, A_2, B_1 a B_2 takové že

$$S = A_1^{-1} B_2 = B_1 A_2^{-1}$$

Dvojici A_1, B_2 říkáme levý nesoudělný rozklad matice S a Dvojici A_2, B_1 říkáme pravý nesoudělný rozklad matice S. Pravý nesoudělný rozklad vypočteme tak, že matici formálních mocninných řad vyjádříme ve tvaru $S = \frac{B}{a}$, kde B je polynomiální matice a a je kauzální polynom. Pak můžeme psát $S = A^{-1}B$ kde A je diagonální matice s polynomem a na diagonále. Dále nalezneme koeficienty pro levý největší společný dělitel

$$AP_2 + BQ_2 = D$$
$$AR_2 + BS_2 = D$$

pak platí, že $AR_2 = -BS_2 \Rightarrow R_2 S_2^{-1} = A^{-1}B = S$.

5.2 Částečné přenosy

Mějme levý a pravý nesoudělný rozklad matic S a R

$$S = A_1^{-1} B_2 = B_1 A_2^{-1}$$
$$R = F_1^{-1} G_2 = G_1 F_2^{-1}$$

pak následující matice

$$L_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ -G_2 & F_1 \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} F_2 & B_1 \\ -G_2 & A_2 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

tvoří pravý a levý nesoudělný rozklad přenosu $\mathcal{K}$, tedy $\mathcal{K} = L_1 K_2^{-1} = K_1^{-1} L_2$. Můžeme ukázat, že pseudocharakteristický polynom $c \sim |K_1| \sim |K_2|$. Dále můžeme problém nalezení pseudocharakteristického polynomu převést na vypočet determinantu nižšího řádu zavedeme pomocné matice

$$C_1 = A_1 F_2 + B_2 G_1$$
$$C_2 = F_1 A_2 + G_2 B_1$$

pro které platí, že pseudocharakteristický polynom c je asiociovaný determinantu matice C_1 což je asiociovaný polynom determinantu matice C_2.

Pseudocharakteristický polynom c zpětnovazebního obvodu není roven čitateli výrazu $\det(1 + SR)$ ani $\det(1 + RS)$. Například

$$S = \frac{1}{1 - z^{-2}} \begin{pmatrix} 1 + z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 - z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z^{-1} & -1 \\ 1 - z^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - z^{-2} & -1 + z^{-1} \\ 1 - z^{-2} & 1 + z^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$
$$R = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(I + RS) = -\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \qquad c = (1 - z^{-1})(3 + z^{-1}).$

Dále se podíváme na částečné přenosy, například pro $K_{W,E}$, protože máme

$$\begin{pmatrix} E \\ U \end{pmatrix} = \frac{1}{1+SR} \begin{pmatrix} 1 & -S \\ R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+SR} \begin{pmatrix} W \\ RW \end{pmatrix}$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} K_{W,E} &= (1+SR)^{-1} = (1+SR)^{-1} = (A_1^{-1}(A_1F_2 + B_2G_1)F_2^{-1})^{-1} \\ &= F_2(A_1F_2 + B_2G_1)^{-1}A_1 = F_2C_1^{-1}A_1 \end{aligned}$$

a následně

$$\begin{aligned} K_{W/Z} &= G_1C_1^{-1}A_1, & K_{V/E} &= -F_2C_1^{-1}B_2, \\ K_{V/Z} &= -G_1C_1^{-1}B_2, & K_{V/U} &= A_2C_2^{-1}F_1, \\ K_{W/U} &= A_2C_2^{-1}G_2, & K_{V/Y} &= B_1C_2^{-1}F_1, \\ K_{W/Y} &= B_1C_2^{-1}G_2. \end{aligned}$$

Pro soustavu $\mathcal{S}$ mějme přenos ve tvaru pravého a levého nesoudělného rozkladu

$$S = \begin{pmatrix} z^{-1} \\ z^{-1} - z^{-2} \end{pmatrix} \left(1 - 2z^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2z^{-1} & 0 \\ -1+z^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

a pro regulátor $\mathcal{R}$ mějme přenos ve tvaru pravého a levého nesoudělného rozkladu

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1+z^{-1} \end{pmatrix} = \left(1\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1-z^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Určíme pseudocharakteristický polynom pomocí pomocných matic

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1-2z^{-1} & 0 \\ -1+z^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1-z^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1} & 1-2z^{-1} \\ 1 & -2+2z^{-1} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \left(1 - 2z^{-1}\right)$$

a dostaneme

$$|C_1| \sim |C_2| \sim 1 - 2z^{-2}$$

Jako další příklad si ukážeme jak souvisí minimální realizace se stablitou. Mějme $S = \frac{1}{1-2z^{-1}} \begin{pmatrix} z^{-1} & -z^{-1}+2z^{-2} \end{pmatrix}$ a $R = \begin{pmatrix} 1-2z^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$, dostaneme

$$(1+SR) = \left(1 + \frac{1}{1-2z^{-1}} \begin{pmatrix} z^{-1} & -z^{-1}+2z^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2z^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

a tedy $K_{W,E} = 1$, $K_{W,Z} = R$ a $K_{W,Y} = 0$. Tedy reakce zpětnovazebního obvodu na W je stabilní na všech potenciálních výstupech E, Z a Y. Pseudocharakteristický polynom je $1 - 2z^{-1}$ a není stabilní. V čem je problém? V tomto případě může být minimální realizace přenosu $\mathcal{S}$ například

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a minimální realizace přenosu $\mathcal{R}$ například

$$F = \left(0\right), G = \left(1\right), H = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\mathcal{K}$ dostaneme realizaci

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots,$$

která, ale není mimimální.

Příklad 1.

Mějme přenos $\mathcal{S}$, $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ určený polynomiální maticí a vypočtěte charakteristický polynom zpětnovazebného systému.

$$S = R = \frac{1}{z^{-1} - 1} \begin{pmatrix} z^{-2} + z^{-1} + 1 & 0 \\ z^{-1} - 2 & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} = \frac{B}{a}$$

Zvolíme se tedy například C_1, potřebujeme tedy spočítat matice A_1, F_2, B_2 a G_1, tedy levý rozklad $S = A_1^{-1} B_2$ a pravý rozklad $R = G_1 F_2^{-1}$.

Stabilizace jednorozměrné soustavy

Mějme $s = \frac{b}{a} \in \mathbb{R}\{z^{-1}\}$, $r = \frac{g}{f} \in \mathbb{R}\{z^{-1}\}$, kde $a, b, f, g \in \mathbb{R}[z^{-1}]$ a $(ab) = (f, g) = 1$. Pro dílčí přenosy máme

$$k_{W,Y} = s(1 + sr)^{-1} r = \frac{b}{a}\left(1 + \frac{b}{a}\frac{g}{f}\right)^{-1} \frac{g}{f} = \frac{b}{a}\left(\frac{af + bg}{af}\right)^{-1} \frac{g}{f} = \frac{b}{a}\frac{af}{af + bg}\frac{g}{f} = \frac{bg}{af + bg}$$

$$k_{W,E} = (1 + sr)^{-1} = \left(1 + \frac{b}{a}\frac{g}{f}\right)^{-1} = \left(\frac{af + bg}{af}\right)^{-1} = \frac{af}{af + bg}$$

a protože $\mathbb{R}\{z^{-1}\}$ je komutativní okruh máme levý i pravý rozklad $s = ba^{-1} = a^{-1}b$, $r = gf^{-1} = f^{-1}g$ a pseudo charakteristický polynom je determinant matice K_1:

$$\left| \begin{pmatrix} f & b \\ -g & a \end{pmatrix} \right| = fa + bg \sim c,$$

tedy

$$k_{W,Y} = \frac{bg}{c}$$
$$k_{W,E} = \frac{af}{c}$$

Platí, že zpětnovazební obvod je stabilní právě tehdy když přenosy $k_{W,Y}$, a $k_{W,E}$ lze psát ve tvaru $k_{W,Y} = bm$, a $k_{W,E} = an$, kde $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$.

Skutečně pokud je zpětnovazební obvod stabilní pak $c \in \mathbb{R}^+[z^{-1}]$ a tedy můžeme volit $m = \frac{g}{c}$, $n = \frac{f}{c}$. opačně pokud máme $k_{W,Y} = bm$, a $k_{W,E} = an$, kde $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$. pak $m = \frac{g}{c}$ a $n = \frac{f}{c}$ a pokud c má nestabilní faktor, tj. $c = c_0 e$ kde $e \notin \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$ pak ale protože $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$ musí $e|f$ a současně $e|g$, ale to je spor s $(f, g) = 1$.

Důsledkem tohoto faktu je, že zpětnovazební obvod je stabilní právě když $r = \frac{m}{n}$, kde $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$, a $bm + an = 1$. Skutečně pokud je obvod stabilní pak $m = \frac{g}{c}$, $n = \frac{f}{c}$, kde $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$, pak

$$\frac{m}{n} = \frac{g}{c}\frac{c}{f} = \frac{g}{f} = r$$
$$bm + an = b\frac{g}{c} + a\frac{f}{c} = \frac{bg + af}{c} = 1$$

Opačně, pokud máme takové $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$ dostaneme

$$\begin{aligned} k_{W,Y} &= s(1+sr)^{-1}r = \frac{b}{a}\left(1 + \frac{b}{a}\frac{m}{n}\right)^{-1}\frac{m}{m} = \frac{b}{a}\left(\frac{an+bm}{af}\right)^{-1}\frac{m}{n} \\ &= \frac{b}{a}\left(\frac{1}{af}\right)^{-1}\frac{m}{n} = \frac{b}{a}am\frac{m}{n} = bm \\ k_{W,E} &= (1+sr)^{-1} = \left(1 + \frac{b}{a}\frac{m}{m}\right)^{-1} = \left(\frac{an+bm}{an}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{an}\right)^{-1} = an \end{aligned}$$

a zpětnovazební obvod je stabilní.

Bez důkazu uvedeme analogii poslední věty pro mnoharozměrné soustavy. Mějme nesoudělné rozklady

$$A = B_1 A_2^{-1} = A_1^{-1} B_2$$
$$R = G_1 F_2^{-1} = F_1^{-1} G_2$$

pak zpětnovazební systém je stabilní krávě když následující maticové přenosy lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} K_{W,Y} &= B_1 M_1 \\ K_{W,E} &= N_1 A_1 \\ K_{V,U} &= A_2 N_2 \\ K_{V,Z} &= -M_2 B_2 \end{aligned}$$

pro nějaké matice M_1, N_1, N_2 a M_2 patřící do oboru integrity stabilních matic nad formálními mocninnými řadami příslušného řádu $\mathbb{R}^+_{*,*}\{z^{-1}\}$.

Dále zpětnovazební obvod je stabilní právě tehdy když $R = M_2 N_1^{-1}$, kde matice M_2, N_1 patří do oboru integrity stabilních matic nad formálními mocninnými řadami příslušného řádu $\mathbb{R}^+_{*,*}\{z^{-1}\}$ a platí

$$A_1 N_1 + B_2 M_2,$$

nebo $R = N_2^{-1} M_1$, kde matice M_2, N_1 patří do oboru integrity stabilních matic nad formálními mocninnými řadami příslušného řádu $\mathbb{R}^+_{*,*}\{z^{-1}\}$ a platí

$$N_2 A_2 + M_1 B_1.$$

Reference

[1] V.Kučera, *Algebraická teorie diskrétního lineárního řízení*, Academia, Praha, 1978

[2] J.Karásek, J.Šlapal, *Teorie okruhů pro diskrétní lineární řízení*, FSI VUT v Brně, 2000 (učební text)

[3] V. Kučera, *Algebraic Theory of Discrete-Time Linear Control* Academia, Praha 1978.

[4] J.Karásek, J.Šlapal, *Polynomy a zobecněné polynomy v teorii řízení*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007

[5] Luděk Nechvátal *Laplaceova transformace a stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic* , učební text VUT 2014, dostupné na mathonline.fme.vutbr.cz