Aproximace funkcí

Aproximace funkcí

Aproximace (v širším slova smyslu) = náhrada

Aproximace funkcí

Aproximace (v širším slova smyslu) = náhrada

Např:

$$\sin x \approx 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Aproximace funkcí

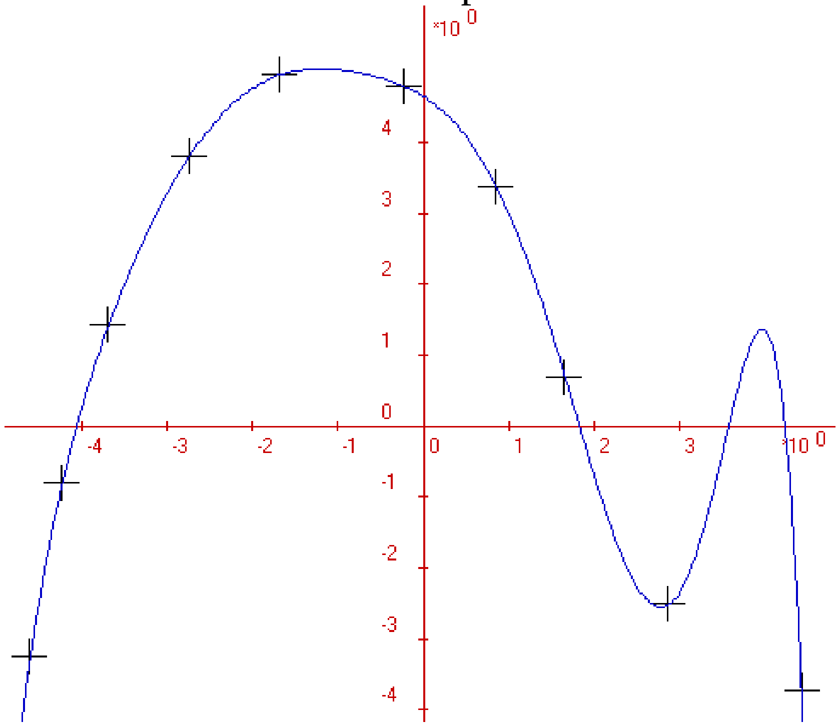
<u>Aproximace (v širším slova smyslu) = náhrada</u>

Např:

$$\sin x \approx 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Nejčastěji:

interpolace



Aproximace funkcí

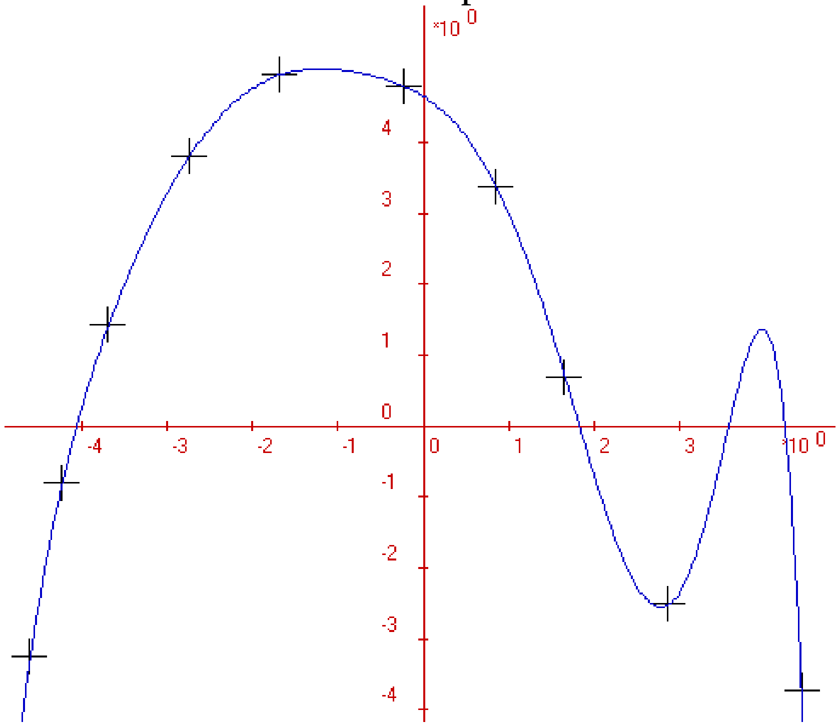
Aproximace (v širším slova smyslu) = náhrada

Např:

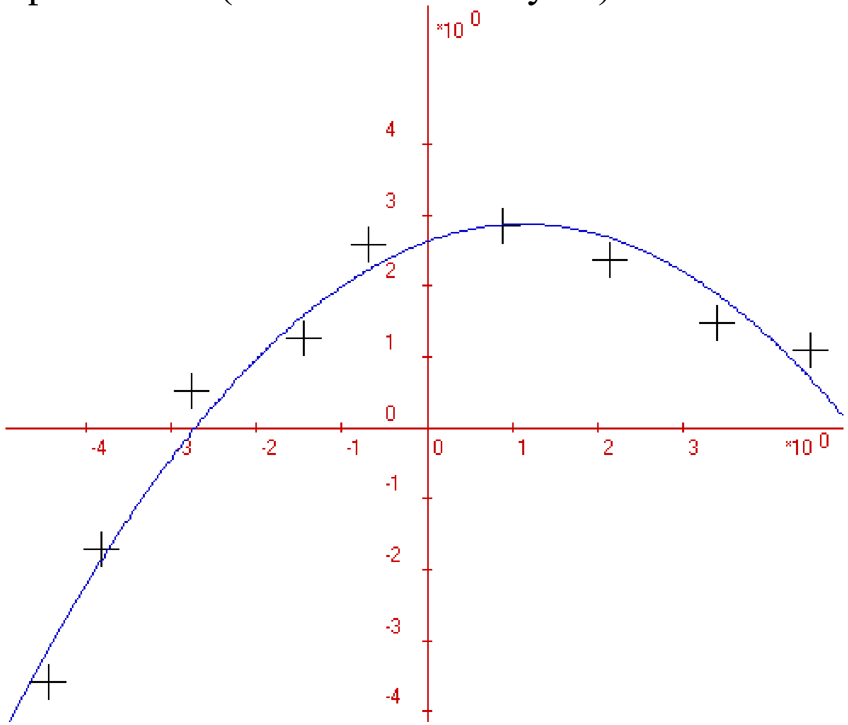
$$\sin x \approx 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Nejčastěji:

interpolace



aproximace (v užším slova smyslu)



Interpolace funkcí

Je znám konečný počet funkčních hodnot neznámé (nebo pro další práci příliš složité) funkce. Je třeba neznámou funkci nahradit (nebo složitou funkci zjednodušit), tj. najít „jednoduchou“ funkci, která má předepsané funkční hodnoty.

Interpolace funkcí

Je znám konečný počet funkčních hodnot neznámé (nebo pro další práci příliš složité) funkce. Je třeba neznámou funkci nahradit (nebo složitou funkci zjednodušit), tj. najít „jednoduchou“ funkci, která má předepsané funkční hodnoty.

Předpokládáme, že dané hodnoty nejsou zatíženy chybami, hledaná funkce jimi musí procházet přesně.

Interpolace funkcí

Je znám konečný počet funkčních hodnot neznámé (nebo pro další práci příliš složité) funkce. Je třeba neznámou funkci nahradit (nebo složitou funkci zjednodušit), tj. najít „jednoduchou" funkci, která má předepsané funkční hodnoty.

Předpokládáme, že dané hodnoty nejsou zatíženy chybami, hledaná funkce jimi musí procházet přesně.

Nejčastěji se k těmto účelům používá polynom.

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)

Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?).

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)

Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)
Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)
Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je a; b; c 😊

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)
Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😉 To ale zjistíme velmi snadno:

$P_0 \in p_2(x)$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)
Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😉 To ale zjistíme velmi snadno:

$P_0 \in p_2(x) \Rightarrow \ 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)
Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😊 To ale zjistíme velmi snadno:

$P_0 \in p_2(x) \Rightarrow\; 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$P_1 \in p_2(x) \Rightarrow\; 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)
Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😊 To ale zjistíme velmi snadno:

$$P_0 \in p_2(x) \Rightarrow \ 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$
$$P_1 \in p_2(x) \Rightarrow \ 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$$
$$P_2 \in p_2(x) \Rightarrow \ 3 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)
Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😊 To ale zjistíme velmi snadno:

$$\begin{aligned}
P_0 \in p_2(x) &\Rightarrow 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &&\Rightarrow \quad a + b + c = 1 \\
P_1 \in p_2(x) &\Rightarrow 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &&\Rightarrow \quad 16a + 4b + c = 2 \\
P_2 \in p_2(x) &\Rightarrow 3 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c &&\Rightarrow \quad 81a + 9b + c = 3
\end{aligned}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)

Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😊 To ale zjistíme velmi snadno:

$$\begin{aligned}
P_0 \in p_2(x) &\Rightarrow 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &&\Rightarrow && a + b + c = 1 \\
P_1 \in p_2(x) &\Rightarrow 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &&\Rightarrow && 16a + 4b + c = 2 \\
P_2 \in p_2(x) &\Rightarrow 3 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c &&\Rightarrow && 81a + 9b + c = 3
\end{aligned}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)

Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😉 To ale zjistíme velmi snadno:

$$\begin{aligned}
P_0 \in p_2(x) &\Rightarrow\ 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c && \Rightarrow && a + \ \ b + c &= 1 \\
P_1 \in p_2(x) &\Rightarrow\ 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c && \Rightarrow && 16a + 4b + c &= 2 \\
P_2 \in p_2(x) &\Rightarrow\ 3 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c && \Rightarrow && 81a + 9b + c &= 3
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -\frac{1}{60};\ \ b = \frac{5}{12};\ \ c = \frac{3}{5}}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)

Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😊 To ale zjistíme velmi snadno:

$$\begin{aligned}
P_0 \in p_2(x) &\Rightarrow 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &&\Rightarrow\quad a + b + c = 1\\
P_1 \in p_2(x) &\Rightarrow 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &&\Rightarrow\quad 16a + 4b + c = 2\\
P_2 \in p_2(x) &\Rightarrow 3 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c &&\Rightarrow\quad 81a + 9b + c = 3
\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \boxed{a = -\frac{1}{60};\ \ b = \frac{5}{12};\ \ c = \frac{3}{5}}$$

$$\boxed{p_2(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

a) Interpolační polynom v základním tvaru (metoda neurčitých koeficientů)

Hledaný polynom bude druhého stupně (proč?). Už ho tedy vlastně známe:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Chybí už jen maličkost – vědět, kolik je $a; b; c$ 😉 To ale zjistíme velmi snadno:

$$\begin{array}{lll} P_0 \in p_2(x) \Rightarrow\ 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & \Rightarrow & a + b + c = 1 \\ P_1 \in p_2(x) \Rightarrow\ 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c & \Rightarrow & 16a + 4b + c = 2 \\ P_2 \in p_2(x) \Rightarrow\ 3 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c & \Rightarrow & 81a + 9b + c = 3 \end{array} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{60};\ b = \frac{5}{12};\ c = \frac{3}{5}}$$

$$\boxed{p_2(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}}$$

Snadno? Jak se to vezme – je k tomu potřeba docela dost nepříjemných operací. Zkusme to jinak…

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- sestrojme polynom $\ell_0(x)$, který má v bodě P_0 hodnotu jedna a v P_1; P_2 nuly:

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- sestrojme polynom $\ell_0(x)$, který má v bodě P_0 hodnotu jedna a v P_1; P_2 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- sestrojme polynom $\ell_0(x)$, který má v bodě P_0 hodnotu jedna a v P_1; P_2 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

V bodě P_0 máme skutečně hodnotu jedna,

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- sestrojme polynom $\ell_0(x)$, který má v bodě P_0 hodnotu jedna a v P_1; P_2 nuly:

$$\ell_0(1) = \frac{(1-4)(1-9)}{(1-4)(1-9)}$$

V bodě P_0 máme skutečně hodnotu jedna,

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- sestrojme polynom $\ell_0(x)$, který má v bodě P_0 hodnotu jedna a v P_1; P_2 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

V bodě P_0 máme skutečně hodnotu jedna, nulu v bodě P_1 "zařídí" tato závorka

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- sestrojme polynom $\ell_0(x)$, který má v bodě P_0 hodnotu jedna a v P_1; P_2 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

V bodě P_0 máme skutečně hodnotu jedna, nulu v bodě P_2 "zařídí" tato závorka

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- analogicky sestrojíme polynom $\ell_1(x)$, který má v bodě P_1 hodnotu jedna a v P_0; P_2 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- analogicky sestrojíme polynom $\ell_1(x)$, který má v bodě P_1 hodnotu jedna a v P_0; P_2 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

-

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- a polynom $\ell_2(x)$, který má v bodě P_2 hodnotu jedna a v P_0; P_1 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- a polynom $\ell_2(x)$, který má v bodě P_2 hodnotu jedna a v P_0; P_1 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

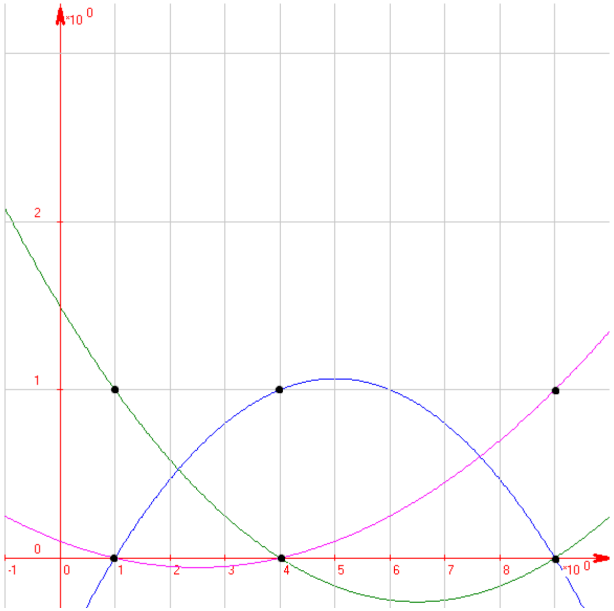
b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- a polynom $\ell_2(x)$, který má v bodě P_2 hodnotu jedna a v P_0; P_1 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$



Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

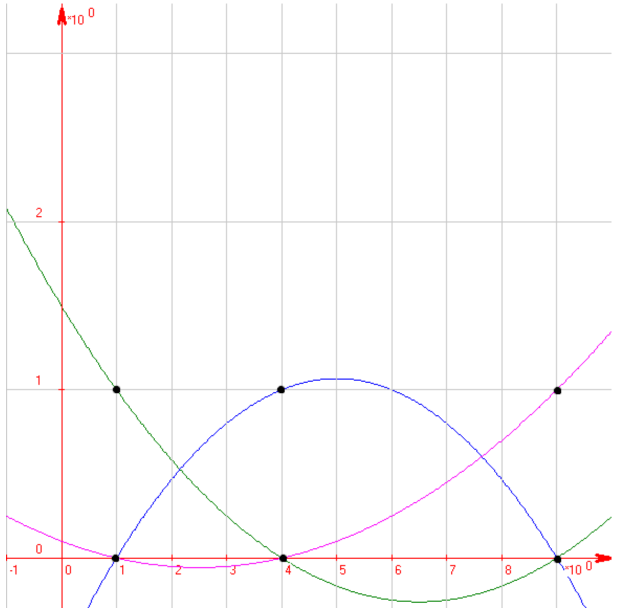
b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- a polynom $\ell_2(x)$, který má v bodě P_2 hodnotu jedna a v P_0; P_1 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$



(Krátká) odbočka:

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

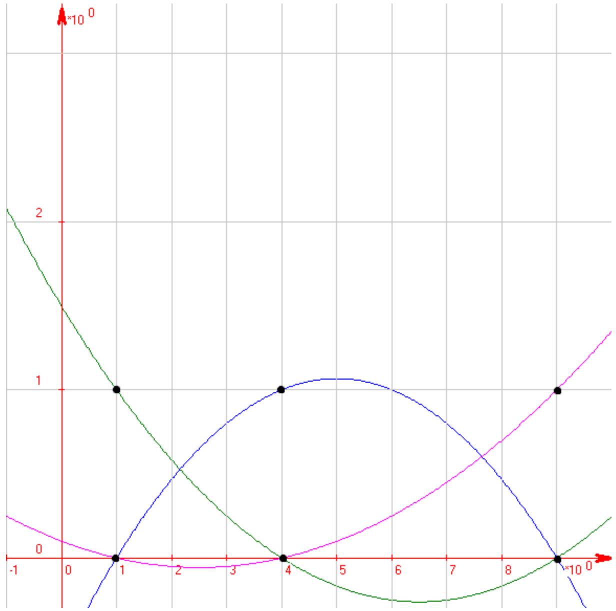
b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- a polynom $\ell_2(x)$, který má v bodě P_2 hodnotu jedna a v P_0; P_1 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$



(Krátká) odbočka: jednotkové vektory **i**; **j**; **k** na souřadných osách nazýváme **bázové**, protože neexistují $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$ tak aby

$$\mathbf{i} = c_1\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}; \quad \mathbf{j} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{k}; \quad \mathbf{k} = c_1\,\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

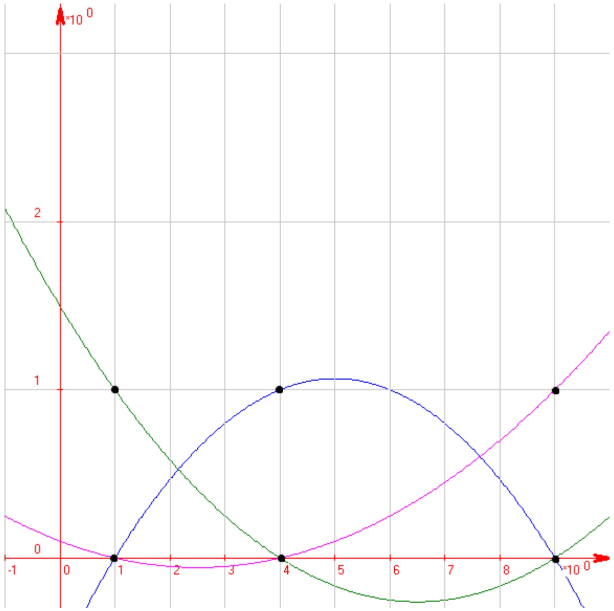
b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

- a polynom $\ell_2(x)$, který má v bodě P_2 hodnotu jedna a v P_0; P_1 nuly:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$



Podobně: $\ell_0(x)$; $\ell_1(x)$; $\ell_2(x)$ nazýváme **bázové polynomy**, protože neexistují $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$ tak aby

$$\ell_0(x) = c_1\ell_1(x) + c_2\ell_2(x); \quad \ell_1(x) = \cdots . \ell_2(x) = \cdots ;$$

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

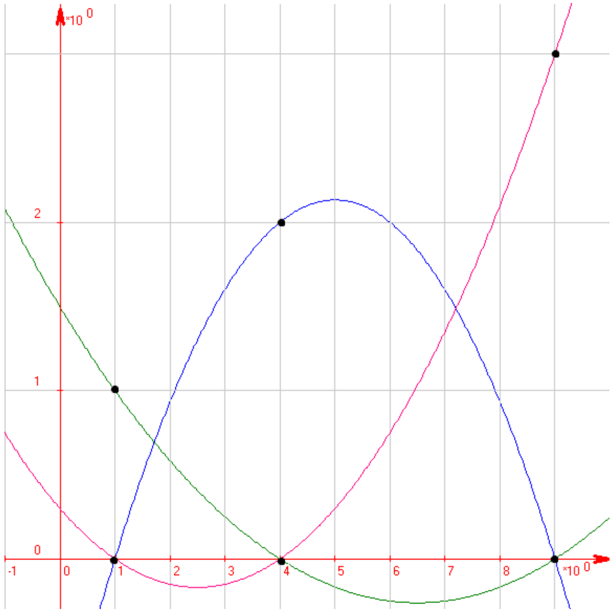
b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

Co se stane, vynásobíme-li polynom $\ell_0(x)$ tabulkovou hodnotou y_0, polynom $\ell_1(x)$ tabulkovou hodnotou y_1 a polynom $\ell_2(x)$ tabulkovou hodnotou y_2?

$$y_0 \cdot \ell_0(x) = y_0 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} = 1 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$y_1 \cdot \ell_1(x) = y_1 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)} = 2 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

$$y_2 \cdot \ell_2(x) = y_2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} = 3 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$



Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

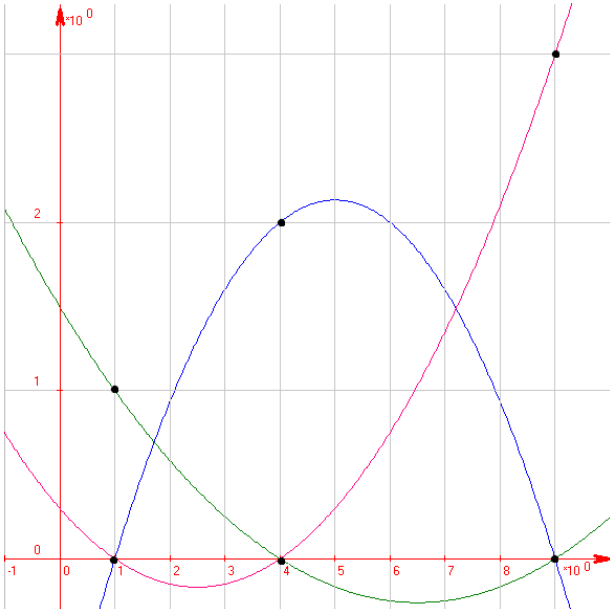
b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

Co se stane, vynásobíme-li polynom $\ell_0(x)$ tabulkovou hodnotou y_0, polynom $\ell_1(x)$ tabulkovou hodnotou y_1 a polynom $\ell_2(x)$ tabulkovou hodnotou y_2?

$$y_0 \cdot \ell_0(x) = y_0 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} = 1 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$y_1 \cdot \ell_1(x) = y_1 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)} = 2 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)}$$

$$y_2 \cdot \ell_2(x) = y_2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} = 3 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$



Každý takto vynásobený polynom prochází právě jedním tabulkovým bodem a v ostatních má hodnotu nula.

Interpolace funkcí

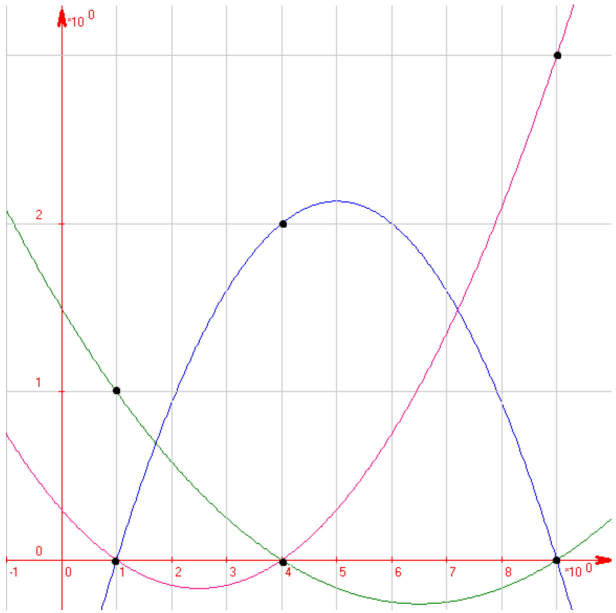
1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

Co se stane, když takto vynásobené polynomy sečteme?

$$L_2(x) = y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) + y_2 \cdot \ell_2(x) \;=$$



Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

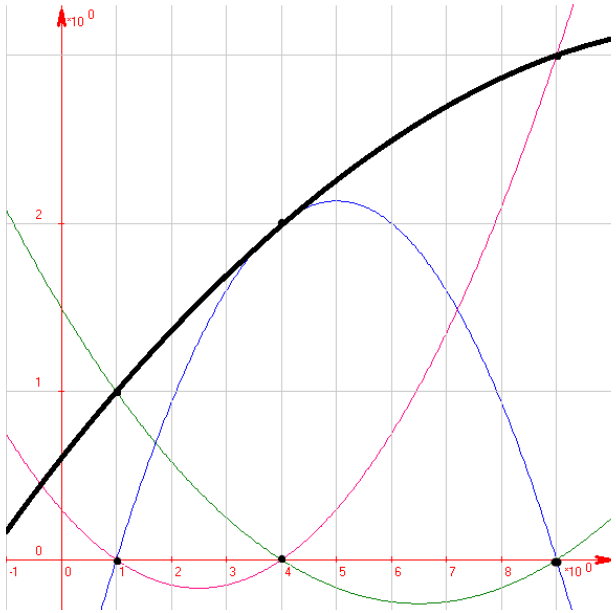
b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

Co se stane, když takto vynásobené polynomy sečteme?

$$L_2(x) = y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) + y_2 \cdot \ell_2(x) =$$

$$= y_0 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} + y_1 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)} + y_2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$

$$= 1 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$



Dostaneme polynom, který jsme hledali.

Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

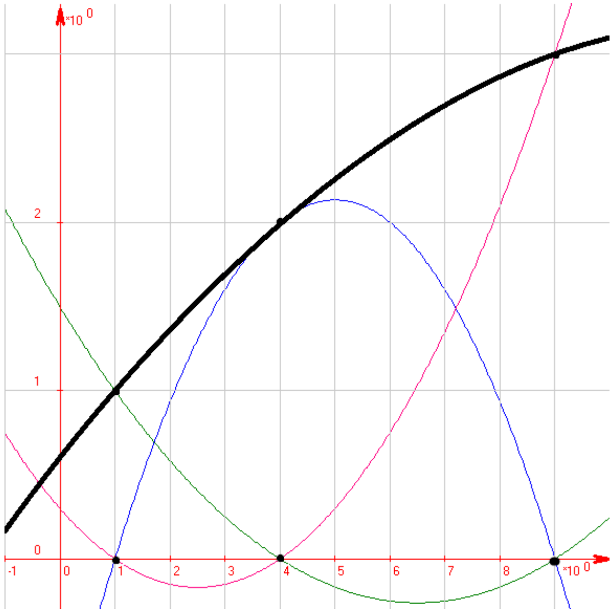
Co se stane, když takto vynásobené polynomy sečteme?

$$L_2(x) = y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) + y_2 \cdot \ell_2(x) =$$

$$= y_0 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} + y_1 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)} + y_2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$

$$= 1 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} =$$

$$= \frac{1}{24}(x-4)(x-9) - \frac{2}{15}(x-1)(x-9) + \frac{3}{40}(x-1)(x-4)$$



Interpolace funkcí

1 Příklad: Určeme polynom, který prochází zadanými tabulkovými body:

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu: Před sestavením požadovaného polynomu řešme nejdříve jednodušší úlohy:

Co se stane, když takto vynásobené polynomy sečteme?

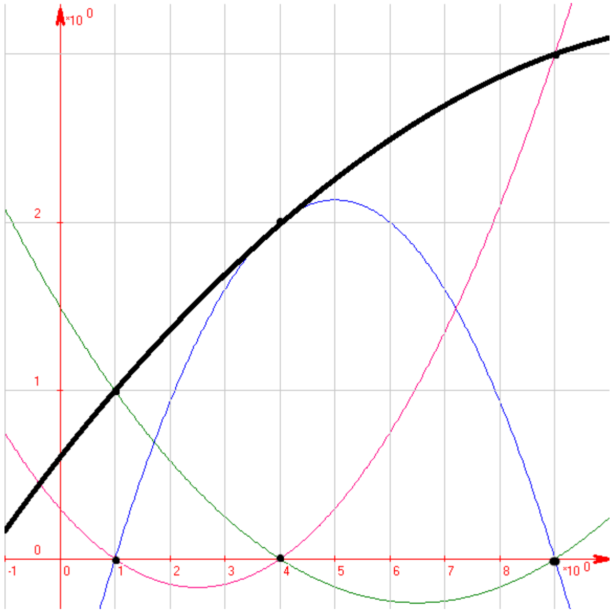
$$L_2(x) = y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) + y_2 \cdot \ell_2(x) =$$

$$= y_0 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} + y_1 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)} + y_2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$

$$= 1 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(1-9)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} =$$

$$= \frac{1}{24}(x-4)(x-9) - \frac{2}{15}(x-1)(x-9) + \frac{3}{40}(x-1)(x-4)$$

$$= -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}$$



Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$L_n(x) =$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_0 - x_n)}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_0 - x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_0 - x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_1 - x_n)}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n+1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	$i-1$	i	$i+1$	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_n)}{(x_0-x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_n)}{(x_1-x_n)} + \cdots$$

$$+ y_i \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_i-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n+1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_0 - x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_1 - x_n)} + \cdots$$

$$+ y_i \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_i - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_0 - x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_1 - x_n)} + \cdots$$

$$+ y_i \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_i - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_{n-1})}{(x_i - x_{n-1})} \cdot \frac{(x - x_{n-1})}{(x_i - x_{n-1})} + \cdots$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n+1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_n)}{(x_0-x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_n)}{(x_1-x_n)} + \cdots$$

$$+y_i \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_i-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})} \cdot \frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})} \cdot \frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})} + \cdots$$

$$+y_n \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_n-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_n-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{i-1})}{(x_n-x_{i-1})} \cdot \frac{(x-x_i)}{(x_n-x_i)} \cdot \frac{(x-x_{i+1})}{(x_n-x_{i+1})} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_0 - x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_n)}{(x_1 - x_n)} + \cdots$$

$$+ y_i \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_i - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_{n-1})}{(x_i - x_{n-1})} \cdot \frac{(x - x_{n-1})}{(x_i - x_{n-1})} + \cdots$$

$$+ y_n \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_n - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_n - x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_{i-1})}{(x_n - x_{i-1})} \cdot \frac{(x - x_i)}{(x_n - x_i)} \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_n - x_{i+1})} \cdot \ldots \cdot \frac{(x - x_{n-1})}{(x_i - x_{n-1})}$$

Při programování vhodnější zápis pomocí velkých operátorů

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n+1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_n)}{(x_0-x_n)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_n)}{(x_1-x_n)} + \cdots$$

$$+y_i \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_i-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})} \cdot \frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})} \cdot \frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})} + \cdots$$

$$+y_n \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_n-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_n-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{i-1})}{(x_n-x_{i-1})} \cdot \frac{(x-x_i)}{(x_n-x_i)} \cdot \frac{(x-x_{i+1})}{(x_n-x_{i+1})} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_i-x_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})} \cdot \frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})} \cdot \frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n+1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$L_n(x)=y_0\cdot\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\cdot\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-x_n)}{(x_0-x_n)}+y_1\cdot\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\cdot\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-x_n)}{(x_1-x_n)}+\cdots$$

$$+y_i\cdot\frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)}\cdot\frac{(x-x_2)}{(x_i-x_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}\cdot\frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})}\cdot\frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})}+\cdots$$

$$+y_n\cdot\frac{(x-x_1)}{(x_n-x_1)}\cdot\frac{(x-x_2)}{(x_n-x_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-x_{i-1})}{(x_n-x_{i-1})}\cdot\frac{(x-x_i)}{(x_n-x_i)}\cdot\frac{(x-x_{i+1})}{(x_n-x_{i+1})}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}y_i\cdot\frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)}\cdot\frac{(x-x_2)}{(x_i-x_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}\cdot\frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})}\cdot\frac{(x-x_{n-1})}{(x_i-x_{n-1})}$$

$$\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[y_i\cdot\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right]}$$

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n+1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

Takové vzorce sice vypadají složitě, ale programátoři je mají rádi

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

Takové vzorce sice vypadají složitě, ale programátoři je mají rádi.
Jsou to už vlastně algoritmy, které stačí víceméně mechanicky přeložit do programovacího jazyka.

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\right]}$$

Takové vzorce sice vypadají složitě, ale programátoři je mají rádi.
Jsou to už vlastně algoritmy, které stačí víceméně mechanicky přeložit do programovacího jazyka.

Navíc zde lze uplatnit programátorskou techniku, kterou učebnice bez fantazie nazývají **programování shora dolů,**

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n+1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

Takové vzorce sice vypadají složitě, ale programátoři je mají rádi.
Jsou to už vlastně algoritmy, které stačí víceméně mechanicky přeložit do programovacího jazyka.

Navíc zde lze uplatnit programátorskou techniku, kterou učebnice bez fantazie nazývají **programování shora dolů.**

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

Takové vzorce sice vypadají složitě, ale programátoři je mají rádi.
Jsou to už vlastně algoritmy, které stačí víceméně mechanicky přeložit do programovacího jazyka.

Navíc zde lze uplatnit programátorskou techniku, kterou učebnice bez fantazie nazývají **programování shora dolů.** Je to technika, při které se programátor s fantazií řídí zásadou

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n + 1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

Takové vzorce sice vypadají složitě, ale programátoři je mají rádi.
Jsou to už vlastně algoritmy, které stačí víceméně mechanicky přeložit do programovacího jazyka.

Navíc zde lze uplatnit programátorskou techniku, kterou učebnice bez fantazie nazývají **programování shora dolů.** Je to technika, při které se programátor s fantazií řídí zásadou

Co nemusíš udělati dnes, odlož na zítřek.

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně: Dána tabulka $n+1$ bodů

	P_0	P_1	.....	P_{i-1}	P_i	P_{i+1}	....	P_n
i	0	1	.....	i-1	i	i+1	....	n
x_i	x_0	x_1	.....	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_i	y_0	y_1	.....	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	....	y_n

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

Takové vzorce sice vypadají složitě, ale programátoři je mají rádi.
Jsou to už vlastně algoritmy, které stačí víceméně mechanicky přeložit do programovacího jazyka.

Navíc zde lze uplatnit programátorskou techniku, kterou učebnice bez fantazie nazývají **programování shora dolů.** Je to technika, při které se programátor s fantazií řídí zásadou

Co nemusíš udělati dnes, odlož na zítřek.

Tak se na ni pojďme podívat v matlabovském scriptu

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
X=[1 4 9];
Y=[1 2 3];
figure
grid on             % zobrazi sit v obrazku
hold on             % umožni do obrázku postupně přikreslovat
plot(X,Y,'ro')      % necháme si sestrojit kroužky v tabulkových bodech
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
X=[1 4 9];
Y=[1 2 3];
figure
grid on                 % zobrazi sit v obrazku
hold on                 % umožni do obrázku postupně přikreslovat
plot(X,Y,'ro')          % necháme si sestrojit kroužky v tabulkových bodech
n=length(X);            % i když jsme zadali konkrétní tabulku z předchozího příkladu, budeme řešit obecně
x=X(1):0.01:X(n);       % zavedeme dostatečně jemné dělení intervalu pro vykreslení hledaného polynomu,
lp=zeros(1,length(x));  % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
plot(x,lp)              % a polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
X=[1 4 9];
Y=[1 2 3];
figure
grid on                % zobrazi sit v obrazku
hold on                % umožni do obrázku postupně přikreslovat
plot(X,Y,'ro')         % necháme si sestrojit kroužky v tabulkových bodech
n=length(X);           % i když jsme zadali konkrétní tabulku z předchozího příkladu, budeme řešit obecně
x=X(1):0.01:X(n);      % zavedeme dostatečně jemné dělení intervalu pro vykreslení hledaného polynomu,
lp=zeros(1,length(x)); % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
plot(x,lp)             % a polynom necháme vykreslit
```

Zatím se nám, pravda, vykreslí jen nulový polynom. Jak zařídit ten interpolační, to jsme odložili na zítřek…

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));    % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
…….                       % zde musíme vyřešit to, co jsme před chvílí odložili
plot(x,lp)                % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));     % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
…….                        % pole lp budeme plnit funkčními hodnotami polynomu
plot(x,lp)                 % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));     % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
for index=1:length(x)
…….                        % pole lp budeme plnit funkčními hodnotami polynomu
end;
plot(x,lp)                 % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));     % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
for index=1:length(x)
…….                        % sumační znaménko s mezemi = cyklus v příslušných mezích
end;
plot(x,lp)                 % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));     % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
for index=1:length(x)
  for i=0:n
     lp=lp+ výraz            % sumační znaménko s mezemi = cyklus v příslušných mezích s přičítáním
 end;
end;
plot(x,lp)                   % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));     % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
for index=1:length(x)
  for i=0:n
    lp=lp+ výraz           % jak naprogramujeme výraz za sumačním znaménkem, to odložme na zítřek
  end;
end;
plot(x,lp)                 % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));     % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
for index=1:length(x)
  for i=0:n
    lp=lp+ výraz           % jak naprogramujeme výraz za sumačním znaménkem, to odložme na zítřek
  end;
end;
plot(x,lp)                 % polynom necháme vykreslit
```

Ještě než symbolický zítřek nastane, jedna nepříjemnost Matlabu. Ten bohužel neumožňuje indexovat od nuly (všechna naše pole začínají indexem jedna).

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));     % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
for index=1:length(x)
  for i=0:n
    lp=lp+ výraz           % jak naprogramujeme výraz za sumačním znaménkem, to odložme na zítřek
  end;
end;
plot(x,lp)                 % polynom necháme vykreslit
```

Ještě než symbolický zítřek nastane, jedna nepříjemnost Matlabu. Ten bohužel neumožňuje indexovat od nuly (všechna naše pole začínají indexem jedna).

Takže

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
lp=zeros(1,length(x));     % založíme pole pro funkční hodnoty hledaného polynomu
for index=1:length(x)
  for i=1:n
     lp=lp+ výraz            % jak naprogramujeme výraz za sumačním znaménkem, to odložme na zítřek
  end;
end;
plot(x,lp)                   % polynom necháme vykreslit
```

Ještě než symbolický zítřek nastane, jedna nepříjemnost Matlabu. Ten bohužel neumožňuje indexovat od nuly (všechna naše pole začínají indexem jedna).

Takže

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu

```
…….
 for i=1:n
    lp=lp+ výraz                         % výrazem je součin tabulkové hodnoty a bázového polynomu
 end;
end;
plot(x,lp)                   % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;    % výrazem je součin tabulkové hodnoty a bázového polynomu
 end;
end;
plot(x,lp)                        % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;    % výrazem je součin tabulkové hodnoty a bázového polynomu
 end;
end;
plot(x,lp)                       % polynom necháme vykreslit
```

Jak na bázový polynom, to jsme opět odložili.

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
  for i=1:n
     lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;    % výrazem je součin tabulkové hodnoty a bázového polynomu
 end;
end;
plot(x,lp)                          % polynom necháme vykreslit
```

Jak na bázový polynom, to jsme opět odložili. Jenže čas letí, takže hrrrr na něj.

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   for j=1:n                              % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
     Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom*výraz                 % tentokrát „přinásobovat“
     end;                                                   %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                      % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   for j=1:n                          % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
     Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom*výraz                  % tentokrát „přinásobovat“
     end;                                       %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                     % polynom necháme vykreslit
```

Proměnná, do které napočítáváme součin, musí být před cyklem nastavena na jedničku (na rozdíl od součtu, kde musí být nula). Tedy…

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   Bazovy_Polynom =1;
   for j=1:n                           % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
     Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom*výraz          % tentokrát „přinásobovat“
     end;                              %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                  % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   Bazovy_Polynom =1;
   for j=1:n                          % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
     Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom*výraz          % tentokrát „přinásobovat“
     end;                             %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                 % polynom necháme vykreslit
```

A ještě jedna věc: podmínka $i \neq j$ v operátoru součinu

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   Bazovy_Polynom =1;
   for j=1:n                                      % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
    if  i~=j
      Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom*výraz                          % tentokrát „přinásobovat“
      end;                                                  %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
    end;
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                    % polynom necháme vykreslit
```

A ještě jedna věc: podmínka $i \neq j$ v operátoru součinu

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   Bazovy_Polynom =1;
   for j=1:n                                  % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
    if  i~=j
      Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom* výraz                    % tentokrát „přinásobovat“
      end;                                                      %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
    end;
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                   % polynom necháme vykreslit
```

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
   Bazovy_Polynom =1;
   for j=1:n                          % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
    if  i~=j
      Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom*výraz                  % tentokrát „přinásobovat“
      end;                                        %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
    end;
   lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                 % polynom necháme vykreslit
```

Teď už zbývá jen poslední maličkost – „*výrazem*“ v našem kódu je už jen jednoduchý zlomek. Je třeba si jen uvědomit význam jednotlivých symbolů ve vzorci: x je proměnná polynomu, x_i; x_j jsou tabulkové hodnoty.

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
    Bazovy_Polynom =1;
    for j=1:n                          % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
     if  i~=j
       Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom*(x-X(j))/(X(i)-X(j));          % tentokrát „přinásobovat“
       end;                                                           %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
     end;
    lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                  % polynom necháme vykreslit
```

Teď už zbývá jen poslední maličkost – „*výrazem*“ v našem kódu je už jen jednoduchý zlomek. Je třeba si jen uvědomit význam jednotlivých symbolů ve vzorci: x je proměnná polynomu, x_i; x_j jsou tabulkové hodnoty.

Interpolace funkcí

b) Lagrangeův tvar interpolačního polynomu – obecně:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\right]}$$

```
% Lagrangeův tvar interpolačního polynomu
…….
 for i=1:n
    Bazovy_Polynom =1;
    for j=1:n                                   % Bázový polynom je součin, takže opět cyklus v příslušných mezích
     if  i~=j
       Bazovy_Polynom = Bazovy_Polynom*(x-X(j))/(X(i)-X(j));                  % tentokrát „přinásobovat“
       end;                                                                  %   (a kvůli Matlabu opět posunout index)
     end;
    lp=lp+Y(i)*Bazovy_Polynom;
 end;
end;
plot(x,lp)                          % polynom necháme vykreslit
```

Teď už zbývá jen poslední maličkost – „*výrazem*“ v našem kódu je už jen jednoduchý zlomek. Je třeba si jen uvědomit význam jednotlivých symbolů ve vzorci: x je proměnná polynomu, x_i; x_j jsou tabulkové hodnoty. **Hotovo**. Titulek grafu, legendu apod. jistě zvládne každý sám ☺

Interpolace funkcí

2 Příklad: Pomocí interpolačního polynomu určeme přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$.

Interpolace funkcí

2 Příklad: Pomocí interpolačního polynomu určeme přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$.

Jistě jste si všimli, že tabulka, terou jsme v př. 1 interpolovali, je tabulka tří hodnot funkce $\sqrt{x}$ a dále $5 \in (x_0; x_2) = (1; 9)$. Přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$ najdeme tedy jako hodnotu interpolačního polynomu pro $x = 5$:

$$\sqrt{5} \approx L_2(5) = \frac{1}{24}\cdot(5-4)\cdot(5-9) - \frac{2}{15}\cdot(5-1)\cdot(5-9) + \frac{3}{40}\cdot(5-1)\cdot(5-4) = \boxed{2.26} \qquad \sqrt{5} \approx 2.236...$$

Interpolace funkcí

c) Nevtonův tvar interpolačního polynomu: Náš předchozí výsledek nebyl moc přesný. Jednou z cest, jak přesnost zlepšit, je přidat do interpolace další bod (nebo body). Jak uvidíme později, tato cesta je často kontraproduktivní, nicméně stojí za prozkoumání.

Interpolace funkcí

c) Newtonův tvar interpolačního polynomu: Náš předchozí výsledek nebyl moc přesný. Jednou z cest, jak přesnost zlepšit, je přidat do interpolace další bod (nebo body). Jak uvidíme později, tato cesta je často kontraproduktivní, nicméně stojí za prozkoumání.

Metoda neurčitých koeficientů ani Lagrangeův tvar polynomu nejsou v našem případě nejšťastnější. Celý předchoyí výpočet bychom totiž museli zahodit a polynom (tentokrát třetího či vyššího stupně) bychom museli počítat celý znovu.

Interpolace funkcí

c) Newtonův tvar interpolačního polynomu: Náš předchozí výsledek nebyl moc přesný. Jednou z cest, jak přesnost zlepšit, je přidat do interpolace další bod (nebo body). Jak uvidíme později, tato cesta je často kontraproduktivní, nicméně stojí za prozkoumání.

Metoda neurčitých koeficientů ani Lagrangeův tvar polynomu nejsou v našem případě nejšťastnější. Celý předchozí výpočet bychom totiž museli zahodit a polynom (tentokrát třetího či vyššího stupně) bychom museli počítat celý znovu.

Tento nedostatek odstraňuje Newtonův tvar interpolačního polynomu.

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Určeme polynomy, které postupně procházejí body P_0; $P_0; P_1$; $P_0; P_1; P_2$.

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Určeme polynomy, které postupně procházejí body P_0; $P_0; P_1$; $P_0; P_1; P_2$.

Polynomy budeme hledat postupně ve tvaru

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Určeme polynomy, které postupně procházejí body P_0; $P_0; P_1$; $P_0; P_1; P_2$.

Polynomy budeme hledat postupně ve tvaru

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$$N_0(x) = a_0$$

$$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$

$$\boxed{N_0(x) = 1}$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \; a_0 = 1$ $\boxed{N_0(x) = 1}$

$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \; a_0 = 1$ $\boxed{N_0(x) = 1}$

$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$

$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$$N_0(x) = a_0$$

$$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$$

$$\boxed{N_0(x) = 1}$$

$$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$$

$$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{N_1(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)}$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$ $\qquad \boxed{N_0(x) = 1}$

$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$

$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$ $\qquad \boxed{N_1(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)}$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$

$$\boxed{N_0(x) = 1}$$

$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$

$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$

$$\boxed{N_1(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)}$$

$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 4)$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$ $\boxed{N_0(x) = 1}$

$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$

$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2 \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{3}$ $\boxed{N_1(x) = 1 + \dfrac{1}{3}(x - 1)}$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 4)$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(9 - 1) + a_2(9 - 1)(9 - 4) = 3$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$ $\boxed{N_0(x) = 1}$

$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$

$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$ $\boxed{N_1(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)}$

$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 4)$

$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(9 - 1) + a_2(9 - 1)(9 - 4) = 3 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{60}$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$$N_0(x) = a_0$$

$$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1 \qquad \boxed{N_0(x) = 1}$$

$$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$$

$$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \qquad \boxed{N_1(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 4)$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(9 - 1) + a_2(9 - 1)(9 - 4) = 3 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{60} \ \boxed{N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{60}(x - 1)(x - 4)}$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$ $\quad \boxed{N_0(x) = 1}$

$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$

$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2 \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{3}$ $\quad \boxed{N_1(x) = 1 + \dfrac{1}{3}(x - 1)}$

$N_2(x) = 1 + \dfrac{1}{3}(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 4)$

$N_2(x) = 1 + \dfrac{1}{3}(9 - 1) + a_2(9 - 1)(9 - 4) = 3 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{1}{60}$ $\boxed{N_2(x) = 1 + \dfrac{1}{3}(x - 1) - \dfrac{1}{60}(x - 1)(x - 4)}$

Nyní lze do tabulky přidávat další a další body a pomocí předchozího polynomu $N_k(x)$ podobně spočítat polynom $N_{k+1}(x)$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

$N_0(x) = a_0$

$N_0(x) = a_0 \Rightarrow \ a_0 = 1$ $\qquad \boxed{N_0(x) = 1}$

$N_1(x) = 1 + a_1(x - x_0)$

$N_1(x) = 1 + a_1(4 - 1) = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$ $\qquad \boxed{N_1(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)}$

$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 4)$

$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(9 - 1) + a_2(9 - 1)(9 - 4) = 3 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{60}$ $\boxed{N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{60}(x - 1)(x - 4)}$

Nyní lze do tabulky přidávat další a další body a pomocí předchozího polynomu $N_k(x)$ podobně spočítat polynom $N_{k+1}(x)$

Tento postup (opět bychom ho mohli nazvat metoda neurčitých koeficientů) se však nehodí pro počítačové zpracování.

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

1 1

4 2

9 3

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{lll} 1 & 1 & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} \\ 9 & 3 & \end{array}$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$
\begin{array}{lll}
1 & 1 & \\
4 & 2 & \frac{1}{3} \\
9 & 3 & \frac{1}{5}
\end{array}
$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$1 \quad 1$$

$$4 \quad 2 \quad \frac{1}{3}$$

$$9 \quad 3 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{}$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8} \end{array}$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$
\begin{array}{llll}
1 & 1 & & \\
4 & 2 & \frac{1}{3} & \\
9 & 3 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{60}
\end{array}
$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$
\begin{array}{llll}
1 & 1 & & \\
4 & 2 & \frac{1}{3} & \\
9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60}
\end{array}
$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Přidejme další bod funkce $\sqrt{x}$; např. $P_3 = [0; 0]$:

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\ 0 & 0 & & \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{-9} & \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{} \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{0-4} \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$
\begin{array}{llll}
1 & 1 & & \\
4 & 2 & \frac{1}{3} & \\
9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} & \frac{-\frac{1}{30}+\frac{1}{60}}{}
\end{array}
$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$
\begin{array}{llll}
1 & 1 & & \\
4 & 2 & \frac{1}{3} & \\
9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} & \dfrac{-\frac{1}{30}+\frac{1}{60}}{0-1}
\end{array}
$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{60} \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{lllll} 1 & 1 & & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{60} \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

$$N_3(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) + \frac{1}{60}(x-1)(x-4)(x-9)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & & & \\ 4 & 2 & \frac{1}{3} & & \\ 9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{60} \end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

$$N_3(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) + \frac{1}{60}(x-1)(x-4)(x-9)$$

Stejně jako při sestavování polynomu, tak při výpočtu funkční hodnoty můžeme použít předchozí výsledky:

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{llll l}
1 & 1 & & & \\
4 & 2 & \frac{1}{3} & & \\
9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} & \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{60}
\end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

$$N_3(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) + \frac{1}{60}(x-1)(x-4)(x-9)$$

Stejně jako při sestavování polynomu, tak při výpočtu funkční hodnoty můžeme použít předchozí výsledky:

$$N3(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)}_{2.26} + \frac{1}{60}(x-1)(x-4)(x-9)$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$
\begin{array}{llllll}
1 & 1 & & & \\
4 & 2 & \frac{1}{3} & & \\
9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} & \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{60}
\end{array}
$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

$$N_3(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) + \frac{1}{60}(x-1)(x-4)(x-9)$$

Stejně jako při sestavování polynomu, tak při výpočtu funkční hodnoty můžeme použít předchozí výsledky:

$$N3(5) = \underbrace{1 + \frac{1}{3}(5-1) - \frac{1}{60}(5-1)(5-4)}_{2.26} + \underbrace{\frac{1}{60}(5-1)(5-4)(5-9)}_{\approx{}^{\circ}-0.27} \approx 1.99$$

Interpolace funkcí

3 Příklad: Je dána tabulka

	P_0	P_1	P_2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Postup vhodný k softwarovému zpracování:

$$\begin{array}{lllll}
1 & 1 & & & \\
4 & 2 & \frac{1}{3} & & \\
9 & 3 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{60} & \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{60}
\end{array}$$

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

$$N_3(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) + \frac{1}{60}(x-1)(x-4)(x-9)$$

Stejně jako při sestavování polynomu, tak při výpočtu funkční hodnoty můžeme použít předchozí výsledky:

$$N3(5) = \underbrace{1 + \frac{1}{3}(5-1) - \frac{1}{60}(5-1)(5-4)}_{2.26} \underbrace{+ \frac{1}{60}(5-1)(5-4)(5-9)}_{\approx^{\circ}-0.27} \approx 1.99$$

Interpolace funkcí

3 Příklad:

Stejně jako při sestavování polynomu, tak při výpočtu funkční hodnoty můžeme použít předchozí výsledky:

$$N_3(5) = \underbrace{1 + \frac{1}{3}(5-1) - \frac{1}{60}(5-1)(5-4)}_{2.26} \underbrace{+ \frac{1}{60}(5-1)(5-4)(5-9)}_{\approx^{\circ} -0.27} \approx 1.99$$

Všimněte si ovšem, že místo očekávaného ylepšení výsledku došlo k jeho podstatnému znehodnocení.

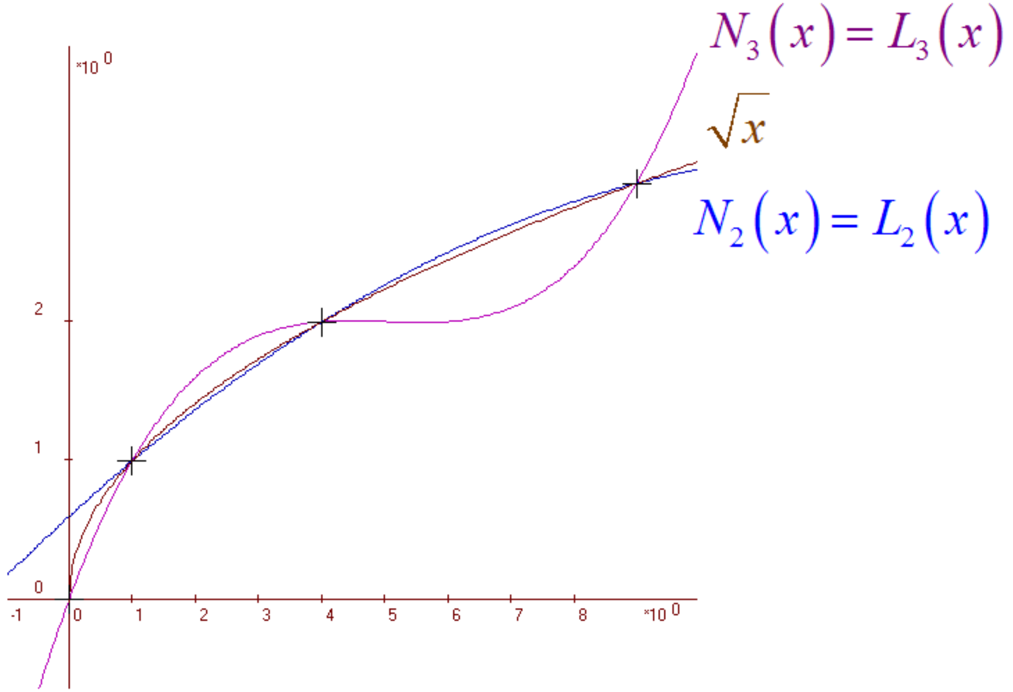
Interpolace funkcí

3 Příklad:

Stejně jako při sestavování polynomu, tak při výpočtu funkční hodnoty můžeme použít předchozí výsledky:

$$N_3(5) = \underbrace{1 + \frac{1}{3}(5-1) - \frac{1}{60}(5-1)(5-4)}_{2.26} + \underbrace{\frac{1}{60}(5-1)(5-4)(5-9)}_{\approx^\circ -0.27} \approx 1.99$$

Všimněte si ovšem, že místo očekávaného zlepšení výsledku došlo k jeho podstatnému znehodnocení.



Než se budeme zabývat otázkou, proč tomu tak je, ještě matlabovský script Newtonovy interpolace:

Interpolace funkcí

```
% Newtonuv tvar interp. polynomu
X=[0 1 4 9];
Y=[0 1 2 3];

figure
grid on
hold on
plot(X,Y,'ro')

n=length(X);
x=X(1):0.1:X(n);
np=zeros(1,length(x));
P=zeros(n,n);

for i=1:n
  P(i,1)=Y(i);
end;

for k=2:n
  for i=k:n
      P(i,k)=(P(i,k-1)-P(i-1,k-1))/(X(i)-X(i-k+1));
  end;
end;

for index=1:length(x)
  NewtonuvPolynom(index)=P(1,1);
end;

for index=1:length(x)
 for k=2:n
   SoucinZavorek=1;
   for j=2:k
     SoucinZavorek = SoucinZavorek *(x(index)-X(j-1));
   end;
  np(index)=np(index)+P(k,k)* SoucinZavorek;
 end;
end;
plot(x,np)
```

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

Interpolujeme-li funkci $f(x)$, jejíž hodnoty v uzlových bodech jsou

P_0	P_1	P_2	....	P_i	P_{i+1}	....	P_n
x_0	x_1	x_2	....	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_0	y_1	y_2	....	y_i	y_{i+1}	....	y_n

a $\langle a;b\rangle$ interval takový, že $x_0;x_1;...;x_n \in \langle a;b\rangle$.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

Interpolujeme-li funkci $f(x)$, jejíž hodnoty v uzlových bodech jsou

P_0	P_1	P_2	....	P_i	P_{i+1}	....	P_n
x_0	x_1	x_2	....	x_i	x_{i+1}	....	x_n
y_0	y_1	y_2	....	y_i	y_{i+1}	....	y_n

a $\langle a;b\rangle$ interval takový, že $x_0;x_1;\dots;x_n \in \langle a;b\rangle$. Pro chybu interpolace polynomem $L_n(x)$. Pak platí:

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanevené v příkladech 2, 3

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in (a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in (a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x \in (a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanevené v příkladech 2, 3

Následující detailní výpočet má pouze ilustrativní charakter.
Důležité bude jednoduché poučení, které z něho vyplyne.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in (a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in (a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x \in (a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanevené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanevené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n = 2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n = 2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

a to na intervalu $x \in (1;9)$.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n = 2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

a to na intervalu $x \in (1; 9)$. Funkce $f'''(x)$ je na tomto intervalu spojitá a klesající, je tedy

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in (a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in (a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x \in (a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n = 2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

a to na intervalu $x \in (1; 9)$. Funkce $f'''(x)$ je na tomto intervalu spojitá a klesající, je tedy

$$\sup_{x \in (1;9)} |f'''(x)| = f'''(1) = \frac{3}{8}$$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x)=\sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n=2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

a to na intervalu $x\in(1;9)$. Funkce $f'''(x)$ je na tomto intervalu spojitá a klesající, je tedy

$$\sup_{x\in(1;9)} |f'''(x)| = f'''(1) = \frac{3}{8}$$

Maximum $\max\limits_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| = \max\limits_{x\in(1;9)} |(x-1)(x-4)(x-9)|$
bychom byli schopni určit metodami známými z M I. Při větším počtu bodů však hledáme maximum polynomu stupně $n>3$, kde klasické metody již selhávají. Proto maximum jen odhadneme.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n = 2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

a to na intervalu $x \in (1;9)$. Funkce $f'''(x)$ je na tomto intervalu spojitá a klesající, je tedy

$$\sup_{x\in(1;9)} |f'''(x)| = f'''(1) = \frac{3}{8}$$

Maximum $\max\limits_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| = \max\limits_{x\in(1;9)} |(x-1)(x-4)(x-9)|$ bychom byli schopni určit metodami známými z M I. Při větším počtu bodů však hledáme maximum polynomu stupně $n > 3$, kde klasické metody již selhávají. Proto maximum jen odhadneme.

Funkce $g(x) = |(x-1)(x-4)(x-9)|$ bude mít maxima zhruba uprostřed intervalů omezených nulovými body 1; 4; 9: tedy $g(2.5) \approx 17$; $g(6.5) \approx 34 \Rightarrow \max g(x) \approx 34$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x)=\sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n=2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

a to na intervalu $x \in (1;9)$. Funkce $f'''(x)$ je na tomto intervalu spojitá a klesající, je tedy

$$\sup_{x\in(1;9)} |f'''(x)| = f'''(1) = \frac{3}{8}$$

Maximum $\max\limits_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| = \max\limits_{x\in(1;9)} |(x-1)(x-4)(x-9)|$ bychom byli schopni určit metodami známými z M I. Při větším počtu bodů však hledáme maximum polynomu stupně $n>3$, kde klasické metody již selhávají. Proto maximum jen odhadneme.

Funkce $g(x) = |(x-1)(x-4)(x-9)|$ bude mít maxima zhruba uprostřed intervalů omezených nulovými body 1; 4; 9: tedy $g(2.5)\approx 17$; $g(6.5)\approx 34 \Rightarrow \max g(x) \approx 34$. Je tedy

$$E_2(x) \le \frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}\cdot 34 = 2.125$$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n = 2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

a to na intervalu $x \in (1;9)$. Funkce $f'''(x)$ je na tomto intervalu spojitá a klesající, je tedy

$$\sup_{x\in(1;9)} |f'''(x)| = f'''(1) = \frac{3}{8}$$

Maximum $\max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| = \max_{x\in(1;9)} |(x-1)(x-4)(x-9)|$ bychom byli schopni určit metodami známými z M I. Při větším počtu bodů však hledáme maximum polynomu stupně $n > 3$, kde klasické metody již selhávají. Proto maximum jen odhadneme.

Funkce $g(x) = |(x-1)(x-4)(x-9)|$ bude mít maxima zhruba uprostřed intervalů omezených nulovými body 1; 4; 9: tedy $g(2.5) \approx 17$; $g(6.5) \approx 34 \Rightarrow \max g(x) \approx 34$. Je tedy

$$E_2(x) \leq \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot 34 = 2.125$$

Tento odhad je značně pesimistický, neboť $\sqrt{5} = 2.23 \dots$ a jak jsme již dříve zjistili, $L_2(5) = N_2(5) \approx 2.26$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 2 to byly tři hodnoty ($n = 2$), tedy

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\sqrt{x}\right]''' = \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'' = \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}};$$

a to na intervalu $x \in (1;9)$. Funkce $f'''(x)$ je na tomto intervalu spojitá a klesající, je tedy

$$\sup_{x\in(1;9)} |f'''(x)| = f'''(1) = \frac{3}{8}$$

Maximum $\max\limits_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| = \max\limits_{x\in(1;9)} |(x-1)(x-4)(x-9)|$ bychom byli schopni určit metodami známými z M I. Při větším počtu bodů však hledáme maximum polynomu stupně $n > 3$, kde klasické metody již selhávají. Proto maximum jen odhadneme.

Funkce $g(x) = |(x-1)(x-4)(x-9)|$ bude mít maxima zhruba uprostřed intervalů omezených nulovými body 1; 4; 9: tedy $g(2.5) \approx 17$; $g(6.5) \approx 34 \Rightarrow \max g(x) \approx 34$. Je tedy

$$E_2(x) \leq \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot 34 = 2.125$$

Tento odhad je značně pesimistický, neboť $\sqrt{5} = 2.23 \dots$ a jak jsme již dříve zjistili, $L_2(5) = N_2(5) \approx 2.26$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n = 3$),

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x)=\sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n=3$), tedy

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)'\right| = \left|\frac{15}{16}\cdot x^{-\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}\right|$$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in (a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in (a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x \in (a;b)} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n = 3$), tedy

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \left| \left(\frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \right)' \right| = \left| \frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}} \right| = \left| \frac{15}{16x^3\sqrt{x}} \right|$$

a to na intervalu $x \in (\mathbf{0}; 9)$.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x)=\sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n=3$), tedy

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \left| \left(\frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \right)' \right| = \left| \frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}} \right| = \left| \frac{15}{16x^3\sqrt{x}} \right|$$

a to na intervalu $x \in (0; 9)$. Je zřejmé, že pro $x \to 0$ je $\left| f^{(4)}(x) \right| \to \infty$.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x)=\sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n=3$), tedy

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)'\right| = \left|\frac{15}{16}\cdot x^{-\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}\right|$$

a to na intervalu $x\in(0;9)$. Je zřejmé, že pro $x\to 0$ je $\left|f^{(4)}(x)\right|\to\infty$.
A protože

$$\max_{x\in(0;9)} |(x-0)(x-1)(x-4)(x-9)| = c > 0$$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x)=\sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n=3$), tedy

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)'\right| = \left|\frac{15}{16}\cdot x^{-\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}\right|$$

a to na intervalu $x\in(0;9)$. Je zřejmé, že pro $x\to 0$ je $\left|f^{(4)}(x)\right|\to\infty$.
A protože

$$\max_{x\in(0;9)} |(x-0)(x-1)(x-4)(x-9)| = c > 0$$

je

$$E_4(x) \le \sup \frac{1}{4!}\left|c\cdot f^{(4)}(x)\right| = \infty$$

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x)=\sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n=3$), tedy

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)'\right| = \left|\frac{15}{16}\cdot x^{-\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}\right|$$

a to na intervalu $x \in (0;9)$. Je zřejmé, že pro $x \to 0$ je $\left|f^{(4)}(x)\right| \to \infty$.
 A protože

$$\max_{x\in(0;9)} |(x-0)(x-1)(x-4)(x-9)| = c > 0$$

je

$$E_4(x) \leq \sup \frac{1}{4!}\left|c \cdot f^{(4)}(x)\right| = \infty$$

Vzorec pro chybu interpolace nám v tomto případě „zaručuje“ pouze to, že chyba nebude nekonečná.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n = 3$), tedy

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)'\right| = \left|\frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}\right|$$

a to na intervalu $x \in (\mathbf{0}; 9)$. Je zřejmé, že pro $x \to 0$ je $\left|f^{(4)}(x)\right| \to \infty$.
A protože

$$\max_{x\in(0;9)} |(x-0)(x-1)(x-4)(x-9)| = c > 0$$

je

$$E_4(x) \leq \sup \frac{1}{4!}\left|c \cdot f^{(4)}(x)\right| = \infty$$

Vzorec pro chybu interpolace nám v tomto případě „zaručuje“ pouze to, že chyba nebude nekonečná. Jinými slovy nám říká, že chyba může být obrovská (což také, jak už víme, je).

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n = 3$), tedy

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)'\right| = \left|\frac{15}{16}\cdot x^{-\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}\right|$$

a to na intervalu $x \in (0; 9)$. Je zřejmé, že pro $x \to 0$ je $\left|f^{(4)}(x)\right| \to \infty$.
A protože

$$\max_{x\in(0;9)} |(x-0)(x-1)(x-4)(x-9)| = c > 0$$

je

$$E_4(x) \leq \sup \frac{1}{4!}\left|c\cdot f^{(4)}(x)\right| = \infty$$

Vzorec pro chybu interpolace nám v tomto případě „zaručuje“ pouze to, že chyba nebude nekonečná. Jinými slovy nám říká, že chyba může být obrovská (což také, jak už víme, je).

Slibované poučení z tohoto příkladu:

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n = 3$), tedy

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)'\right| = \left|\frac{15}{16}\cdot x^{-\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}\right|$$

a to na intervalu $x \in (0; 9)$. Je zřejmé, že pro $x \to 0$ je $\left|f^{(4)}(x)\right| \to \infty$.
A protože

$$\max_{x\in(0;9)} |(x-0)(x-1)(x-4)(x-9)| = c > 0$$

je

$$E_4(x) \leq \sup \frac{1}{4!}\left|c\cdot f^{(4)}(x)\right| = \infty$$

Vzorec pro chybu interpolace nám v tomto případě „zaručuje“ pouze to, že chyba nebude nekonečná. Jinými slovy nám říká, že chyba může být obrovská (což také, jak už víme, je).
Je třeba si uvědomovat, jak se na daném intervalu chovají derivace interpolované funkce.

Interpolace funkcí

d) Chyba interpolace

$$E_n(x) \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in(a;b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \max_{x\in(a;b)} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

3 Příklad: Určeme chybu hodnoty $\sqrt{5}$ stanovené v příkladech 2, 3

V obou případech jsme tabelovali hodnoty funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V příkladu 3 to byly čtyři hodnoty ($n = 3$), tedy

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left|\left(\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)'\right| = \left|\frac{15}{16}\cdot x^{-\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}\right|$$

a to na intervalu $x \in (0; 9)$. Je zřejmé, že pro $x \to 0$ je $\left|f^{(4)}(x)\right| \to \infty$.
A protože

$$\max_{x\in(0;9)} |(x-0)(x-1)(x-4)(x-9)| = c > 0$$

je

$$E_4(x) \le \sup \frac{1}{4!}\left|c\cdot f^{(4)}(x)\right| = \infty$$

Vzorec pro chybu interpolace nám v tomto případě „zaručuje“ pouze to, že chyba nebude nekonečná. Jinými slovy nám říká, že chyba může být obrovská (což také, jak už víme, je).

Je třeba si uvědomovat, jak se na daném intervalu chovají derivace interpolované funkce. Při vysokých hodnotách derivací hrozí velké chyby při interpolaci.

Interpolace funkcí

Je třeba si uvědomovat, jak se na daném intervalu chovají derivace interpolované funkce. Při vysokých hodnotách derivací hrozí velké chyby při interpolaci.

4 Příklad: Tabelujte hodnoty funkce

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

v intervalu $x \in \langle -1; 1 \rangle$ krokem 0.25. Těmito body proložte interpolační polynom a porovnejte jeho průběh s funkcí $f(x)$. Zdůvodněte.

Interpolace funkcí

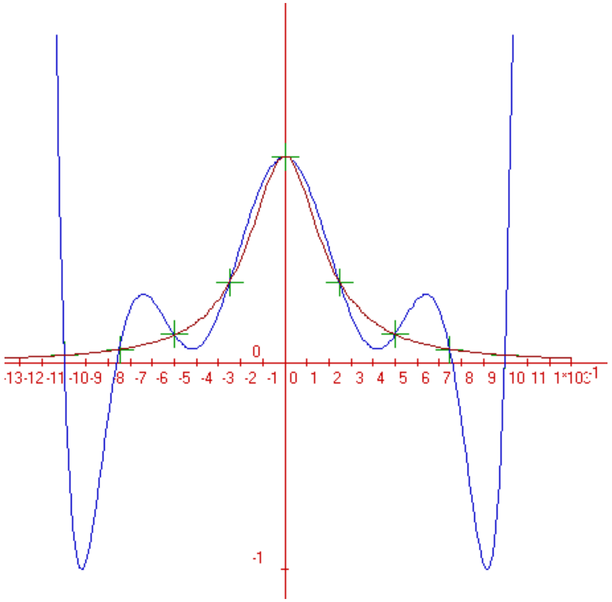
Je třeba si uvědomovat, jak se na daném intervalu chovají derivace interpolované funkce. Při vysokých hodnotách derivací hrozí velké chyby při interpolaci.

4 Příklad: Tabelujte hodnoty funkce

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

v intervalu $x \in \langle -1; 1 \rangle$ krokem 0.25. Těmito body proložte interpolační polynom a porovnejte jeho průběh s funkcí $f(x)$. Zdůvodněte.

x(i)	-1.00	-0.75	-0.50	-0.25	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y(i)	0.03846	0.06639	0.13793	0.39024	1.00000	0.39024	0.13793	0.06639	0.03846



Interpolace funkcí

5 Příklad: Určete při ližnou hodnotu $\sqrt{5}$ interpolací hodnot funkce

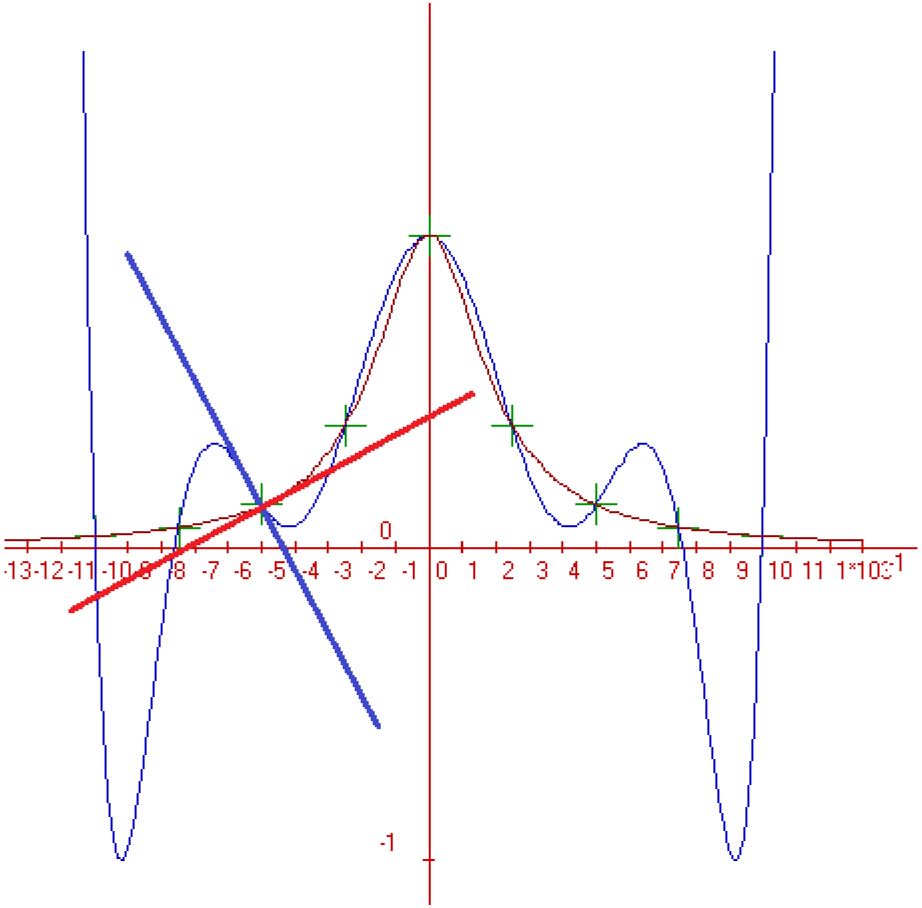
$$f(x) = 5^x$$

Výsledky porovnejte s výsledky příkladu 2, 3. Lze k této interpolaci použít bod $P = [0; 1]$?

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

Jedním z parametrů, který podstatně ovlivňuje chování interpolačního polynomu mimo uzlové body, je derivace v uzlových bodech.



Je zřejmé, že pokud do interpolace zapracujeme kromě funkčních hodnot i hodnoty derivací v několika (popř. všech) bodech interpolované funkce (popř. i derivace vyšších řádů) – použijeme tzv. Hermitův polynom , můžeme chybu interpolace podstatně zmenšit.

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$.

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

Volba polynomu tvaru

$$H_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ovšem v tomto případě není příliš vhodná (jak uvidíme za chvíli).

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

Volba polynomu tvaru

$$H_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ovšem v tomto případě není příliš vhodná (jak uvidíme za chvíli).
Zvolme

$$H_4(x) = a_4\left(x-1\right)^4 + a_3\left(x-1\right)^3 + a_2\left(x-1\right)^2 + a_1\left(x-1\right) + a_0$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4\left(x-1\right)^4 + a_3\left(x-1\right)^3 + a_2\left(x-1\right)^2 + a_1\left(x-1\right) + a_0$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$1 = a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0$$

$$2 = a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0$$

$$3 = a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$1 = a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0$$

$$2 = a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0$$

$$3 = a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$1 = a_4 \cdot (1-1)^4 + a_3 \cdot (1-1)^3 + a_2 \cdot (1-1)^2 + a_1 \cdot (1-1) + a_0$$

$$2 = a_4 \cdot (4-1)^4 + a_3 \cdot (4-1)^3 + a_2 \cdot (4-1)^2 + a_1 \cdot (4-1) + a_0$$

$$3 = a_4 \cdot (9-1)^4 + a_3 \cdot (9-1)^3 + a_2 \cdot (9-1)^2 + a_1 \cdot (9-1) + a_0$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$1 = a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0$$

$$2 = a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0$$

$$3 = a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0$$

$$\tfrac{1}{2} = 4a_4\cdot(1-1)^3 + 3a_3\cdot(1-1)^2 + 2a_2\cdot(1-1) + a_1$$

$$\tfrac{1}{6} = 4a_4\cdot(9-1)^3 + 3a_3\cdot(9-1)^2 + 2a_2\cdot(9-1) + a_1$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$\left.\begin{aligned}
1 &= a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0\\
2 &= a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0\\
3 &= a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0\\
\tfrac{1}{2} &= 4a_4\cdot(1-1)^3 + 3a_3\cdot(1-1)^2 + 2a_2\cdot(1-1) + a_1\\
\tfrac{1}{6} &= 4a_4\cdot(9-1)^3 + 3a_3\cdot(9-1)^2 + 2a_2\cdot(9-1) + a_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= 1\\ a_1 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$\left.\begin{aligned}
1 &= a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0\\
2 &= a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0\\
3 &= a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0\\
\tfrac{1}{2} &= 4a_4\cdot(1-1)^3 + 3a_3\cdot(1-1)^2 + 2a_2\cdot(1-1) + a_1\\
\tfrac{1}{6} &= 4a_4\cdot(9-1)^3 + 3a_3\cdot(9-1)^2 + 2a_2\cdot(9-1) + a_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0 &= 1\\ a_1 &= \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}
2 &= 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 1.5 + 1\\
3 &= 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 4 + 1\\
0.1\overline{6} &= 2048a_4 + 192a_3 + 16a_2 + 1
\end{aligned}$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$a_4 = -0.00045$$
$$a_3 = 0.00983$$
$$a_2 = -0.08097$$
$$a_1 = 0.5$$
$$a_0 = 1$$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$\left.\begin{aligned}
1 &= a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0\\
2 &= a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0\\
3 &= a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0\\
\tfrac{1}{2} &= 4a_4\cdot(1-1)^3 + 3a_3\cdot(1-1)^2 + 2a_2\cdot(1-1) + a_1\\
\tfrac{1}{6} &= 4a_4\cdot(9-1)^3 + 3a_3\cdot(9-1)^2 + 2a_2\cdot(9-1) + a_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0 &= 1\\ a_1 &= \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}
2 &= 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 1.5 + 1\\
3 &= 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 4 + 1\\
0.1\bar{6} &= 2048a_4 + 192a_3 + 16a_2 + 1
\end{aligned}$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$
\begin{aligned}
a_4 &= -0.00045\\
a_3 &= 0.00983\\
a_2 &= -0.08097\\
a_1 &= 0.5\\
a_0 &= 1
\end{aligned}
$$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$\left.\begin{aligned}
1 &= a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0\\
2 &= a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0\\
3 &= a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0\\
\tfrac{1}{2} &= 4a_4\cdot(1-1)^3 + 3a_3\cdot(1-1)^2 + 2a_2\cdot(1-1) + a_1\\
\tfrac{1}{6} &= 4a_4\cdot(9-1)^3 + 3a_3\cdot(9-1)^2 + 2a_2\cdot(9-1) + a_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0 &= 1\\ a_1 &= \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}
2 &= 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 1.5 + 1\\
3 &= 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 4 + 1\\
0.1\overline{6} &= 2048a_4 + 192a_3 + 16a_2 + 1
\end{aligned}$$

$$H_4(x) = -0.00045\cdot(x-1)^4 + 0.00983\cdot(x-1)^3 - 0.08097\cdot(x-1)^2 + 0.5\cdot(x-1) + 1$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} a_4 &= -0.00045 \\ a_3 &= \ \ 0.00983 \\ a_2 &= -0.08097 \\ a_1 &= 0.5 \\ a_0 &= 1 \end{aligned}$$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0 \\ 2 &= a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0 \\ 3 &= a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0 \\ \tfrac{1}{2} &= 4a_4\cdot(1-1)^3 + 3a_3\cdot(1-1)^2 + 2a_2\cdot(1-1) + a_1 \\ \tfrac{1}{6} &= 4a_4\cdot(9-1)^3 + 3a_3\cdot(9-1)^2 + 2a_2\cdot(9-1) + a_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2 &= 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 1.5 + 1 \\ 3 &= 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 4 + 1 \\ 0.1\bar{6} &= 2048a_4 + 192a_3 + 16a_2 + 1 \end{aligned}$$

$$H_4(5) = -0.00045\cdot(5-1)^4 + 0.00983\cdot(5-1)^3 - 0.08097\cdot(5-1)^2 + 0.5\cdot(5-1) + 1$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_4 &= -0.00045 \\ a_3 &= 0.00983 \\ a_2 &= -0.08097 \\ a_1 &= 0.5 \\ a_0 &= 1 \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned}
1 &= a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0 \\
2 &= a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0 \\
3 &= a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0 \\
\tfrac{1}{2} &= 4a_4\cdot(1-1)^3 + 3a_3\cdot(1-1)^2 + 2a_2\cdot(1-1) + a_1 \\
\tfrac{1}{6} &= 4a_4\cdot(9-1)^3 + 3a_3\cdot(9-1)^2 + 2a_2\cdot(9-1) + a_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2 &= 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 1.5 + 1 \\ 3 &= 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 4 + 1 \\ 0.1\bar{6} &= 2048a_4 + 192a_3 + 16a_2 + 1 \end{aligned}$$

$$H_4(5) = -0.00045\cdot(5-1)^4 + 0.00983\cdot(5-1)^3 - 0.08097\cdot(5-1)^2 + 0.5\cdot(5-1) + 1 \approx \boxed{2.23}$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

5 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a předepíšeme derivace v krajních bodech. Polynom bude čtvrtého stupně (= celkový počet podmínek mínus jedna) a určíme ho metodou neurčitých koeficientů:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{6}$

$$a_4 = -0.00045$$
$$a_3 = 0.00983$$
$$a_2 = -0.08097$$
$$a_1 = 0.5$$
$$a_0 = 1$$

$$H_4(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

$$\frac{d}{dx}H_4(x) = 4a_4(x-1)^3 + 3a_3(x-1)^2 + 2a_2(x-1) + a_1$$

$$\left.\begin{aligned}
1 &= a_4\cdot(1-1)^4 + a_3\cdot(1-1)^3 + a_2\cdot(1-1)^2 + a_1\cdot(1-1) + a_0\\
2 &= a_4\cdot(4-1)^4 + a_3\cdot(4-1)^3 + a_2\cdot(4-1)^2 + a_1\cdot(4-1) + a_0\\
3 &= a_4\cdot(9-1)^4 + a_3\cdot(9-1)^3 + a_2\cdot(9-1)^2 + a_1\cdot(9-1) + a_0\\
\tfrac{1}{2} &= 4a_4\cdot(1-1)^3 + 3a_3\cdot(1-1)^2 + 2a_2\cdot(1-1) + a_1\\
\tfrac{1}{6} &= 4a_4\cdot(9-1)^3 + 3a_3\cdot(9-1)^2 + 2a_2\cdot(9-1) + a_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0 &= 1\\ a_1 &= \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2 &= 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 1.5 + 1\\ 3 &= 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 4 + 1\\ 0.1\overline{6} &= 2048a_4 + 192a_3 + 16a_2 + 1\end{aligned}$$

$$H_4(5) = -0.00045\cdot(5-1)^4 + 0.00983\cdot(5-1)^3 - 0.08097\cdot(5-1)^2 + 0.5\cdot(5-1) + 1 \approx \boxed{2.23} \qquad \sqrt{5} \approx 2.236\ldots$$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

6 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a **předepíšeme derivace ve všech třech bodech**.

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

6 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a **předepíšeme derivace ve všech třech bodech**.

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

$$H_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(vypočtěte v Matlabu)

$a_5 = 0{,}0000\ 856;\ a_4 = -0{,}0020\ 787;\ a_3 = 0{,}019\ 419;\ a_2 = -0.097\ 417;\ a_1 = 0{,}5;\ \ a_5 = 1\ ;$ $\sqrt{5} \approx 2.236...$

$H_5(x) = 0{,}0000\ 856 \cdot x^5 - 0{,}0020\ 787 \cdot x^4 + 0{,}019\ 419 \cdot x^3 - 0.097\ 417 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 1\ ;$ $H_5(5) = 2{,}239...$

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

6 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a **předepíšeme derivace ve všech třech bodech**.

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

$$H_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(vypočtěte v Matlabu)

$a_5 = 0{,}0000\ 856$; $a_4 = -0{,}0020\ 787$; $a_3 = 0{,}019\ 419$; $a_2 = -0.097\ 417$; $a_1 = 0{,}5$; $a_5 = 1$;

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

6 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a **předepíšeme derivace ve všech třech bodech**.

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

$$H_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(vypočtěte v Matlabu)

$a_5 = 0{,}0000\ 856$; $a_4 = -0{,}0020\ 787$; $a_3 = 0{,}019\ 419$; $a_2 = -0.097\ 417$; $a_1 = 0{,}5$; $a_5 = 1$;

$H_5(x) = 0{,}0000\ 856 \cdot x^5 - 0{,}0020\ 787 \cdot x^4 + 0{,}019\ 419 \cdot x^3 - 0.097\ 417 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 1$;

Interpolace funkcí

e) Hermitův interpolační polynom

6 Příklad: Pomocí Hermitova interpolačního polynomu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Použijeme stejné uzlové body jako v př. 2 a **předepíšeme derivace ve všech třech bodech**.

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3
y'_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

$$H_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(vypočtěte v Matlabu)

$a_5 = 0{,}0000\,856$; $a_4 = -0{,}0020\,787$; $a_3 = 0{,}019\,419$; $a_2 = -0.097\,417$; $a_1 = 0{,}5$; $a_5 = 1$;

$H_5(x) = 0{,}0000\,856 \cdot x^5 - 0{,}0020\,787 \cdot x^4 + 0{,}019\,419 \cdot x^3 - 0.097\,417 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 1$;

$H_5(5) = 2{,}239...$ $\sqrt{5} \approx 2.236...$