PŘEDMLUVA

Tento učební text je určen studentům mezioborového studia „matematické inženýrství“ na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně. Svým rozsahem pokrývá přednášky a cvičení předmětu *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*. Skriptum má dvě části, které jsou na sobě v podstatě nezávislé. První část *Úvod do tenzorového počtu* tvoří kapitoly 1–5; druhá část *Diferenciální geometrie křivek a ploch* je tvořena kapitolami 6–19, přičemž kapitoly 6–10 jsou věnovány křivkám a kapitoly 11–19 plochám. Na konci každé části jsou zařazena cvičení včetně výsledků.

Tenzorový počet a zejména klasická diferenciální geometrie křivek a ploch jsou poměrně rozsáhlé matematické disciplíny, které rozhodně nejsou vyčerpávajícím způsobem popsány v těchto skriptech („vyčerpávajícím“ se rozumí z hlediska rozsahu). Do tohoto učebního textu jsem proto zařadil zejména ty partie, které mohou být studentům užitečné při aplikacích v dalších disciplínách. Až na několik málo výjimek je u každého tvrzení uveden i jeho důkaz, nebo alespoň hlavní myšlenka důkazu. Protože jsem byl při psaní tohoto textu předem determinován jeho maximálním možným rozsahem, tak jsou důkazy vesměs psány poněkud menším osmibodovým písmem (má to i své výhody, neboť čtenáře to donutí věnovat důkazům větší pozornost). Ze stejného důvodu nemohl být do skript zařazen větší počet obrázků. Vzhledem k rozšířenosti a všeobecné dostupnosti matematického software si však studenti mohou řadu obrázků křivek a ploch nakreslit sami.

Děkuji Mgr. M. Kurešovi, Dr. a Doc. RNDr. A. Vondrovi, CSc. ze Slezské university v Opavě za pečlivé přečtení rukopisu a za cenné připomínky. Kromě literatury uvedené v přehledu literatury jsem rovněž čerpal z přednášek Prof. RNDr. I. Koláře, DrSc. z Masarykovy university, kterému děkuji za to, že mi poskytl jejich texty. V neposlední řadě děkuji sl. M. Kleiberové za pečlivé nakreslení obrázků.

Brno, říjen 1999 — Miroslav Doupovec

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento studijní materiál vznikl za podpory projektu OP VK reg.č. CZ.1.07/2.4.00/17.0100 A-Math-Net - Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice.

OBSAH

I. ÚVOD DO TENZOROVÉHO POČTU

Základní rozdíl mezi skalárem a vektorem v $\mathbb{R}^n$ je, že skaláry jsou určeny jedním číslem (svou hodnotou), zatímco vektory v $\mathbb{R}^n$ jsou určeny n hodnotami (souřadnicemi vektoru v nějaké bázi). Ve fyzice, mechanice, geometrii a řadě jiných disciplín se však vyskytují rovněž veličiny, k jejichž určení v soustavě souřadnic je třeba více hodnot. Takovéto veličiny nazýváme tenzory a popisujeme je pomocí souřadnic $T^{ij\dots k}_{\ell m\dots n}$, kde $i, j, \dots, k$ a $\ell, m \dots, n$ jsou indexy (psané nahoru i dolů). Souřadnice tenzoru přitom samozřejmě závisí na volbě souřadné soustavy, takže při přechodu od jedné souřadné soustavy k jiné se čísla $T^{ij\dots k}_{\ell m\dots n}$ obecně mění. Speciálním případem je změna souřadnic u^i vektoru $(u^1, \dots, u^n)$ při změně báze.

Cílem geometrie, fyziky, mechaniky a řady jiných oborů je formulovat zákony příslušné disciplíny ve tvaru, který je nezávislý na takových vnějších okolnostech, jako je volba souřadné soustavy. Takovéto formulace se nazývají **invariantní** vzhledem k transformaci souřadnic. K analytickému vyjádření geometrických, fyzikálních, mechanických a jiných zákonů v invariantním tvaru je velmi vhodný právě tenzorový počet. Tenzory se v těchto disciplínách někdy zavádějí ne příliš jasně jako „čísla s indexy“, která se při změně souřadnic transformují pomocí předepsaných transformačních vztahů. S takto definovanými pojmy je pak obtížné zavádět nějaké operace. V dalším proto zavedeme tenzory korektně – jako jistá multilineární zobrazení. Ukážeme pak ekvivalentnost naší definice tenzoru se souřadnicovými definicemi známými např. z mechaniky. Uvidíme rovněž, že řadu vlastností tenzorů lze popsat geometricky. Není to ale nic překvapujícího, neboť princip invariantnosti (tj. nezávislosti na souřadnicích) je vlastně principem geometrickým. Základní charakteristikou každého geometrického objektu je totiž jeho nezávislost na souřadnicích. To nás vede k přesvědčení, že jednoduchost a elegance vztahů užívajících tenzorového zápisu nemá původ v ničem jiném, než v názornosti a kráse geometrie samotné.

1 LINEÁRNÍ A BILINEÁRNÍ FORMY

V této přípravné kapitole uvedeme některé pomocné pojmy a výsledky z lineární algebry. Abychom zjednodušili zápis vzorců, tak budeme v dalším používat následující **Einsteinovu sumační konvenci**: v součtu $\sum_{i=1}^n x^i y_i$ budeme vynechávat znak sumy, pokud se sčítací index i vyskytuje u jednoho výrazu nahoře a u druhého dole.

V tomto textu budeme uvažovat konečněrozměrné vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Je-li $\{e_1, \dots, e_n\}$ báze vektorového prostoru V, tak lze každý vektor $u \in V$ jednoznačně vyjádřit ve tvaru $u = u^i e_i = u^1 e_1 + \dots + u^n e_n$, $u^i \in \mathbb{R}$. Čísla u^i se nazývají *souřadnice vektoru u* vzhledem k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$, píšeme $u = (u^1, \dots, u^n)$. Přitom indexy u souřadnic vektorů budeme psát nahoru (nejedná se tedy o mocniny).

Poznámka 1.1 (Matice přechodu)**.** Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $\{b_1, \dots, b_n\}$ jsou dvě báze téhož vektorového prostoru V. Pak každý vektor druhé báze lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků první báze:

$$b_1 = A^k_1 e_k, b_2 = A^k_2 e_k, \dots, b_n = A^k_n e_k \quad \text{(všude se sčítá přes } k). \tag{1}$$

Koeficienty A^i_j tvoří matici, která se nazývá *matice přechodu* od báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ k bázi $\{b_1, \dots, b_n\}$. Z lineární nezávislosti vektorů obou bází vyplývá, že tato matice je regulární.

Naopak, pro libovolnou regulární matici $A = (A^i_j)$ a libovolnou bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ vektorového prostoru V, soustava vektorů $\{b_1, \dots, b_n\}$ definovaná vztahy (1) tvoří opět bázi V. Snadno dále odvodíme, že je-li A matice přechodu od báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ k bázi $\{b_1, \dots, b_n\}$, tak matice přechodu od báze $\{b_1, \dots, b_n\}$ k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ je rovna matici A^{-1}. Je-li dále determinant matice přechodu A kladný, tak říkáme, že báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $\{b_1, \dots, b_n\}$ jsou *shodně orientovány* nebo že určují tutéž *orientaci* vektorového prostoru V. Pokud $|A| < 0$, tak hovoříme o *opačné orientaci.* Tedy všechny báze V se rozdělí do dvou tříd tak, že matice přechodu mezi dvěma bázemi téže třídy má kladný determinant a mezi dvěma bázemi různých tříd záporný. Orientovat V pak znamená zvolit jednu z těchto dvou tříd, jejíž *báze* se nazývají *kladné*, báze druhé třídy *záporné.*

Příklad 1.1. Určíme matici přechodu od báze $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (1,0,0)$ k bázi $v_1 = (2,3,3)$, $v_2 = (1,3,2)$, $v_3 = (3,2,2)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Řešení: Rozepsáním (1) dostaneme soustavu lineárních rovnic pro koeficienty matice A. Vyřešením této soustavy obdržíme

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Následující věta popisuje změnu souřadnic vektoru při změně báze.

Věta 1.1. *Nechť $(u^1, \dots, u^n)$ jsou souřadnice vektoru $u \in V$ v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $(\overline{u}^1, \dots, \overline{u}^n)$ jsou souřadnice téhož vektoru v jiné bázi $\{b_1, \dots, b_n\}$. Nechť dále $A = (A^i_j)$ je matice přechodu od první báze k bázi druhé a nechť $\widetilde{A} = A^{-1}$ je matice k ní inverzní. Pak platí následující transformační vztahy*

$$u^i = A^i_j \overline{u}^j, \quad \overline{u}^i = \widetilde{A}^i_j u^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důkaz. Ve vztahu $u = u^r e_r = \overline{u}^i b_i$ dosadíme za bázové vektory b_i jejich vyjádření z (1). Dostaneme

$$\sum_r u^r e_r = \sum_i \overline{u}^i \left(\sum_r A^r_i e_r \right) = (\overline{u}^i A^r_i) e_r.$$

Z lineární nezávislosti vektorů $\{e_1, \dots, e_n\}$ pak plyne první dokazovaný vztah $u^r = A^r_i \overline{u}^i$. Vynásobením zleva inverzní maticí A^{-1} získáme druhý vztah. □

Definice. Nechť V a W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení $f : V \to W$ je *lineární*, jestliže pro libovolnou dvojici vektorů $u, v \in V$ a pro libovolné číslo $r \in \mathbb{R}$ platí $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $f(r \cdot u) = r \cdot f(u)$. Lineární zobrazení $f : V \to W$ které je navíc bijektivní, se nazývá *izomorfismus* vektorových prostorů V a W. Existenci takového izomorfismu zapisujeme rovností $V \cong W$.

Věta 1.2. *Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Pak $V \cong \mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Pro libovolný vektor $v \in V$ označme $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ jeho souřadnice v nějaké bázi V. Definujme zobrazení $f : V \to \mathbb{R}^n$ vztahem $f(v) = (v^1, \dots, v^n)$. Pak f je hledaný izomorfismus. □

Tedy libovolné dva vektorové prostory stejné konečné dimenze jsou izomorfní.

Definice. Lineární zobrazení $f : V \to \mathbb{R}$ se nazývá *lineární forma* na V.

Je nabíledni, že součet dvou lineárních forem je lineární forma a násobek lineární formy skalárem je opět lineární forma. Lineární formy na V zřejmě tvoří vektorový prostor, který nazýváme *vektorovým prostorem duálním* k V a značíme V^*.

Příklad 1.2. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak diferenciál funkce f, který přiřadí přírůstku $h \in \mathbb{R}$ číslo $df(x_0)(h) := f'(x_0) \cdot h$ je lineární formou na $\mathbb{R}$.

Příklad 1.3. Nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze V. Každý vektor $v \in V$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $v = v^i e_i$, kde $v^i \in \mathbb{R}$ jsou souřadnice v, tj. $v = (v^1, \ldots, v^n)$. Pak zobrazení $e^i : V \to \mathbb{R}$, $e^i(v) = v^i$ je lineární formou na V. Lineární forma e^i tedy přiřadí každému vektoru $v \in V$ jeho i-tou souřadnici v bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Speciálně, j-tý bázový vektor $e_j \in V$ má v bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ souřadnice $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, takže $e^i(e_j) = \delta^i_j$, kde δ^i_j je *Kroneckerův delta-symbol* definovaný vztahy

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{pro}\, i \neq j, \\ 1 & \text{pro}\, i = j. \end{cases}$$

V dalším budeme používat Kroneckerův delta-symbol s indexy psanými nahoře i dole, tj. $\delta^i_j = \delta^{ij} = \delta_{ij}$.

Tedy každá báze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ V indukuje n lineárních forem $e^1, \ldots, e^n \in V^*$.

Věta 1.3. *Je-li* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *báze* V*, tak lineární formy* $e^1, \ldots, e^n$ *z předchozího příkladu tvoří bázi duálního prostoru* V^**.*

Důkaz. Nechť $f \in V^*$, $f : V \to \mathbb{R}$. Pro libovolné i položme $f_i = f(e_i)$. Pak pro libovolné $v = v^i e_i \in V$ platí $f(v) = f(v^i e_i) = v^i f(e_i) = v^i f_i = f_i v^i = f_i \cdot e^i(v)$, neboli $f = f_i e^i$, kde $f_i = f(e_i)$. Zbývá ukázat jednoznačnost: Je-li $f = \overline{f}_i e^i$, pak $(f_i - \overline{f}_i)e^i = 0$, takže $f_i = \overline{f}_i$. □

Platí tedy $\dim V = \dim V^*$, takže $V \cong V^*$.

Definice. Je-li $\{e_1 \ldots, e_n\}$ báze V, tak báze $\{e^1, \ldots, e^n\}$ duálního prostoru V^* definovaná vztahem $e^i(e_j) = \delta^i_j$ se nazývá *duální báze.*

Je-li $f : V \to \mathbb{R}$ lineární forma na V, $x = x^i e_i \in V$, pak $f(x) = f(x^i e_i) = x^i f_i$, kde $f_i := f(e_i)$. Tedy $f(x)$ je lineárním výrazem souřadnic x^i vektoru x. Čísla f_i nazýváme *souřadnicemi lineární formy* f vzhledem k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Naopak, libovolná uspořádaná n-tice $(f_1, \ldots, f_n)$ jednoznačně určuje lineární formu f tak, že f_i jsou její souřadnice v bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Věta 1.4. *Nechť* $(f_1, \ldots, f_n)$ *jsou souřadnice lineární formy* $f : V \to \mathbb{R}$ *vzhledem k bázi* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *prostoru* V *a nechť* $(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n)$ *jsou souřadnice téže lineární formy vzhledem k jiné bázi* $\{b_1, \ldots, b_n\}$*. Nechť dále* $A = (A^i_j)$ *je matice přechodu od první báze k bázi druhé. Pak platí*

$$\overline{f}_i = A^j_i f_j.$$

Důkaz. $\overline{f}_i = f(b_i) = f(A^j_i e_j) = A^j_i f(e_j) = A^j_i f_j$. □

Definice. Zobrazení $g : V \times V \to \mathbb{R}$ se nazývá *bilineární forma* na V, je-li g lineární v obou svých vektorových argumentech, tj.

$$g(u+v,w) = g(u,w) + g(v,w), \quad g(c \cdot u, v) = c \cdot g(u,v),$$
$$g(u,v+w) = g(u,v) + g(u,w), \quad g(u, c \cdot v) = c \cdot g(u,v)$$

pro libovolné $u, v, w \in V$, $c \in \mathbb{R}$. Bilineární forma g se nazývá *symetrická*, je-li $g(u,v) = g(v,u) \quad \forall u, v \in V$. Nazývá se *pozitivně definitní*, je-li $g(v,v) > 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0$. Symetrická a pozitivně definitní bilineární forma na V se nazývá *skalární součin* na V.

Skalární součin vektorů $u, v \in V$ se někdy značí pouze symbolem $u \cdot v$ bez explicitního uvedení příslušné bilineární formy.

Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze V a g je bilineární forma na V. Pro $x = x^i e_i, y = y^i e_i \in V$ pak platí $g(x,y) = g(x^i e_i, y^j e_j) = x^i y^j g(e_i, e_j)$.

Definice. Čísla $g_{ij} := g(e_i, e_j)$ se nazývají *souřadnice bilineární formy g* v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$. Matice $G = (g_{ij})$ se nazývá *maticí bilineární formy g*.

Příklad 1.4. Nechť $V = \mathbb{R}^2$ s bází $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Pak zobrazení $g : V \times V \to \mathbb{R}$ definované předpisem $g(x,y) = x^1 y^1 - 2x^2 y^2 + 3x^1 y^2$ je bilineární forma na V, zatímco zobrazení h zadané rovností $h(x,y) = x^2 - y^1 + x^1 y^2$ není bilineární formou na V. Dále, matice formy g v bázi $\{e_1, e_2\}$ má koeficienty $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -2$.

Analogicky jako v případě Věty 1.4 se dokáže

Věta 1.5. *Je-li $G = (g_{ij})$ matice bilineární formy g v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $\overline{G} = (\overline{g}_{ij})$ matice g v bázi $\{b_1, \dots, b_n\}$, tak platí*

$$\overline{g}_{ij} = A_i^r A_j^s g_{rs} \tag{2}$$

kde $A = (A_j^i)$ je matice přechodu od první báze k bázi druhé.

Rovnost (2) je ekvivalentní s maticovým zápisem $\overline{G} = A^T \cdot G \cdot A$, kde A^T je transponovaná matice k A. Protože matice přechodu A je regulární, tak odtud bezprostředně vyplývá, že hodnost matice bilineární formy nezávisí na volbě báze V. Dále zřejmě platí, že bilineární forma g je symetrická právě když její matice vzhledem k libovolné bázi V je symetrická.

Nechť g je skalární součin na V. Pak z pozitivní definitnosti g plyne, že jeho matice (g_{ij}) je regulární. Matice k ní inverzní je opět symetrická, její prvky budeme značit (g^{ij}). Je evidentní, že pro libovolný prvek $u \in V$ je funkce $\widetilde{g}_u : V \to \mathbb{R}$, definovaná předpisem $\widetilde{g}_u(v) = g(u,v)$ lineární formou na V. Tedy každému vektoru $u \in V$ lze pomocí skalárního součinu g na V přiřadit lineární formu $f := \widetilde{g}_u \in V^*$. Je-li $u = (u^1, \dots, u^n)$ a $f = (f_1, \dots, f_n)$, tak $f_i = g_{ij} u^j$. Podle následující věty je toto přiřazení dokonce izomorfismem vektorových prostorů.

Věta 1.6. *Skalární součin g na konečněrozměrném vektorovém prostoru V určuje izomorfismus $F : V \to V^*$, $F(u) = \widetilde{g}_u$.*

Důkaz. Je zřejmé, že zobrazení F je lineární. Nechť dále $\widetilde{g}_u = \widetilde{g}_w$. Pak pro všechna $x \in V$ platí $g(u,x) = g(w,x)$ neboli $g(u-w,x) = 0$. Pro $x = u - w$ dostaneme $g(u-w, u-w) = 0$, neboli $u = w$. Tedy zobrazení F je prosté. Ukážeme ještě, že libovolná lineární forma $f : V \to \mathbb{R}$ je tvaru $f = \widetilde{g}_u$ pro vhodné $u \in V$. Položme $L = \{w \in V; f(w) = 0\}$. Je-li $L = V$, tak stačí položit $u = 0$ a důkaz je ukončen. Předpokládejme tedy, že $L \neq V$ a označme $\overline{L} = \{v \in V; g(w,v) = 0 \forall w \in L\}$. Pak existuje $0 \neq v \in \overline{L}$. Z linearity f dále plyne, že $f(x - \frac{f(x)}{f(v)}v) = f(x) - f(x) = 0$, neboli $w = x - \frac{f(x)}{f(v)}v \in L$ pro libovolné $x \in V$. Položme nakonec $u = \frac{f(v)}{g(v,v)}v$. Pak platí $g(x,u) = g(w + \frac{f(x)}{f(v)}v, \frac{f(v)}{g(v,v)}v) = \frac{f(v)}{g(v,v)}g(w,v) + \frac{f(x)}{f(v)}\frac{f(v)}{g(v,v)}g(v,v) = \frac{f(v)}{g(v,v)} \cdot 0 + f(x) = f(x)$.

□

2 TENZORY

Dosud jsme se zabývali lineárními a bilineárními formami, tj. zobrazeními tvaru $V \to \mathbb{R}$ resp. $V \times V \to \mathbb{R}$, jež byla v každém svém argumentu lineární. Podobně, zobrazení $F : V \times V^* \to \mathbb{R}$, které přiřadí vektoru $v \in V$ a lineární formě $f \in V^*$ hodnotu $f(v)$, je lineární v obou svých argumentech. Zobecněním všech těchto případů je pojem tenzoru.

Definice. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze a F zobrazení

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r \text{ krát}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s \text{ krát}} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

které je v každém svém argumentu lineární při pevných hodnotách ostatních argumentů. Pak F se nazývá *r-krát kovariantním a s-krát kontravariantním tenzorem* na V nebo též *tenzorem typu* (s,r) *na* V. Množinu všech takových tenzorů značíme symbolem $T_s^r V$.

Zřejmě $T_0^1 V = V^*$, $T_1^0 V = V$. Klademe dále $T_0^0 V = \mathbb{R}$. *Stupněm tenzoru* F typu (s,r) rozumíme číslo $s + r$. Tenzor typu (s,r), kde $s \geq 1$, $r \geq 1$ se nazývá *smíšený*.

Příklad 2.1.
(a) Vektory jsou 1 krát kontravariantní tenzory, tj. tenzory typu $(1,0)$.
(b) Lineární formy na V jsou 1 krát kovariantní tenzory, tj. tenzory typu $(0,1)$.
(c) Každá bilineární forma je tenzor typu $(0,2)$ na V. Skalární součin $g : V \times V \to \mathbb{R}$ se někdy nazývá *metrický tenzor*. Důvodem je skutečnost, že pomocí skalárního součinu vyjadřujeme délku vektorů, $||u|| = \sqrt{g(u,u)}$.
(d) Definujme zobrazení $F : V \times V^* \to \mathbb{R}$ takto: $F(v,f) = f(v)$. Pak F je tenzor typu $(1,1)$ na V.
(e) Smíšený součin vektorů $u \cdot (v \times w)$ v trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ je tenzor typu $(0,3)$ na $\mathbb{R}^3$. Ve výše uvedeném vzorci přitom tečka značí skalární součin a křížek vektorový součin vektorů v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 2.2 (Vnější součin vektorů). Nechť $V = \mathbb{R}^n$ a nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je kladná ortonormální báze. Pro n vektorů $u_1, \ldots, u_n \in V$ definujme $[u_1, \ldots, u_n]$ jako hodnotu determinantu, jehož řádky jsou souřadnice vektorů $u_1, \ldots, u_n$ v bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Protože determinant matice přechodu mezi kladnými ortonormálními bázemi je roven jedné, tak s využitím transformačních vztahů z Věty 1.1 snadno ukážeme, že $[u_1, \ldots, u_n]$ nezávisí na volbě kladné ortonormální báze V. Toto číslo nazýváme *vnějším součinem vektorů* $u_1, \ldots, u_n$. Z vlastností determinantu plyne, že vnější součin je tenzorem typu $(0,n)$ na V.

Nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze V, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ je duální báze V^* a F je tenzor typu $(s,r) \neq (0,0)$. Vezměme r vektorů $v_1, \ldots, v_r \in V$ a s lineárních forem $f^1, \ldots, f^s \in V^*$. Jejich vyjádření v příslušných bázích V a V^* je $v_1 = v_1^i e_i, \ldots, v_r = v_r^i e_i$ a $f^1 = f_j^1 e^j, \ldots, f^s = f_j^s e^j$. Pak

$$F(v_1,\dots,v_r,f^1,\dots,f^s) = F(v_1^{i_1}e_{i_1},\dots,v_r^{i_r}e_{i_r},f_{j_1}^1e^{j_1},\dots,f_{j_s}^se^{j_s}) = \\ = v_1^{i_1}\dots v_r^{i_r}f_{j_1}^1\dots f_{j_s}^sF(e_{i_1},\dots,e_{i_r},e^{j_1},\dots,e^{j_s}).$$

Definice. Čísla $a_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_s} = F(e_{i_1},\dots,e_{i_r},e^{j_1},\dots,e^{j_s})$, kde všechny indexy probíhají množinu $\{1,\dots,n\}$, se nazývají *souřadnice tenzoru* F vzhledem k bázi $\{e_1,\dots,e_n\}$.

Každý tenzor je svými souřadnicemi jednoznačně určen, protože pomocí nich dokážeme spočítat hodnotu tenzoru pro libovolnou skupinu r vektorů a s lineárních forem. Hovoříme pak stručně o tenzoru $a_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_s}$. Přitom horním indexům říkáme *kontravariantní indexy* a dolním indexům *kovariantní indexy*.

Příklad 2.3. Nechť $\dim V = 3$. Pak tenzor typu $(2,1)$ na V má 27 souřadnic a_i^{11}, a_i^{12}, a_i^{13}, a_i^{21}, a_i^{22}, a_i^{23}, a_i^{31}, a_i^{32}, a_i^{33}, kde $i = 1,2,3$.

Příklad 2.4. Určíme souřadnice tenzorů z Příkladu 2.1 (a), (d), (e).
ad (a): Každý vektor $v \in V$ je tenzorem typu $(1,0)$. Souřadnice tohoto tenzoru jsou právě souřadnice vektoru v.
ad (d) Souřadnice tohoto tenzoru jsou δ_j^i. Tenzor se souřadnicemi δ_j^i (resp. δ^{ij}, resp. δ_{ij}) se někdy nazývá *Kroneckerův tenzor.*
ad (e): Souřadnice tohoto tenzoru jsou ε_{ijk}, kde $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$ a všechny ostatní souřadnice jsou nulové. Označme dále

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{je-li}\,(i_1,\dots,i_n)\,\text{sudá permutace z čísel}\,(1,\dots,n), \\ -1 & \text{je-li}\,(i_1,\dots,i_n)\,\text{lichá permutace z čísel}\,(1,\dots,n), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ se někdy nazývá *Levi-Civitův tenzor.*

Věta 2.1. *Nechť F je tenzor typu (s,r), jehož souřadnice v bázi $\{e_1,\dots,e_n\}$ prostoru V jsou $a_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_s}$. Nechť $\{b_1,\dots,b_n\}$ je jiná báze V, A je matice přechodu od první báze k bázi druhé a nechť $\widetilde{A} = A^{-1}$. Pak nové souřadnice $\overline{a}_{p_1\dots p_r}^{q_1\dots q_s}$ tenzoru F v bázi $\{b_1,\dots,b_n\}$ se vyjádří podle vzorce*

$$\overline{a}_{p_1\dots p_r}^{q_1\dots q_s} = A_{p_1}^{i_1}\dots A_{p_r}^{i_r}\widetilde{A}_{j_1}^{q_1}\dots\widetilde{A}_{j_s}^{q_s}a_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_s}. \tag{2}$$

Důkaz. Pomocí matice přechodu vyjádříme vektory nové báze pomocí báze staré. Pak $\overline{a}_{p_1\dots p_r}^{q_1\dots q_s} = F(A_{p_1}^{i_1}e_{i_1},\dots,A_{p_r}^{i_r}e_{i_r},\widetilde{A}_{j_1}^{q_1}e^{j^1},\dots,\widetilde{A}_{j_s}^{q_s}e^{j_s})$.

$\square$

Poznamenejme, že speciálním případem předchozí věty jsou věty o transformaci souřadnic vektoru, lineární formy a bilineární formy. Tvrzení následující věty se někdy používá k zavedení pojmu tenzoru.

Věta 2.2. *Množina čísel $a_{i_1\dots i_r}^{j_1\dots j_s}$ závislá na volbě báze vektorového prostoru V představuje souřadnice nějakého tenzoru F typu (s,r) právě když se při změně báze V transformuje pomocí vzorce (2).*

Důkaz. Díky platnosti Věty 2.1 stačí dokázat pouze jeden směr ekvivalence. Nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze V, které odpovídá množina čísel $a^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$, přičemž tato čísla se při přechodu k jiné bázi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ V transformují pomocí vzorce (2). Definujme zobrazení $F : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}$ takto: Pro r vektorů $v_1 = v^{i_1}_i e_{i_1}, \ldots, v_r = v^{i_r}_r e_{i_r}$ a s lineárních forem $f^1 = f^1_{j_1} e^{j_1}, \ldots, f^s = f^s_{j_s} e^{j_s}$ položme $F(v_1, \ldots, v_r, f^1, \ldots, f^s) = v^{i_1}_1 \ldots v^{i_r}_r f^1_{j_1} \ldots f^s_{j_s} a^{j^1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$. Pak zobrazení F je zřejmě lineární v každém svém argumentu při pevných hodnotách ostatních argumentů. Musíme ještě ukázat, že jeho definice je korektní, tj. nezávislá na volbě báze prostoru V. Vezmeme-li tedy jinou bázi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ V a jí odpovídající souřadnicové vyjádření $v_1 = \overline{v}^{i_1}_1 b_{i_1}, \ldots, v_r = \overline{v}^{i_r}_r b_{i_r}$, $f^1 = \overline{f}^1_{j_1} b^{j_1}, \ldots, f^s = \overline{f}^s_{j_s} e^{j_s}$, tak musíme ukázat, že platí $v^{i_1}_1 \ldots v^{i_r}_r f^1_{j_1} \ldots f^s_{j_s} a^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = \overline{v}^{i_1}_1 \ldots \overline{v}^{i_r}_r \overline{f}^1_{j_1} \ldots \overline{f}^s_{j_s} \overline{a}^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$.Tato rovnost však bezprostředně plyne z (2), pokud dosadíme za pruhované souřadnice vektorů a lineárních forem odpovídající vztahy z vět 1.1 a 1.4. Přitom využijeme skutečnosti, že součin matice a matice k ní inverzní je matice jednotková, tj. $A^i_k \widetilde{A}^k_j = \delta^i_j$. $\square$

3 OPERACE S TENZORY

Definice. Nechť F a G jsou dva tenzory téhož typu (s, r), $c \in \mathbb{R}$. *Součtem tenzorů* F a G rozumíme tenzor $H = F + G$ typu (s, r) definovaný takto:

$$H(v_1, \ldots, v_r, f^1, \ldots, f^s) = F(v_1, \ldots, v_r, f^1, \ldots, f^s) + G(v_1, \ldots, v_r, f^1, \ldots, f^s).$$

Součinem čísla c a tenzoru F rozumíme tenzor cF typu (s, r) definovaný vztahem

$$(cF)(v_1, \ldots, v_r, f^1, \ldots, f^s) = c \cdot F(v_1, \ldots, v_r, f^1, \ldots, f^s)$$

.

Je zřejmé, že $F + G$ a cF jsou opět tenzory typu (s, r) a že $T^r_s V$ je vektorový prostor vzhledem ke sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem. Dosazením bázových vektorů dále bezprostředně ukážeme, že v souřadnicích vypadá sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem takto:

$$h^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = f^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} + g^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}, \quad (cf)^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = c \cdot f^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}.$$

Definice. *Tenzorovým součinem tenzorů* F typu (s_1, r_1) a G typu (s_2, r_2) rozumíme tenzor $F \otimes G$ typu $(s_1 + s_2, r_1 + r_2)$ definovaný takto:

$$\begin{aligned}(F \otimes G)(v_1, \ldots, v_{r_1+r_2}, f^1, \ldots, f^{s_1+s_2}) = \\ = F(v_1, \ldots, v_{r_1}, f^1, \ldots, f^{s_1}) \cdot G(v_{r_1+1}, \ldots, v_{r_1+r_2}, f^{s_1+1}, \ldots, f^{s_1+s_2}).\end{aligned}$$

Příklad 3.1. Je-li F typu $(2, 1)$ a G typu $(1, 3)$, tak tenzorový součin $H = F \otimes G$ je tenzor typu $(3, 4)$ definovaný vztahem

$$H(v_1, v_2, v_3, v_4, f^1, f^2, f^3) = F(v_1, f^1, f^2) \cdot G(v_2, v_3, v_4, f^3).$$

V souřadnicích máme $h^{jkq}_{i\ell mp} = f^{jk}_i \cdot g^q_{\ell mp}$.

Je zřejmé, že tenzorové násobení není obecně komutativní.

Definice. Nechť F je smíšený tenzor typu (s, r) a vyberme jeden kovariantní (=dolní) index $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ a jeden kontravariantní (= horní) index $j_0 \in \{1, \ldots, s\}$. *Kontrakcí (zúžením)* tenzoru F podle indexů i_0 a j_0 rozumíme tenzor C typu $(s-1, r-1)$ definovaný takto:

$$\begin{aligned} &C(v_1, \ldots, v_{r-1}, f^1, \ldots, f^{s-1}) = \\ &\qquad = F(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, e_k, v_{i_0+1}, \ldots, v_{r-1}, f^1, \ldots, f^{j_0-1}, e^k, f^{j_0+1}, \ldots, f^{s-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

(vpravo se sčítá přes k).

Čtenář si jistě všiml, že v definici kontrakce využíváme bázové vektory e_k a e^k. Musíme proto dokázat korektnost předchozí definice, tj. její nezávislost na volbě báze. Vektory jiné báze $\{b_1, \ldots, b_n\}$ prostoru V ale můžeme vyjádřit prostřednictvím vztahů (1.1) ve tvaru $b_k = A^\ell_k e_\ell$. Zcela analogicky, pro vektory duální báze máme vztahy $b^k = \widetilde{A}^k_m e^m$. Po dozazení do pravé strany (1) se v důsledku linearity F vytkne výraz $A^\ell_k \widetilde{A}^k_m$, který představuje součin matice přechodu a matice k ní inverzní a je tedy roven δ^ℓ_m. Tedy definice kontrakce nezávisí na volbě báze.

Příklad 3.2.
(a) Nechť $F = (f^{ij}_{k\ell m})$ je tenzor typu $(2, 3)$. Určíme jeho kontrakci podle druhého horního a druhého dolního indexu. Výsledný tenzor C bude mít tedy typ $(1, 2)$. Podle (1) máme:

$$C(v_1, v_2, f^1) = \sum_r F(v_1, e_r, v_2, f^1, e^r).$$

V souřadnicích, $c^i_{km} = C(e_k, e_m, e^i) = \sum_r F(e_k, e_r, e_m, e^i, e^r) = \sum_r f^{ir}_{krm} = f^{ir}_{krm}$.
(b) Nechť F je tenzor typu $(2, 3)$. Označme jeho souřadnice $(f^{\ell m}_{ijk})$. Pak kontrakce F podle třetího dolního a prvního horního indexu je tenzor C typu $(1, 2)$, $c^k_{ij} = f^{rk}_{ijr}$.
(c) Kontrakce tenzoru (f^k_{ij}) podle prvního dolního a podle horního indexu je tenzor $c_i = f^r_{ri}$.
(d) Jediná možná kontrakce tenzoru (f^i_j) typu $(1, 1)$ je číslo $f^i_i = f^1_1 + \cdots + f^n_n \in T^0_0 V = \mathbb{R}$ (*stopa matice*).

Zvedání a spouštění indexů. Tato operace je definována pouze v případě, že na vektorovém prostoru V existuje skalární součin (neboli metrický tenzor) $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Podle Věty 1.6, g zadává izomorfismus $V \to V^*$, $u \mapsto \widetilde{g}_u$, kde lineární forma $\widetilde{g}_u : V \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $\widetilde{g}_u(v) = g(u, v)$. Jsou-li $g_{ij} := g(e_i, e_j)$ souřadnice metrického tenzoru g, tak souřadnice lineární formy $f := \widetilde{g}_u$ jsou $f_i = \widetilde{g}_u(e_i) = g(u, e_i) = g(u^r e_r, e_i) = u^r g(e_r, e_i) = g_{ri} u^r$. Nyní budeme demonstrovat operaci spouštění indexu na příkladu tenzoru $F : V \times V \times V^* \to \mathbb{R}$ typu $(1, 2)$ (v ostatních případech by byl postup zcela analogický). Definujme tenzor $H : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ typu $(0, 3)$ vztahem

$$H(u, v, w) = F(u, v, \widetilde{g}_w). \tag{2}$$

Protože přiřazení $w \mapsto \widetilde{g}_w$ je izomorfisus $V \to V^*$, tak H je opravdu tenzor. Říkáme, že H vznikl z F *spuštěním indexu*. Ukážeme dále, jak tato operace vypadá v souřadnicích. Nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze V, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ je báze duálního prostoru V^*, (f^k_{ij}) jsou souřadnice tenzoru F a (h_{ijk}) jsou souřadnice H. Pak $h_{ijk} = H(e_i, e_j, e_k) = F(e_i, e_j, \widetilde{g}_{e_k}) = F(e_i, e_j, g_{ks} e^s) = g_{ks} f^s_{ij}$. Máme tedy vzoreček $h_{ijk} = g_{ks} f^s_{ij}$. Naopak, je-li zadán tenzor H, tak můžeme vzít rovnici (2) za definici tenzoru F. Ze vztahů

$$h_{ijk} = f^s_{ij} g_{sk} \quad \text{plyne} \quad f^t_{pq} = g^{tr} h_{pqr},$$

kde (g^{ij}) je matice inverzní k matici (g_{ij}). Operace inverzní ke spouštění indexů se nazývá *zvedání indexů.*

Příklad 3.3. Spuštěním indexu k u tenzoru a^{ik}_{ℓ} dostaneme tenzor $a^{i}_{\ell s}$ definovaný předpisem $a^{i}_{\ell s} = a^{ik}_{\ell} g_{ks}$.

Poznámka 3.1. Operace zvedání a spouštění indexů můžeme rovněž považovat za tenzorové násobení metrickým tenzorem a následnou kontrakci tohoto součinu. Všimněme si dále, že tyto operace nemění stupeň tenzoru. Odtud bezprostředně vyplývá následující fyzikální interpretace zvedání a spouštění indexů: *Nechť je dán nějaký fyzikální objekt, který je v prostoru se skalárním součinem reprezentován tenzorem F typu (s,r). Pak tento objekt lze reprezentovat libovolným tenzorem H typu $(\overline{s},\overline{r})$ takovým, že $s+r=\overline{s}+\overline{r}$.*

Symetrické a antisymetrické tenzory Skalární součin vektorů nezávisí na pořadí vektorových argumentů, zatímco determinant matice změní znaménko při změně pořadí řádků. Výše uvedené tenzory jsou příklady důležité třídy symetrických resp. antisymetrických tenzorů. Budeme nyní předpokládat, že uvažované tenzory nejsou smíšené, jsou tedy typu $(0,r)$ nebo $(r,0)$. Pro jednoduchost se budeme věnovat kovariantním tenzorům (v druhém případě by byl postup zcela analogický).

Definice. Nechť $F \in T^r_0 V$ je kovariantní tenzor. Řekneme, že F je

1. *symetrický*, pokud pro libovolné indexy $1 \leq i < j \leq r$ a pro libovolné vektory $v_1, \ldots, v_r \in V$ platí

$$F(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_r) = F(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_r),$$

2. *antisymetrický*, pokud

$$F(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_r) = -F(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_r).$$

Tedy hodnota symetrického tenzoru $F : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ nezávisí na pořadí jeho vektorových argumentů. Na druhou stranu, hodnota antisymetrického tenzoru se nezmění, provedeme-li na pořadí vektorů $v_1, \ldots, v_r$ sudou permutaci a změní znaménko, provedeme-li lichou permutaci. Pro kontravariantní tenzory definujeme výše uvedené pojmy zcela analogicky. Je dále zcela zřejmé, že symetrické tenzory tvoří vektorový podprostor $\odot^r V \subseteq T^r_0 V$ a antisymetrické tenzory tvoří vektorový podprostor $\Lambda^r V \subseteq T^r_0 V$.

Příklad 3.4.
(a) Příkladem symetrického tenzoru $F \in \odot^2 V$ je skalární součin a příkladem antisymetrického tenzoru $F \in \Lambda^n \mathbb{R}^n$ je vnější součin. Dále, Levi-Civitův tenzor je rovněž antisymetrický.
(b) Nechť $F \in T^3_0 V$ je antisymetrický tenzor. Pak pro jeho souřadnice (f_{ijk}) platí následující vztahy: $f_{ijk} = -f_{ikj} = -f_{jik} = f_{jki} = f_{kij} = -f_{kji}$.

Definice. Nechť $F \in T^r_0 V$. *Symetrizací tenzoru* F rozumíme tenzor $\mathrm{Sym}(F) \in \odot^r V$ definovaný takto: Sečteme všechny hodnoty, kterých F nabývá při všech permutacích daných argumentů a součet vydělíme počtem permutací r prvků. *Antisymetrizací tenzoru* F rozumíme tenzor $\mathrm{Alt}(F) \in \Lambda^r V$ definovaný takto: Sečteme všechny hodnoty, kterých F nabývá při sudých permutacích daných argumentů, odečteme všechny hodnoty, kterých F nabývá při lichých permutacích daných argumentů a výsledek vydělíme počtem permutací r prvků.

Příklad 3.5. Nechť $F = (f_{ijk}) \in T^3_0 V$. Pak $\mathrm{Sym}(F) = \frac{1}{3!}(f_{ijk}+f_{ikj}+f_{jik}+f_{jki}+f_{kij}+f_{kji})$, $\mathrm{Alt}(F) = \frac{1}{3!}(f_{ijk} - f_{ikj} - f_{jik} + f_{jki} + f_{kij} - f_{kji})$.

Každý snadno odvodí následující tvrzení

Lemma 3.1.

1. *$F \in \odot^r V \Rightarrow Sym(F) = F, \quad F \in \Lambda^r V \Rightarrow Alt(F) = F$,*

2. *Každý kovariantní tenzor 2. stupně lze rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru, tj. pro $F \in T^2_0 V$ platí $F = Sym(F) + Alt(F)$.*

Poznámka 3.2. Je-li $F \in T^r_0 V$ tenzor se souřadnicemi $f_{i_1 \dots i_r}$, tak souřadnice symetrického tenzoru $\mathrm{Sym}(F)$ vzniklého z F symetrizací budeme značit $f_{(i_1 \dots i_r)}$ a souřadnice antisymetrického tenzoru $\mathrm{Alt}(F)$ budeme značit $f_{[i_1 \dots i_r]}$. Tedy například $f_{(ij)} = \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{ji})$, $f_{[ij]} = \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji})$. Rovnost $F = \mathrm{Sym}(F) + \mathrm{Alt}(F)$ z Lemmatu 3.1 můžeme tedy jednoduše zapsat v souřadnicovém tvaru $f_{ij} = f_{(ij)} + f_{[ij]}$.

Symetrický a vnější součin tenzorů Jsou-li oba tenzory F a G symetrické (resp. antisymetrické), tak tenzorový součin $F \otimes G$ obecně nemusí tuto vlastnost zachovávat. Proto zavádíme pojem symetrického a vnějšího součinu tenzorů.

Definice. Nechť $F \in \Lambda^k V$, $G \in \Lambda^\ell V$. *Antisymetrickým (vnějším) součinem tenzorů* F a G rozumíme antisymetrický tenzor $F \wedge G \in \Lambda^{k+\ell} V$ definovaný vztahem

$$F \wedge G = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \mathrm{Alt}(F \otimes G).$$

Symetrickým součinem tenzorů $F \in \odot^k V$ a $G \in \odot^\ell V$ rozumíme symetrický tenzor $F \odot G \in \odot^{k+\ell} V$ definovaný vztahem

$$F \odot G = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \mathrm{Sym}(F \otimes G).$$

Operace symetrického součinu je zřejmě komutativní, zatímco v případě vnějšího součinu se dá ukázat, že platí $F \wedge G = (-1)^{k\ell} G \wedge F$.

Příklad 3.6. Nechť $F, G \in \Lambda^1 V$. Určíme vnější součin $F \wedge G$.
(1) $F \otimes G \in T^2_0 V$, $(F \otimes G)(u,v) = F(u) \cdot G(v)$
(2) $\mathrm{Alt}(F \otimes G) \in \Lambda^2 V$, $\mathrm{Alt}(F \otimes G)(u,v) = \frac{1}{2!}(F(u)G(v) - F(v)G(u))$
(3) $F \wedge G(u,v) = \frac{2!}{1!1!} \cdot \frac{1}{2!}(F(u)G(v) - F(v)G(u)) = F(u)G(v) - F(v)G(u)$.

4 KVADRATICKÉ FORMY

Definice. Vektorový prostor V se skalárním součinem $g : V \times V \to \mathbb{R}$ se nazývá *unitární prostor.*

Např. $\mathbb{R}^n$ je unitární prostor, pokud pro libovolné vektory $u = (u^1, \dots, u^n)$, $v = (v^1, \dots, v^n)$ definujeme skalární součin předpisem $g(u,v) = u^1 v^1 + \dots + u^n v^n$.

Definice. Nechť V je unitární prostor se skalárním součinem g. Pak reálné číslo $||u|| = \sqrt{g(u,u)}$ se nazývá *délka (velikost) vektoru* u. Vektor u se nazývá *jednotkový*, jestliže $||u|| = 1$. Vektory $u, v \in V$ se nazývají *ortogonální*, jestliže $g(u,v) = 0$. Báze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostoru V se nazývá *ortogonální báze*, jestliže každé dva různé vektory z této báze jsou ortogonální. Tato báze se nazývá *ortonormální báze* V, je-li navíc každý vektor e_i jednotkový.

Je zřejmé, že báze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostoru V je ortonormální právě když souřadnice g_{ij} skalárního součinu $g : V \times V \to \mathbb{R}$ splňují $g_{ij} = \delta_{ij}$. Pro $u = u^i e_i, v = v^i e_i \in V$ pak dostaneme $g(u,v) = \sum_{i=1}^n u^i v^i$, $||u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u^i)^2}$.

Nechť $v_1, \ldots, v_k$ je posloupnost vektorů prostoru V. Položme $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k; c_i \in \mathbb{R}\}$. Tato množina je vektorovým podprostorem prostoru V a nazývá se *podprostor generovaný vektory* $v_1, \ldots, v_k$.

Věta 4.1. *Nechť $v_1, \ldots, v_k$ je posloupnost lineárně nezávislých vektorů unitárního prostoru V. Pak existuje taková ortonormální posloupnost vektorů $e_1, \ldots, e_k$ prostoru V, že platí $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$.*

Důkaz. Definujme nejdříve jednotkový vektor e_1 předpisem $w_1 = v_1$, $e_1 = \frac{w_1}{||w_1||}$. Položme dále $w_2 = v_2 - g(v_2, e_1)e_1$, takže $g(w_2, e_1) = 0$. Pokud definujeme $e_2 = \frac{w_2}{||w_2||}$, tak dvojice e_1, e_2 tvoří ortonormální posloupnost. Dále budeme postupovat indukcí: Za předpokladu, že již máme sestrojeny vektory $e_1, \ldots, e_k$, položíme $w_k = v_k - g(v_k, e_{k-1})e_{k-1} - g(v_k, e_{k-2})e_{k-2} - \ldots - g(v_k, e_1)e_1$, $e_k = \frac{w_k}{||w_k||}$. Vektory $e_1, \ldots, e_k$ zcela evidentně tvoří ortonormální posloupnost. Je dále zřejmé, že vektory $e_1, \ldots, e_k$ jsou vyjádřeny ve tvaru lineární kombinace vektorů $v_1, \ldots, v_k$ a naopak.

$\square$

Algoritmus konstrukce ortonormální posloupnosti z důkazu předchozí věty se nazývá *Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces*. Z analytické geometrie je známo, že každé uspořádané dvojici bodů $X, Y \in \mathbb{R}^3$ můžeme přiřadit právě jeden vektor $u = Y - X$, přičemž pro libovolný bod $X \in \mathbb{R}^3$ a pro libovolný reálný vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ je definován bod $v + X \in \mathbb{R}^3$. Prostor $\mathbb{R}^3$ je speciálním případem obecnějšího euklidovského prostoru.

Definice. *Euklidovský prostor* E je neprázdná množina, pro kterou existuje konečněrozměrný unitární prostor V nad $\mathbb{R}$, přičemž pro libovolný bod $X \in E$ a libovolný vektor $v \in V$ je definován bod $v + X \in E$ tak, že platí

1. $\overrightarrow{0} + X = X \quad \forall X \in E$, ($\overrightarrow{0} \in V$ značí nulový vektor),
2. $(v + w) + X = v + (w + X) \quad \forall v, w \in V, \quad \forall X \in E$,
3. Pro libovolné body $X, Y \in E$ existuje právě jeden vektor $v = \overrightarrow{XY} \in V$ tak, že platí $v + X = Y$.

Prvky množiny E nazýváme *body*, vektorový prostor V se nazývá *zaměření euklidovského prostoru* E, značíme $V = Z(E)$. *Dimenzí euklidovského prostoru* rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Zhruba řečeno, v euklidovském prostoru E máme definováno sčítání bodů z E a vektorů z unitárního prostoru $Z(E) = \{\overrightarrow{XY}; X, Y \in E\}$. Triviálním případem euklidovského prostoru je samotný unitární prostor V (zde $E = Z(E) = V$). Dalším příkladem je prostor $\mathbb{R}^n$, jehož zaměřením je množina n–rozměrných reálných vektorů. Libovolná rovina v $\mathbb{R}^3$ je rovněž euklidovský prostor.

Definice. *Kartézskou soustavou souřadnic (kartézským reperem)* rozumíme $(n+1)$–tici $\langle P; e_1, \dots, e_n\rangle$, kde $P \in E$ a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální báze $Z(E)$. Přitom bod P se nazývá *počátek kartézské soustavy souřadnic. Souřadnice bodu $X \in E$* pak definujeme jako souřadnice vektoru $\overrightarrow{PX}$ v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Poznámka 4.1. Podle Věty 1.2 je každý n-rozměrný vektorový prostor izomorfní s $\mathbb{R}^n$. Volbou počátku $P \in E$ v n-rozměrném euklidovském prostoru E můžeme každý bod $X \in E$ ztotožnit s vektorem $\overrightarrow{PX}$. Tedy *množinu bodů i vektorů n-rozměrného euklidovského prostoru E můžeme prostřednictvím souřadnic ztotožnit s $\mathbb{R}^n$*. Vzhledem k této identifikaci budeme značit n-rozměrný euklidovský prostor symbolem E_n.

Vzdáleností bodů $X, Y \in E_n$ rozumíme číslo $\rho(X, Y) = ||\overrightarrow{XY}||$. Snadno ověříme, že (E_n, ρ) splňuje axiomy metrického prostoru. Pro jednoduchost budeme značit vzdálenost dvou bodů $X, Y \in E_n$ symbolem $||Y - X||$. V kartézských souřadnicích $X = (x^1, \dots, x^n)$, $Y = (y^1, \dots, y^n)$ tedy platí $||Y - X|| = \sqrt{\sum (y^i - x^i)^2}$.

Definice. Zobrazení $g : V \to \mathbb{R}$ se nazývá *kvadratická forma* na vektorovém prostoru V, jestliže existuje symetrická bilineární forma f na V taková že platí $g(u) = f(u, u)$ pro libovolné $u \in V$.

Věta 4.2. *Nechť g je kvadratická forma na V určená symetrickou bilineární formou f. Pak platí $2f(u, v) = g(u + v) - g(u) - g(v)$ pro všechna $u, v \in V$.*

Důkaz. Podle definice kvadratické formy platí $g(u+v) = f(u+v, u+v) = f(u, u)+2f(u, v)+f(v, v) = g(u) + 2f(u, v) + g(v)$.

□

Máme tedy bijekci mezi kvadratickými formami a symetrickými bilineárními formami a symetrickými maticemi.

Definice. Symetrická bilineární forma f se nazývá *polární formou* kvadratické formy g. *Matici kvadratické formy g* definujeme jako matici její polární formy.

Je-li $x = x^i e_i \in V$, tak $g(x) = f(x, x) = x^i x^j f(e_i, e_j) = a_{ij} x^i x^j$. Tedy každá kvadratická forma g na V je kvadratickým výrazem tvaru $g(x) = a_{ij} x^i x^j$, kde (a_{ij}) je symetrická matice.

Příklad 4.1. Vzorec pro délku vektoru $x = (x_1, \dots, x_n)$ v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n používá kvadratickou formu $x_1^2 + \dots + x_n^2$. Její polární bilineární formou je skalární součin a její maticí je jednotková matice řádu n.

Je-li $g : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma na V, tak matice A této kvadratické formy je symetrická. Z lineární algebry je známo, že všechny vlastní hodnoty symetrické matice jsou reálné a vlastní vektory příslušné k navzájem různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé. V unitárním prostoru platí silnější tvrzení, a to, že vlastní vektory příslušné k různým vlastním hodnotám symetrické matice jsou ortogonální.

Věta 4.3 (O hlavních osách). *Nechť g je kvadratická forma na unitárním prostoru $V = \mathbb{R}^n$. Pak existuje ortonormální báze V, v níž má g reálnou diagonální matici. Je-li A symetrická matice kvadratické formy g a je-li B diagonální matice formy g v nové ortonormální bázi, tak platí: Diagonální prvky matice B jsou právě vlastní hodnoty matice A a příslušná ortonormální báze V je tvořena vlastními vektory A.*

Důkaz. Zvolme libovolnou pevnou ortonormální bázi prostoru V. Symetrická matice A má pak všechny vlastní hodnoty λ_i reálné a má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Určíme nyní ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru V tvořenou vlastními vektory matice A takto:
I. Je-li λ_i jednonásobný kořen charakteristické rovnice a u_i příslušný vlastní vektor, tak položme $e_i = \frac{u_i}{||u_i||}$. Je zřejmé, že e_i je opět vlastním vektorem matice A.
II. Pro k-násobný kořen λ charakteristické rovnice ($k \geq 2$) existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů $u_1, \dots, u_k$ příslušných k vlastní hodnotě λ. Těmto vektorům přiřadíme ortogonalizačním procesem k ortonormálních vektorů $e_1, \dots, e_k$. Protože tyto vektory jsou lineární kombinací vlastních vektorů, tak $e_1, \dots, e_k$ jsou opět vlastní vektory matice A příslušné k vlastní hodnotě λ.
Vektory ze skupiny I a II jsou zřejmě navzájem ortogonální. Sestrojili jsme tedy ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_k\}$ tvořenou vlastními vektory matice A. Je-li nyní $f : V \times V \to \mathbb{R}$ polární forma kvadratické formy g, tak $g(x) = f(x, x)$. Pro $x = (x^1, \dots, x^n)$ je $g(x) = a_{ij}x^i x^j$, což můžeme psát v maticovém tvaru $g(x) = f(x, x) = x \cdot (a_{ij}) \cdot x^T$, kde x^T je sloupcový vektor. Dále, v ortonormální bázi V má skalární součin vektorů $u = (u^1, \dots, u^n)$ a $v = (v^1, \dots, v^n)$ tvar $u \cdot v = \sum u^i v^i = u \cdot v^T$. S využitím tohoto zápisu máme $f(e_i, e_j) = e_i \cdot (a_{ij}) \cdot (e_j)^T = e_i \cdot \lambda_j \cdot (e_j)^T = \lambda_j e_i \cdot e_j = \lambda_j \cdot \delta_{ij}$.

□

Souřadnicový tvar kvadratické formy s diagonální maticí se nazývá *kanonický tvar* a vektory ortonormální báze z předchozí věty se nazývají *hlavní směry.*Tedy ke každé kvadratické formě $g : V \to \mathbb{R}$ na unitárním prostoru $V = \mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze prostoru V, v níž má forma g kanonický tvar

$$g(u) = \lambda_1(u^1)^2 + \cdots + \lambda_n(u^n)^2. \tag{1}$$

Koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou přitom vlastními hodnotami matice formy g, přičemž každá z nich vystupuje ve vyjádření (1) tolikrát, jaká je její násobnost.

Příklad 4.2. Převedeme kvadratickou formu $g(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 + 4x^2x^3$ na kanonický tvar a určíme příslušnou ortonormální bázi. Maticí formy g je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice $|A - \lambda E| = 0$ má tvar $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0$. Vlastní hodnoty matice A jsou kořeny této rovnice, vyjde $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Dále, souřadnice vlastních vektorů $u = (u^1, u^2, u^3)$ příslušných k vlastní hodnotě λ jsou řešením soustavy homogenních lineárních rovnic $(A - \lambda E)u^T = (0, 0, 0)^T$ (u^T značí sloupcový vektor). Tato soustava rovnic má pro $\lambda_1 = 5$ obecné řešení (t, t, t), které závisí na jednom reálném parametru t. Volbou $t = 1$ dostaneme vlastní vektor $u_1 = (1, 1, 1)$. Dále, vlastní hodnotě $\lambda_{23} = -1$ odpovídá obecné řešení homogenní soustavy tvaru $(-t-s, t, s)$ závislé na dvou parametrech. Postupnou volbou $t = 1$, $s = 0$ a $t = 0$, $s = 1$ dostaneme vlastní vektory $u_2 = (-1, 1, 0)$ a $u_3 = (-1, 0, 1)$. Kanonickým tvarem formy g je tedy $5(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2$. Normováním vektoru u_1 dostaneme vektor $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Ortogonalizačním procesem pak přiřadíme vektorům u_2 a u_3 vektory $e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $e_3 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$.

5 SYMETRICKÉ TENZORY DRUHÉHO STUPNĚ

V mechanice mají největší aplikace právě symetrické tenzory druhého stupně na prostoru $V = \mathbb{R}^n$. V této kapitole se proto budeme podrobněji zabývat symetrickými tenzory typu $(0,2)$ na V, tj. symetrickými bilineárními formami $f : V \times V \to \mathbb{R}$. Budeme definovat skalární invarianty, hlavní směry a charakteristickou plochu tenzoru. Pokud tenzor f reprezentuje nějaký fyzikální objekt, tak tyto pojmy mají zpravidla konkrétní fyzikální význam. Na závěr budeme uvedené pojmy demonstrovat na příkladě tenzoru setrvačnosti. V dalším budeme všude předpokládat, že $V = \mathbb{R}^n$ je unitární prostor a že $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je ortonormální báze prostoru V. Pak souřadnice tenzoru f v této bázi tvoří symetrickou matici $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Tato matice se při změně báze prostoru V obecně mění.

Věta 5.1. *Nechť A a B jsou matice souřadnic tenzoru $f : V \times V \to \mathbb{R}$ ve dvou ortonormálních bázích prostoru V. Pak tyto matice mají tytéž charakteristické polynomy.*

Důkaz. Podle Věty 1.5 je $B = S^T \cdot A \cdot S$, kde S je matice přechodu od první báze k druhé. Protože tyto báze jsou ortonormální, tak $S^T = S^{-1}$, takže matice A a B jsou podobné. □

Nechť nyní $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je symetrický tenzor na $V = \mathbb{R}^3$. Pak matice $A = (a_{ij})$ sestavená z jeho souřadnic je čtvercová matice řádu 3. Podle předchozí věty je její charakteristický polynom invariantní (tj. nezávislý) na změně báze V, takže koeficienty tohoto polynomu musí být rovněž invariantní. Rozvojem determinantu v charakteristické rovnici $|A - \lambda E| = 0$ obdržíme charakteristický polynom ve tvaru $\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0$ kde

$$\begin{aligned} J_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ J_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ J_3 &= |A|. \end{aligned}$$

Definice. Čísla J_1, J_2 a J_3 se nazývají *skalární invarianty tenzoru f*.

Poznamenejme, že J_1 je právě stopa matice. Jsou-li dále λ_1, λ_2 a λ_3 vlastní hodnoty A, tak zřejmě platí

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \quad J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

V případě tenzoru $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bychom definovali (zde pouze dva) skalární invarianty J_1 a J_2 analogickým způsobem.

Podle předchozí kapitoly existuje bijekce mezi symetrickými tenzory $f : V \times V \to \mathbb{R}$ typu $(0,2)$ na V a mezi kvadratickými formami $\varphi : V \to \mathbb{R}$. Přitom symetrická matice (a_{ij}) kvadratické formy φ v bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je právě matice souřadnic tenzoru f v této bázi.

Definice. Hlavní směry kvadratické formy φ nazýváme *hlavními směry tenzoru f*.

Je-li $P \in E_n$ počátek kartézské soustavy souřadnic, tak pro libovolný bod $Y \in E_n$ je vektor $\overrightarrow{PY}$ průvodič bodu Y. Uvažujme množinu $I(f)$ bodů prostoru E_n tvaru $I(f) := \{Y \in E_n; \varphi(\overrightarrow{PY}) = 1\}$. Protože souřadnice tenzoru f jsou a_{ij}, tak $I(f) = \{Y \in E_n; a_{ij}y^iy^j = 1\}$.

Definice. Pro $n = 3$ je $I(f)$ kvadrika v E_3, kterou nazýváme *charakteristickou plochou tenzoru* f. V případě $n = 2$ množinu $I(f)$ nazýváme *charakteristickou křivkou tenzoru* f.

Podle Věty 4.3 lze charakteristickou plochu $a_{ij}y^iy^j = 1$ převést na kanonický tvar $\overline{a}_{ii}y^iy^i = 1$, tj. po přeznačení $a_i = \overline{a}_{ii}$ na tvar $a_1(y^1)^2 + a_2(y^2)^2 + a_3(y^3)^2 = 1$. Analogicky, kanonický tvar charakteristické křivky tenzoru f je $a_1(y^1)^2 + a_2(y^2)^2 = 1$. Příslušné prvky nové báze prostoru V jsou pak právě hlavní směry tenzoru f.

Příklad 5.1. Určíme charakteristické plochy tenzorů zadaných maticí A souřadnic v nějaké bázi prostoru V.
(a) A je diagonální maticí řádu 3, kde na hlavní diagonále jsou postupně čísla λ_1, λ_2, λ_3. Příslušná charakteristická plocha má tvar $\lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 + \lambda_3(y^3)^2 = 1$.

1. Pro $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ se jedná o elipsoid.
2. Jsou-li dvě hodnoty λ_i kladné a jedna hodnota záporná, tak se jedná o jednodílný hyperboloid.
3. Jsou-li dvě hodnoty λ_i záporné a jedna hodnota je kladná, tak se jedná o dvojdílný hyperboloid.
4. Jsou-li všechna λ_i záporná, tak se jedná o imaginární elipsoid.

(b) Nechť f je tenzor s maticí souřadnic tvaru $a_{ij} = b_i \cdot b_j$. Pak charakteristická plocha f má tvar $b_ib_jy^iy^j = 1$ neboli $(b_iy^i)^2 = 1$, takže $b_iy^i = \pm 1$. Jedná se tedy o dvojici rovnoběžných rovin, které jsou symetrické vzhledem k počátku.

Příklad 5.2 (Tenzor setrvačnosti)**.**
(a) Uvažujme rotační pohyb absolutně tuhého tělesa $\mathcal{K}$ upevněného v bodě P (tento bod je počátkem kartézské soustavy souřadnic) kolem nějaké osy procházející bodem P. Určíme nyní kinetickou energii tohoto tělesa. Je-li $\boldsymbol{\omega}$ vektor úhlové rychlosti a $\boldsymbol{x} = \vec{PM}$ průvodič bodu $M \in \mathcal{K}$, tak z mechaniky je známo, že vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ bodu M je vektorový součin $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$. Uvažujme nyní element tělesa $\mathcal{K}$ v okolí bodu M, přičemž hmotnost tohoto elementu označíme dm. Pak kinetická energie elementu je rovna $dT = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2dm$, kde $\boldsymbol{v}^2$ je skalární součin $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$. Tedy kinetická energie celého tělesa je tvaru $T = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{v}^2dm$ neboli

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{K}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 dm \tag{1}$$

kde integračním oborem je celé těleso $\mathcal{K}$. Je-li přitom těleso $\mathcal{K}$ trojrozměrné, tak (1) představuje trojný integrál. Je-li $\mathcal{K}$ plocha, tak (1) reprezentuje plošný integrál a je-li $\mathcal{K}$ křivka, tak se jedná o integrál křivkový. Pokud se těleso K skládá z konečného počtu bodů, tak (1) představuje sumu.
(b) Užitím vlastností vektorového součinu bezprostředně odvodíme, že $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 = \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})^2$. Je-li nyní $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormální báze s počátkem v bodě P a $\boldsymbol{\omega} = \omega^ie_i$, $\boldsymbol{x} = x^ie_i$ souřadnicové vyjádření vektorů $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{x}$ v této bázi, tak s využitím Kroneckerova symbolu δ_{ij} dostaneme $\boldsymbol{\omega}^2 = \delta_{ij}\omega^i\omega^j$, $\boldsymbol{x}^2 = \delta_{\ell k}x^\ell x^k$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x} = \delta_{ik}\omega^ix^k = \delta_{j\ell}\omega^jx^\ell$. Tedy $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2$ má tvar $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 = (\delta_{ij}\omega^i\omega^j)(\delta_{k\ell}x^kx^\ell) - (\delta_{ik}\omega^ix^k)(\delta_{j\ell}\omega^jx^\ell) = (\delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{j\ell})\omega^i\omega^jx^kx^\ell$. Tento výraz dosadíme do integrálu (1). Pak integračními proměnnými budou pouze souřadnice x^i vektoru

$\boldsymbol{x}$, zatímco souřadnice ω^i vektoru $\boldsymbol{\omega}$ můžeme považovat za konstanty, které lze vytknout před integrál, tj.

$$T = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{j\ell})\omega^i\omega^j \int_{\mathcal{K}} x^k x^\ell dm.$$

Tento výraz nezávisí na souřadnicích vektoru $\boldsymbol{x}$ (neboť vzhledem k těmto souřadnicím se integruje) a závisí pouze na souřadnicích vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Vidíme, že kinetická energie T je kvadratickou formou vzhledem k souřadnicím ω^i vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$. Koeficienty této kvadratické formy představují symetrický tenzor typu $(0, 2)$. Dvojnásobek tohoto tenzoru nazýváme *tenzorem setrvačnosti tělesa* $\mathcal{K}$. Označíme-li I_{ij} jeho souřadnice, pak

$$I_{ij} = (\delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{j\ell}) \int_{\mathcal{K}} x^k x^\ell dm \tag{2}$$

takže kinetická energie tělesa $\mathcal{K}$ má tvar $T = \frac{1}{2} I_{ij}\omega^i\omega^j$. Rozepsáním vzorců (2) dostaneme následující formule pro souřadnice tenzoru setrvačnosti

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_{\mathcal{K}} (x_2^2 + x_3^2)dm, & I_{23} = I_{32} &= -\int_{\mathcal{K}} x_2x_3dm,\\
I_{22} &= \int_{\mathcal{K}} (x_1^2 + x_3^2)dm, & I_{31} = I_{13} &= -\int_{\mathcal{K}} x_1x_3dm,\\
I_{33} &= \int_{\mathcal{K}} (x_1^2 + x_2^2)dm, & I_{12} = I_{21} &= -\int_{\mathcal{K}} x_1x_2dm.
\end{aligned}$$

Přitom hodnoty I_{11}, I_{22} a I_{33} se nazývají *momenty setrvačnosti vzhledem k osám* x_1, x_2 a x_3 a hodnoty I_{12}, I_{13}, I_{23} se nazývají *polární momenty setrvačnosti*. Je-li např. $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ trojrozměrné těleso s lineární hustotou ρ, tak dostaneme známé vzorce z integrálního počtu v $\mathbb{R}^3$: $I_{11} = \iiint_{\mathcal{K}} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$, $I_{22} = \iiint_{\mathcal{K}} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$, $I_{33} = \iiint_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz$.
(c) Výše uvedené vzorce definují momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám. Je-li dán vektor $\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3)$ který určuje libovolnou osu procházející počátkem P, tak moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této libovolné (ne pouze souřadné) ose je $I = I_{ij}p^ip^j$ (odvození tohoto vztahu se provádí v mechanice). Tento vztah znamená, že moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolné ose procházející počátkem je jednoznačně určen tenzorem setrvačnosti I_{ij}.
(d) Podle věty o hlavních osách lze každý tenzor typu $(0, 2)$ (tj. kvadratickou formu) převést na diagonální tvar. Aplikací na tenzor setrvačnosti I_{ij} dostaneme *hlavní osy setrvačnosti tělesa* $\mathcal{K}$ (= osy x_i^o určené bodem P a vlastními vektory e_i^o tenzoru setrvačnosti) a *hlavní momenty setrvačnosti* I_i (= vlastní hodnoty tenzoru setrvačnosti). Je dále zřejmé, že hlavní momenty setrvačnosti I_i jsou právě momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám setrvačnosti a že polární momenty setrvačnosti I_{ij} $(i \neq j)$ v bázi $\{e_i^o\}$ jsou rovny nule. Navíc, z definičních vztahů je jasné, že $I_1 > 0$, $I_2 > 0$ a $I_3 > 0$.
(e) Charakteristická plocha tenzoru setrvačnosti má tvar $I_{ij}x^ix^j = 1$. Její kanonické rovnice jsou $I_1(x^1)^2 + I_2(x^2)^2 + I_3(x^3)^2 = 1$, kde I_1, I_2, I_3 jsou hlavní momenty setrvačnosti. Vzhledem k tomu, že jsou všechny hlavní momenty kladné, tak charakteristická plocha

tvoří elipsoid, který nazýváme *elipsoidem setrvačnosti tělesa* $\mathcal{K}$. Přitom osy symetrie tohoto elipsoidu splývají s hlavními osami setrvačnosti tělesa $\mathcal{K}$. V předchozím příkladu jsme demonstrovali použití tenzorového počtu v mechanice. Není to náhoda, neboť tenzorový počet má svůj původ právě v mechanice, zejména v teorii pružnosti a napětí. Napětí je totiž francouzsky „la tension“ a pojem tenzoru byl zaveden kolem roku 1900 matematikem a fyzikem Woldemarem Voigtem.

Cvičení I (Tenzory).
(1) Rozhodněte, pro jaké hodnoty $a \in \mathbb{R}$ je zobrazení $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$, $\varphi(v, w) = a$ tenzorem typu $(0, 2)$ na V. [Pouze pro $a = 0$].
(2) Nechť $f, g : V \to \mathbb{R}$ jsou lineární formy na V. Definujme funkci $h : V \times V \to \mathbb{R}$ vztahem $h(u, v) = f(u)g(v)$. Dokažte, že h je bilineární forma na V.
(3) Dokažte, že Kroneckerův tenzor δ^i_j nezmění souřadnice při změně báze V.
(4) Určete kontrakci tenzoru F typu $(1, 1)$ z Příkladu 2.1(d). [$\delta^i_i = n = \mathrm{dim} V$].
(5) Určete tenzor vzniklý spuštěním obou indexů tenzoru a^{kr}. [$a_{is} = g_{ik}g_{rs}a^{kr}$].
(6) Nechť jsou dány tenzory a_{ijk}, $b^{\ell m}$. Pomocí tenzorového násobení a kontrakce vytvořte tenzory typu $(2, 1)$ a dále tenzory 1. stupně. [$a_{ijk}b^{im}$, $a_{ijk}b^{\ell i}$, $a_{ijk}b^{jm}$, $a_{ijk}b^{\ell j}$, $a_{ijk}b^{km}$, $a_{ijk}b^{\ell k}$; $a_{ijk}b^{ij}$, $a_{ijk}b^{ji}$, $a_{ijk}b^{jk}$, $a_{ijk}b^{kj}$, $a_{ijk}b^{ik}$, $a_{ijk}b^{ki}$].
(7) Nechť $V = \mathbb{R}^3$. Určete nějakou bázi vektorového prostoru $T^2_0 V$. [Např. 9 matic typu $(3, 3)$, které mají 8 nulových prvků a jeden prvek rovný jedné, přičemž tento nenulový prvek má v každé matici jiné indexy].
(8) Dokažte, že každý antisymetrický tenzor stupně $p > 3$ na $V = \mathbb{R}^3$ je nulový.
(9) Nechť a_{ij} je symetrický tenzor a b^{mn} antisymetrický tenzor. Dokažte, že tenzor vzniklý násobením a následnou kontrakcí $a_{ij}b^{ij}$ je identicky roven nule.
(10) Dokažte, že je-li tenzor a_{ijk} symetrický vzhledem k indexům i, j a antisymetrický vzhledem k indexům j, k, tak je tento tenzor roven nule.
(11) Dokažte, že každý tenzor třetího stupně lze zapsat ve tvaru $a_{ijk} = a_{(ijk)} + a_{[ijk]} + \frac{2}{3}(a_{[ij]k} + a_{[kj]i}) + \frac{2}{3}(a_{(ij)k} - a_{k(ij)})$. Odtud vidíme, že kovariantní tenzor 3. stupně nelze obecně rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru.
(12) Dokažte, že pokud tenzor a_{ijk} je symetrický vzhledem k indexům i, j, tak $a_{(ijk)} = \frac{1}{3}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij})$.
(13) Nechť tenzor A má souřadnice $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 5$. $a_{22} = 7$, $a_{23} = -2$, $a_{31} = 4$, $a_{32} = -4$, $a_{33} = 0$. Rozložte tento tenzor na součet symetrického a antisymetrického tenzoru. [Označme b_{ij} souřadnice tenzoru $\mathrm{Sym}(A)$ a c_{ij} souřadnice tenzoru $\mathrm{Alt}(A)$. Pak $b_{11} = 2$, $b_{22} = 7$, $b_{33} = 0$, $b_{12} = b_{21} = 4$, $b_{13} = b_{31} = 3$, $b_{23} = b_{32} = -3$, $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$, $c_{12} = c_{13} = c_{32} = -1$, $c_{21} = c_{23} = c_{31} = 1$].
(14) Ukažte, že pro tenzory $F \in \Lambda^1 V$, $G \in \Lambda^2 V$ platí $F \wedge G(u, v, w) = F(u)G(v, w) - F(v)G(u, w) + F(w)G(u, v)$.
(15) Nechť f je tenzor, jehož souřadnice v ortonormální bázi $\{e_1, e_2, e_3\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ tvoří symetrickou matici $f_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i)$. Určete jeho charakteristickou plochu. [$(a_i x^i)(b_j x^j) = 1$, po transformaci souřadnic dostaneme hyperbolický válec $(y^1)(y^2) = 1$].

II. Diferenciální geometrie křivek a ploch

Předmětem klasické diferenciální geometrie je studium vlastností křivek a ploch metodami matematické analýzy. Diferenciální geometrie vznikla téměř současně s matematickou analýzou a v těsné návaznosti na ni se rozvíjela. Některé pojmy diferenciální geometrie dokonce časově předcházely odpovídajícím pojmům mat. analýzy. Např. pojem tečny předcházel pojmu derivace (tzv. základní úloha diferenciálního počtu „nalézti tečnu ke grafu funkce $f(x)$“ motivuje pojem derivace) a pojmy obsahu a objemu předcházely pojmu integrálu.

Vznik matematické analýzy je spojen se jmény G. W. Leibnize (1646–1716) a I. Newtona (1642–1727), kteří nezávisle na sobě objevili a uvedli do matematiky pojmy derivace a integrálu. Postupně pak vznikl diferenciální a integrální počet, diferenciální a integrální rovnice, variační počet, funkcionální analýza atd. Vznik samotné diferenciální geometrie je spjat se jmény L. Eulera (1707–1783) a G. Mongea (1746–1818). Teprve na základě prací C. F. Gausse (1777–1855) týkajících se teorie ploch však přestala být diferenciální geometrie pouhou aplikací matematické analýzy a stala se samostatnou matematickou disciplínou. K jejímu rozvoji pak podstatně přispěl B. Riemann (1826–1866). Z českých matematiků jmenujme Eduarda Čecha (1893–1960) a Václava Hlavatého (1894–1969). Na základě klasické diferenciální geometrie křivek a ploch pak vzniká moderní diferenciální geometrie, která studuje složité diferenciální struktury pomocí topologických a jiných metod moderní matematiky. Rozřešila mnoho složitých problémů řady matematických disciplín a má hluboké aplikace v moderních partiích fyziky, např. v kvantové mechanice. Klasická diferenciální geometrie, které se v tomto textu budeme věnovat, má řadu aplikací zejména v klasické a relativistické mechanice, ve strojních konstrukcích, v teorii přechodnic, v geodézii a kartografii, v teorii ploch inženýrské praxe atd.

6 POJEM KŘIVKY

V tomto textu se budeme zabývat rovinnými a prostorovými křivkami. Některé úvahy však budeme provádět obecně v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n. Symbolem V_n budeme značit zaměření E_n, tj. $V_n = Z(E_n) = \{\overrightarrow{XY}; X, Y \in E_n\}$. Pak V_n je unitární prostor se skalárním součinem $u \cdot v = \sum u^i v^i$, kde $u = (u^1, \dots, u^n)$, $v = (v^1, \dots, v^n)$. Velikost (normu) vektoru $u \in V_n$ budeme značit symbolem $\|u\|$, tj. $\|u\| = \sqrt{(u^1)^2 + \cdots + (u^n)^2}$. Geometricky se jedná o vzdálenost bodu $(u^1, \dots, u^n)$ od počátku $(0, \dots, 0)$. Připomeňme dále, že podle Poznámky 4.1 lze euklidovský prostor E_n i jeho zaměření prostřednictvím souřadnic ztotožnit s $\mathbb{R}^n$.

Kartézské souřadnice v E_3 budeme v dalším značit x, y, z a symbolem I budeme značit otevřený interval (a, b).

Definice. Zobrazení $v : I \to V_n$ se nazývá *vektorová funkce* na intervalu I.

Definice. Řekneme, že vektorová funkce $v : I \to V_n$ má v bodě $t_0 \in I$ *limitu* $v_0 \in V_n$, píšeme $v_0 = \lim_{t \to t_0} v(t)$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|t - t_0| < \delta, \quad t \neq t_0 \Longrightarrow \|v(t) - v_0\| < \varepsilon.$$

Vektorová funkce $v : I \to V_n$ se nazývá *spojitá* v bodě t_0, jestliže $\lim_{t \to t_0} v(t) = v(t_0)$.

Definice. Jestliže existuje $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$, pak tuto limitu nazýváme *derivací vektorové funkce* $v(t)$ v bodě t_0 a značíme $\frac{dv(t_0)}{dt}$ nebo $v'(t_0)$. Iterací dále definujeme derivace vyššího řádu.

Je zřejmé, že derivací vektorové funkce $v(t)$ v bodě t_0 je vektor $v'(t_0) \in V_n$ a že definice limity a derivace vektorové funkce nezávisí na volbě báze prostoru V_n.

Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze vektorového prostoru V_n. Pak pro libovolné $t \in I$ platí $v(t) = v^1(t)e_1 + \cdots + v^n(t)e_n$. Reálné funkce $v^i(t)$ nazýváme *složkami vektorové funkce* $v(t)$, píšeme $v(t) = (v^1(t), \dots, v^n(t))$. Důkaz následující věty patří do základního kursu matematické analýzy a proto jej vynecháme.

Věta 6.1. *Vektorová funkce je spojitá v bodě $t_0 \in I$ právě když jsou v tomto bodě spojité všechny její složky. Vektorová funkce $v(t)$ má derivaci v bodě $t_0 \in I$ právě když všechny její složky $v^i(t)$ mají v tomto bodě derivaci, přičemž platí* $\frac{dv(t_0)}{dt} = \left(\frac{dv^1(t_0)}{dt}, \dots, \frac{dv^n(t_0)}{dt}\right)$.

Analogické tvrzení platí i pro derivace vyššího řádu a pro limitu vektorové funkce.

Definice. Řekneme, že vektorová funkce $v : I \to V_n$ je *třídy C^r* na I, právě když v má na I spojité všechny derivace až do řádu r včetně.

Je zřejmé, že každá vektorová funkce třídy C^m je třídy C^k pro každé $k \le m$ a je spojitá na I. Podle předchozí věty je vektorová funkce $v : I \to V_n$ třídy C^r na I právě když všechny její reálné složky $v^i : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce třídy C^r na I.

Nechť dále $v(t)$ a $w(t)$ jsou dvě vektorové funkce třídy C^1 na I. Jejich skalární součin $v(t) \cdot w(t)$ je pak reálnou funkcí třídy C^1 na I a skalární součiny $v'(t) \cdot w(t)$ a $v(t) \cdot w'(t)$ jsou reálné funkce na I.

Věta 6.2. *Platí* $(v \cdot w)' = v' \cdot w + v \cdot w'$.

Důkaz. V libovolné ortonormální bázi prostoru V_n má skalární součin vektorových funkcí $v(t)$ a $w(t)$ souřadnicové vyjádření $v(t) \cdot w(t) = v^1(t)w^1(t) + \cdots + v^n(t)w^n(t)$. Na každý člen vpravo pak aplikujeme pravidlo o derivaci součinu reálných funkcí. □

Poznámka 6.1 (Motivace pro definici křivky)**.** Nechť J je libovolný interval a $f : J \to E_n$ zobrazení. Pak můžeme psát $f(t) = (f^1(t), \dots, f^n(t))$, kde reálné funkce $f^i : J \to \mathbb{R}$ jsou složky zobrazení f v nějaké kartézské soustavě souřadnic prostoru E_n. Body $t \in J$ můžeme interpretovat jako hodnoty času a samotné zobrazení f jako pohyb, jehož trajektorií je v „rozumném případě“ křivka. Věnujme se nyní těmto „rozumným“ případům, tj. předpokladům, které by mělo zobrazení f splňovat, aby takto definovaný objekt vyhovoval naší intuitivní představě o křivkách:
(a) f je libovolné. Z teorie množin je známo, že $J = (0, 1)$ a E_2 mají stejnou mohutnost, takže existuje bijekce $f : J \to E_2$. Dostali bychom tedy křivku, která by vyplnila všechny body roviny, což zřejmě není rozumné.
(b) f je spojité (tj. všechny složky $f^i : J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce.) Italský matematik Peano ukázal, že existuje surjektivní spojité zobrazení $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. „Peanova křivka“ tedy prochází všemi body jednotkového čtverce, což není rozumné. Dá se přitom ukázat, že Peanovo zobrazení f není prosté.
(c) složky zobrazení f jsou funkce třídy C^r. Příkladem je semikubická parabola zadaná parametrickými rovnicemi $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in (-1, 1)$ (viz Obr. 1). Vidíme, že objekt definovaný

pomocí zobrazení třídy C^r je už celkem rozumný (důvodem je zřejmě skutečnost, že do definice vstoupil diferenciální počet). Vadou na kráse semikubické paraboly je však bod $(0,0)$, ve kterém není definována tečna (vektor $f'(t) = (2t, 3t^2)$ je totiž pro $t = 0$ nulový). V naší definici křivky proto vyloučíme takovéto body požadavkem regularity zobrazení f. Je dále přirozené požadovat, aby křivka neprotínala samu sebe.

Definice. Zobrazení $f : I \to E_n$ se nazývá *pohyb* v prostoru E_n.

Je-li $P \in E_n$ pevně zvolený počátek, tak průvodičem bodu $Q \in E_n$ rozumíme vektor $v = \overrightarrow{PQ} \in V_n$. Pak pohyb $f : I \to E_n$ definuje vektorovou funkci $\overrightarrow{Pf} : I \to V_n$, která každému $t \in I$ přiřadí průvodič $\overrightarrow{Pf}(t) = (f(t) - P) \in V_n$ bodu $f(t)$. Vektorová funkce $\overrightarrow{Pf} : I \to V_n$ se nazývá *průvodič pohybu* f.

Lemma 6.1. *Vektor* $\frac{d(\overrightarrow{Pf})}{dt}$ *nezávisí na volbě počátku.*

Důkaz. Opravdu, pro jiný bod $Q \in E_n$ máme $\overrightarrow{Pf} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qf}$, kde $\overrightarrow{PQ}$ je konstantní vektor. Derivací podle t pak dostaneme $\frac{d(\overrightarrow{Pf})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{Qf})}{dt}$. □

Definice. Vektor $f' = \frac{df}{dt} := \frac{d(\overrightarrow{Pf})}{dt}$ se nazývá *vektor rychlosti pohybu* f. Řekneme, že f je *pohyb třídy* C^r, jestliže jeho průvodič $\overrightarrow{Pf}$ je vektorová funkce třídy C^r.

Je-li $f : I \to E_n$ pohyb třídy C^r, tak jeho rychlost $f' : I \to V_n$ je vektorová funkce. Vyšší derivace pohybu f pak definujeme jako příslušné derivace této vektorové funkce, např. $f'' = (f')'$. Je-li dále $f(t) = (f^1(t), \dots, f^n(t))$ souřadné vyjádření pohybu f, tak zřejmě $\frac{d^k f}{dt^k} = (\frac{d^k f^1}{dt^k}, \dots, \frac{d^k f^n}{dt^k})$. Rychlost pohybu f a jeho vyšší derivace zřejmě nezávisí na volbě kartézské soustavy souřadnic prostoru E_n. Skutečně, Lemma 6.1 dává nezávislost na počátku a dále derivace vektorové funkce je nezávislá na volbě báze V_n.

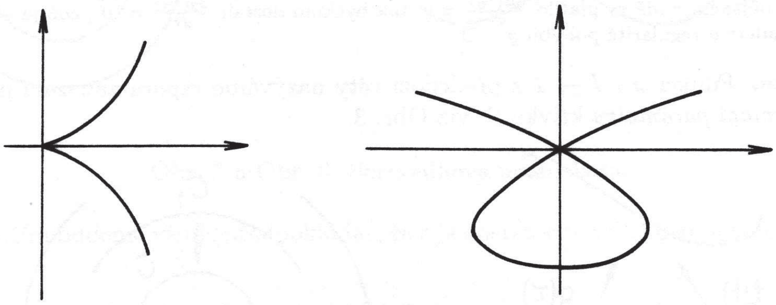
Definice. Řekneme, že pohyb $f : I \to E_n$ je *regulární*, jestliže $\frac{df(t)}{dt} \neq \overrightarrow{0}$ pro každé $t \in I$ (symbol $\overrightarrow{0} \in V_n$ zde značí nulový vektor). Pokud $\frac{df(t_0)}{dt} = \overrightarrow{0}$, tak se bod $f(t_0)$ nazývá *singulárním bodem* pohybu f.

Regulární pohyb má tedy v každém bodě nenulovou rychlost. Příkladem regulárního pohybu je $f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, kterému odpovídá šroubovice.

Příklad 6.1 (Příklady neregulárních pohybů)**.**
(a) Konstantní pohyb $f(t) = Q \in E_n$, neboť $\frac{df(t)}{dt} = \overrightarrow{0}$ $\forall t$.
(b) Pro pohyb $f(t) = (t^2, t^3)$ platí $f'(t) = (2t, 3t^2)$, takže $f'(0) = \overrightarrow{0}$. Singulární bod odpovídající hodnotě $t = 0$ se v tomto případě nazývá *bod vratu.* Tomuto pohybu odpovídá semikubická parabola $y^2 - x^3 = 0$, viz Obr. 1.

Definice. Řekneme, že pohyb $f : I \to E_n$ je *jednoduchý*, jestliže $t_1 \neq t_2 \Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2)$. Jedná se tedy o pohyb bez samoprotnutí.

Příkladem pohybu, který není jednoduchý, je $f(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$. Bodem samoprotnutí je zde $f(2) = f(-2) = (0,0)$, viz Obr. 2.



Obr. 1: Semikubická parabola a Obr. 2

Definice. Množina $\mathcal{C} \subset E_n$ se nazývá *jednoduchá křivka třídy* C^r, jestliže existuje takový jednoduchý regulární pohyb $f : I \to E_n$ třídy C^r, že platí $\mathcal{C} = f(I)$. Zobrazení $f : I \to E_n$ pak nazýváme *parametrizací* křivky $f(I)$.

Příklad 6.2 (Křivka jako graf funkce)**.** Grafem funkce $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ třídy C^r je jednoduchá křivka $\mathcal{C}$ třídy C^r. Pak $g(t) = (t, f(t))$ je parametrizací $\mathcal{C}$, protože $g'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$.

Nechť nyní $J = (\alpha, \beta)$ je další interval s proměnnou τ.

Věta 6.3. *Zobrazení $f(t) : I \to E_n$ a $g(\tau) : J \to E_n$ jsou dvě parametrizace téže jednoduché křivky $\mathcal{C}$ třídy C^r právě když existuje bijekce $\varphi : J \to I$, $t = \varphi(\tau)$ třídy C^r taková, že pro všechna $\tau \in J$ platí $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$ a $g(\tau) = f(\varphi(\tau))$.*

Důkaz. I. Nechť existuje bijekce $\varphi : J \to I$ třídy C^r taková, že $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0\ \forall \tau \in J$. Ukážeme, že $g := f \circ \varphi : J \to E_n$ je regulární pohyb třídy C^r. Pohyb g má zřejmě souřadnicové vyjádření $g(\tau) = (g^1(\tau), \ldots, g^n(\tau)) = (f^1(\varphi(\tau)), \ldots, f^n(\varphi(\tau)))$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme $\frac{dg^i}{d\tau} = \frac{df^i}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\tau}$. Tedy vektor $\frac{dg}{d\tau}$ je roven násobku vektoru $\frac{df}{dt}$ nenulovým číslem $\frac{d\varphi}{d\tau}$.
II. Nechť $f(t) : I \to E_n$ a $g(\tau) : J \to E_n$ jsou dvě parametrizace téže jednoduché křivky $\mathcal{C}$ třídy C^r. Pak pravidlo $f(\varphi(\tau)) = g(\tau)$ určuje zobrazení $\varphi : J \to I$, $t = \varphi(\tau)$. Ukážeme, že φ je funkce třídy C^r a platí $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0\ \forall \tau \in J$. Funkce φ je určena vztahem $f(t) = g(\tau)$, v souřadnicích

$$f^i(t) = g^i(\tau), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Uvažujme libovolný bod $\tau_0 \in J$ a $t_0 = \varphi(\tau_0) \in I$. Protože f je regulární pohyb, tak $\frac{df(t_0)}{dt} \neq \overrightarrow{0}$. Aspoň jedna složka vektoru rychlosti pohybu f je tedy nutně nenulová. Vyberme některou z nich a označme ji indexem k. Vztah $f^k(t) = g^k(\tau)$ zapišme ve tvaru

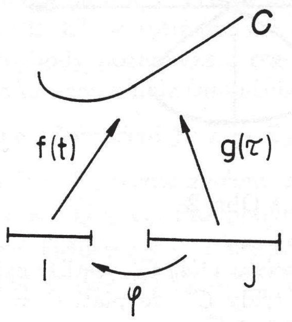
$$f^k(t) - g^k(\tau) = 0. \tag{2}$$

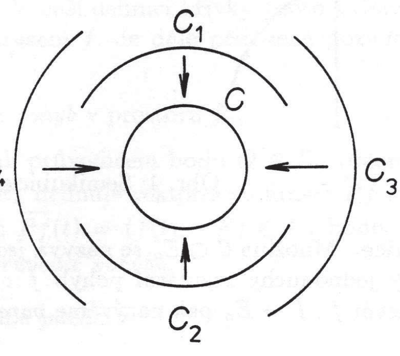
Levá strana je funkcí dvou proměnných t, τ, která je třídy C^r na $I \times J$. Protože $\frac{df^k(t_0)}{dt} \neq 0$, tak na (2) můžeme použít větu o implicitní funkci. Podle této věty je t v jistém okolí bodu τ_0 určeno jako funkce třídy C^r proměnné τ. Bod po bodu pak dostaneme, že $t = \varphi(\tau)$ je funkce třídy C^r.Tato funkce zřejmě splňuje všechny rovnice (1), tedy $g(\tau) = f(\varphi(\tau))$. Derivací dostaneme

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\tau}. \tag{3}$$

Kdyby v nějakém bodě τ_0 platilo $\frac{d\varphi(\tau_0)}{d\tau} = 0$, tak bychom dostali $\frac{dg(\tau_0)}{d\tau} = \overrightarrow{0}$, což je ve sporu s předpokladem o regularitě pohybu g. □

Definice. Funkci $\varphi : J \to I$ z předchozí věty nazýváme *reparametrizací* nebo též *transformací parametru* křivky $\mathcal{C}$, viz Obr. 3.





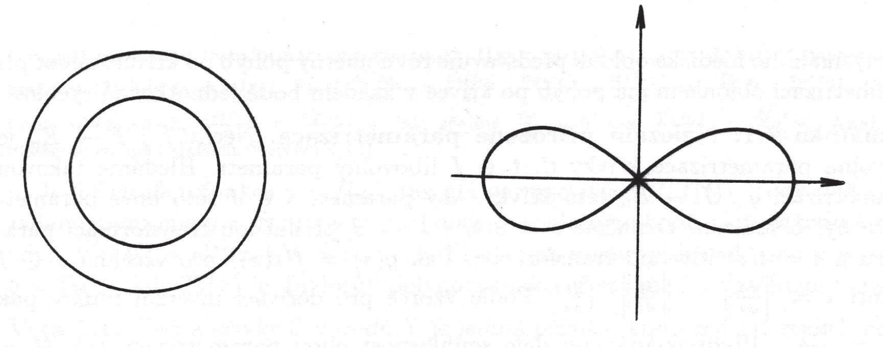
Obr. 3: Reparametrizace a Obr. 4: Lokální parametrizace kružnice

Příklad 6.3. Nechť $g(\tau) = (\tau, 2\tau)$, $\tau \in (0,1)$ je parametrizace jednoduché křivky. Pak $f(t) = (t^2, 2t^2)$, $t \in (0,1)$ je parametrizací téže křivky a příslušná reparametrizace je tvaru $t = \varphi(\tau) = \tau^2$. Na druhou stranu, $h(t) = (4(t-t^2), 8(t-t^2))$, $t \in (0,1)$ není parametrizací $g(\tau)$, protože pro funkci $t = \varphi(\tau) = 4(\tau - \tau^2)$ platí $\varphi'(0.5) = 0$.

Definice. Podmnožina $\mathcal{C} \subset E_n$ se nazývá *křivka třídy* C^r, jestliže pro každý bod $X \in \mathcal{C}$ existuje takové jeho okolí U v E_n, že $\mathcal{C} \cap U$ je jednoduchá křivka třídy C^r. Parametrizace průniků $\mathcal{C} \cap U$ nazýváme *lokálními parametrizacemi křivky* $\mathcal{C}$.

Příklad 6.4. Ukážeme, že jednotková kružnice $x^2 + y^2 = 1$ je křivka třídy C^r. Je zřejmé, že horní půlkružnice je jednoduchá křivka $\mathcal{C}_1$ třídy C^r, jejíž parametrizací je např. $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in (-1,1)$. Podobně, $g(t) = (t, -\sqrt{1-t^2})$ parametrizuje dolní půlkružnici $\mathcal{C}_2$, $h(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$ pravou půlkružnici $\mathcal{C}_3$a $k(t) = (-\sqrt{1-t^2}, t)$ levou půlkružnici $\mathcal{C}_4$. Pak $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $k(t)$ jsou lokální parametrizace kružnice, které ji „pokrývají“ ve smyslu předchozí definice, viz Obr. 4.

Příklad 6.5. Příklady křivek jsou parabola $y = x^2$ (jedná se dokonce o jednoduchou křivku) a kružnice. Definici křivky rovněž vyhovuje hyperbola $y = \frac{1}{x}$, která se skládá ze dvou větví. Tento příklad ukazuje, že souvislost v naší definici křivky není nutná. Příkladem nesouvislé křivky jsou rovněž dvě kružnice (jako hranice mezikruží) na Obr. 5. Na Obr. 1 je znázorněna semikubická parabola z Příkladu 6.1. Abychom dostali křivku, tak musíme z této množiny bodů vyloučit počátek (zde bod vratu). Podobně, pokud z podmnožiny $\mathcal{C} \subset E_2$ na Obr. 6 vyloučíme počátek, tak dostaneme křivku.



Obr. 5 a Obr. 6: Bernoulliova lemniskata

V dalším budeme všude předpokládat, že r je dostatečně velké pro potřeby našich úvah.

Definice. Nechť $f : I \to E_n$ je nějaká lokální parametrizace křivky $\mathcal{C}$ v E_n. Přímka určená bodem $f(t_0)$ a vektorem $f'(t_0)$, $t_0 \in I$, se nazývá *tečna* křivky $\mathcal{C}$ v bodě $f(t_0)$.

Je zřejmé, že definice tečny nezávisí na zvolené parametrizaci, protože podle Věty 6.3 dvě různé parametrizace určují kolineární tečné vektory. Poznamenejme, že požadavek regularity v definici křivky zajistí, aby tato křivka měla v každém bodě tečnu (pouze takovými křivkami se budeme zabývat).

Definice. Řekneme, že dvě parametrizace $f(t)$ a $g(\tau)$ jednoduché křivky $\mathcal{C}$ jsou *souhlasné*, jestliže $\frac{d\varphi}{d\tau} > 0$, kde $t = \varphi(\tau)$ je transformace parametru.

Pokud $f(t)$ a $g(\tau)$ jsou dvě souhlasné parametrizace jednoduché křivky $\mathcal{C}$, tak podle (3) jsou příslušné tečné vektory $f'(t)$ a $g'(\tau)$ souhlasně kolineární (koeficientem je $\frac{d\varphi}{d\tau} > 0$). Dvě souhlasné parametrizace tedy určují tentýž směr pohybu po křivce, zatímco nesouhlasná parametrizace určuje opačný směr pohybu. Je zřejmé, že množina všech parametrizací dané křivky se rozpadá na dvě disjunktní třídy, kde každé dvě parametrizace téže třídy jsou navzájem souhlasné a každá parametrizace jedné třídy je nesouhlasná s každou parametrizací druhé třídy. Je tedy zcela přirozené definovat *orientaci* jednoduché křivky $\mathcal{C}$ jako výběr její parametrizace (jde vlastně o výběr jedné z výše popsaných tříd).

Poznámka 6.2 (Délka křivky)**.** Je-li $f(t) = (f^1(t), \dots, f^n(t))$ lokální parametrizace křivky $\mathcal{C} \subset E_n$, tak podle známého vzorce z analýzy je délka oblouku křivky $\mathcal{C}$ mezi body $f(t_1)$ a $f(t_2)$ rovna $\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{df^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df^n(\tau)}{d\tau}\right)^2}\, d\tau$. Z věty o substituci integrálního počtu bezprostředně vyplývá, že tento vzorec nezávisí na volbě lokální parametrizace křivky $\mathcal{C}$.

7 STYK KŘIVEK

Definice. Nechť $f : I \to E_n$ je parametrizace jednoduché křivky $\mathcal{C} = f(I)$. Tato parametrizace se nazývá *přirozená*, jestliže $\left\|\frac{df}{ds}\right\| = 1$ pro všechna $s \in I$. Parametr s se pak nazývá *oblouk* nebo též *přirozený parametr.*

Z fyzikálního hlediska oblouk představuje rovnoměrný pohyb po křivce, neboť při parametrizaci obloukem má pohyb po křivce v každém bodě jednotkovou rychlost.

Poznámka 7.1 (Nalezení přirozené parametrizace)**.** Nechť $f : I \to E_n$ je libovolná parametrizace křivky $\mathcal{C}$, $t \in I$ libovolný parametr. Hledáme takovou parametrizaci $g : J \to E_n$ této křivky, aby parametr $s \in J$ této nové parametrizace byl obloukem. Označme $s = s(t) : I \to J$ příslušnou transformaci parametru a $t = t(s)$ inverzní transformaci. Pak $g(s) = f(t(s))$ pro všechna $s \in J$ a platí $1 = \left\|\frac{dg}{ds}\right\| = \left\|\frac{df}{dt}\right\| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right|$. Podle vzorce pro derivaci inverzní funkce pak $\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left\|\frac{df}{dt}\right\|$. Předpokládáme-li dále souhlasnost obou parametrizací, tak $\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{df}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{df^1(t)}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df^n(t)}{dt}\right)^2}$, tj. $ds = \sqrt{\left(\frac{df^1(t)}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df^n(t)}{dt}\right)^2}dt$. Integrací od t_0 do t dostaneme hledané vyjádření oblouku s

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{df^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df^n(\tau)}{d\tau}\right)^2} d\tau \tag{1}$$

což je známý vzoreček z analýzy pro délku křivky.

Odtud bezprostředně vyplývá, že je-li $g(s)$ přirozená parametrizace, tak pro $s_1 < s_2$ je rozdíl $(s_2 - s_1)$ roven délce oblouku křivky mezi body $g(s_1)$ a $g(s_2)$. Tedy oblouk je takový parametr, který měří délku křivky. Je dále zřejmé, že k jednoduché křivce vždy existuje přirozená parametrizace a je určena jednoznačně až na transformace parametru tvaru $s \mapsto \pm s + c$, kde $c \in \mathbb{R}$. I když přirozená parametrizace jednoduché křivky vždy existuje, tak její explicitní vyjádření je často velmi obtížné. Integrál (1) totiž může být neelementární a může vést k vyšším funkcím.

Příklad 7.1. Nechť $f(t) = (3t, 4\sin t, 4\cos t)$, $t \in (-\pi, \pi)$ je parametrizace prostorové křivky. Určíme její přirozenou parametrizaci $g(s)$. Podle (1) máme $s = \int_0^t \sqrt{9 + 16\cos^2\tau + 16\sin^2\tau}d\tau = 5t$. Odtud $t = \frac{s}{5}$, tj. $g(s) = (\frac{3s}{5}, 4\sin\frac{s}{5}, 4\cos\frac{s}{5})$, $s \in (-5\pi, 5\pi)$.

Nechť $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}} \subset E_n$ jsou dvě křivky parametrizované obloukem $f(s)$ a $\overline{f}(s)$ na společném intervalu I a nechť $X = f(s_0) = \overline{f}(s_0)$ je jejich společný bod.

Definice. Řekneme, že křivky $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ mají v bodě X *styk k-tého řádu*, jestliže

$$\frac{d^i f(s_0)}{ds^i} = \frac{d^i \overline{f}(s_0)}{ds^i} \quad \forall i = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Z vlastností přirozené parametrizace bezprostředně vyplývá, že relace „mít styk řádu k“ nezávisí na volbě oblouků křivek $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$. Proto všechny pojmy zavedené pomocí styku řádu k jsou nezávislé na volbě parametrizace.

Lemma 7.1. *Dvě křivky $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ mají ve společném bodě $X \in \mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{C}}$ styk k-tého řádu právě když existují takové jejich lokální parametrizace $g(t)$ a $\overline{g}(t)$, $g(t_0) = \overline{g}(t_0) = X$, že platí $\frac{d^i g(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i \overline{g}(t_0)}{dt^i}$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$.*

Důkaz. Stačí dokázat implikaci zprava doleva. Nechť tedy $g(t)$ a $\overline{g}(t)$ jsou lokální parametrizace $\mathcal{C}$, které splňují výše uvedenou podmínku. Označme $f(s)$ a $\overline{f}(s)$ parametrizace $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ obloukem a $t = \varphi(s)$ příslušnou transformaci parametru, tj. $f(s) = g(t(s))$ a $\overline{f}(s) = \overline{g}(t(s))$. Chceme ukázat platnost (2) kde $t_0 = \varphi(s_0)$. Platí $\frac{df(s_0)}{ds} = \frac{dg(t_0)}{dt} \cdot \frac{d\varphi(s_0)}{ds}$ a $\frac{d\overline{f}(s_0)}{ds} = \frac{d\overline{g}(t_0)}{dt} \cdot \frac{d\varphi(s_0)}{ds}$. Protože podle předpokladu $\frac{dg(t_0)}{dt} = \frac{d\overline{g}(t_0)}{dt}$ a dále zřejmě $\frac{d\varphi}{ds} \neq 0$, tak $\frac{df(s_0)}{ds} = \frac{d\overline{f}(s_0)}{ds}$. Analogicky ukážeme rovnost dalších derivací v (2). □

Je-li $\mathcal{C}$ grafem funkce $y = f(x)$, tak má parametrizaci $(t, f(t))$. Tedy dvě křivky zadané rovnicemi $y = f(x)$ a $y = g(x)$ mají ve společném bodě x_0 styk řádu k právě když $f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)$ $\forall i = 0, \ldots, k$. Příkladem takových křivek jsou $y = f(x)$ a $y = T_k(x)$, kde $T_k(x)$ je Taylorův polynom funkce f stupně k se středem v x_0.

Věta 7.1. *Tečna křivky $\mathcal{C}$ v bodě X je jediná přímka, která má s $\mathcal{C}$ styk 1. řádu v bodě X.*

Důkaz. Nechť f je lokální parametrizace křivky $\mathcal{C}$ obloukem a nechť $X = f(s_0) \in \mathcal{C}$. Nechť dále p je libovolná přímka parametrizovaná obloukem s taková, že $X \in p$, přičemž bod X odpovídá hodnotě $s = s_0$. Pak p má parametrické vyjádření $\overline{f}(s) = X + (s - s_0)v$, kde v je jednotkový vektor. Podmínka pro styk 1. řádu pak dává $\frac{d\overline{f}(s_0)}{ds} = v = \frac{df(s_0)}{ds}$. □

Je zřejmé, že relace „mít styk řádu k“ je ekvivalence, takže platí

Věta 7.2. *Dvě křivky mají ve společném bodě styk 1. řádu, právě když v tomto bodě mají společnou tečnu.*

Definice. Bod $X \in \mathcal{C}$ nazýváme *inflexním bodem* křivky $\mathcal{C}$, jestliže tečna v bodě X má s $\mathcal{C}$ styk 2. řádu.

Věta 7.3. *Bod $f(s_0)$ je inflexní, právě když $\frac{d^2 f(s_0)}{ds^2} = \overrightarrow{0}$.*

Důkaz. Protože $\frac{df(s_0)}{ds}$ je jednotkový vektor, tak parametrické vyjádření tečny obloukem je $\overline{f} = f(s_0) + (s - s_0)\frac{df(s_0)}{ds}$. Na pravé straně této rovnosti máme lineární výraz, takže $\frac{d^2\overline{f}(s_0)}{ds^2} = \overrightarrow{0}$. Z podmínky pro styk 2. řádu bezprostředně obdržíme dokazované tvrzení. □

Je zřejmé, že na přímce je každý bod inflexní. Nyní ukážeme obrácené tvrzení.

Věta 7.4. *Jednoduchá křivka, jejíž každý bod je inflexní, je částí přímky.*

Důkaz. Podle předchozí věty je $\frac{d^2 f}{ds^2} = \overrightarrow{0}$ pro všechna s. Integrací dostaneme nejdříve $\frac{df}{ds} = u$ (konstantní vektor) a pak $f = us + v$, což je parametrické vyjádření přímky. □

8 FRENETOVY VZORCE ROVINNÉ KŘIVKY

Uvažujme rovinnou křivku $\mathcal{C}$ s přirozenou parametrizací $f : I \to E_2$. Označme $e_1 = e_1(s) = \frac{df}{ds}$. Pak e_1 je v každém bodě jednotkový tečný vektor k $\mathcal{C}$.

Lemma 8.1. *Vektor $\frac{de_1}{ds}$ je kolmý k vektoru e_1.*

Důkaz. Protože e_1 je jednotkovým vektorem, tak $e_1 \cdot e_1 = 1$. Derivací dostaneme podle Věty 6.2 $0 = \frac{de_1}{ds} \cdot e_1 + e_1 \cdot \frac{de_1}{ds}$, takže $e_1 \perp \frac{de_1}{ds}$. □

Věta 8.1. *Při libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky $\mathcal{C}$ je bod $f(t_0)$ inflexní, právě když vektory $f'(t_0)$ a $f''(t_0)$ jsou kolineární.*

Důkaz. Z regularity parametrizace plyne, že $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, takže kolineárnost znamená, že $f''(t_0) = cf'(t_0)$. Ukážeme nejdříve, že tato podmínka nezávisí na parametrizaci. Zvolíme-li jinou parametrizaci $g(\tau) = f(\varphi(\tau))$, $t = \varphi(\tau)$, tak podle pravidla o derivování složené funkce dostaneme

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{df}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}, \quad \frac{d^2g}{d\tau^2} = \frac{d^2f}{dt^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{df}{dt}\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}. \tag{1}$$

Odtud vyplývá, že vektory $f'(t_0)$ a $f''(t_0)$ jsou lineárně závislé, právě když jsou lineárně závislé vektory $g'(\tau_0)$ a $g''(\tau_0)$, $t_0 = \varphi(\tau_0)$. Nakonec, při parametrizaci obloukem je $\frac{d^2f}{ds^2} = \frac{de_1}{ds}$. Podle Lemmatu 8.1 je tento vektor kolmý k $e_1 = \frac{df}{ds}$, takže kolineárnost znamená, že $\frac{de_1}{ds} = \overrightarrow{0}$. □

Je-li $\mathcal{C}$ grafem funkce $y = f(x)$, tak má parametrické vyjádření $(x, f(x))$, kde parametrem je x. Pak vektory $(1, f'(x))$ a $(0, f''(x))$ z předchozí věty jsou kolineární v bodě x_0, právě když $f''(x_0) = 0$. To souhlasí s definicí inflexního bodu v analýze.

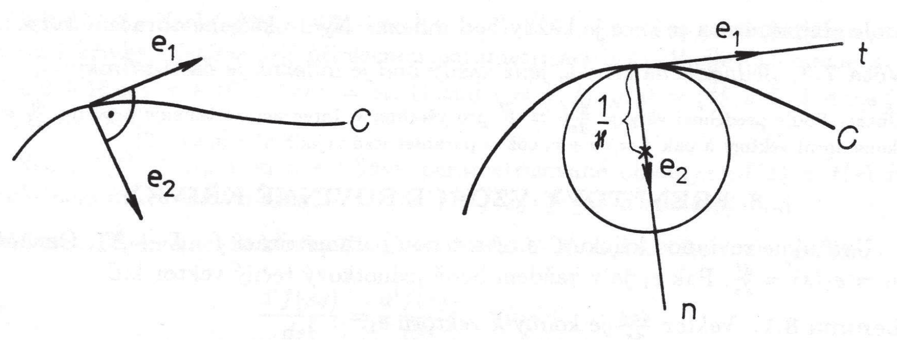
Nechť $f(s_0) \in \mathcal{C}$ je neinflexní bod. Označme $e_2(s_0)$ jednotkový vektor kolmý k vektoru $e_1(s_0)$ a souhlasně orientovaný s vektorem $\frac{de_1(s_0)}{ds}$ (viz Obr. 7), tj.

$$\frac{de_1(s_0)}{ds} = \kappa(s_0)e_2(s_0), \quad \kappa(s_0) > 0. \tag{2}$$

Protože $e_1 \perp e_2$, tak e_2 je jednotkovým vektorem normály ke křivce $\mathcal{C}$. Zbývá vyjasnit geometrický význam koeficientu $\kappa(s_0)$.

Věta 8.2. *V neinflexním bodě $f(s_0)$ křivky $\mathcal{C}$ existuje jediná kružnice, která má s $\mathcal{C}$ styk 2. řádu. Jejím středem je bod $f(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}e_2(s_0)$. Tuto kružnici nazýváme oskulační kružnicí křivky $\mathcal{C}$ v bodě $f(s_0)$.*

Důkaz. Uvažujme libovolnou kružnici se středem $S = (p, q)$ a poloměrem r. Pak základní parametrické vyjádření této kružnice je $x = p + r\cos t$, $y = q + r\sin t$ a přirozená parametrizace je tvaru $(p + r\cos\frac{s}{r}, q + r\sin\frac{s}{r})$. Podmínky pro styk 2. řádu s křivkou $\mathcal{C}$ jsou tvaru $f = (p + r\cos\frac{s}{r}, q + r\sin\frac{s}{r})$, $e_1 = \frac{df}{ds} = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})$, $\frac{d^2f}{ds^2} = \frac{de_1}{ds} = \frac{1}{r}(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$. Podle první podmínky ihned dostaneme $S = (p, q) = f(s_0) - r(\cos\frac{s_0}{r}, \sin\frac{s_0}{r})$. Dále, vektor $u(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$ je zřejmě jednotkový, kolmý k vektoru $e_1(s)$ a je souhlasně orientovaný s vektorem $\frac{de_1}{ds}$. Tedy v (2) máme $e_2 = u$, $\kappa = \frac{1}{r}$. □



Obr. 7: a Obr. 8: Oskulační kružnice

Tedy střed oskulační kružnice leží na polopřímce určené bodem $f(s_0) \in \mathcal{C}$ a jednotkovým vektorem normály $e_2(s_0)$ a poloměr oskulační kružnice je $\frac{1}{\kappa(s_0)}$, viz Obr. 8. Je zřejmé, že v inflexním bodě oskulační kružnice neexistuje. Snadno totiž ověříme, že styk 2. řádu kružnice s tečnou (tj. přímkou) není možný.

Definice. Číslo $\kappa(s_0)$ (které je převrácenou hodnotou poloměru oskulační kružnice) nazýváme *křivostí křivky* v jejím neinflexním bodě. Křivostí v inflexním bodě rozumíme číslo 0.

Lemma 8.2. *Pro libovolné* $\kappa \geq 0$ *platí* $\frac{de_1}{ds} = \kappa e_2$.

Důkaz. V neinflexním bodě to plyne z (2) a v inflexním bodě z Věty 7.3. □

Důsledek 8.1. V neinflexním bodě $f(s_0)$ platí $\kappa(s_0) = \left\| \frac{de_1(s_0)}{ds} \right\|$.

Tedy křivost $\kappa(s)$ vyjadřuje rychlost změny (otáčení) jednotkového tečného vektoru $e_1(s)$. Vektor $\frac{de_1}{ds} = \frac{d^2 f}{ds^2}$, jehož velikost je rovna křivosti κ, se nazývá *vektor křivosti.* Podle Věty 7.3 a 7.4 je křivost $\kappa(s)$ v každém bodě křivky $\mathcal{C}$ rovna nule právě když $\mathcal{C}$ je přímkou nebo její částí. Můžeme tedy konstatovat, že křivost vyjadřuje odchylku křivky od přímky.

Věta 8.3. *Při libovolné parametrizaci* $f(t) = (x(t), y(t))$ *křivky* $\mathcal{C}$ *jsou její křivost* κ *a souřadnice* (m, n) *středu oskulační kružnice dány výrazy*

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad m = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \quad n = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}.$$

Důkaz. Označme stručně $f(s)$ parametrizaci téže křivky obloukem a $t = t(s)$ příslušnou změnu parametru. Pak vzorec (1) přejde pro $s = \tau$ na

$$e_1 = \frac{df}{ds} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{ds}, \quad \frac{de_1}{ds} = \frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{d^2 f}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{df}{dt}\frac{d^2 t}{ds^2}. \tag{3}$$

Nyní využijeme operaci vnějšího součinu $[u, v]$ pro dva rovinné vektory. Zřejmě platí

$$[u, u] = 0, \quad [u, v + w] = [u, v] + [u, w]. \tag{4}$$

Dále, $|[u,v]|$ je plošný obsah rovnoběžníka určeného vektory u a v. Protože $\frac{d^2f}{ds^2} = \kappa e_2$ a e_1, e_2 jsou jednotkové kolmé vektory, tak κ je rovno plošnému obsahu rovnoběžníka určeného vektory $\frac{df}{ds}$, $\frac{d^2f}{ds^2}$. Podle Poznámky 7.1 je $\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left\|\frac{df}{dt}\right\|$. S využitím (3) a (4) pak dostaneme

$$\kappa = \left|\left[\frac{df}{ds}, \frac{d^2f}{ds^2}\right]\right| = \left|\left[\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}\right]\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right|^3 = \frac{|[f', f'']|}{\|f'\|^3}. \tag{5}$$

Dále, jednotkový vektor e_1 má při parametrizaci $f(t)$ vyjádření $e_1 = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}(x', y')$, takže k němu kolmý vektor e_2 je tvaru $e_2 = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}(-y', x')$. Vzorce pro střed oskulační kružnice pak plynou z Věty 8.2. □

Věta 8.4 (Frenetovy vzorce rovinné křivky)**.** *Platí*

$$\frac{df}{ds} = e_1, \quad \frac{de_1}{ds} = \kappa e_2, \quad \frac{de_2}{ds} = -\kappa e_1. \tag{6}$$

Důkaz. První rovnost je definicí vektoru e_1 a druhá plyne z Lemmatu 8.2. Zbývá tedy dokázat poslední vztah. Protože vektor e_2 je jednotkový, tak $e_2 \cdot e_2 = 1$. Derivací dostaneme podobně jako v Lemmatu 8.1 $\frac{de_2}{ds} \perp e_2$. Tedy $\frac{de_2}{ds}$ je kolineární s e_1, tj. $\frac{de_2}{ds} = ce_1$. Protože vektory e_1 a e_2 jsou kolmé, tak $e_1 \cdot e_2 = 0$. Derivace dává $\frac{de_1}{ds} \cdot e_2 + e_1 \cdot \frac{de_2}{ds} = 0$. Dosazením vztahů $\frac{de_1}{ds} = \kappa e_2$, $\frac{de_2}{ds} = ce_1$ a s přihlédnutím ke zřejmé rovnosti $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = 1$ dostaneme $\kappa + c = 0$, neboli $c = -\kappa$. □

Definice. Řekneme, že dvě křivky $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}} \subset E_2$ jsou *shodné*, jestliže existuje takové shodné zobrazení $\varphi : E_2 \to E_2$, že $\varphi(\mathcal{C}) = \overline{\mathcal{C}}$.

Věta 8.5. *Nechť $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ jsou křivky bez inflexních bodů, $f : I \to \mathcal{C}$, $\overline{f} : I \to \overline{\mathcal{C}}$ jejich parametrizace obloukem na společném intervalu I a nechť $\kappa(s)$, $\overline{\kappa}(s)$ jsou jejich křivosti. Pak $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ jsou shodné právě když $\kappa = \overline{\kappa}$ je tatáž funkce na I.*

Důkaz. I. Je zřejmé, že shodné zobrazení převádí oblouk na oblouk a zachovává styk křivek, takže poloměry oskulačních kružnic v odpovídajících si bodech jsou stejné. Tedy shodné křivky mají stejnou křivost.
II. V opačném směru pouze ukážeme základní myšlenku. Uvažujme křivku $\mathcal{C}$ spolu s vektory e_1, e_2 a dále křivku $\overline{\mathcal{C}}$ spolu s vektory $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$. Pak platí (6) a

$$\frac{d\overline{f}}{ds} = \overline{e}_1, \quad \frac{d\overline{e}_1}{ds} = \kappa \overline{e}_2, \quad \frac{d\overline{e}_2}{ds} = -\kappa \overline{e}_1 \tag{7}$$

přičemž κ v (6) a (7) je tatáž funkce. Tedy (6) a (7) je tatáž soustava diferenciálních rovnic pro neznámé vektory f, e_1 a e_2. Pro $s_0 \in I$ jsou $(f(s_0), e_1(s_0), e_2(s_0))$ a $(\overline{f}(s_0), \overline{e}_1(s_0), \overline{e}_2(s_0))$ vždy bod a dvojice ortonormálních vektorů. Existuje tedy jediná shodnost $\varphi : E_2 \to E_2$ taková, že $\varphi(f(s_0), e_1(s_0), e_2(s_0)) = (\overline{f}(s_0), \overline{e}_1(s_0), \overline{e}_2(s_0))$. Pak $\overline{\mathcal{C}}$ a $\varphi(\mathcal{C})$ splňují tutéž soustavu diferenciálních rovnic s touž počáteční podmínkou. Jedná se proto o totéž řešení, takže $\overline{\mathcal{C}} = \varphi(\mathcal{C})$. □

Podmínka že $\mathcal{C}$ i $\overline{\mathcal{C}}$ jsou bez inflexních bodů je podstatná. Např. křivky zadané explicitně rovnicemi $y = x^3$, $y = |x^3|$ jsou třídy C^2, mají stejnou křivost, ale shodné nejsou.

Věta 8.6. *Nechť $\kappa : I \to \mathbb{R}$ je kladná funkce třídy C^r. Pak lokálně existuje taková křivka $\mathcal{C}$ parametrizovaná obloukem na I, že κ je její křivost.*

Idea důkazu. Řešíme soustavu diferenciálních rovnic (6). □

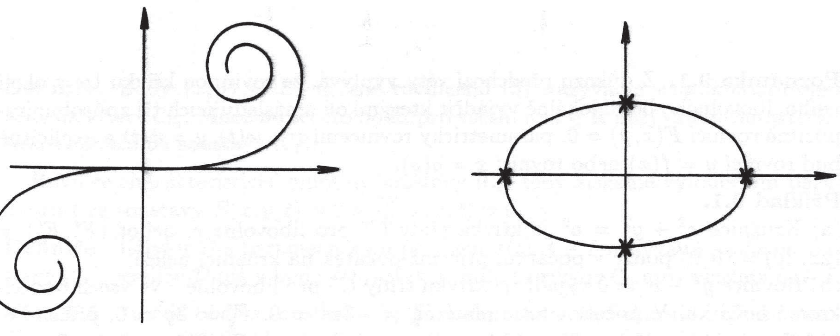
Lokálně je tedy rovinná křivka úplně určena svou křivostí. Globálně nemusí být křivka z předchozi věty jednoduchá. Např. pro $\kappa = \frac{1}{r}$ dostaneme kružnici $(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r})$, kterou pro $t \in (-\infty, \infty)$ obíháme stále dokola.

Příklad 8.1. Najdeme přirozenou parametrizaci $f(s) = (x(s), y(s))$ křivky s předepsanou křivostí $\kappa(s)$. Platí $e_1 = f'(s) = (x'(s), y'(s))$ a protože $f(s)$ je přirozená parametrizace, tak vektor $e_1(s)$ je pro každé s jednotkový. Této podmínce vyhovuje např. vektor $e_1(s) = f'(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$, kde φ je nějaká funkce. Pak $e_1'(s) = \varphi'(s)(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$. Podle Důsledku 8.1 je $\kappa(s) = \|e_1'(s)\|$, takže $\varphi'(s) = \kappa(s)$, $\varphi(s) = \int \kappa(s)ds$. Máme tedy $x'(s) = \cos\int\kappa(s)ds$, $y'(s) = \sin\int\kappa(s)ds$. Položíme-li $\alpha(s) = \int\kappa(s)ds$, tak hledaná parametrizace je tvaru $f(s) = \left(\int\cos\alpha(s)ds, \int\sin\alpha(s)ds\right)$.

Příklad 8.2 (Klotoida)**.** Klotoida je křivka, jejíž křivost je v každém bodě přímo úměrná oblouku (Obr. 9), tj. $\kappa(s) = As$, $A > 0$, $s \in (0, \infty)$ je oblouk. Určíme její parametrizaci. Podle předchozího příkladu je $\alpha(s) = \int\kappa(s)ds = \frac{As^2}{2}$, takže přirozená parametrizace klotoidy je $f(s) = \left(\int\limits_0^s \cos\frac{At^2}{2}dt, \int\limits_0^s \sin\frac{At^2}{2}dt\right)$. Vidíme, že integrály v nalezené parametrizaci klotoidy jsou vyšší funkce (tzv. Fresnelovy integrály).

Definice. Neinflexní bod křivky $\mathcal{C}$, v němž oskulační kružnice má styk 3. řádu s $\mathcal{C}$, nazýváme *vrcholem* křivky $\mathcal{C}$.

Název pochází z toho, že u regulárních kuželoseček se jedná právě o vrcholy v klasickém slova smyslu.



Obr. 9: Klotoida a Obr. 10: Vrcholy elipsy

Věta 8.7. *Neinflexní bod $f(s_0) \in \mathcal{C}$ je vrcholem právě když $\frac{d\kappa(s_0)}{ds} = 0$.*

Důkaz. Pokračujme nejdříve v důkazu Věty 8.2 napsáním podmínky pro styk 3. řádu: $\frac{d^3f}{ds^3} = \frac{1}{r^2}(\sin\frac{s}{r}, -\cos\frac{s}{r})$. Protože $\kappa = \frac{1}{r}$, tak $\frac{d^3f}{ds^3} = -\kappa^2 e_1$. Na druhou stranu, z Frenetových vzorců plyne, že $\frac{d^2f}{ds^2} = \kappa e_2$, takže $\frac{d^3f}{ds^3} = \frac{d\kappa}{ds}e_2 - \kappa^2 e_1$. □

Věta 8.8. *Při libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky $\mathcal{C}$ platí, že neinflexní bod $f(t_0) \in \mathcal{C}$ je vrcholem právě když $\frac{d\kappa(t_0)}{dt} = 0$.*

Důkaz. Je-li $t = \varphi(s)$ změna parametru na oblouk, tak $\frac{d\kappa(s_0)}{ds} = \frac{d\kappa(t_0)}{dt} \cdot \frac{d\varphi(s_0)}{ds}$. Protože se jedná o reparametrizaci, tak $\frac{d\varphi(s_0)}{ds} \neq 0$. □

Tedy vrcholy jsou body, v nichž křivost nabývá extrémů. Např. klasické vrcholy elipsy jsou právě její vrcholy ve smyslu výše uvedené definice, neboť v těchto bodech dosahuje křivost svého maxima (minima), viz Obr. 10. Křivost kružnice je konstantní, takže platí

Věta 8.9. *Jednoduchá křivka, jejíž každý bod je vrcholem, je částí kružnice.*

9 OBÁLKY

Připomeňme nejdříve, že funkce třídy C^r na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^2$ má na U spojité parciální derivace až do řádu r včetně.

Věta 9.1. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $F : U \to \mathbb{R}$ je funkce třídy C^r na U taková, že množina $\mathcal{C}$ o rovnici $F(x, y) = 0$ je neprázdná a platí $\left(\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right) \neq \overrightarrow{0}$ pro každé $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. Pak $\mathcal{C}$ je křivka třídy C^r.*

Důkaz. Nechť $F(x_0, y_0) = 0$ a nechť např. $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$. Podle věty o implicitní funkci lze množinu $\mathcal{C}$ lokálně popsat rovnicí $y = f(x)$, kde $f(x)$ je funkce třídy C^r. Odpovídající lokální parametrizace je pak $x = t$, $y = f(t)$, přičemž $\frac{d}{dt}(t, f(t)) = (1, \frac{df}{dt}) \neq \overrightarrow{0}$. V případě že $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x} \neq 0$, spočteme $x = g(y)$ rovněž podle věty o implicitní funkci. □

Křivka $\mathcal{C}$ je vlastně průnikem roviny $z = 0$ s grafem funkce $z = F(x, y)$.

Poznámka 9.1. Z důkazu předchozí věty vyplývá, že rovinnou křivku lze v okolí jejího libovolného bodu lokálně vyjádřit kterýmkoli z následujících tří způsobů: implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, parametricky rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ a explicitně buď rovnicí $y = f(x)$ nebo rovnicí $x = g(y)$.

Příklad 9.1.
(a) Kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ je křivka třídy C^r pro libovolné r, neboť $(F'_x, F'_y) = (2x, 2y) = (0, 0)$ pouze v počátku, přičemž počátek na kružnici neleží.
(b) Rovnice $y^2 - x^3 = 0$ vyjadřuje křivku třídy C^r pro libovolné r ve všech bodech kromě počátku. V počátku totiž platí $F'_x = -3x^2 = 0$, $F'_y = 2y = 0$, přičemž v žádném jiném bodě kromě počátku nenastane rovnost $(F'_x, F'_y) = (0, 0)$. Přitom rovnice $y^2 - x^3 = 0$ je implicitním vyjádřením semikubické paraboly $x = t^2$, $y = t^3$, která má v počátku bod vratu, viz Obr. 1.
(c) Rovnice $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ vyjadřuje křivku třídy C^r ve všech bodech kromě počátku. Jedná se o Bernoulliovu lemniskatu s bodem samoprotnutí v počátku, viz Obr. 6. Necháváme na píli čtenáře, aby ověřil, že v žádném jiném bodě kromě počátku nenastane rovnost $(F'_x, F'_y) = (0, 0)$.

Věta 9.2. *Tečna ke křivce $F(x, y) = 0$ v bodě (x_0, y_0) má rovnici*

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = 0. \tag{1}$$

Tedy tečný vektor je kolineární s vektorem $(F'_y, -F'_x)$.

Důkaz. Je-li $(f^1(t), f^2(t))$ parametrizace $\mathcal{C}$, tak $F(f^1(t), f^2(t)) = 0$. Derivováním dostaneme $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{df^1(t_0)}{dt} + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{df^2(t_0)}{dt} = 0$. Tedy (1) je rovnice přímky jdoucí bodem (x_0, y_0) ve směru $\frac{df(t_0)}{dt}$. □

S využitím věty o implicitní funkci snadno dokážeme

Lemma 9.1 (Křivost křivky zadané implicitně rovnicí)**.** *$F(x, y) = 0$ je*

$$\kappa = \frac{\left|F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x\right|}{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nyní budeme uvažovat jednoparametrickou soustavu křivek v rovině a studovat její obálku, tj. křivku, která se všech křivek této soustavy dotýká (má se všemi křivkami styk 1. řádu). Předpokládejme, že každá křivka soustavy je pro daný parametr $t \in \mathbb{R}$ zadána rovnicí

$$F(x, y, t) = 0 \tag{2}$$

kde každá funkce $F(x, y, t)$ je definována pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a $t \in \mathbb{R}$ a je třídy C^r pro dostatečně velké r. Symbolem $\mathcal{C}_{t_0}$ budeme značit křivku o rovnici $F(x, y, t_0) = 0$ a symbolem $(\mathcal{C}_t)$ celou soustavu (2). Společné body křivek $\mathcal{C}_{t_0}$ a $\mathcal{C}_t$ pro $t \neq t_0$ jsou určeny dvojicí rovnic $F(x, y, t_0) = 0$, $F(x, y, t) = 0$. Tato soustava je zřejmě ekvivalentní soustavě

$$F(x, y, t_0) = 0, \qquad \frac{F(x, y, t) - F(x, y, t_0)}{t - t_0} = 0.$$

V limitě pro $t \to t_0$ získáme rovnice

$$F(x, y, t_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t_0) = 0. \tag{3}$$

Definice. Body $(x, y) \in E_2$ určené rovnicemi (3) nazýváme *charakteristickými body* na křivce $\mathcal{C}_{t_0}$. Množinu těchto bodů pro všechna $t_0 \in \mathbb{R}$ nazýváme *charakteristickou množinou* soustavy $(\mathcal{C}_t)$.

Rovnice charakteristické množiny soustavy $(\mathcal{C}_t)$ tedy získáme vyloučením parametru t ze soustavy $F(x, y, t) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$.

Definice. Křivku $\mathcal{D}$ s parametrickým popisem $f(t)$, $t \in I$ nazýváme *obálkou* soustavy $(\mathcal{C}_t)$, jestliže $\mathcal{D}$ má v bodě $f(t_0)$ styk 1. řádu s křivkou $\mathcal{C}_{t_0}$ pro všechna $t_0 \in I$.

Věta 9.3. *Každá obálka soustavy $(\mathcal{C}_t)$ je podmnožinou její charakteristické množiny. Naopak, je-li $f(t)$ taková křivka, že $f(t_0)$ splňuje (3) pro každé t_0, tak $f(t)$ je obálkou soustavy $(\mathcal{C}_t)$.*

Důkaz. Podmínka aby bod $f(t)$ ležel na křivce $\mathcal{C}_t$ je

$$F(f^1(t), f^2(t), t) = 0. \tag{4}$$

Dále, podmínka styku 1. řádu v t_0 je, že vektor $\frac{df(t_0)}{dt}$ je kolineární s tečnou (1), tj.

$$\frac{\partial F(f^1(t_0), f^2(t_0), t_0)}{\partial x}\frac{df^1(t_0)}{dt} + \frac{\partial F(f^1(t_0), f^2(t_0), t_0)}{\partial y}\frac{df^2(t_0)}{dt} = 0. \tag{5}$$

Derivací rovnice (4) dostaneme

$$\frac{\partial F(f^1(t), f^2(t), t)}{\partial x}\frac{df^1(t)}{dt} + \frac{\partial F(f^1(t), f^2(t), t)}{\partial y}\frac{df^2(t)}{dt} + \frac{\partial F(f^1(t), f^2(t), t)}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Je-li $f(t)$ obálka, tak z (5) při dosazení $t_0 = t$ a z (6) plyne

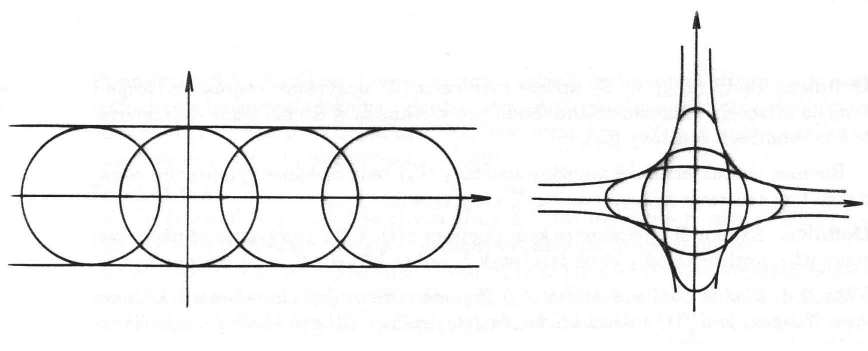
$$\frac{\partial F(f^1(t), f^2(t), t)}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Tedy obálka je součástí charakteristické množiny. Obráceně, jestliže $f(t)$ splňuje (4) a (7), tak z (6) plyne (5) při dosazení $t = t_0$, takže $f(t)$ je obálka. $\square$

Při hledání obálky se tedy z rovnic (3) snažíme vyloučit parametr t. Pokud dostaneme jedinou rovnici $G(x, y) = 0$ která je implicitním vyjádřením nějaké křivky, tak je tato křivka hledanou obálkou. Z rovnic (3) však nelze eliminovat t ve všech případech. Např. rovnice $F(x, y, t) = x^2 + y^2 - t = 0$ představují pro $t > 0$ jednoparametrickou soustavu soustředných kružnic, které evidentně nemají obálku. Skutečně, rovnice $F = 0$ a $F'_t = 0$ nemají společné řešení.

Příklad 9.2. Uvažujme soustavu kružnic konstantního poloměru se středy na ose x. Pak rovnice této soustavy křivek je $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - r^2 = 0$. Derivací podle t dostáváme $\frac{\partial F}{\partial t} = 2(x - t) = 0$ a dosazení do první rovnice dává $y^2 = r^2$. Tedy obálku tvoří dvě přímky $y = \pm r$, viz Obr. 11.

Na Obr. 12 je znázorněna obálka soustavy souosých elips, jejichž poloosy mají konstantní součin (jedná se o cvičení II/37).



Obr. 11: Obálka z Příkladu 9.2 a Obr. 12

Příklad 9.3. Ukážeme, že obálkou jednoparametrické soustavy tečen křivky $\mathcal{C}$ bez inflexních bodů je samotná křivka $\mathcal{C}$. Je-li $f(s)$ parametrizace $\mathcal{C}$ obloukem a $Y = (x, y)$ bod nějaké tečny křivky $\mathcal{C}$, tak vektor $Y - f(s)$ má směr této tečny, takže je kolmý k vektoru e_2. Soustava tečen křivky $\mathcal{C}$ má tedy rovnici $F(x, y, s) = e_2(s) \cdot (Y - f(s)) = 0$. Derivací dostaneme (s využitím Frenetových vzorců): $\frac{\partial F}{\partial s} = -\kappa e_1(s) \cdot (Y - f(s)) - e_2(s) \cdot e_1(s) = 0$. Vektor $Y - f(s)$ je tedy kolmý k e_1 i e_2 a proto je nulový. Odvodili jsme, že charakteristickou množinou soustavy tečen křivky $\mathcal{C}$ je samotná křivka $\mathcal{C}$. Podle Věty 9.3 je tato množina i obálkou.

Věta 9.4. *Charakteristickou množinou soustavy normál křivky $\mathcal{C}$ bez inflexních bodů je množina středů oskulačních kružnic $\mathcal{C}$.*

Důkaz. Soustava normál má rovnici $F(x, y, s) = e_1(s) \cdot (Y - f(s)) = 0$. Pak $\frac{\partial F}{\partial s} = \kappa e_2(s) \cdot (Y - f(s)) - e_1(s) \cdot e_1(s) = 0$ neboli $\kappa e_2(s) \cdot (Y - f(s)) = 1$. Bod $Y = f(s) + c e_2(s)$ normály splňuje tuto rovnici právě když $\kappa c = 1$, tj. $c = \frac{1}{\kappa}$. Podle Věty 8.2 je však bod $f(s) = \frac{1}{\kappa} e_2(s)$ středem oskulační kružnice. $\square$

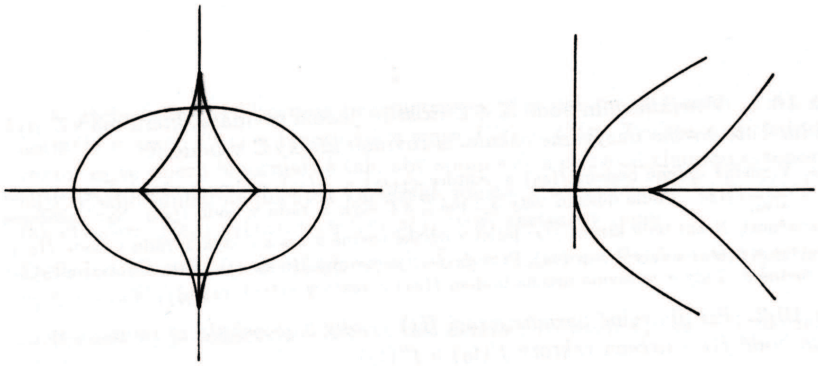
Věta 9.5. *Obálkou soustavy normál křivky $\mathcal{C}$ bez inflexních bodů a bez vrcholů je množina středů oskulačních kružnic křivky $\mathcal{C}$.*

Důkaz. Podle Věty 9.3 zbývá ukázat, za jakých předpokladů je charakteristická množina z předchozí věty křivkou. Rychlost pohybu $g(s) := f(s) + \frac{1}{\kappa(s)} e_2(s)$ je $e_1(s) + \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' e_2(s) - \frac{1}{\kappa} \cdot \kappa e_1(s) = \left(\frac{1}{\kappa}\right)' e_2(s)$. Pak pohyb $g(s)$ je regulární právě když $\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \neq 0$, tj. právě když $\kappa' \neq 0$. $\square$

Definice. Obálku soustavy normál z předchozí věty nazýváme *evolutou* křivky $\mathcal{C}$.

Při libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky $\mathcal{C}$ jsou parametrické rovnice její evoluty určeny pomocí vzorců z Věty 8.3. Na kružnici je každý bod vrcholem, takže v případě kružnice evoluta neexistuje. Evoluta elipsy je nakreslena na Obr. 13 (viz cvičení II/35).

Příklad 9.4. Určíme křivost, vrcholy a evolutu paraboly $y^2 = 2px$. Parametrizace paraboly je např. $f(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$. Pak $f'(t) = \left(\frac{t}{p}, 1\right)$ a $f''(t) = \left(\frac{1}{p}, 0\right)$. Podle Věty 8.3 je $\kappa = p^2(t^2+p^2)^{-\frac{3}{2}}$. Dále, $\kappa' = 0$ pro $t = 0$, takže podle Věty 8.8 je vrcholem bod $(0, 0)$. Podle Věty 8.3 máme parametrické rovnice evoluty $x = \frac{3t^2+2p^2}{2p}$, $y = -\frac{t^3}{p^2}$, což je rovnice semikubické paraboly s bodem vratu v počátku, viz Obr. 14.



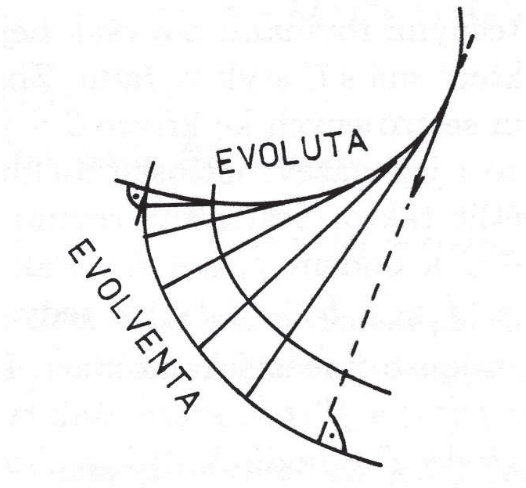
Obr. 13: Evoluta elipsy a Obr. 14: Evoluta paraboly

Definice. Křivka $\mathcal{K}$, která protíná kolmo všechny tečny křivky $\mathcal{C}$, se nazývá *evolventou* křivky $\mathcal{C}$.

Věta 9.6. *Je-li $f(s)$ parametrizace $\mathcal{C}$ obloukem, tak evolventa $\mathcal{K}$ křivky $\mathcal{C}$ má parametrizaci $f(s) + (c - s)\frac{df}{ds}$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolné.*

Důkaz. Parametrizace $\mathcal{K}$ je zřejmě $g(s) = f(s) + \lambda(s) f'(s)$, kde $\lambda(s)$ je neznámá funkce. Vektory $f'(s)$ a $g'(s)$ musí být kolmé, takže jednoduchým výpočtem odtud dostaneme $1 + \lambda'(s) = 0$, tj. $\lambda(s) = -s + c$. $\square$

Tedy k dané křivce $\mathcal{C}$ existuje nekonečně mnoho evolvent. Všechny tyto evolventy mají společné normály, které jsou tečnami křivky $\mathcal{C}$. Z definice dále bezprostředně vyplývá: *Je-li $\mathcal{K}$ evolventou křivky $\mathcal{C}$, pak evolutou křivky $\mathcal{K}$ je $\mathcal{C}$*, viz Obr. 15.



Obr. 15: Evoluta a evolventa

10 FRENETOVY ROVNICE PROSTOROVÉ KŘIVKY

V této kapitole se budeme zabývat křivkou $\mathcal{C}$ v E_3 s lokální parametrizací $f(t)$. Při teoretických úvahách budeme využívat parametrizace obloukem, který budeme značit symbolem s.

Označme stejně jako v 8. kapitole $e_1 = \frac{df}{ds}$. Podle Věty 7.3 je bod $f(s_0)$ inflexní právě když $\frac{de_1(s_0)}{ds} = \overrightarrow{0}$. Analogicky jako ve Větě 8.1 se ukáže, že při libovolném parametru t je inflexní bod charakterizován kolineárností vektorů $f'(t_0)$ a $f''(t_0)$. V neinflexním bodě $f(s_0)$ dále definujme $e_2(s_0)$ jako jednotkový vektor souhlasně rovnoběžný s $\frac{de_1(s_0)}{ds}$. Pak platí (stejně jako (2) v 8. kapitole)

$$\frac{de_1(s_0)}{ds} = \kappa(s_0)e_2(s_0), \quad \kappa(s_0) > 0. \tag{1}$$

Definice. Číslo $\kappa(s_0)$ nazýváme *křivostí* křivky $\mathcal{C}$ v neinflexním bodě s_0. V inflexním bodě klademe $\kappa = 0$. Vektor $\frac{de_1}{ds} = \frac{d^2 f}{ds^2}$ se nazývá *vektor křivosti.*

Definice. Řekneme, že *křivka $\mathcal{C} \subset E_3$ má s rovinou σ styk řádu k*, jestliže v rovině σ existuje křivka $\overline{\mathcal{C}}$, která má s $\mathcal{C}$ styk řádu k.

Věta 10.1. *V neinflexním bodě $X \in \mathcal{C}$ existuje jediná rovina ω, která má s $\mathcal{C}$ styk 2. řádu. Tuto rovinu nazýváme oskulační rovinou křivky $\mathcal{C}$ v bodě X.*

Důkaz. V rovině určené bodem $f(s_0)$ a vektory $e_1(s_0)$ a $e_2(s_0)$ zvolme kružnici $\overline{\mathcal{C}}$ se středem $f(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}e_2(s_0)$. Podle důkazu Věty 8.2 má $\overline{\mathcal{C}}$ s $\mathcal{C}$ styk 2. řádu v bodě $f(s_0)$. Nyní ukážeme jednoznačnost. Nechť tedy křivka $\overline{f}(s)$ ležící v nějaké rovině σ má s $\mathcal{C}$ styk 2. řádu v bodě $f(s_0)$. Pak $\overline{e}_1(s_0) = e_1(s_0)$ a $\overline{e}_2(s_0) = e_2(s_0)$. Protože $\overline{f}(s)$ je rovinná křivka, tak vektory $\overline{e}_1(s_0)$ a $\overline{e}_2(s_0)$ leží v rovině σ. Tedy σ je rovina určená bodem $f(s_0)$ a vektory $e_1(s_0)$, $e_2(s_0)$. $\square$

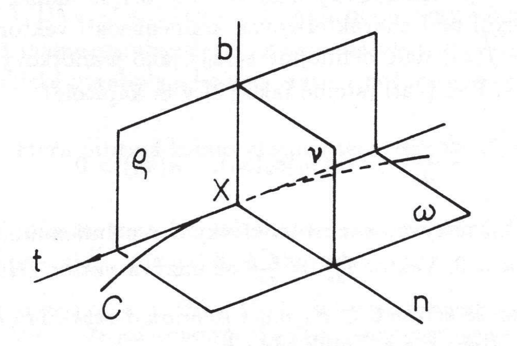
Věta 10.2. *Při libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky $\mathcal{C}$ je oskulační rovina v neinflexním bodě $f(t_0)$ určena vektory $f'(t_0)$ a $f''(t_0)$.*

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z výrazů (3) v 8. kapitole. □

Poznámka 10.1. Každou rovinu procházející tečnou t křivky $\mathcal{C}$ nazýváme *tečnou rovinou křivky* $\mathcal{C}$. Mezi těmito tečnými rovinami má však největší význam oskulační rovina: je to jediná rovina, která má s $\mathcal{C}$ styk 2. řádu. Zhruba řečeno, oskulační rovina se ze všech tečných rovin sestrojených ke křivce $\mathcal{C}$ v jejím neinflexním bodě nejvíce „přimyká“ (vyjadřuje to i její název: latinské osculum znamená polibek). Toto přimykání můžeme vysvětlit takto: Sestrojme rovinu $\tau(h)$ procházející tečnou t křivky $\mathcal{C}$ v bodě $f(t_0) \in \mathcal{C}$ a bodem $f(t_0 + h)$. Pak rovina $\tau(h)$ je určena bodem $f(t_0)$ a vektory $f'(t_0)$ a $(f(t_0+h) - f(t_0))$ a tedy rovněž vektory $f'(t_0)$, $2\frac{f(t_0+h)-f(t_0)-hf'(t_0)}{h^2}$, které jsou jejich lineární kombinací. Limitní polohou těchto vektorů pro $h \to 0$ jsou vektory $f'(t_0)$ a $f''(t_0)$, které však tvoří zaměření oskulační roviny. Tedy oskulační rovina křivky $\mathcal{C}$ v bodě $X \in \mathcal{C}$ je „limitní polohou“ tečných rovin sestrojených k $\mathcal{C}$ v bodě X, jestliže jejich další průsečík s křivkou $\mathcal{C}$ se blíží k bodu X. Poznamenejme nakonec, že v inflexním bodě má tečna s křivkou $\mathcal{C}$ styk 2. řádu, takže v inflexním bodě je každá tečná rovina zároveň i oskulační rovinou.

Nyní můžeme v neinflexním bodě $X \in \mathcal{C}$ zavést následující pojmy (viz Obr. 16).

Definice.
(a) Rovinu ν kolmou k tečně t nazýváme *normálovou rovinou.*
(b) Průsečnici $n = \nu \cap \omega$ normálové roviny ν s oskulační rovinou ω nazýváme *hlavní normálou.*
(c) Přímku procházející bodem X kolmo k oskulační rovině ω nazýváme *binormálou* a značíme b.
(d) Rovinu ρ určenou tečnou t a binormálou b nazýváme *rektifikační rovinou.*



Obr. 16

Je zřejmé, že při libovolné parametrizaci $f(t)$ má tečna t směr $f'(t)$, hlavní normála n směr $f''(t)$ a binormála b směr $f'(t) \times f''(t)$. Zvolme nyní jednotkový vektor e_3 ve směru binormály b tak, aby spolu s e_1 a e_2 tvořil kladnou ortonormální bázi. Pokud umístíme počátek kartézské soustavy souřadnic do bodu $f(s_0) \in E_3$, tak čtveřice $\langle f(s_0); e_1(s_0), s_2(s_0), e_3(s_0)\rangle$ tvoří kartézský reper.

Definice. Reper $\langle f(s_0); e_1(s_0), e_2(s_0), e_3(s_0)\rangle$ nazýváme *Frenetovým reperem* křivky $\mathcal{C}$ v bodě $f(s_0)$.

Protože e_2 je jednotkový vektor, tak derivací rovnosti $e_2 \cdot e_2 = 1$ ukážeme, že $\frac{de_2}{ds} \perp e_2$.

Lemma 10.1. *Platí*

$$\frac{de_2}{ds} = -\kappa(s)e_1 + \tau(s)e_3, \tag{2}$$

kde $\kappa(s)$ je funkce z (1).

Důkaz. Protože $\frac{de_2}{ds} \perp e_2$, tak vektor $\frac{de_2}{ds}$ je tvaru

$$\frac{de_2}{ds} = c(s)e_1 + \tau(s)e_3, \tag{3}$$

kde $c(s)$ a $\tau(s)$ jsou nějaké funkce. Derivací podmínky pro kolmost $e_1 \cdot e_2 = 0$ dostaneme $\frac{de_1}{ds} \cdot e_2 + e_1 \cdot \frac{de_2}{ds} = 0$. Dosazením (1) a (3) a s využitím kolmosti vektorů e_1 a e_3 obdržíme $\kappa(s) + c(s) = 0$ neboli $c(s) = -\kappa(s)$. □

Definice. Funkci $\tau(s)$ nazýváme *torzí* křivky $\mathcal{C}$ bez inflexních bodů.

V inflexním bodě není torze τ definována.

Věta 10.3 (Frenetovy rovnice)**.** *Pro křivku bez inflexních bodů platí*

$$\frac{df}{ds} = e_1, \quad \frac{de_1}{ds} = \kappa e_2, \quad \frac{de_2}{ds} = -\kappa e_1 + \tau e_3, \quad \frac{de_3}{ds} = -\tau e_2 \tag{4}$$

kde $\kappa > 0$ a τ je libovolné.

Důkaz. Zbývá dokázat poslední rovnost. Protože e_3 je jednotkový vektor, tak $\frac{de_3}{ds} \perp e_3$, takže $\frac{de_3}{ds} = c_1(s)e_1 + c_2(s)e_2$. Derivací vztahu $e_1 \cdot e_3 = 0$ dostaneme $\frac{de_1}{ds} \cdot e_3 + e_1 \cdot \frac{de_3}{ds} = 0$. Odtud bezprosředně obdržíme $c_1(s) = 0$. Dále, derivace rovnosti $e_2 \cdot e_3 = 0$ dává $\frac{de_2}{ds} \cdot e_3 + e_2 \cdot \frac{de_3}{ds} = 0$. Odtud plyne $\tau + c_2 = 0$. □

Definice. Bod $f(s_0)$, v němž platí $\tau(s_0) = 0$ nazýváme *planárním bodem křivky* $\mathcal{C}$. *Rovinnou křivkou* v E_3 rozumíme křivku, která leží v nějaké rovině $\sigma \subset E_3$.

Věta 10.4. *Jednoduchá křivka $f(s)$ je rovinná, právě když každý její bod je planární.*

Důkaz. I. Je-li $f(s)$ rovinná, tak e_3 je konstantní vektor, takže z posledního vztahu (4) plyne že $\tau = 0$.
II. Nechť naopak $\tau = 0$ všude na $\mathcal{C}$. Z posledního vztahu (4) plyne, že $\frac{de_3}{ds} = \overrightarrow{0}$, takže e_3 je konstantní vektor. Uvažujme nyní rovinu σ zadanou bodem $f(s_0)$, která je kolmá k vektoru e_3. Je-li $Y \in E_3$ libovolný bod, tak $Y \in \sigma$ právě když $e_3 \cdot (Y - f(s_0)) = 0$. Uvažujme dále funkci $\varphi(s) = e_3 \cdot (f(s) - f(s_0))$. Pak $\frac{d\varphi}{ds} = e_3 \cdot e_1(s) = 0$, neboť vektory e_3 a e_1 jsou kolmé. Tedy φ je konstanta a pro $s = s_0$ máme $\varphi(s_0) = e_3 \cdot \overrightarrow{0} = 0$. Tedy $\varphi = 0$ všude, takže $\mathcal{C}$ leží v σ. □

Všimněme si, že v případě rovinné křivky (tj. pro $\tau = 0$) přejdou Frenetovy rovnice (4) na Frenetovy rovnice rovinné křivky.

Poznámka 10.2. Z Frenetových vzorců bezprostředně vyplývá $\frac{df}{ds} = e_1$, $\frac{d^2f}{ds^2} = \kappa e_2$, $\frac{d^3f}{ds^3} = \frac{d}{ds}(\kappa e_2) = \frac{d\kappa}{ds}e_2 + \kappa(-\kappa e_1 + \tau e_3)$. Pro $s = s_0$ tedy dostáváme „vektorový Taylorův rozvoj“

$$f(s) = f(0) + se_1(0) + \frac{\kappa(0)}{2}s^2e_2(0) + \\ + \frac{s^3}{6}\left[\frac{d\kappa(0)}{ds}e_2(0) - \kappa^2(0)e_1(0) + \kappa(0)\tau(0)e_3(0)\right] + o(s^3) \quad (5)$$

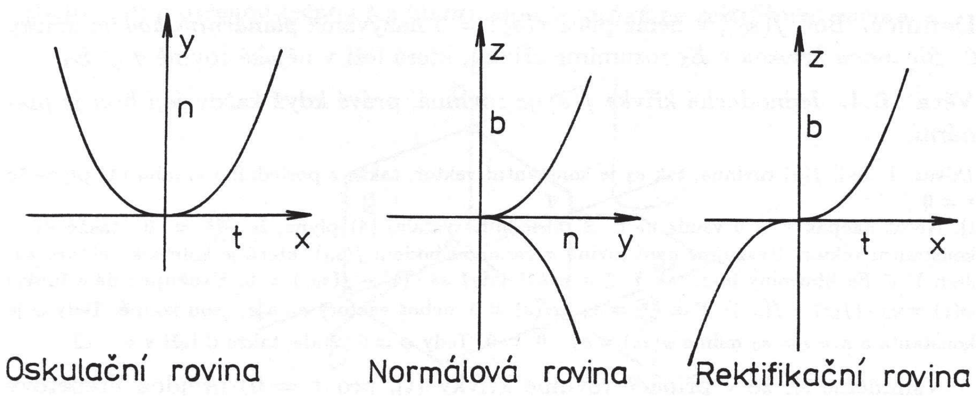
kde $o(s^3)$ znamená veličiny alespoň 4. řádu (tj. funkční hodnota a tři první derivace jsou nulové).

Věta 10.5. *Nechť x, y, z jsou souřadnice vzhledem k Frenetově reperu $\langle f(0); e_1(0), e_2(0), e_3(0)\rangle$. Pak křivka $f(s)$ je v okolí bodu $f(0)$ dána výrazy*

$$\begin{aligned} x &= s - \frac{\kappa^2(0)}{6}s^3 + o(s^3) \\ y &= \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{1}{6}\frac{d\kappa(0)}{ds}s^3 + o(s^3) \\ z &= \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 + o(s^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Důkaz. Tvrzení plyne z (5). □

Poznámka 10.3. Výrazy (6) představují tzv. lokální rozvoje křivky $f(s)$ v jejím Frenetově reperu. Dají se využít ke kolmé projekci dané křivky v okolí vyšetřovaného bodu do rovin generovaných Frenetovým reperem, viz Obr. 17. Např. kolmý průmět křivky do oskulační roviny lze přibližně ztotožnit s parabolou $x = s$, $y = \frac{\kappa(0)}{2}s^2$. Pro kolmý průmět do normálové roviny dostaneme semikubickou parabolu $y = \frac{\kappa(0)}{2}s^2$, $z = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3$ s bodem vratu v počátku. Kolmý průmět $f(s)$ do rektifikační roviny dává kubickou parabolu $x = s$, $z = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3$. V tomto případě je počátek inflexní bod.



Obr. 17: Kolmé průměty křivky do rovin určených Frenetovým reperem

Věta 10.6. *V neinflexním bodě je křivost prostorové křivky rovna křivosti jejího kolmého průmětu do oskulační roviny.*

Důkaz. Podle (6) má tento průmět parametrické vyjádření $g(s) = \left(s, \frac{\kappa(0)}{2}s^2\right) + o(s^2)$, takže $g'(0) = (1, 0)$, $g''(0) = (0, \kappa(0))$. Tvrzení pak plyne z Důsledku 8.1. □

Podobně se dokáže

Věta 10.7. *V neplanárním bodě $f(s_0) \in \mathcal{C}$ existuje v rektifikační rovině jediná kubická parabola $z = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}x^3$, která má s kolmým průmětem křivky $\mathcal{C}$ do rektifikační roviny styk 3. řádu.*

Věta 10.8. *Platí $|\tau(s_0)| = \left\| \frac{de_3(s_0)}{ds} \right\|$.*

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z poslední Frenetovy rovnice. □

Podle Věty 10.4 vyjadřuje torze τ odchylku křivky od roviny. Podle Věty 10.7 se jedná o odchylku od oskulační roviny, neboť výraz $\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}$ můžeme interpretovat jako „stoupání" kubické paraboly. Dále, podle Věty 10.8 torze vyjadřuje rychlost, s níž se mění (otáčí) jednotkový vektor binormály e_3.

Nyní odvodíme vzorce pro výpočet křivosti a torze při libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky $\mathcal{C}$. Přitom symbolem $u \times v$ značíme vektorový součin a symbolem $[u, v, w]$ vnější součin vektorů v E_3 (viz Příklad 2.2).

Věta 10.9. *Při libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky $\mathcal{C}$ platí*

$$\kappa = \frac{\|f' \times f''\|}{\|f'\|^3}, \qquad \tau = \frac{[f', f'', f''']}{\|f' \times f''\|^2}.$$

Důkaz. I. Z Frenetových vzorců plyne, že $\frac{df}{ds} = e_1$ a $\frac{d^2 f}{ds^2} = \kappa e_2$. Protože e_1 a e_2 jsou jednotkové kolmé vektory, tak κ je rovno plošnému obsahu obdélníka určeného vektory $\frac{df}{ds}$, $\frac{d^2 f}{ds^2}$. V E_3 je tento obsah roven velikosti vektorového součinu příslušných vektorů, takže $\kappa = \left\| \frac{df}{ds} \times \frac{d^2 f}{ds^2} \right\|$. Protože $u \times u = \overrightarrow{0}$, tak s využitím vztahu (3) z 8. kapitoly dostaneme

$$\frac{df}{ds} \times \frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{ds} \times \left[\frac{d^2 f}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{df}{dt}\frac{d^2 t}{ds^2} \right] = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \left(\frac{df}{dt} \times \frac{d^2 f}{dt^2}\right). \tag{7}$$

Dále, protože $1 = \left\| \frac{df}{ds} \right\| = \left\| \frac{df}{dt} \right\| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right|$, tak $\left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{1}{\left\|\frac{df}{dt}\right\|}$. Odtud a z (7) vyplývá vzorec pro výpočet křivosti.

II. Ze vzorců Poznámky 10.2 plyne

$$\left[\frac{df}{ds}, \frac{d^2 f}{ds^2}, \frac{d^3 f}{ds^3} \right] = \left[e_1, \kappa e_2, \frac{d\kappa}{ds}e_2 - \kappa^2 e_1 + \kappa\tau e_3 \right] = \kappa^2\tau[e_1, e_2, e_3] = \kappa^2\tau. \tag{8}$$

Vedle vztahů (3) z 8. kapitoly budeme ještě potřebovat analogický výraz pro $\frac{d^3 f}{ds^3}$. Protože ho budeme dosazovat do vnějšího součinu, tak nepotřebujeme přesně počítat výrazy, které se tam anulují. Derivováním $\frac{d^2 f}{ds^2}$ jako složené funkce obdržíme

$$\frac{d^3 f}{ds^3} = \frac{d^3 f}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + c_1\frac{d^2 f}{dt^2} + c_2\frac{df}{dt} \tag{9}$$

kde výrazy c_1 a c_2 nás nezajímají. Dosazení (3) z 8. kapitoly a rovnosti (9) do levé strany (8) dává

$$\kappa^2\tau = \left[f'\frac{dt}{ds}, f''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2, f'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \right].$$

Dosazením již dokázaného vzorce pro κ obdržíme vzorec pro τ. □

Poznamenejme, že v případě rovinné křivky je vzorec pro κ z Věty 8.3 speciálním případem vzorce pro výpočet κ z předchozí věty.

Důsledek 10.1. Neinflexní bod $f(t_0)$ křivky $\mathcal{C}$ je planární právě když vektory $f'(t_0)$, $f''(t_0)$ a $f'''(t_0)$ jsou lineárně závislé.

Příklad 10.1. Spočteme křivost a torzi šroubovice $f = (a\cos t, a\sin t, bt)$. Máme $f' = (-a\sin t, a\cos t, b)$, $f'' = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$, $f''' = (a\sin t, -a\cos t, 0)$. Dále $f' \times f'' = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$, $||f' \times f''|| = a\sqrt{a^2+b^2}$, $[f', f'', f'''] = ba^2$. Tedy $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$ a $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$. Vidíme tedy, že *šroubovice má konstantní křivost i torzi.*

Frenetovy rovnice (4) jsou diferenciální rovnice podobného typu jako v rovině. Stejně jako v rovině tedy dokážeme následující dvě tvrzení.

Věta 10.10. *Nechť $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ jsou křivky bez inflexních bodů, $f : I \to \mathcal{C}$ a $\overline{f} : I \to \overline{\mathcal{C}}$ jejich parametrizace obloukem na společném intervalu I a nechť $\kappa(s)$, $\tau(s)$ resp. $\overline{\kappa}(s)$, $\overline{\tau}(s)$ jsou jejich křivosti a torze. Pak $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ jsou shodné právě když $\kappa = \overline{\kappa}$ a $\tau = \overline{\tau}$ jsou tytéž funkce na I.*

Věta 10.11. *Nechť $\kappa : I \to \mathbb{R}$ je kladná funkce třídy C^r a $\tau : I \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce třídy C^r. Pak lokálně existuje taková křivka $\mathcal{C}$ parametrizovaná obloukem na I, že κ je její křivost a τ je její torze.*

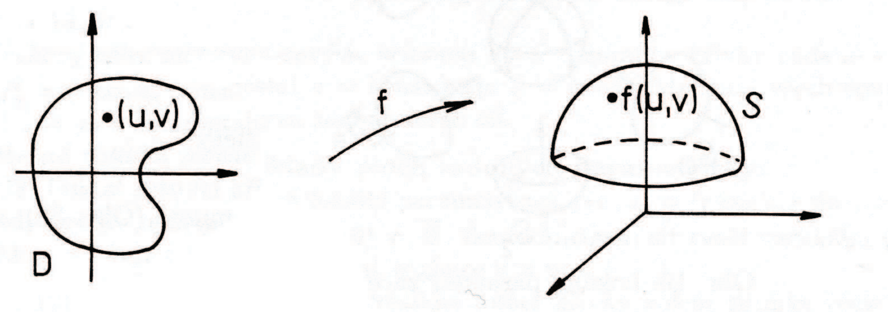
Tedy prostorová křivka je úplně určena svou torzí a křivostí. Podle předchozí věty je jedinou křivkou s konstantní křivostí a torzí šroubovice (v případě nulové torze je to pak kružnice jako šroubovice s nulovým zdvihem).

11 POJEM PLOCHY

V dalším se budeme zabývat plochami v E_3. Nejjednodušším příkladem plochy je rovina. Z analytické geometrie je známo, že k určení polohy bodu v rovině je třeba dvou parametrů (viz parametrické rovnice roviny), zatímco v případě přímky stačí parametr jeden. Proto zde nejdříve rozšíříme pojem vektorové funkce na vektorové funkce dvou proměnných. Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Pak zobrazení $w : D \to V_3$ se nazývá *vektorová funkce dvou proměnných*. Limitu a spojitost w definujeme podobně jako u reálné funkce dvou proměnných: Řekneme, že w má v bodě $(u_0, v_0) \in D$ limitu $w_0 \in V_3$ a píšeme $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} w(u, v) = w_0$ jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $(u, v) \in D$ taková že $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ platí $||w(u, v) - w(u_0, v_0)|| < \varepsilon$. Řekneme, že w je spojitá v bodě (u_0, v_0), jestliže $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} w(u, v) = w(u_0, v_0)$. Parciální derivace w definujeme vztahy $\frac{\partial w(u_0,v_0)}{\partial u} = \lim\limits_{u\to u_0} \frac{w(u,v_0)-w(u_0,v_0)}{u-u_0}$, $\frac{\partial w(u_0,v_0)}{\partial v} = \lim\limits_{v\to v_0} \frac{w(u_0,v)-w(u_0,v_0)}{v-v_0}$. Analogicky definujeme parciální derivace vyššího řádu. Řekneme dále, že vektorová funkce $w(u, v)$ je třídy C^r na D právě když má na D spojité všechny parciální derivace až do řádu r včetně. Je-li dále $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormální báze V_3, tak $w(u, v) = w^1(u, v)e_1 + w^2(u, v)e_2 + w^3(u, v)e_3$, kde reálné funkce $w^i(u, v) : D \to \mathbb{R}$ se nazývají složky w, píšeme $w(u, v) = (w^1(u, v), w^2(u, v), w^3(u, v))$. Pak spojitost a existence parciálních derivací vektorové funkce $w(u, v)$ je ekvivalentní s odpovídající vlastností všech složek w (analogie Věty 6.1).

Zvolme pevný počátek $P \in E_3$ a uvažujme zobrazení $f : D \to E_3$. Přiřaďme nyní každému $(u, v) \in D$ průvodič bodu $f(u, v)$, tj. vektor $(P - f(u, v)) \in V_3$. Dostaneme vektorovou funkci $\overrightarrow{Pf} : D \to V_3$, pro kterou již máme zavedeny parciální derivace. Definujeme pak $f'_u = \frac{\partial f}{\partial u} := \frac{\partial(\overrightarrow{Pf})}{\partial u}$, $f'_v = \frac{\partial f}{\partial v} := \frac{\partial(\overrightarrow{Pf})}{\partial v}$ (analogicky definujeme parciální derivace vyššího řádu). Stejně jako v případě pohybu $I \to V_n$ se ukáže nezávislost parciálních derivací f'_u a f'_v na volbě počátku. Řekneme dále, že $f : D \to E_3$ je třídy C^r, jestliže $\overrightarrow{Pf} : D \to V_3$ je vektorová funkce třídy C^r.

Definice. Množina $\mathcal{S} \subset E_3$ se nazývá *jednoduchá plocha třídy* C^r, jestliže existuje otevřená množina $D \subset \mathbb{R}^2$ a injektivní zobrazení $f : D \to E_3$ třídy C^r takové, že $\mathcal{S} = f(D)$ a vektory f'_u a f'_v jsou lineárně nezávislé v každém bodě z D. Množina D se nazývá *oblast parametrů* a zobrazení f *parametrizace* plochy $\mathcal{S}$.



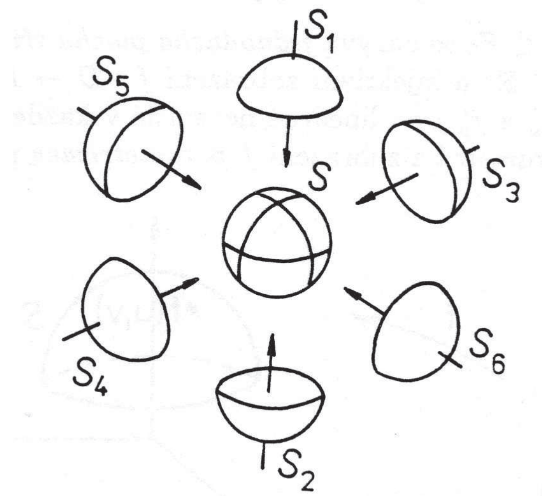
Obr. 18: Parametrizace plochy

Podmínku lineární nezávislosti vektorů f'_u a f'_v (která je analogií podmínky regularity pohybu) můžeme rovněž psát ve tvaru $f'_u \times f'_v \neq \overrightarrow{0}$. Ukážeme, co tato podmínka znamená v případě nejjednodušší plochy–roviny. Parametrizace roviny určené bodem $X \in E_3$ a nekolineárními vektory $a, b \in V_3$ je $f(u, v) = X + ua + vb$, takže $f'_u = a$, $f'_v = b$. V případě roviny tedy podmínka $f'_u \times f'_v \neq \overrightarrow{0}$ znamená nekolineárnost vektorů a, b, které tuto rovinu určují. Ve Větě 11.2 pak uvidíme, že v obecném případě libovolné plochy $\mathcal{S}$ tato podmínka znamená existenci tečné roviny k ploše $\mathcal{S}$ v libovolném bodě. V definici jednoduché plochy tedy vylučujeme body, v nichž neexistuje tečná rovina (různé hrany, ostré hroty a pod.). Injektivnost zobrazení f pak vyloučí samoprotnutí plochy. Přitom samotné zobrazení f můžeme považovat za „hladkou deformaci“ rovinné oblasti D na plochu $\mathcal{S}$.

Příklad 11.1 (Plocha zadaná explicitně)**.** Nechť $\mathcal{S}$ je graf funkce $z = g(x, y)$ třídy C^r na otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^2$. Pak $\mathcal{S}$ je jednoduchá plocha třídy C^r s parametrizací $f(u, v) = (u, v, g(u, v))$. Vektory $f'_u = (1, 0, g'_u)$, $f'_v = (0, 1, g'_v)$ jsou totiž vždy nekolineární.

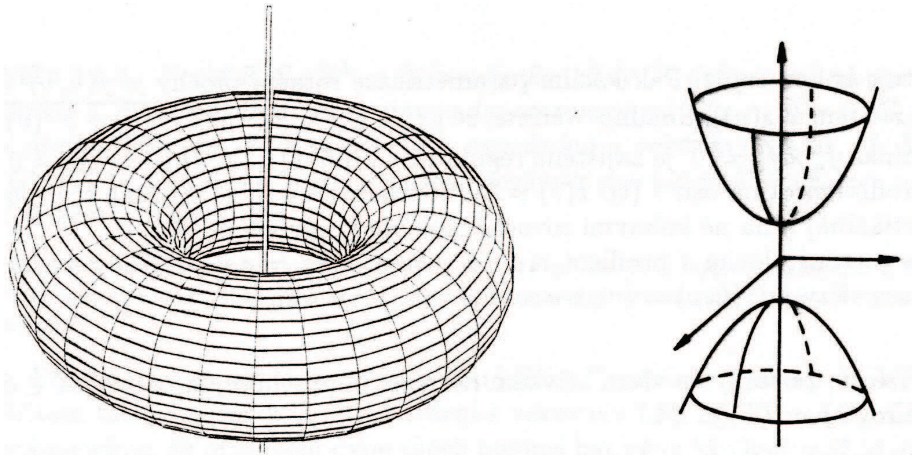
Definice. Množina $\mathcal{S} \subset E_3$ se nazývá *plocha třídy* C^r, jestliže pro každé $X \in \mathcal{S}$ existuje takové jeho okolí U_X, že $U_X \cap \mathcal{S}$ je jednoduchá plocha třídy C^r. Parametrizace průniků $U_X \cap \mathcal{S}$ nazýváme *lokálními parametrizacemi* plochy $\mathcal{S}$. Plocha $\mathcal{S}$ se nazývá *souvislá*, jestliže každé dva body na $\mathcal{S}$ lze spojit jednoduchou křivkou, která celá leží na $\mathcal{S}$.

Příklad 11.2. Ukážeme, že jednotková sféra $x^2+y^2+z^2 = 1$ je plocha třídy C^r. Pokud z rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vyjádříme z, tak dostaneme $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Toto jsou explicitní rovnice dvou jednoduchých pch $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ (horní a dolní polosféry), přičemž odpovídající parametrizace jsou $f_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, $f_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2})$, $u^2 + v^2 < 1$. Analogicky, vyjádřením y dostaneme polosféry $\mathcal{S}_3$ a $\mathcal{S}_4$ a vyjádřením z polosféry $\mathcal{S}_5$ a $\mathcal{S}_6$, viz Obr. 19. Odpovídající parametrizace $f_1(u, v), \ldots, f_6(u, v)$ pak tvoří lokální parametrizace sféry ve smyslu předchozí definice.



Obr. 19: Lokální parametrizace sféry

Příkladem souvislých ploch jsou sféra, paraboloid a anuloid (Obr. 20), zatímco dvojdílný hyperboloid (Obr. 21) je nesouvislá plocha.

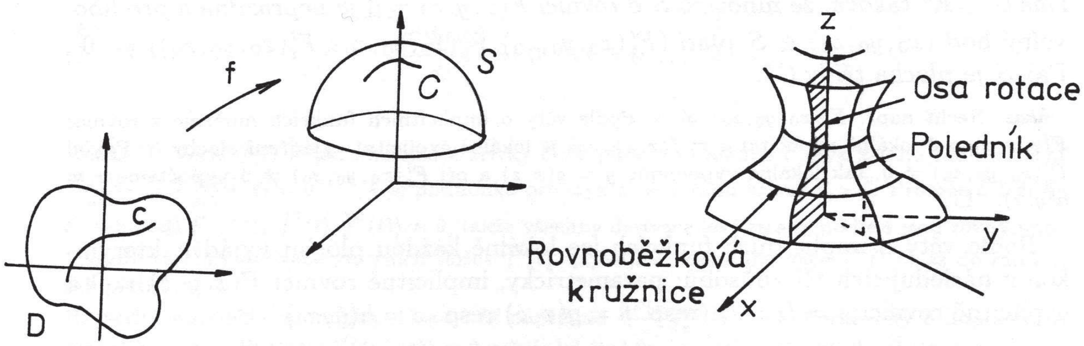


Obr. 20: Anuloid a Obr. 21: Dvojdílný hyperboloid

Věta 11.1. *Nechť c je jednoduchá křivka v oblasti parametrů D jednoduché plochy $\mathcal{S} = f(D)$. Nechť $\gamma : I \to D$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ je parametrizace křivky c a $f : D \to E_3$ je parametrizace plochy $\mathcal{S}$. Pak $f \circ \gamma : I \to E_3$, $(f \circ \gamma)(t) = f(u(t), v(t))$ je parametrizace křivky $\mathcal{C}$ ležící na ploše S.*

Důkaz. Stačí ověřit podmínku regularity $\frac{d(f\circ\gamma)}{dt} \neq \overrightarrow{0}$ $\forall t \in I$. Podle pravidla o derivování složené funkce máme $\frac{d(f\circ\gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$. Tvrzení pak plyne z lineární nezávislosti vektorů f'_u, f'_v a z regularity parametrického popisu křivky c. □

Tedy rovinná křivka c v oblasti parametrů D plochy $\mathcal{S}$ určuje křivku $\mathcal{C}$ ležící na ploše $\mathcal{S}$, viz Obr. 22.



Obr. 22: Křivka na ploše a Obr. 23: Rotační plocha

Definice. *Souřadnicovými křivkami* na $\mathcal{S}$ rozumíme křivky zadané v oblasti parametrů D rovnicemi $u =$ konst resp. $v =$ konst. Množina všech souřadnicových křivek na $\mathcal{S}$ se nazývá *souřadnicová síť*.

Příklad 11.3 (Příklady ploch zadaných parametricky).
(1) *Kruhový válec* má lokální parametrizaci $f(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v)$. Pak platí $f'_u \times f'_v = (r\cos u, r\sin u, 0) \neq \overrightarrow{0}$. Souřadnicovou síť tvoří vertikální přímky (površky) $u = u_0$ a horizontální kružnice $v = v_0$.

(2) *Obecná rotační plocha* vznikne rotací křivky kolem přímky (osy rotace), viz Obr. 23. Pokud rotující křivka leží v rovině procházející osou, tak se nazývá *profil*. Body profilu opisují při rotaci *rovnoběžkové kružnice*. Zvolme z za osu rotace a nechť $x = x(v)$, $z = z(v)$ je parametrizace jednoduché křivky neprotínající osu z, která rotuje kolem osy z. Pak lokální parametrizace rotační plochy je $f(u, v) = (x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v))$. Snadno ověříme, že $\|f'_u \times f'_v\| = |x(v)|\sqrt{x'^2(v) + z'^2(v)}$, takže podmínka $f'_u \times f'_v \neq \overrightarrow{0}$ je zajištěna regularitou profilu (tj. $x'^2(v) + z'^2(v) \neq 0$) a tím, že profil neprotíná osu z (tj. $x(v) \neq 0$). Souřadnicová síť je tvořena tzv. *poledníky* (vertikálně) a na ně kolmými rovnoběžkovými kružnicemi.
(3) *Sféra* je rotační plocha s profilem $x(v) = r\cos v$, $z(v) = r\sin v$. Tedy lokální parametrizace sféry je $f(u, v) = (r\cos v\cos u, r\cos v\sin u, r\sin v)$.
Nyní ukážeme, že tečny ke všem křivkám na ploše $\mathcal{S}$ procházející bodem $X \in \mathcal{S}$ leží v jedné rovině, viz Obr. 24.

Věta 11.2. *Koncové body tečných vektorů ke všem křivkám na ploše $\mathcal{S}$ v bodě $X \in \mathcal{S}$ vyplní rovinu, která se nazývá tečná rovina plochy $\mathcal{S}$ v bodě X a značí se symbolem $\tau_X\mathcal{S}$.*

Důkaz. Nechť $X = f(u_0, v_0)$ a uvažujme libovolnou křivku $u(t)$, $v(t)$ na ploše $\mathcal{S}$ takovou že $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$. Pak tečný vektor k této křivce v bodě X je lineární kombinací vektorů f'_u a f'_v, neboť $\frac{\partial f(u(t_0),v(t_0))}{\partial t} = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\frac{du(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{dv(t_0)}{dt}$. Protože vektory f'_u, f'_v jsou lineárně nezávislé, tak dostáváme rovinu určenou těmito vektory a bodem X.

□

Tedy tečná rovina $\tau_X\mathcal{S}$ je určena bodem $X \in \mathcal{S}$ a vektory f'_u a f'_v. Dále, $\tau_X\mathcal{S}$ je euklidovský prostor, jeho zaměření $T_X\mathcal{S} := \{\overrightarrow{AB}; A, B \in \tau_X\mathcal{S}\}$ je dvojrozměrný vektorový prostor, který nazýváme *tečným prostorem* plochy $\mathcal{S}$ v bodě X.

Věta 11.3. *Nechť $F = F(x, y, z)$ je funkce třídy C^r definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^3$ taková, že množina $\mathcal{S}$ o rovnici $F(x, y, z) = 0$ je neprázdná a pro libovolný bod $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ platí $(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)) \neq \overrightarrow{0}$. Pak $\mathcal{S}$ je plocha třídy C^r.*

Důkaz. Nechť např. $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích můžeme z rovnice $F(x, y, z) = 0$ lokálně vypočítat $z = f(x, y)$, což je lokálně explicitní vyjádření plochy $\mathcal{S}$. Pokud $F'_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, tak lokálně vypočteme $y = g(x, z)$ a při $F'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ vypočteme $x = h(y, z)$.

□

Podle věty o implicitních funkcích lze lokálně každou plochu vyjádřit kterýmkoli z následujících tří způsobů: parametricky, implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a explicitně rovnicí $z = f(x, y)$ (resp. $y = g(x, z)$ resp. $x = h(y, z)$).

Příklad 11.4. U sféry $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ je $(F'_x, F'_y, F'_z) = (2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0)$ pouze v počátku, který však není bodem sféry. Tedy sféra je plochou třídy C^r pro libovolné r. V případě kužele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ je $(F'_x, F'_y, F'_z) = (0, 0, 0)$ v počátku, takže kužel je plochou třídy C^r ve všech bodech kromě počátku.

Věta 11.4. *Rovnice tečné roviny v bodě (x_0, y_0, z_0) plochy $\mathcal{S}$ zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je*

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Důkaz. Uvažujme křivku $f(t) = (f^1(t), f^2(t), f^3(t))$ ležící na $\mathcal{S}$ a nechť t_0 je parametr odpovídající bodu (x_0, y_0, z_0). Pak $F(f^1(t), f^2(t), f^3(t)) = 0$ a derivováním dostaneme $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\frac{df^1(t_0)}{dt} + \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\frac{df^2(t_0)}{dt} + \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\frac{df^3(t_0)}{dt} = 0$. Tedy vektory (F'_x, F'_y, F'_z) a f' jsou kolmé.

□

Věta 11.5. *Nechť $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jsou funkce třídy C^r definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^3$. Označme $\mathcal{C}$ množinu zadanou rovnicemi $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ a předpokládejme, že množina $\mathcal{C}$ je neprázdná a vektory $(F'_x(X), F'_y(X), F'_z(X))$, $(G'_x(X), G'_y(X), G'_z(X))$ jsou lineárně nezávislé pro každé $X = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$. Pak $\mathcal{C}$ je křivka třídy C^r.*

Důkaz. Z lineární nezávislosti uvedených vektorů plyne, že v matici sestavené z těchto vektorů je alespoň jeden subdeterminant 2. řádu nenulový. Tvrzení pak plyne z věty o implicitních funkcích.

□

Předchozí věta popisuje prostorovou křivku $\mathcal{C}$ implicitně jako průnik dvou ploch. Přitom tečný vektor k $\mathcal{C}$ je kolineární s vektorem $(F'_x, F'_y, F'_z) \times (G'_x, G'_y, G'_z)$. Poznamenejme, že průnikem dvou ploch nemusí být vždy křivka (např. dvě dotýkající se koule).

12 STYK PLOCH A OBÁLKY

Definice. Řekneme, že *křivka $\mathcal{C}$ a plocha $\mathcal{S}$ mají* ve společném bodě $X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ styk k-tého řádu, jestliže na $\mathcal{S}$ existuje taková křivka $\overline{\mathcal{C}}$, že $X \in \overline{\mathcal{C}}$ a křivky $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ mají v bodě X styk k-tého řádu.

Věta 12.1. *Nechť křivka $\mathcal{C}$ má parametrizaci $f(t) = (f^1(t), f^2(t), f^3(t))$, plocha $\mathcal{S}$ je zadána rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a $X = f(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ je jejich společný bod. Sestrojme funkci $\Phi(t) = F(f^1(t), f^2(t), f^3(t))$. Pak křivka $\mathcal{C}$ a plocha $\mathcal{S}$ mají v bodě X styk k-tého řádu právě když platí*

$$\frac{d^i\Phi(t_0)}{dt^i} = 0 \quad \forall i = 0, \dots, k. \tag{1}$$

Důkaz. I. Nechť $\overline{f}(t)$ je parametrizace křivky $\overline{\mathcal{C}}$ na ploše $\mathcal{S}$, s níž má $\mathcal{C}$ styk k-tého řádu a nechť $\frac{d^i f(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i \overline{f}(t_0)}{dt^i}$ $\forall i = 0, \dots, k$ je podmínka pro styk k-tého řádu křivek $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$. Protože $\overline{\mathcal{C}}$ leží na $\mathcal{S}$, tak platí $F(\overline{f}^1(t), \overline{f}^2(t), \overline{f}^3(t)) = 0$, takže všechny derivace levé strany podle t jsou rovny nule. Protože všechny derivace vnitřních složek $\overline{f}^i(t)$ splývají se všemi derivacemi $f^i(t)$ až do řádu k, tak platí (1).
II. Nechť je splněna podmínka (1) a nechť například $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích rovnice $F(f^1(t), f^2(t), g(t)) = 0$ určuje lokálně funkci $g(t)$. Dále, křivka $\overline{\mathcal{C}}$ s parametrizací $\overline{f}(t) = (f^1(t), f^2(t), g(t))$ leží na $\mathcal{S}$. Je třeba dokázat podmínku pro styk křivek $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ tvaru

$$\frac{d^i f^3(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i g(t_0)}{dt^i} \quad \forall i = 0, \dots, k. \tag{2}$$

Uvažujme funkci $G(t, z) = F(f^1(t), f^2(t), z)$. Tato funkce je definována na určitém okolí V bodu (t_0, z_0). Na $V \times \mathbb{R}$ uvažme funkci tří proměnných $H(t, z, w) = G(t, z) - w$. Podle věty o implicitních funkcích lze z rovnice $H(t, z, w) = 0$ lokálně spočítat $z = K(t, w)$. Protože

$G(t, g(t)) = 0$ a $G(t, f^3(t)) = \Phi(t)$, tak $g(t) = K(t, 0)$ a $f^3(t) = K(t, \Phi(t))$. Podle pravidla o derivování složené funkce pak z podmínky (1) plyne (2).

$\square$

Definice. Řekneme, že *plocha* $\mathcal{S}$ *má s plochou* $\overline{\mathcal{S}}$ v bodě $X \in \mathcal{S} \cap \overline{\mathcal{S}}$ *styk k-tého řádu*, jestliže každá křivka na $\overline{\mathcal{S}}$ má v bodě X styk k-tého řádu s plochou $\mathcal{S}$.

Nyní odvodíme dvě praktické podmínky pro ověření styku dvou ploch.

Věta 12.2. *Nechť plocha $\mathcal{S}$ je dána rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a $\overline{\mathcal{S}}$ má parametrizaci $f(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$ a nechť $X = f(u_0, v_0)$ je společný bod $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$. Sestrojme funkci $\Psi(u, v) = F(f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$. Pak plocha $\mathcal{S}$ má s plochou $\overline{\mathcal{S}}$ v bodě X styk k-tého řádu právě když*

$$\frac{\partial^i \Psi(u_0, v_0)}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2}} = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, k, \quad i_1 + i_2 = i. \tag{3}$$

Důkaz. Je-li křivka $\overline{\mathcal{C}}$ ležící na ploše $\overline{\mathcal{S}}$ a procházející bodem X určena křivkou $u = u(t)$, $v = v(t)$ v oblasti parametrů plochy $\overline{\mathcal{S}}$, tak parametrické rovnice $g(t) = (g^1(t), g^2(t), g^3(t))$ křivky $\overline{\mathcal{C}}$ v E_3 jsou tvaru $g^1(t) = f^1(u(t), v(t))$, $g^2(t) = f^2(u(t), v(t))$, $g^3(t) = f^3(u(t), v(t))$. Funkce Φ z Věty 12.1 má pak tvar

$$\Phi(t) = F(g^1(t), g^2(t), g^3(t)) = F(f^1(u(t), v(t)), f^2(u(t), v(t)), f^3(u(t), v(t))) = \Psi(u(t), v(t))$$

. Derivací dostaneme

$$\frac{d\Phi(t_0)}{dt} = \frac{\partial \Psi(u_0, v_0)}{\partial u} \frac{du(t_0)}{dt} + \frac{\partial \Psi(u_0, v_0)}{\partial v} \frac{dv(t_0)}{dt}. \tag{4}$$

Předpokládáme-li platnost podmínky (3), tak odtud vyplývá, že $\frac{d\Phi(t_0)}{dt} = 0$. Opakovaným derivováním pak dokážeme (1), takže podle Věty 12.1 má $\overline{\mathcal{C}}$ s $\mathcal{S}$ v bodě X styk k-tého řádu. Křivka $\overline{\mathcal{C}}$ však může být zvolena libovolně, takže plocha $\mathcal{S}$ má s plochou $\overline{\mathcal{S}}$ v bodě X styk k-tého řádu.
Předpokládejme naopak, že každá křivka $\overline{\mathcal{C}}$ na ploše $\overline{\mathcal{S}}$ má v bodě X styk k-tého řádu s plochou $\mathcal{S}$. Vezměme speciálně souřadnicovou křivku $\overline{\mathcal{C}}$ tvaru $u(t) = u_0$. Podle Věty 12.1 je $\frac{d\Phi(t_0)}{dt} = 0$, takže z (4) plyne $\frac{\partial \Psi(u_0, v_0)}{\partial v} = 0$. Užitím souřadnicové křivky $v = v_0$ ukážeme $\frac{\partial \Psi(u_0, v_0)}{\partial u} = 0$ a opakovaným derivováním rovnosti $\Phi(t) = \Psi(u(t), v(t))$ pak ukážeme, že z (1) plyne (3). $\square$

Věta 12.3. *Plocha $\mathcal{S}$ má s plochou $\overline{\mathcal{S}}$ ve společném bodě $X \in \mathcal{S} \cap \overline{\mathcal{S}}$ styk k-tého řádu právě když existují takové jejich lokální parametrizace $f(u, v)$, $\overline{f}(u, v)$, $f(u_0, v_0) = \overline{f}(u_0, v_0) = X$, že platí*

$$\frac{\partial^i f(u_0, v_0)}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2}} = \frac{\partial^i \overline{f}(u_0, v_0)}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2}} \quad \forall i = 0, \ldots, k, \quad i_1 + i_2 = i. \tag{5}$$

Důkaz. I. Nechť existují takové lokální parametrizace ploch $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$, že je splněna podmínka (5). Podle věty o implicitních funkcích lze plochu $\mathcal{S}$ lokálně vyjádřit rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Pak $F(f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v)) = 0$ a tedy všechny parciální derivace levé strany jsou nulové. Podle (5) můžeme parciální derivace f v bodě (u_0, v_0) nahradit parciálními derivacemi $\overline{f}$, takže platí (3), kde $\Psi(u, v) = F(\overline{f}^1(u, v), \overline{f}^2(u, v), \overline{f}^3(u, v))$. Podle Věty 12.2 má plocha $\mathcal{S}$ v bodě X s plochou $\overline{\mathcal{S}}$ styk k-tého řádu.
II. Naznačíme pouze hlavní myšlenku důkazu. Nechť $\mathcal{S}$ má s $\overline{\mathcal{S}}$ v bodě

X styk k-tého řádu, přičemž $\mathcal{S}$ je v okolí bodu X lokálně zadána rovnicí $F(x,y,z) = 0$ a $\overline{\mathcal{S}}$ má parametrizaci $\overline{f}(u,v)$. Podle Věty 12.2 platí (3). Hledejme parametrizaci $\mathcal{S}$ ve tvaru $(\overline{f}^1(u,v), \overline{f}^2(u,v), g(u,v))$. Pomocí věty o implicitních funkcích ukážeme, že $g(u,v)$ je lokálně určena rovnicí $F(\overline{f}^1(u,v), \overline{f}^2(u,v), g(u,v)) = 0$. Zbytek důkazu (tj. ověření $\frac{\partial^i \overline{f}^3(u_0,v_0)}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2}} = \frac{\partial^i g(u_0,v_0)}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2}}$, $i = 0, \dots, k$, $i_1 + i_2 = i$) se provede analogicky jako 2. část důkazu Věty 12.1.

□

Tedy relace „mít styk řádu k“ je symetrická.

Věta 12.4. *Plochy $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$ mají ve společném bodě X styk prvního řádu právě když jejich tečné roviny $\tau_X \mathcal{S}$ a $\tau_X \overline{\mathcal{S}}$ v tomto bodě splývají.*

Důkaz. I. Pokud $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$ mají v bodě X styk 1. řádu, tak podle předchozí věty platí $f'_u = \overline{f}'_u$, $f'_v = \overline{f}'_v$, takže $\tau_X \mathcal{S} = \tau_X \overline{\mathcal{S}}$.
II. Nechť $\mathcal{S}$ má parametrizaci $f(u,v)$ a $\overline{\mathcal{S}}$ má parametrizaci $\overline{f}(\overline{u},\overline{v})$ a nechť tečné roviny splývají. Pak $f'_u = a\overline{f}'_{\overline{u}} + b\overline{f}'_{\overline{v}}$, $f'_v = c\overline{f}'_{\overline{u}} + d\overline{f}'_{\overline{v}}$, přičemž $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, poněvadž se jedná o dvě báze v zaměření tečné roviny. Změňme nyní parametry na $\overline{\mathcal{S}}$ vztahy $\overline{u} = au + cv$, $\overline{v} = bu + dv$, takže nová parametrizace $\overline{\mathcal{S}}$ je $\overline{f}(au+cv, bu+dv)$. Pak $\overline{f}'_u = \overline{f}'_{\overline{u}} a + \overline{f}'_{\overline{v}} b = f'_u$, $\overline{f}'_v = \overline{f}'_{\overline{u}} c + \overline{f}'_{\overline{v}} d = f'_v$. Podle předchozí věty mají plochy $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$ styk 1. řádu.

□

Pokud plochy $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$ mají styk 1. řádu, tak říkáme, že se *dotýkají.*

Obálky dvouparametrické soustavy ploch. Předpokládejme, že každá plocha soustavy je pro danou dvojici parametrů $u, v \in \mathbb{R}$ zadána rovnicí

$$F(x,y,z,u,v) = 0. \tag{6}$$

Plochu o rovnici $F(x,y,z,u_0,v_0) = 0$ budeme značit symbolem $\mathcal{S}_{u_0,v_0}$ a celou soustavu (6) symbolem $(\mathcal{S}_{u,v})$. Společné body ploch $\mathcal{S}_{u_0,v_0}$, $\mathcal{S}_{u,v_0}$, $\mathcal{S}_{u_0,v}$ pro $u \neq u_0$ a $v \neq v_0$ jsou určeny soustavou tří rovnic $F(x,y,z,u_0,v_0) = 0$, $F(x,y,z,u,v_0) = 0$, $F(x,y,z,u_0,v) = 0$, která je ekvivalentní soustavě
$F(x,y,z,u_0,v_0) = 0$, $\frac{F(x,y,z,u,v_0) - F(x,y,z,u_0,v_0)}{u-u_0} = 0$, $\frac{F(x,y,z,u_0,v) - F(x,y,z,u_0,v_0)}{v-v_0}$.
V limitě pro $u \to u_0$, $v \to v_0$ dostaneme

$$F(x,y,z,u_0,v_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,u_0,v_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(x,y,z,u_0,v_0) = 0. \tag{7}$$

Definice. Body $(x,y,z) \in E_3$ určené rovnicemi (7) nazýváme *charakteristickými body* na ploše $\mathcal{S}_{u_0,v_0}$. Množinu těchto bodů pro všechna $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$ nazýváme *charakteristickou množinou* soustavy $(\mathcal{S}_{u,v})$.

Rovnice charakteristické množiny tedy získáme vyloučením parametrů u, v z (7).

Definice. Plochu $\mathcal{E}$ s parametrizací $f(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ nazýváme *obálkou* soustavy (6), jestliže $\mathcal{E}$ se v bodě $f(u_0,v_0)$ dotýká plochy $\mathcal{S}_{u_0,v_0}$ pro všechna $(u_0,v_0) \in D$.

Důkaz následujícího tvrzení je analogický důkazu Věty 9.3 a proto jej vypustíme.

Věta 12.5. *Každá obálka soustavy $(\mathcal{S}_{u,v})$ je podmnožinou její charakteristické množiny. Naopak, je-li $f(u,v)$ taková plocha, že $f(u_0,v_0)$ splňuje (7) pro každé u_0, v_0, tak $f(u,v)$ je obálkou soustavy $(\mathcal{S}_{u,v})$.*

Praktický postup hledání obálky je takový, že se ze soustavy (7) snažíme vyloučit parametry u,v tak, abychom dostali jedinou rovnici $G(x,y,z)=0$. Pokud je tato rovnice implicitním vyjádřením nějaké plochy, tak se jedná o hledanou obálku.

Příklad 12.1. Určíme obálku soustavy kulových ploch $F(x,y,z,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2 - \frac{u^2+v^2}{2} = 0$. Máme $F'_u = -2(x-u) - u = 0$, $F'_v = -2(y-v) - v = 0$. Dosazením $u = 2x$, $v = 2y$ do F dostaneme rovnici kuželové plochy $x^2+y^2-z^2=0$, která je implicitním vyjádřením hledané obálky.

Obálky jednoparametrické soustavy ploch. Uvažujme jednoparametrickou soustavu $(\mathcal{S}_t)$ ploch

$$F(x,y,z,t) = 0 \tag{8}$$

kde $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}$. Společné body ploch $\mathcal{S}_{t_0}$ a $\mathcal{S}_t$ pro $t\neq t_0$ jsou určeny dvojicí rovnic $F(x,y,z,t_0)=0$, $F(x,y,z,t)=0$, která je ekvivalentní soustavě

$$F(x,y,z,t_0)=0, \qquad \frac{F(x,y,z,t)-F(x,y,z,t_0)}{t-t_0} = 0.$$

V limitě pro $t\to t_0$ získáme rovnice

$$F(x,y,z,t_0)=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,z,t_0) = 0. \tag{9}$$

Definice. Množinu určenou pro pevné t_0 rovnicemi (9) nazýváme *charakteristikou* na ploše $\mathcal{S}_{t_0}$. Sjednocení těchto množin pro každé $t_0\in\mathbb{R}$ nazýváme *charakteristickou množinou* soustavy $(\mathcal{S}_t)$. Jestliže je rovnicemi (9) popsána pro pevné t_0 křivka, tak se nazývá *charakteristická křivka* na ploše $\mathcal{S}_{t_0}$.

Rovnici charakteristické množiny zřejmě získáme vyloučením parametru t z (9).

Definice. Plochu $\mathcal{E}$ s parametrizací $f(t,\tau)$, $(t,\tau)\in D\subset\mathbb{R}^2$ nazýváme *obálkou* soustavy $(\mathcal{S}_t)$, jestliže $\mathcal{E}$ se dotýká každé plochy $\mathcal{S}_{t_0}$ podél křivky $f(t_0,\tau)$.

Označme $\mathcal{C}_{t_0}$ křivku $f(t_0,\tau)$ (parametrem je zde τ).

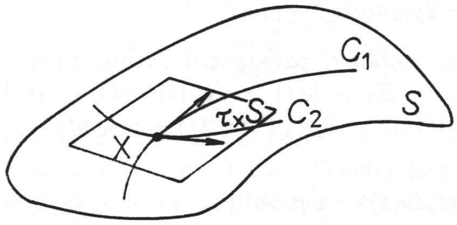
Věta 12.6. *Každá obálka soustavy $(\mathcal{S}_t)$ je podmnožinou její charakteristické množiny. Tedy množina všech bodů obálky je řešením soustavy (9).*

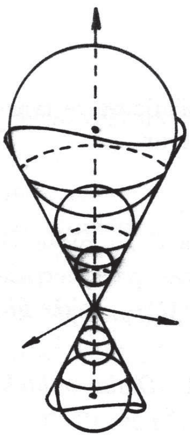
Důkaz. Nechť $f(t,\tau)$ je parametrizace obálky $\mathcal{E}$. Protože křivka $\mathcal{C}_t$ leží na ploše $\mathcal{S}_t$, tak platí $F(f^1(t,\tau),f^2(t,\tau),f^3(t,\tau),t)=0$. Derivací podle t dostáváme $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f^1}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f^2}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f^3}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}=0$. Anulování prvních tří členů znamená kolmost normály plochy $\mathcal{S}_t$ k vektoru $\frac{\partial f}{\partial t}$. Toto je však splněno, neboť plochy $\mathcal{E}$ a $\mathcal{S}_t$ mají podél křivky $\mathcal{C}_t$ stejné tečné roviny. Tedy platí $\frac{\partial F}{\partial t}=0$. □

Poznámka 12.1. Nyní se věnujme opačnému problému, a to, za jakých podmínek je charakteristická množina hledanou obálkou. Podle věty o implicitních funkcích lze z obecné soustavy rovnic $H(x,y,z,t)=0$, $K(x,y,z,t)=0$ lokálně vypočítat x,y jako funkce proměnných z,t, pokud

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Je-li tato podmínka splněna u naší soustavy $F(x,y,z,t)=0$, $\frac{\partial}{\partial t}F(x,y,z,t)=0$, tak dostaneme řešení $x=g(z,t)$, $y=h(z,t)$. Potom plocha $\mathcal{E}$ s parametrizací $f(t,\tau)=(g(\tau,t),h(\tau,t),\tau)$ je obálkou soustavy $(\mathcal{S}_t)$. K tomu musíme ukázat, že plochy $\mathcal{E}$ a $\mathcal{S}_t$ se podél křivky $\mathcal{C}_t$ s parametrickým vyjádřením $f(t,\tau)$ dotýkají. Platí $F(g(\tau,t),h(\tau,t),\tau,t)=0$. Derivací podle τ při pevném t dostaneme $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \tau}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial \tau}+\frac{\partial F}{\partial z}=0$, takže vektor $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ leží v tečné rovině k $\mathcal{S}_t$. Dále, derivace podle t dává $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial t}=0$. Užitím rovnosti $\frac{\partial}{\partial t}F(g(\tau,t),h(\tau,t),\tau,t)=0$ odvodíme, že i vektor $\frac{\partial f}{\partial t}$ leží v tečné rovině k $\mathcal{S}_t$.





Obr. 24: Tečná rovina a Obr. 25

Při hledání obálky se tedy z obou rovnic (9) snažíme vyloučit parametr t. Pokud takto dostaneme rovnici $G(x,y,z)=0$, která je implicitním vyjádřením nějaké plochy, tak je tato plocha hledanou obálkou.

Příklad 12.2. Určíme obálku jednoparametrické soustavy kulových ploch $x^2+y^2+(z-t)^2=\frac{t^2}{2}$. Derivací podle parametru t dostaneme další rovnici $-2(z-t)=t$. Vyloučením t z obou rovnic obdržíme hledanou rovnici obálky $x^2+y^2-z^2=0$. Snadno se přesvědčíme, že charakteristickými křivkami jsou kružnice, Obr. 25.

13 PRVNÍ ZÁKLADNÍ FORMA

Připomeňme, že zobrazení $f: V\times V\to\mathbb{R}$ se nazývá bilineární forma na V, je-li f lineární v obou svých vektorových argumentech. Zobrazení $g: V\to\mathbb{R}$ se nazývá kvadratická forma, pokud existuje symetrická bilineární forma f taková, že $g(v)=f(v,v)\ \forall v\in V$.

Nechť $\mathcal{S}$ je jednoduchá plocha s parametrizací $f(u,v)$ a $\tau_X\mathcal{S}$ její tečná rovina v bodě $X=f(u_0,v_0)$. Pak $\tau_X\mathcal{S}$ je určena lineárně nezávislými tečnými vektory $f'_u(u_0,v_0)$ a $f'_v(u_0,v_0)$, takže libovolná dvojice a, b tečných vektorů z $T_X\mathcal{S}$ se dá vyjádřit ve tvaru lineární kombinace $a = a^1 f'_u + a^2 f'_v$, $b = b^1 f'_u + b^2 f'_v$ s koeficienty $a^i, b^i \in \mathbb{R}$. Skalární součin $a \cdot b$ je pak tvaru

$$(a^1 f'_u + a^2 f'_v) \cdot (b^1 f'_u + b^2 f'_v) = a^1 b^1 (f'_u \cdot f'_u) + (a^1 b^2 + a^2 b^1)(f'_u \cdot f'_v) + a^2 b^2 (f'_v \cdot f'_v).$$

Označíme-li skalární součiny bázových tečných vektorů symboly

$$g_{11} = f'_u \cdot f'_u, \quad g_{22} = f'_v \cdot f'_v, \quad g_{12} = g_{21} = f'_u \cdot f'_v, \tag{1}$$

tak $a \cdot b = a^i b^j g_{ij} = a^1 b^1 g_{11} + (a^1 b^2 + a^2 b^1) g_{12} + a^2 b^2 g_{22}$. Toto je symetrická bilineární forma na $T_X\mathcal{S}$, její koeficienty jsou prvky symetrické matice (g_{ij}). Pak $a \cdot a$ je kvadratická forma, která určuje kvadrát velikosti vektoru a,

$$a \cdot a = \|a\|^2 = g_{11}(a^1)^2 + 2 g_{12} a^1 a^2 + g_{22}(a^2)^2. \tag{2}$$

Jedná se skutečně o kvadratickou formu na $T_X\mathcal{S}$, neboť všechny členy (2) jsou výrazy druhého stupně souřadnic (a^1, a^2) vektoru $a \in T_X\mathcal{S}$.

Definice. Kvadratická forma (2) se nazývá *první základní forma* plochy $\mathcal{S}$ a značí se φ_1, resp. $\varphi_1(a)$. Čísla g_{ij} daná vztahy (1) se nazývají *koeficienty první základní formy.*

Je zřejmé, že g_{ij} jsou obecně funkce proměnných u, v. Protože g_{ij} jsou souřadnice symetrické bilineární formy na $T_X\mathcal{S}$ (tj. tenzoru typu $(0,2)$), tak se někdy nazývají souřadnicemi *1. základního tenzoru* nebo též souřadnicemi *metrického tenzoru plochy.* Zejména platí, že při změně souřadnic se g_{ij} transformují prostřednictvím tenzoriálních transformačních vztahů z Věty 1.5. Tečný vektor $a = (a^1, a^2) \in T_X\mathcal{S}$ rovněž zapisujeme ve tvaru $a = (du, dv)$, tj. $a^1 = du$, $a^2 = dv$. Pak první základní forma má tvar

$$\varphi_1 := g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2. \tag{3}$$

Je-li křivka $\mathcal{C}$ na ploše $f(u,v)$ zadána v oblasti parametrů rovnicemi $u = u(t)$, $v = v(t)$, tak parametrické vyjádření $\mathcal{C}$ v E_3 je $h(t) = f(u(t), v(t))$. Pak $h'(t) = u'(t) f'_u + v'(t) f'_v$, takže $\|h'(t)\|^2 = g_{11}(u'(t))^2 + 2 g_{12} u'(t) v'(t) + g_{22}(v'(t))^2$. Odtud plyne

Věta 13.1. *Délka oblouku křivky $(u(t), v(t))$ na ploše $f(u,v)$ mezi body o parametrech t_1, t_2 je rovna*

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}(u'(t))^2 + 2 g_{12} u'(t) v'(t) + g_{22}(v'(t))^2} dt.$$

Diferenciál oblouku má tedy tvar $ds = \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 g_{12} \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$, takže $ds^2 = \left(g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 g_{12} \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) dt^2 = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2$. Tedy *první základní forma určuje kvadrát diferenciálu oblouku křivky na ploše,*

$$ds^2 = \varphi_1. \tag{4}$$

Věta 13.2. *Je-li plocha $\mathcal{S}$ zadána rovnicí $z = f(x,y)$, tak koeficienty její první základní formy jsou*

$$g_{11} = 1 + f'^2_x, \quad g_{12} = g_{21} = f'_x \cdot f'_y, \quad g_{22} = 1 + f'^2_y, \tag{5}$$

takže

$$\varphi_1 = (1 + f_x'^2)dx^2 + 2f_x' f_y' dxdy + (1 + f_y'^2)dy^2.$$

Je-li $\mathcal{S}$ zadána implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$, tak

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{F_x'}{F_z'}\right)^2, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{F_x' F_y'}{(F_z')^2}, \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{F_y'}{F_z'}\right)^2. \tag{6}$$

Důkaz. Plocha $z = f(x,y)$ má parametrizaci $(u, v, f(u,v))$, takže (5) plyne z (1). Je-li $\mathcal{S}$ zadána implicitně, tak derivováním rovnosti $F(x, y, f(x,y)) = 0$ odvodíme (6).

□

Příklad 13.1. Určíme první základní formu roviny, kruhového válce a sféry:
(a) Parametrizace roviny je $f(u,v) = X + au + bv$, přičemž můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že vektory a, b jsou jednotkové a kolmé. Pak $f_u' = a$, $f_v' = b$, takže $g_{11} = 1 = g_{22}$, $g_{12} = 0$, $\varphi_1 = du^2 + dv^2$.
(b) Parametrizace kruhového válce je $f(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$, takže $f_u' = (-r\sin u, r\cos u, 0)$ a $f_v' = (0,0,1)$. Odtud dostaneme $g_{11} = f_u' \cdot f_u' = r^2$, $g_{12} = g_{21} = f_u' \cdot f_v' = 0$, $g_{22} = f_v' \cdot f_v' = 1$, $\varphi_1 = r^2 du^2 + dv^2$. Zavedením nových souřadnic $\overline{u} = ru$ přejde φ_1 na tvar $\varphi_1 = d\overline{u}^2 + dv^2$. Vidíme tedy, že existují takové souřadnice, v nichž první základní formy roviny a kruhového válce splývají.
(c) Přímým výpočtem odvodíme, že v případě sféry (viz Příklad 11.3) vyjde $\varphi_1 = r^2(\cos^2 v du^2 + dv^2)$.

Úhlem dvou křivek na ploše $\mathcal{S}$ procházejících společným bodem $X \in \mathcal{S}$ rozumíme úhel jejich tečen v tomto bodě. Ze vzorečku pro úhel vektorů ihned odvodíme

Věta 13.3. *Jsou-li $a = a^1 f_u' + a^2 f_v'$ a $b = b^1 f_u' + b^2 f_v'$ tečné vektory křivek $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ ve společném bodě $X \in \mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{C}}$, tak pro jejich úhel platí*

$$\cos\alpha = \frac{|g_{ij} a^i b^j|}{\sqrt{g_{ij} a^i a^j}\sqrt{g_{ij} b^i b^j}} \quad (i, j \quad \textit{jsou sčítací indexy}).$$

Příklad 13.2. Odvodíme vzorec pro výpočet úhlu souřadnicových křivek $u = u_0$ a $v = v_0$ libovolné plochy se základní formou $\varphi_1 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$. Parametrické rovnice souřadnicových křivek jsou $u = u_0, v = t$ a $u = t, v = v_0$. Odpovídající tečné vektory mají souřadnicové vyjádření $a = (a^1, a^2) = (1, 0)$ a $b = (b^1, b^2) = (0, 1)$. Podle předchozí věty dostaneme $\cos\alpha = \frac{g_{21}}{\sqrt{g_{22}g_{11}}}$.

Definice. *Vrstvou křivek* na jednoduché ploše $\mathcal{S}$ nazýváme takovou jednoparametrickou soustavu $\mathcal{L}$ křivek na $\mathcal{S}$, že každým bodem $\mathcal{S}$ prochází právě jedna křivka soustavy $\mathcal{L}$. *Sítí* na ploše $\mathcal{S}$ nazýváme dvě vrstvy $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, jejichž křivky v každém bodě svírají nenulový úhel. Síť se nazývá *ortogonální*, jestliže tento úhel je v každém bodě pravý.

Příkladem sítě křivek je souřadnicová síť, která je tvořena dvěma vrstvami souřadnicových křivek plochy $\mathcal{S}$ (nenulovost úhlu plyne z lineární nezávislosti vektorů f_u', f_v' a ze vzorečku odvozeného v Příkladu 13.2). Tato síť je ortogonální např. v případě sféry a kruhového válce. Na základě Příkladu 13.2 obecně dostaneme:

Důsledek 13.1. Souřadnicové křivky plochy $\mathcal{S}$ tvoří ortogonální síť právě když $g_{12} = 0$ v libovolném bodě plochy $\mathcal{S}$.

Podle cvičení III/17 tuto podmínku splňuje libovolná rotační plocha.

Lemma 13.1. *Nechť g_{ij} jsou koeficienty první základní formy. Pak platí $det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$.*

Důkaz. Jsou-li a, b dva vektory, tak z Cauchyovy nerovnosti $|a \cdot b| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ plyne $\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \geq |a \cdot b|^2$, přičemž rovnost platí pouze pro kolineární vektory a, b. Položíme-li $a = f'_u$, $b = f'_v$, tak $\|a\|^2 = f'_u \cdot f'_u = g_{11}$, $\|b\|^2 = f'_v \cdot f'_v = g_{22}$, $a \cdot b = g_{12}$. Je dále zřejmé, že vektory f'_u, f'_v nejsou kolineární.

□

Ze základního kursu analýzy je známo, že plošný obsah ohraničené plochy $\mathcal{S}$ zadané explicitně rovnicí $z = f(x, y)$ na ohraničené oblasti D je dán dvojným integrálem

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dxdy. \tag{7}$$

Věta 13.4. *Plošný obsah ohraničené plochy $f(u, v)$ na ohraničené oblasti parametrů $D \subset \mathbb{R}^2$ je roven*

$$\iint\limits_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv. \tag{8}$$

Důkaz. V okolí každého bodu $X \in \mathcal{S}$ můžeme plochu $\mathcal{S}$ zadat explicitní rovnicí $z = f(x, y)$ (nebo $y = f(x, z)$ nebo $x = f(y, z)$). Zřejmě stačí probrat první případ. Podle Věty 13.2 máme $g_{11} = 1 + f_x'^2$, $g_{22} = 1 + f_y'^2$, $g_{12} = f'_x f'_y$, takže (8) přejde na klasický vzorec (7).

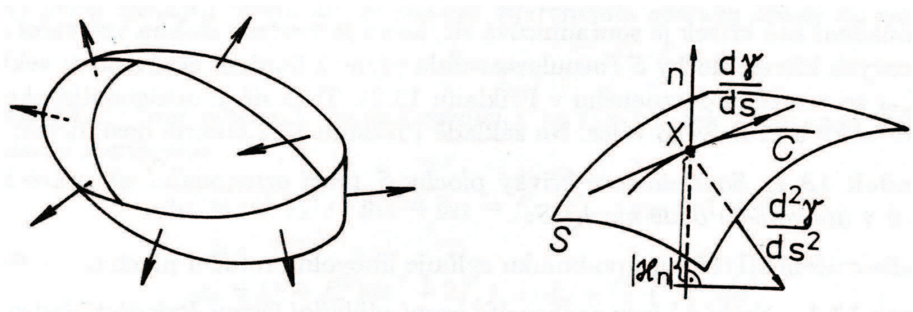
□

14 DRUHÁ ZÁKLADNÍ FORMA

Definice. Přímku procházející bodem $X \in \mathcal{S}$ kolmo k tečné rovině $\tau_X\mathcal{S}$ nazýváme *normálou plochy* $\mathcal{S}$ v bodě X. Na této normále máme dva jednotkové vektory; výběr jednoho z nich nazýváme *orientací normály.*

Orientací plochy $\mathcal{S}$ nazýváme výběr orientace jejích normál, který se provede spojitým způsobem. Řekneme, že plocha $\mathcal{S}$ je *neorientovatelná*, pokud existuje taková uzavřená křivka $\mathcal{C}$ ležící na $\mathcal{S}$, že vektor n orientované normály plochy $\mathcal{S}$ přejde při spojitém pohybu po této křivce na opačný vektor $-n$.

Je-li $f(u, v)$ lokální parametrizace plochy $\mathcal{S}$, tak máme v každém bodě $X \in \mathcal{S}$ určen jednotkový vektor $n = n_X$ orientované normály, $n_X = \frac{f'_u \times f'_v}{\|f'_u \times f'_v\|}$. Je tedy zřejmé, že každá jednoduchá plocha je orientovatelná a že lokálně lze plochu orientovat vždy. Globálně tomu tak není, příkladem neorientovatelné plochy je Möbiův list, viz Obr. 26. U této plochy totiž přejde jednotkový vektor orientované normály n po oběhu „středové kružnice" na opačný vektor $-n$, viz cvičení III/25. V dalším budeme uvažovat pouze orientovatelné plochy.



Obr. 26: Möbiův list a Obr. 27: Normálová křivost

Nechť $\mathcal{C}$ je křivka na ploše $\mathcal{S}$ procházející bodem $X \in \mathcal{S}$ zadaná v oblasti parametrů D rovnicemi $u = u(s)$, $v = v(s)$. Pak parametrizace $\mathcal{C}$ v E_3 je $\gamma(s) = f(u(s), v(s))$. Předpokládejme dále, že parametr s je oblouk, takže $\left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| = 1$. Z Frenetových vzorců plyne, že $\left\|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right\| = \kappa(s)$, kde κ je křivost křivky $\mathcal{C}$.

Definice. *Normálovou křivostí* křivky $\mathcal{C}$ na ploše $\mathcal{S}$ v bodě X rozumíme číslo $\kappa_n = n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2}$ (vpravo je skalární součin vektorů).

Značí-li $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ úhel vektoru křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ s jednotkovým vektorem normály n, tak $\kappa_n = \|n\| \left\|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right\| \cos\alpha = \kappa \cos\alpha$. Tedy normálová křivost κ_n je rovna velikosti (opatřené patřičným znaménkem) kolmého průmětu vektoru křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ do směru normálového vektoru n, Obr. 27. Přitom znaménko normálové křivosti κ_n nemá žádný hlubší geometrický význam (je zřejmé, že k jeho změně stačí změnit orientaci plochy $\mathcal{S}$). *Směrem* budeme v dalším rozumět polopřímku určenou příslušným vektorem. Protože nenulový vektor $a \in T_X\mathcal{S}$ určuje jedinou polopřímku, tak můžeme identifikovat směr s odpovídajícím vektorem.

Věta 14.1. *Normálová křivost je pro všechny křivky na ploše $\mathcal{S}$, mající v bodě $X \in \mathcal{S}$ společnou tečnu, v tomto bodě stejná.*

Důkaz. Ukážeme, že skalární součin $n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2}$ závisí jen na $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$. Platí $\frac{d\gamma}{ds} = f'_u \frac{du}{ds} + f'_v \frac{dv}{ds}$,

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = f''_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2f''_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + f''_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + f'_u\frac{d^2u}{ds^2} + f'_v\frac{d^2v}{ds^2}. \tag{1}$$

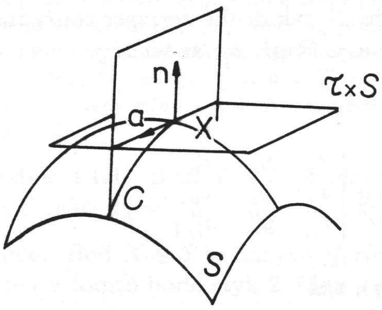
Tvrzení pak plyne z toho, že $n \cdot f'_u = 0 = n \cdot f'_v$.

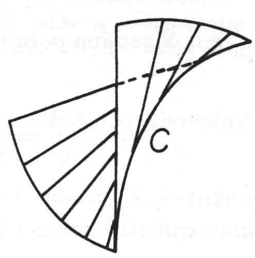
$\square$

Má tedy smysl hovořit o normálové křivosti plochy v daném bodě a daném tečném směru. Připomeňme, že každý tečný vektor $a \in T_X\mathcal{S}$ je tvaru $a = \frac{d\gamma}{ds}$ pro nějakou křivku $\mathcal{C}$ na $\mathcal{S}$, kde $\gamma(s)$ je parametrizace $\mathcal{C}$.

Definice. Nechť $a = \frac{d\gamma}{ds} \in T_X\mathcal{S}$ je jednotkový tečný vektor. Pak číslo $\kappa_n^a = n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2}$ nazýváme *normálovou křivostí plochy $\mathcal{S}$ ve směru vektoru a.*

V tečné rovině $\tau_X\mathcal{S}$ uvažujme směr určený jednotkovým vektorem a. Řez plochy $\mathcal{S}$ rovinou určenou tímto směrem a normálou n_X nazýváme *normálovým řezem* plochy $\mathcal{S}$ ve směru vektoru a. Normálový řez je tedy rovinná křivka $\gamma(s)$ ležící na ploše $\mathcal{S}$, viz Obr. 28. Např. normálové řezy sféry jsou hlavní kružnice.





Obr. 28: Normálový řez a Obr. 29: Plocha tečen

Věta 14.2. *Absolutní hodnota normálové křivosti κ_n^a ve směru vektoru a je rovna křivosti κ normálového řezu v tomto směru.*

Důkaz. Platí $\kappa_n^a = \|n\| \left\|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right\| \cos\alpha = 1 \cdot \kappa \cdot \cos\alpha$, kde $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ je úhel vektoru křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ s jednotkovým vektorem normály n. Protože parametr s je oblouk, tak vektor $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ je kolmý k jednotkovému vektoru $\frac{d\gamma}{ds}$ a je tedy kolineární s vektorem n.

$\square$

Tedy normálová křivost plochy κ_n^a vyjadřuje „ohýbání“ plochy $\mathcal{S}$ ve směru vektoru $a \in T_X\mathcal{S}$. Označíme-li

$$h_{11} = n \cdot f''_{uu}, \quad h_{12} = h_{21} = n \cdot f''_{uv}, \quad h_{22} = n \cdot f''_{vv}, \tag{2}$$

tak pravidlo, které každému tečnému vektoru $a = (a^1, a^2) \in T_X\mathcal{S}$ přiřadí číslo $\varphi_2(a) := a^i a^j h_{ij}$, je kvadratická forma na $T_X\mathcal{S}$. Analogicky jako ve 13. kapitole tečný vektor a zapisujeme rovněž ve tvaru $a = (du, dv)$.

Definice. $\varphi_2 := h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$ se nazývá *druhá základní forma* plochy $\mathcal{S}$. Čísla h_{ij} daná vztahy (2) se nazývají *koeficienty druhé základní formy.*

Je zřejmé, že h_{ij} i φ_2 jsou obecně funkce proměnných u, v. Protože $\kappa_n^a = n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2}$, tak z (1) ihned plyne

Věta 14.3. *Nechť $a = (du, dv)$ je jednotkový tečný vektor. Pak $\kappa_n^a = \varphi_2(a)$.*

Je-li $a = (a^1, a^2) = (du, dv)$ libovolný tečný vektor, tak $\|a\|^2 = \varphi_1(a) = g_{ij}a^i a^j$, kde g_{ij} jsou koeficienty první základní formy. Pak normálovou křivost κ_n^a ve směru libovolného (ne nutně jednotkového) vektoru a definujeme jako normálovou křivost ve směru jednotkového tečného vektoru $\frac{a}{\|a\|}$. Odtud plyne

Věta 14.4. *Nechť $a = (a^1, a^2) = (du, dv) \in T_X\mathcal{S}$ je libovolný vektor. Pak*

$$\kappa_n^a = \frac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)} = \frac{h_{ij}a^i a^j}{g_{ij}a^i a^j}.$$

Tedy normálová křivost je podílem druhé a první základní formy. Nyní uvedeme praktické vzorce pro výpočet koeficientů h_{ij} druhé základní formy, jejichž odvození ponecháváme píli laskavého čtenáře. Je-li $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ souřadnicový zápis parametrizace $f(u, v)$ plochy $\mathcal{S}$, tak druhé derivace souřadnicových funkcí podle u a v budeme značit indexy i a j. Např. x''_{ij} značí x''_{uv}.

Věta 14.5. *Je-li $\mathcal{S}$ zadána parametricky, tak*

$$h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{ij} & y''_{ij} & z''_{ij} \end{vmatrix}.$$

Je-li $\mathcal{S}$ zadána explicitně rovnicí $z = f(x, y)$, tak

$$h_{11} = \frac{f''_{xx}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}, \quad h_{22} = \frac{f''_{yy}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}, \quad h_{12} = \frac{f''_{xy}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}.$$

Je-li $\mathcal{S}$ zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$, tak

$$h_{11} = \frac{F'_x F''_{zx} - F''_{xx}F'_z}{R}, \quad h_{22} = \frac{F'_y F''_{zy} - F''_{yy}F'_z}{R}, \quad h_{12} = \frac{F'_x F''_{zy} - F''_{xy}F'_z}{R}$$

kde $R = |F'_z|(F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z)$.

Příklad 14.1. Přímým výpočtem odvodíme, že v případě libovolné roviny je $\varphi_2 \equiv 0$. V případě kruhového válce $(r\cos u, r\sin u, v)$ vyjde $\varphi_2 = -rdu^2$ a v případě sféry s poloměrem r je $\varphi_2 = -\frac{1}{r}\varphi_1 = -r(\cos^2 v du^2 + dv^2)$.

Definice. Bod $X \in \mathcal{S}$ se nazývá *planárním bodem plochy $\mathcal{S}$*, jestliže v tomto bodě má tečná rovina styk 2. řádu s plochou $\mathcal{S}$.

Věta 14.6. *Bod $X = f(u_0, v_0) \in \mathcal{S}$ je planární právě když v tomto bodě $\varphi_2 \equiv 0$, tj. $h_{ij}(u_0, v_0) = 0$. Souvislá plocha, jejíž každý bod je planární, je částí roviny.*

Důkaz. Rovnici tečné roviny $\tau_X\mathcal{S}$ můžeme napsat ve tvaru skalárního součinu $n(u_0,v_0)\cdot(Y-f(u_0,v_0))=0$, kde $Y\in E_3$. Pro vyšetření jejího styku s plochou $\mathcal{S}$ uvažujme funkci $\Psi(u,v)=n(u_0,v_0)\cdot(f(u,v)-f(u_0,v_0))$ z Věty 12.2. Platí $\frac{\partial\Psi}{\partial u}=n(u_0,v_0)\cdot f'_u=0$, $\frac{\partial\Psi}{\partial v}=n(u_0,v_0)\cdot f'_v=0$. Druhé derivace jsou tvaru

$$\frac{\partial^2\Psi(u_0,v_0)}{\partial u^2}=n(u_0,v_0)\cdot f''_{uu}(u_0,v_0),\quad \frac{\partial^2\Psi(u_0,v_0)}{\partial u\partial v}=n(u_0,v_0)\cdot f''_{uv}(u_0,v_0),$$
$$\frac{\partial^2\Psi(u_0,v_0)}{\partial v^2}=n(u_0,v_0)\cdot f''_{vv}(u_0,v_0).$$

Porovnáním s (2) obdržíme první tvrzení. Derivací vztahů $n\cdot f'_u=0$ a $n\cdot f'_v=0$ dostaneme

$$n'_u\cdot f'_u+n\cdot f''_{uu}=0,\quad n'_v\cdot f'_u+n\cdot f''_{uv}=0,$$
$$n'_u\cdot f'_v+n\cdot f''_{uv}=0,\quad n'_v\cdot f'_v+n\cdot f''_{vv}=0. \tag{3}$$

Dále, protože n je jednotkový vektor, tak derivací rovnosti $n\cdot n=1$ dostaneme

$$n\cdot n'_u=0,\quad n\cdot n'_v=0. \tag{4}$$

Je-li každý bod planární, tak se podle prvního tvrzení a (2) anulují druhé členy v každé z rovnic (3). Podle první a třetí rovnice (3) a podle první rovnice (4) je vektor n'_u kolmý ke třem lineárně nezávislým vektorům n, f'_u, f'_v. Tedy n'_u je nulový vektor. Analogicky ukážeme, že n'_v je nulový vektor. Tedy normálový vektor n je konstantní, $n=n_0$. Položme nyní $\psi(u,v)=n_0\cdot(f(u,v)-f(u_0,v_0))$. Pak $\frac{\partial\psi}{\partial u}=n_0\cdot f'_u=0$ a $\frac{\partial\psi}{\partial v}=n_0\cdot f'_v=0$, takže ψ je konstantní funkce. Přitom $\psi(u_0,v_0)=0$, tedy $\psi(u,v)=0$. To znamená, že celá plocha $\mathcal{S}$ leží v tečné rovině jdoucí bodem $f(u_0,v_0)$. □

Důsledek 14.1. Bod $X\in\mathcal{S}$ je planární právě když pro libovolný tečný vektor $a\in T_X\mathcal{S}$ platí $\kappa_n^a=0$.

Definice. Bod $X\in\mathcal{S}$ se nazývá *sférickým bodem plochy* $\mathcal{S}$, jestliže existuje sféra, která má v tomto bodě styk 2. řádu s plochou $\mathcal{S}$.

Podle předchozího příkladu je v případě sféry $\varphi_2=-\frac{1}{r}\varphi_1$.

Věta 14.7. *Bod $X=f(u_0,v_0)\in\mathcal{S}$ je sférický právě když forma $\varphi_2(u_0,v_0)$ je konstantním násobkem formy $\varphi_1(u_0,v_0)$. Souvislá plocha, jejíž každý bod je sférický, je částí sféry.*

Důkaz. Protože plocha $\mathcal{S}$ má v bodě $f(u_0,v_0)$ se sférou styk 1. řádu, tak leží střed této sféry na normále plochy $\mathcal{S}$. Označíme-li $f_0=f(u_0,v_0)$, $n_0=n(u_0,v_0)$, tak středem sféry je bod f_0+tn_0. Rovnici sféry o tomto středu a poloměru t můžeme napsat ve tvaru skalárního součinu $(Y-f_0-tn_0)\cdot(Y-f_0-tn_0)-t^2=0$. Pro vyšetření jejího styku s plochou $\mathcal{S}$ uvažujme funkci $\Psi(u,v)=(f-f_0-tn_0)\cdot(f-f_0-tn_0)-t^2$ z Věty 12.2. Pak platí $\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial u}=(f-f_0-tn_0)\cdot f'_u$, $\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial v}=(f-f_0-tn_0)\cdot f'_v$. Tyto derivace se pro (u_0,v_0) anulují, neboť styk 1. řádu máme zaručen geometrickou volbou situace. Druhé derivace jsou $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2}=f'_u\cdot f'_u+(f-f_0-tn_0)\cdot f''_{uu}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial u\partial v}=f'_v\cdot f'_u+(f-f_0-tn_0)\cdot f''_{uv}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}=f'_v\cdot f'_v+(f-f_0-tn_0)\cdot f''_{vv}$. Jejich anulování v bodě (u_0,v_0) znamená

$$0=g_{11}(u_0,v_0)-th_{11}(u_0,v_0)=g_{12}(u_0,v_0)-th_{12}(u_0,v_0)=g_{22}(u_0,v_0)-th_{22}(u_0,v_0), \tag{5}$$

což je první tvrzení věty. Nechť nyní (5) platí v každém bodě. Z (3) a (5) dostaneme $f'_u \cdot (n'_u + \frac{1}{t} f'_u) = 0, f'_u \cdot (n'_v + \frac{1}{t} f'_v) = 0, f'_v \cdot (n'_u + \frac{1}{t} f'_u) = 0, f'_v \cdot (n'_v + \frac{1}{t} f'_v) = 0$. Podle (4) platí rovněž $n \cdot (n'_u + \frac{1}{t} f'_u) = 0$, $n \cdot (n'_v + \frac{1}{t} f'_v) = 0$. Tedy následující vektory jsou kolmé ke třem lineárně nezávislým vektorům a jsou proto nulové:

$$n'_u + \frac{1}{t} f'_u = \overrightarrow{0}, \quad n'_v + \frac{1}{t} f'_v = \overrightarrow{0}. \tag{6}$$

Derivací podle u resp. podle v dostaneme $n''_{uv} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{t}\right) f'_u + \frac{1}{t} f''_{uv} = \overrightarrow{0}$, $n''_{uv} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{t}\right) f'_v + \frac{1}{t} f''_{uv} = \overrightarrow{0}$. Tedy $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{t}\right) f'_u - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{t}\right) f'_v = \overrightarrow{0}$ a protože vektory f'_u, f'_v jsou lineárně nezávislé, tak musí platit $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{t}\right) = 0$, $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{t}\right) = 0$. Tedy $t =$ konst a podle (6) je bod $f + tn$ pevný. Protože každý bod plochy S má od tohoto bodu konstantní vzdálenost t, tak S musí být částí příslušné sféry. □

Jako cvičení snadno ověříme, že paraboloid $z = x^2 + y^2$ má jediný sférický bod $(0, 0, 0)$. Poněkud pracnější je ukázat, že trojosý elipsoid má 4 sférické body.

15 ASYMPTOTICKÉ SMĚRY PLOCHY

Definice. Směr v tečné rovině $\tau_X \mathcal{S}$ určený vektorem $a \in T_X \mathcal{S}$ se nazývá *asymptotický*, jestliže normálová křivost κ_n^a v tomto směru je rovna nule.

Z Věty 14.4 bezprostředně vyplývá

Věta 15.1. *Nenulový tečný vektor $a = (du, dv) \in T_X \mathcal{S}$ patří do asymptotického směru plochy $\mathcal{S}$ právě když splňuje rovnici $\varphi_2(a) = 0$, tj.*

$$h_{11} du^2 + 2h_{12} du dv + h_{22} dv^2 = 0. \tag{1}$$

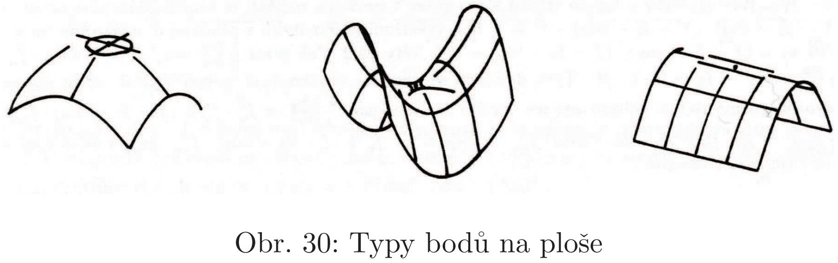
Z Důsledku 14.1 dále plyne

Věta 15.2. *V planárním bodě je každý směr asymptotický.*

Položme $\rho = \frac{du}{dv}$. Pak (1) je ekvivalentní kvadratické rovnici $h_{11}\rho^2 + 2h_{12}\rho + h_{22} = 0$, pro jejíž kořeny platí $\rho_{12} = \frac{-h_{12} \pm \sqrt{h_{12}^2 - h_{11}h_{22}}}{h_{11}}$. Pro $\det(h_{ij}) < 0$ dostaneme dva reálné asymptotické směry, pro $\det(h_{ij}) = 0$ oba tyto směry splynou a pro $\det(h_{ij}) > 0$ dostaneme imaginární kořeny, tj. žádný asymptotický směr.

Definice. Neplanární bod se nazývá *eliptický* (resp. *hyperbolický*, resp. *parabolický*), jestliže v tomto bodě platí $\det(h_{ij}) > 0$ (resp. $\det(h_{ij}) < 0$, resp. $\det(h_{ij}) = 0$).

V dalším uvidíme, že geometricky lze tyto pojmy znázornit obrázkem 30.



Obr. 30: Typy bodů na ploše

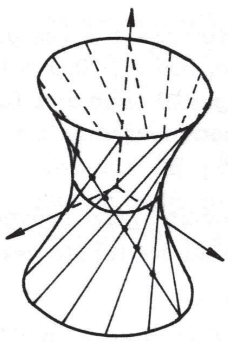
Definice. Křivka $\mathcal{C}$ na ploše $\mathcal{S}$ se nazývá *asymptotická křivka plochy* $\mathcal{S}$, jestliže v libovolném jejím bodě je její tečna asymptotickým směrem plochy $\mathcal{S}$.

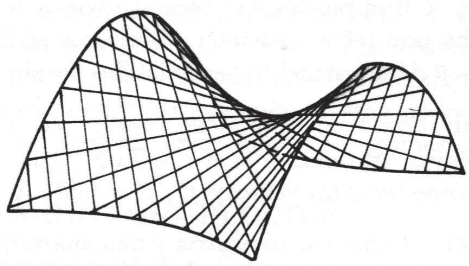
Je-li $u = u(t)$, $v = v(t)$ rovnice asymptotické křivky plochy $\mathcal{S}$, tak její tečný vektor je (du, dv). Tedy (1) je diferenciální rovnicí asymptotických křivek.

Poznámka 15.1. Je zřejmé, že platí:

1. Na ploše s pouze eliptickými body žádné asymptotické křivky neexistují.
2. Na ploše s pouze hyperbolickými body existují dvě vrstvy asymptotických křivek, které dohromady tvoří asymptotickou síť.
3. Na ploše s pouze parabolickými body existuje jedna vrstva asymptotických křivek.

Příklad 15.1. Z tvaru druhé základní formy v Příkladu 14.1 vidíme, že na kruhovém válci jsou všechny body parabolické a na sféře jsou všechny body eliptické. Je rovněž zřejmé, že asymptotickými křivkami válce jsou právě vertikální přímky (površky). Dále snadno odvodíme, že u hyperbolického paraboloidu $z = x^2 - y^2$ je $\varphi = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(dx^2 - dy^2)$, takže tato plocha má všechny body hyperbolické. Rovněž u jednodílného hyperboloidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ bezprostředně odvodíme, že všechny body jsou hyperbolické, viz Obr. 31 a 32.





Obr. 31: Jednodílný hyperboloid a Obr. 32: Hyperbolický paraboloid

Připomeňme, že oskulační rovina prostorové křivky není definována v jejích inflexních bodech.

Věta 15.3. *Křivka $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ je asymptotická právě když v každém bodě její oskulační rovina buď splývá s tečnou rovinou plochy nebo není definována.*

Důkaz. Je-li $u(t)$, $v(t)$ parametrizace křivky $\mathcal{C}$ v oblasti parametrů, tak parametrické vyjádření $\mathcal{C}$ v E_3 je $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$. Její oskulační rovina ω je určena vektory $\frac{d\gamma}{dt}$ a $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, pokud jsou tyto lineárně nezávislé. Přitom vektor $\frac{d\gamma}{dt}$ leží v tečné rovině $\tau_X\mathcal{S}$, takže $\omega = \tau_X\mathcal{S}$ právě když $n \perp \frac{d^2\gamma}{dt^2}$, tj. $n \cdot \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$. Toto však podle definice φ_2 znamená, že $\varphi_2(du, dv) = 0$. Jedná-li se o inflexní bod, tak $\frac{d^2\gamma}{dt^2} \| \frac{d\gamma}{dt}$, takže rovněž platí $n \cdot \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$. Naopak, je-li $\varphi_2(du, dv) = 0$, tak $n \cdot \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$ a dostaneme tytéž diskutované případy.

□

Protože přímka je charakterizována tím, že každý její bod je inflexní, tak platí:

Důsledek 15.1. Leží-li na $\mathcal{S}$ přímka, tak je to asymptotická křivka plochy $\mathcal{S}$.

Příklad 15.2
(a) Na jednodílném hyperboloidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ leží 2 soustavy přímek (tj. asymptotických křivek), přičemž každá přímka jedné soustavy protíná každou přímku druhé soustavy, kdežto každé dvě přímky jedné soustavy jsou navzájem mimoběžné. Úpravou totiž dostaneme $\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$. Pak rovnice přímek první soustavy jsou $k_1\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = k_2\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, $k_2\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = k_1\left(1 + \frac{y}{b}\right)$ a rovnice přímek druhé soustavy jsou $k_1\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = k_2\left(1 + \frac{y}{b}\right)$, $k_2\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = k_1\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, kde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla (nikoli obě současně rovna nule).
(b) Na hyperbolickém paraboloidu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ (Obr. 32) leží 2 soustavy přímek, které mají stejné vlastnosti jako soustavy přímek jednodílného hyperboloidu. Rovnice přímek první soustavy jsou $k_1\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = k_2 z$, $k_2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = k_1$ a rovnice přímek druhé soustavy jsou $k_1\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = k_2 z$, $k_2\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = k_1$. Je zřejmé, že v eliptickém bodě je znaménko normálové křivosti všude stejné, takže celá plocha leží na jedné straně tečné roviny (příkladem je sféra nebo elipsoid). Na druhou stranu, v hyperbolickém bodě nám dva asymptotické směry oddělují části plochy, v nichž je normálová křivost kladná a záporná. V kladné části leží normálové řezy nad plochou, v záporné části pod plochou. Plocha tedy leží na obou stranách své tečné roviny.

Příklad 15.3. Asymptotickými směry plochy $z = xy$ jsou osa x a osa y, které na této ploše leží. Tečná rovina v počátku je $z = 0$. Dále, pro $x > 0, y > 0$ nebo $x < 0, y < 0$ je plocha nad tečnou rovinou a pro $x > 0, y < 0$ nebo $x < 0, y > 0$ je plocha pod tečnou rovinou. Všimněme si, že transformace souřadnic $x = \overline{x} + \overline{y}$, $y = \overline{x} - \overline{y}$ dává rovnici hyperbolického paraboloidu $z = \overline{x}^2 - \overline{y}^2$.

Každý bod Y ležící v tečné rovině $\tau_X\mathcal{S}$ můžeme ztotožnit s jeho průvodičem, tj. s tečným vektorem $a = \overrightarrow{XY} \in T_X\mathcal{S}$. Označme x, y souřadnice tohoto vektoru v bázi určené tečnými vektory f'_u, f'_v v bodě X.

Definice. *Dupinova indikatrix* v neplanárním bodě $X \in \mathcal{S}$ je množina bodů tečné roviny $\tau_X\mathcal{S}$ takových že $|h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2| = 1$.

Jedná se tedy o křivku 2. stupně ležící v $\tau_X\mathcal{S}$ popsanou rovnicí $|\varphi_2(a)| = 1$. Podle Věty 14.4 je $\kappa_n^a = \frac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)} = \frac{\varphi_2(a)}{\|a\|^2}$, takže $\varphi_2(a) = \kappa_n^a \cdot \|a\|^2$. Odtud je vidět, že Dupinovu indikatrix lze rovněž charakterizovat rovností

$$|\kappa_n^a| = \frac{1}{\|a\|^2}. \tag{2}$$

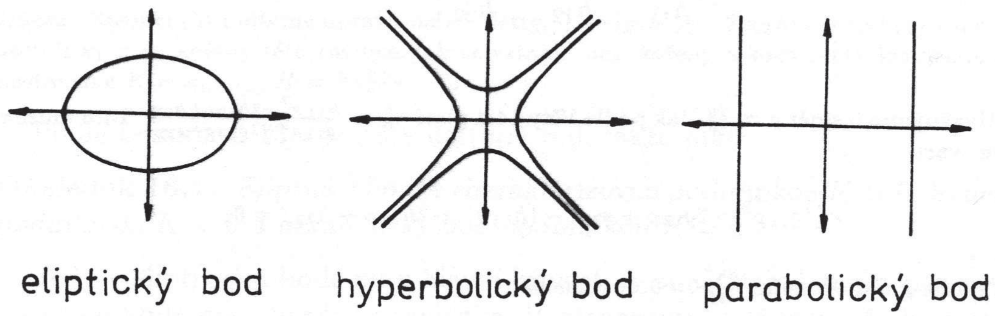
Geometricky tedy *Dupinova indikatrix vyjadřuje množinu koncových bodů tečných vektorů s počátkem v bodě p, v jejichž směru je absolutní hodnota normálové křivosti rovna převrácené hodnotě kvadrátu jejich velikosti.*

Věta 15.4. *Dupinova indikatrix je jednou z následujících množin bodů:*

1. *V eliptickém bodě* $det(h_{ij}) > 0$ *je to elipsa. Tato elipsa je kružnicí právě ve sférických bodech plochy* S.

2. *V hyperbolickém bodě* $det(h_{ij}) < 0$ *je to dvojice sdružených hyperbol* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

3. V parabolickém bodě $det(h_{ij}) = 0$ *je to dvojice rovnoběžných přímek.*



Obr. 33: Dupinova indikatrix

Důkaz. Z teorie kuželoseček plyne, že rovnice $h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2 = 1$ představuje pro $\det(h_{ij}) > 0$ elipsu a pro $\det(h_{ij}) < 0$ dvojici hyperbol. V eliptickém bodě je podle (2) a Věty 14.4 příslušná elipsa kružnicí právě když $\frac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)} = c$. Toto nastane podle Věty 14.7 právě ve sférických bodech. Nakonec, pro $\det(h_{ij}) = 0$ je $h_{12} = \sqrt{h_{11}}\sqrt{h_{22}}$, takže $1 = h_{11}x^2 + 2\sqrt{h_{11}}\sqrt{h_{22}}xy + h_{22}y^2 = (\sqrt{h_{11}}x + \sqrt{h_{22}}y)^2$, což dává dvě rovnoběžné přímky $\sqrt{h_{11}}x + \sqrt{h_{22}}y = \pm 1$.

□

Dá se rovněž ukázat, že Dupinova indikatrix v neplanárním bodě $X \in \mathcal{S}$ udává přibližný tvar křivky, která je průnikem plochy $\mathcal{S}$ s rovinou α rovnoběžnou s tečnou rovinou $\tau_X\mathcal{S}$, přičemž α je „málo vzdálena“ od $\tau_X\mathcal{S}$. Je dále zřejmé, že v hyperbolickém bodě jsou asymptotickými směry právě směry asymptot hyperbol a v parabolickém bodě je asymptotickým směrem směr osy dvojice přímek.

16 GAUSSOVA KŘIVOST PLOCHY

Definice. *Hlavními směry* v nesférickém bodě $X \in \mathcal{S}$ rozumíme směry $a \in T_X\mathcal{S}$, v nichž nabývá normálová křivost κ_n^a v bodě X své extremální hodnoty. Příslušné maximální a minimální hodnoty κ_1, κ_2 normálové křivosti nazýváme *hlavními křivostmi* a křivky na ploše $\mathcal{S}$ dotýkající se hlavních směrů nazýváme *hlavními křivkami.*

Tedy hlavní křivosti vyjadřují maximální a minimální „ohýbání“ plochy v daném bodě. Např. v případě kruhového válce $x^2 + y^2 = r^2$ je minimální hodnotou $\kappa_1 = 0$ (ve směru povrchových přímek) a maximální hodnotou je $\kappa_2 = \frac{1}{r}$ (ve směru horizontálních kružnic). Hlavními křivkami kruhového válce jsou tedy povrchové přímky a horizontální kružnice, viz Obr. 34.

Je zřejmé, že hlavní směry jsou právě směry os Dupinovy indikatrix v nesférickém bodě. Přitom osy Dupinovy indikatrix v eliptickém bodě definujeme jako osy elipsy, v hyperbolickém bodě jako společné osy obou hyperbol a v parabolickém bodě jako osu rovnoběžných přímek a přímku na ni kolmou. Tedy *na ploše bez planárních a sférických bodů existuje ortogonální síť hlavních křivek.*

Věta 16.1. *Nenulový vektor $a = (du, dv) \in T_X\mathcal{S}$ je hlavním směrem plochy $\mathcal{S}$ právě když jeho souřadnice vyhovují rovnici*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Důkaz. Uvažujeme-li směr $\rho = \frac{du}{dv}$, tak podle Věty 14.4 platí $\kappa_n^\rho = \frac{h_{11}\rho^2+2h_{12}\rho+h_{22}}{g_{11}\rho^2+2g_{12}\rho+g_{22}}$. Toto můžeme napsat ve tvaru

$$\kappa_n^\rho(g_{11}\rho^2 + 2g_{12}\rho + g_{22}) - (h_{11}\rho^2 + 2h_{12}\rho + h_{22}) = 0. \tag{2}$$

Derivací podle ρ a dosazením $\frac{d\kappa_n^\rho}{d\rho} = 0$ dostaneme

$$\kappa_n^\rho(g_{11}\rho + g_{12}) - (h_{11}\rho + h_{12}) = 0. \tag{3}$$

Vynásobením $(-\rho)$ a přičtením k (2) obdržíme

$$\kappa_n^\rho(g_{12}\rho + g_{22}) - (h_{12}\rho + h_{22}) = 0. \tag{4}$$

Hlavní směry jsou tedy takové směry, pro které existuje κ_n^ρ splňující (3) a (4). V obecném případě mají rovnice $a_1x = a_2$, $a_3x = a_4$ společné řešení právě když $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3}$, tj. když $0 = a_1a_4 - a_2a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$. V (3) a (4) máme $x = \kappa_n^\rho$, takže se jedná o anulování determinantu 2. řádu sestaveného z lineárních funkcí u κ_n^ρ. Zpětným dosazením $\rho = \frac{du}{dv}$ do tohoto determinantu a vynásobením dv dostaneme $\begin{vmatrix} g_{11}du + g_{12}dv & h_{11}du + h_{12}dv \\ g_{12}du + g_{22}dv & h_{12}du + h_{22}dv \end{vmatrix} = 0$, což je ekvivalentní s (1).

□

Tedy (1) je diferenciální rovnicí hlavních křivek, která je 1. řádu a 2. stupně (podobně jako diferenciální rovnice asymptotických křivek). Na základě geometrické konstrukce zde však má příslušná kvadratická rovnice vždy reálné kořeny. Dostáváme tedy *dvě vrstvy hlavních křivek*, které dohromady tvoří *síť hlavních křivek*.

Věta 16.2. *Hlavní křivosti κ_1 a κ_2 jsou kořeny kvadratické rovnice*

$$\begin{vmatrix} \kappa g_{11} - h_{11} & \kappa g_{12} - h_{12} \\ \kappa g_{12} - h_{12} & \kappa g_{22} - h_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Důkaz. Hlavní křivosti jsou ty hodnoty κ, pro něž existuje ρ s vlastnostmi (3) a (4). Toto upravíme na tvar $\rho(g_{11}\kappa - h_{11}) + \kappa g_{12} - h_{12} = 0$, $\rho(g_{12}\kappa - h_{12}) + \kappa g_{22} - h_{22} = 0$. Dále pokračujeme analogicky jako v důkazu předchozí věty.

□

Křivost plochy v daném bodě posuzujeme podle aritmetického průměru a součinu hlavních křivostí plochy v tomto bodě. Definujeme proto

Definice. Nechť κ_1 a κ_2 jsou hlavní křivosti v nesférickém bodě $X \in \mathcal{S}$. Jejich součin $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ nazýváme *Gausssovou (úplnou) křivostí* a jejich průměr $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ nazýváme *střední křivostí* plochy $\mathcal{S}$ v bodě X.

Věta 16.3. *Pro Gaussovu a střední křivost platí*

$$K = \frac{det(h_{ij})}{det(g_{ij})}, \quad H = \frac{g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{2det(g_{ij})}.$$

Důkaz. Rovnici (5) můžeme upravit na $\kappa^2 \cdot \det(g_{ij}) - \kappa(g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}) + \det(h_{ij}) = 0$. Jsou-li κ_1 a κ_2 kořeny této rovnice, tak ze vztahu mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice dostaneme $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$, $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.

□

Podle Lemmatu 13.1 je vždy $\det(g_{ij}) > 0$, takže platí

Důsledek 16.1. Eliptický bod je charakterizován podmínkou $K > 0$, hyperbolický podmínkou $K < 0$ a parabolický bod podmínkou $K = 0$.

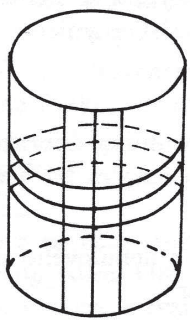
Tedy v eliptickém bodě mají hlavní křivosti κ_1 a κ_2 stejná znaménka a v hyperbolickém bodě mají opačná znaménka. V planárním bodě jsou všechny normálové křivosti nulové a v parabolickém bodě je právě jedno z čísel κ_1, κ_2 rovno nule.

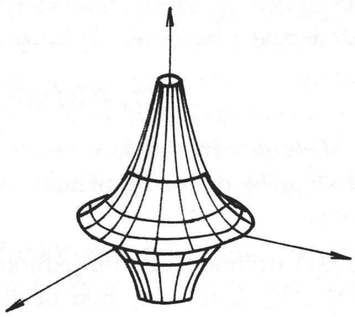
V planárním bodě definujeme Gaussovu křivost rovnu nule. Podle Příkladu 14.1 je v případě libovolné roviny $h_{ij} = 0$. Odtud dostaneme $K = H = 0$, takže „rovina není křivá“. Ve sférickém bodě je normálová křivost ve všech směrech stejná, takže Gaussovu křivost plochy v jejím sférickém bodě definujeme jako součin normálových křivostí v libovolných dvou směrech.

Věta 16.4. *Gaussova křivost sféry o poloměru r je rovna $K = \frac{1}{r^2}$.*

Důkaz. Normálové řezy jsou kružnice o poloměru r, jejichž křivost je $\frac{1}{r}$.

□





Obr. 34: Hlavní křivky válce a Obr. 35: Pseudosféra

Příklad 16.1 (Pseudosféra)**.** Pseudosféra je rotační plocha, která vznikne rotací křivky (zvané *traktrix*) s parametrickými rovnicemi $x = a \sin v$, $z = a(\ln\mathrm{tg}\frac{v}{2} + \cos v)$ kolem osy z, viz Obr. 35. Je-li $f(u, v) = (x(v)\cos u, x(v)\sin u, z(v))$ libovolná rotační plocha, tak na základě Věty 16.3 určíme její Gaussovu křivost $K = \frac{z'(v)}{x(v)} \frac{z''(v)x'(v) - x''(v)z'(v)}{(x'^2(v) + z'^2(v))}$. V případě pseudosféry pak dosazením dostaneme $K = -\frac{1}{a^2}$. Tedy pseudosféra je příkladem plochy, která má konstantní zápornou Gaussovu křivost K.

Poznamenejme, že střední křivost H hraje důležitou roli při studiu tzv. minimálních ploch (minimální plocha je plocha s nejmenším plošným obsahem ze všech ploch s danou hranicí). Dá se ukázat, že takovéto plochy jsou charakterizovány vlastností $H = 0$. Následující větu nebudeme dokazovat. Jedná se o hluboký výsledek, který považoval F. K. Gauss za jeden ze svých nejcennějších matematických úspěchů. Poznamenejme pouze, že její latinský název *theorema egregium* znamená v překladu znamenitá věta.

Věta 16.5 (Theorema egregium)**.** *Gaussovu křivost plochy lze vyjádřit pouze pomocí koeficientů g_{ij} první základní formy a jejich prvních a druhých parciálních derivací.*

Poznámka 16.1. V předchozích kapitolách jsme ukázali, že k řešení řady problémů z teorie ploch stačí znát koeficienty první a druhé základní formy plochy. Vzniká tak přirozená otázka, do jaké míry tyto koeficienty danou plochu určují. Podle věty Theorema egregium lze vyjádřit Gaussovu křivost K pouze pomocí koeficientů g_{ij} a jejich prvních a druhých derivací. Na druhé straně, ve vzorci z Věty 16.3 pro K vystupují koeficienty g_{ij} i h_{ij}. To znamená, že mezi koeficienty první a druhé základní formy musí existovat netriviální vztahy. Tyto poměrně složité rovnice (které zde nebudeme odvozovat) se nazývají Gaussovy-Mainardiovy-Codazziovy rovnice (zkráceně G-M-C rovnice). Podle Věty 10.10 je prostorová křivka úplně určena svou křivostí $\kappa > 0$ a torzí τ, přičemž $\kappa > 0$ i τ můžeme předepsat libovolně. V případě ploch se dá ukázat, že jsou-li v nějaké oblasti parametrů zadány dvě kvadratické formy takové, že první je pozitivně definitní a koeficienty g_{ij} a h_{ij} těchto forem splňují G-M-C rovnice, tak lokálně existuje plocha, pro kterou tyto kvadratické formy představují první a druhou základní formu. Tento výsledek se nazývá *Petersonova–Bonnetova věta.* Tedy koeficienty první a druhé základní formy tvoří úplný systém geometrických veličin, které charakterizují danou plochu. Tyto koeficienty však nemůžeme předepsat libovolně, ale musí mezi nimi platit G-M-C rovnice.

17 PŘÍMKOVÉ PLOCHY

Definice. *Jednoparametrickou soustavou přímek* v E_3 rozumíme zobrazení, které každému $t \in (a, b)$ přiřazuje přímku $p(t)$. Přímka $p(t)$ se nazývá *tvořící přímkou* této soustavy.

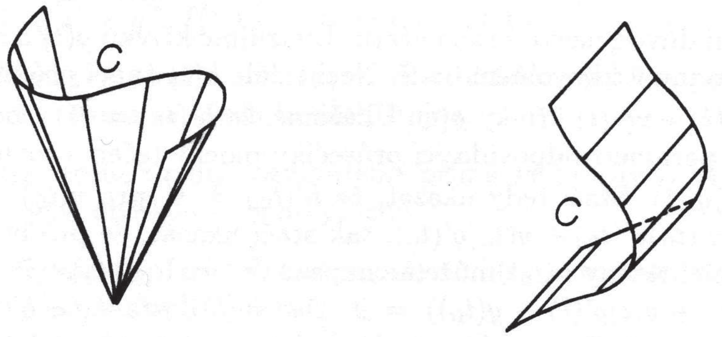
Přímku $p(t)$ určíme zadáním jednoho bodu $g(t) \in p(t)$ a nenulového směrového vektoru $h(t) \in V_3$. Libovolný bod přímky $p(t)$ má pak tvar

$$f(t, v) = g(t) + vh(t), \quad v \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Jsou-li $g : (a, b) \to E_3$ a $h : (a, b) \to V_3$ třídy C^r (připomínáme, že toto bylo definováno v 6. kapitole), tak (1) je funkce (resp. pohyb) dvou proměnných t, v s hodnotami v E_3, která je rovněž třídy C^r. Aby (1) bylo parametrickým vyjádřením nějaké plochy s parametry t a v, tak vedle injektivnosti f musíme navíc předpokládat, že vektory $\frac{\partial f}{\partial t} = g'(t) + vh'(t)$ a $\frac{\partial f}{\partial v} = h(t)$ jsou v každém bodě lineárně nezávislé.

Definice. Plocha $\mathcal{S} \subset E_3$ se nazývá *přímková*, jestliže je částí jednoparametrické soustavy přímek.

V případě přímkové plochy hovoříme rovněž o tvořící přímce, i když to může být jen část přímky. Tedy přímková plocha je taková plocha, jejímž každým bodem prochází alespoň jedna přímka, ležící celá na ploše. Funkci g můžeme rovněž interpretovat jako parametrické vyjádření nějaké křivky $\mathcal{C}$ (tzv. *řídící křivky*). Přímková plocha pak vzniká pohybem tvořící přímky podél řídící křivky $\mathcal{C}$, přičemž tvořící přímka je v každém bodě $g(t) \in \mathcal{C}$ určena vektorem $h(t)$.



Obr. 36: Obecný kužel a Obr. 37: Obecný válec

Příklad 17.1 (Obecný kužel, obecný válec a plocha tečen).
(a) Přímková plocha, jejíž všechny tvořící přímky procházejí pevným bodem $A \in E_3$, se nazývá *obecný kužel*, Obr. 36. Tedy $g(t) = A \in E_3$ je pevný bod a parametrizace kužele je tvaru

$$f(t, v) = A + vh(t). \tag{2}$$

Ukážeme, že (2) je parametrizace plochy pro $v(h' \times h) \neq \overrightarrow{0}$. Skutečně, $f'_t = vh'$, $f'_v = h$, takže $f'_t \times f'_v = v(h' \times h)$. Pro $v = 0$ obdržíme vrchol kužele a jestliže $h' \times h = \overrightarrow{0}$, tak dostaneme vektorovou diferenciální rovnici $h'(t) = k(t)h(t)$, kde $k(t)$ je reálná funkce. Snadno ověříme, že tato rovnice má řešení $h(t) = l(t)b$, kde $l(t)$ je reálná funkce a $b \in V_3$ je pevný vektor. Pro $v \neq 0$ a $h' \times h = \overrightarrow{0}$ bychom tedy dostali $f(t, v) = A + vl(t)b$, což je dvouparametrický pohyb po pevné přímce, nikoli plocha.
(b) Přímková plocha, jejíž všechny tvořící přímky jsou navzájem rovnoběžné, se nazývá *obecný válec*, Obr. 37. Tedy $h(t) = a \in V_3$ je pevný nenulový vektor a parametrizace válce je tvaru

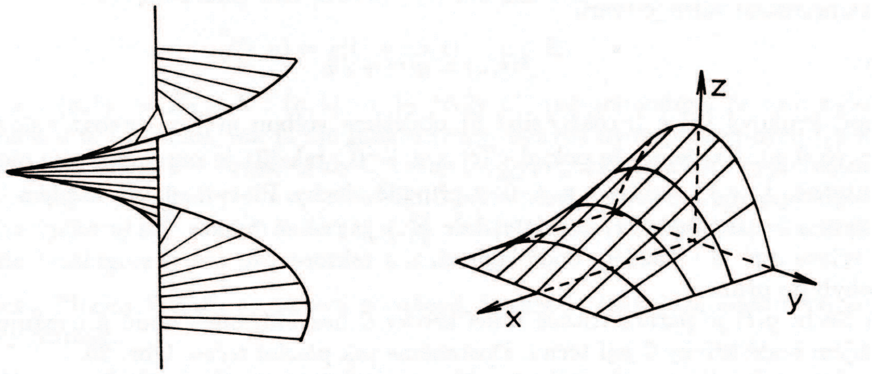
$$f(t, v) = g(t) + va. \tag{3}$$

Např. kruhový válec $(r\cos t, r\sin t, v)$ obdržíme volbou $g(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$, $a = (0, 0, 1)$. Ukážeme, že pokud $g'(t) \times a \neq \overrightarrow{0}$, tak (3) je parametrizace plochy. Skutečně, $f'_t \times f'_v = g'(t) \times a \neq \overrightarrow{0}$ v případě plochy. Platí-li však v každém bodě $g'(t) \times a = \overrightarrow{0}$, tak $g'(t) = k(t)a$, kde $k(t)$ je reálná funkce. Tedy tečný vektor ke křivce $g(t)$ je v každém bodě kolineární s vektorem a, což je singulární případ (pohyb po přímce).
(c) Nechť $g(t)$ je parametrizace řídící křivky $\mathcal{C}$ bez inflexních bodů a uvažujme v každém bodě křivky $\mathcal{C}$ její tečnu. Dostaneme tak *plochu tečen*, Obr. 29

$$f(t, v) = g(t) + vg'(t). \tag{4}$$

Platí $f'_t = g'(t) + vg''(t)$, $f'_v = g'(t)$, takže $f'_t \times f'_v = v(g''(t) \times g'(t))$. Protože $\mathcal{C}$ nemá inflexní body, tak $(g'' \times g') \neq \overrightarrow{0}$. Tedy $(f'_t \times f'_v) = \overrightarrow{0}$ právě když $v = 0$, tj. právě v bodech křivky $\mathcal{C}$. Můžeme konstatovat, že (4) je parametrizace plochy ve všech bodech kromě řídící křivky $\mathcal{C}$, kterou musíme z plochy vyjmout. Tato křivka se nazývá *hrana vratu plochy tečen.* Vysvětlíme nyní důvod názvu hrana vratu. Uvažujme křivku $g(t)$ a označme $\nu(t)$ její normálovou rovinu v libovolném bodě. Nechť dále $h(t)$ značí průnik roviny $\nu(t)$ s plochou tečen $g(t) + vg'(t)$ křivky $g(t)$. Ukážeme, že $h'(t_0) = \overrightarrow{0}$ v bodech křivky $g(t)$. Značí-li $v(t)$ parametr odpovídající průsečíku plochy tečen s rovinou $\nu(t)$, tak $h(t) = g(t)+v(t)g'(t)$. Stačí tedy ukázat, že $h'(t_0) = \overrightarrow{0}$ pro $v(t_0) = 0$. Protože $h'(t_0) = g'(t_0) + v'(t_0)g'(t_0) + v(t_0)g'(t_0)$, tak stačí ukázat, že pro $v(t_0) = 0$ platí $v'(t_0) = -1$. Rovnici roviny $\nu(t_0)$ můžeme napsat ve tvaru $g'(t_0)\cdot(Y-g(t_0)) = 0$, takže $g'(t_0) \cdot (g(t) + v(t)g'(t) - g(t_0)) = 0$. Derivací dostaneme $g'(t_0) \cdot (g'(t) + v'(t)g'(t) + v(t)g''(t)) = 0$. Dosazení $t = t_0$ dává $g'(t_0) \cdot g'(t_0) + v'(t_0)g'(t_0) \cdot g'(t_0) = 0$, takže $v'(t_0) = -1$ a tedy $h'(t_0) = \overrightarrow{0}$. Tato podmínka znamená nulovou rychlost, tj. bod vratu podobně jako u semikubické paraboly (t^2, t^3) na Obr. 1.

Příklad 17.2 (Přímkové kvadriky a konoid)**.**
(a) Uvažujme 3 mimoběžky q_1, q_2, q_3 a každým bodem $A \in q_3$ veďme příčku mimoběžek q_1, q_2. V projektivní geometrii se ukazuje, že takto dostaneme kvadriku (tzv. *přímkovou kvadriku*). Pokud vezmeme 3 přímky r_1, r_2, r_3 vzniklé soustavy (rovněž mimoběžné) a zopakujeme výše uvedenou konstrukci vzhledem k nim, tak dostaneme druhou jednoparametrickou soustavu přímek na téže kvadrice. Tato nová soustava přitom obsahuje q_1, q_2, q_3. Příklady přímkových kvadrik jsou jednodílný hyperboloid a hyperbolický paraboloid (viz Příklad 15.2 a Obr. 31 a 32).
(b) Mějme dánu rovinu ρ, přímku q a křivku $\mathcal{C}$. Každým bodem křivky $\mathcal{C}$ veďme přímku, která protíná q a je rovnoběžná s ρ. Takto vzniklá přímková plocha se nazývá *konoid.* Je-li q kolmá k ρ, tak hovoříme o *přímém konoidu*, v opačném případě o *kosém konoidu.* Každý konoid se obvykle nazývá podle křivky $\mathcal{C}$. Např. *šroubový konoid* je určen šroubovicí $(\cos t, \sin t, bt)$ (=křivka $\mathcal{C}$), přičemž ρ je rovina $z = 0$ a q osa z. Parametrizace šroubového konoidu je pak $f(t, v) = (v \cos t, v \sin t, bt)$, viz Obr. 38. Příkladem kosého konoidu je *parabolický konoid* na Obr. 39, který je určen parabolou.



Obr. 38: Šroubový konoid a Obr. 39: Parabolický konoid

Příklad 17.3. Uvedeme tvar parametrizace (1) některých známých přímkových ploch.
(a) Hyperbolický paraboloid $z = xy$: $f(t, v) = (t, 0, 0) + v(0, 1, t)$.
(b) Hyperbolický paraboloid $z = x^2 - y^2$: $f(t, v) = (t, 0, t^2) + v(1, 1, 2t)$.
(c) Plückerův konoid $z = \frac{2xy}{x^2+y^2}$: $f(t, v) = (0, 0, \sin 2t) + v(\cos t, \sin t, 0)$.
(d) Kužel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: $f(t, v) = (v \cos t, v \sin t, v)$.

Definice. Přímková plocha se nazývá *rozvinutelná*, jestliže podél každé tvořící přímky je tečná rovina ve všech bodech stejná.

Tedy všechny tečné roviny rozvinutelné přímkové plochy tvoří jednoparametrickou soustavu, jejíž obálkou je daná plocha.

Věta 17.1. *Přímková plocha $f(t,v) = g(t) + vh(t)$ je rozvinutelná právě když pro každé t platí $[g'(t), h(t), h'(t)] = 0$.*

Důkaz. Podmínka věty je ekvivalentní komplanárnosti vektorů $g'(t)$, $h(t)$, $h'(t)$ a toto je zřejmě ekvivalentní tomu, že vektory $g'(t) \times h(t)$, $h'(t) \times h(t)$ jsou kolineární. Normálový vektor plochy $f(t,v)$ má tvar

$$f'_t \times f'_v = (g' \times h) + v(h' \times h). \tag{5}$$

1. Jsou-li vektory $(g' \times h)$ a $(h' \times h)$ kolineární, tak pravá strana (5) je pro libovolné v kolineární s vektorem $h' \times h$. Tedy normálový vektor (5) má pevný směr podél tvořící přímky a plocha je rozvinutelná.
2. Je-li plocha $f(t,v)$ rozvinutelná, tak její normálový vektor musí mít pevný směr podél tvořící přímky, takže směr normály (5) nezávisí na v. To je možné pouze v případě, že vektory $(g' \times h)$ a $(h' \times h)$ jsou kolineární.

$\square$

Důsledek 17.1. Obecný kužel, obecný válec a plocha tečen jsou rozvinutelné přímkové plochy.

Na druhou stranu, přímková kvadrika zřejmě rozvinutelná není. Tečná rovina podél tvořící přímky je totiž určena tvořící přímkou a přímkou druhé soustavy. Ta je ale dána příčkou dvou mimoběžek, takže tečná rovina nemůže být pevná.

Definice. Tvořící přímka $p(t_0) = g(t_0) + vh(t_0)$ přímkové plochy (1) se nazývá *cylindrická*, jestliže vektor $h'(t_0)$ je kolineární s $h(t_0)$.

Věta 17.2. *Přímková plocha, jejíž každá tvořící přímka je cylindrická, je obecný válec.*

Důkaz. Z vektorové diferenciální rovnice $h'(t) = k(t)h(t)$ (kde $k(t)$ je reálná funkce) plyne $h(t) = l(t)a$, kde $l(t)$ je reálná funkce a $a \in V_3$ pevný vektor. Můžeme tedy psát $f(t,v) = g(t) + vl(t)a$, což je válec s jinou parametrizací tvořících přímek.

$\square$

Věta 17.3. *Rozvinutelná přímková plocha bez cylindrických přímek je buď plocha tečen nebo kužel.*

Důkaz. Tečná rovina, která je pevná podél tvořící přímky, je určena vektory $f'_t = g'(t) + vh'(t)$, $f'_v = h(t)$. V jejím zaměření leží pro dvě hodnoty $v_1 \neq v_2$ vektory $g'(t) + v_1h'(t)$ a $g'(t) + v_2h'(t)$ a tedy také vektor $h'(t)$. Protože vektory $h(t)$ a $h'(t)$ jsou nekolineární, tak tvoří bázi zaměření tečné roviny. Vektor $g'(t)$ je tedy jejich lineární kombinací tvaru $g'(t) = k(t)h(t) + l(t)h'(t)$, kde $k(t)$ a $l(t)$ jsou reálné funkce. Pro bod $\widetilde{g}(t) = g(t) - l(t)h(t)$ na tvořící přímce pak platí $\widetilde{g}'(t) = g'(t) - l'(t)h(t) - l(t)h'(t) = (k(t) - l'(t))h(t)$. Jestliže $k(t) - l'(t) \neq 0$, pak je vektor h kolineární s vektorem $\widetilde{g}'$ a dostaneme plochu tečen. Pokud všude platí $k(t) - l'(t) = 0$, tak $\widetilde{g}' = \overrightarrow{0}$. V tomto případě je $\widetilde{g}$ konstantní vektor a dostaneme kužel.

$\square$

Uvažujme jednoparametrickou soustavu rovin

$$F(x,y,z,t) = a(t)x + b(t)y + c(t)z + d(t) = 0, \quad t \in (a,b) \tag{6}$$

a hledejme její obálku. Označme $n(t) = (a(t), b(t), c(t))$ normálový vektor soustavy (6). Značí-li $w = (x,y,z)$ libovolný bod (uvažovaný nyní jako vektor) tak můžeme napsat (6) ve tvaru skalárního součinu

$$n(t) \cdot w + d(t) = 0. \tag{7}$$

Podle (9) v 12. kapitole je charakteristika vedle (7) určena ještě rovnicí $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, tj.

$$n'(t) \cdot w + d'(t) = 0. \tag{8}$$

Řešení soustavy (7), (8) můžeme geometricky interpretovat jako průnik dvou rovin, které tyto rovnice představují. Pokud $n(t) \times n'(t) \neq \overrightarrow{0}$, tak jsou tyto roviny různoběžné a protínají se v přímce. Je-li tedy $n(t) \times n'(t) \neq \overrightarrow{0}$, tak je charakteristikou přímka. Pak charakteristickou množinou soustavy (6) je jednoparametrická soustava přímek

$$g(t) + vh(t) \tag{9}$$

kde $h(t)$ je řešení zhomogenizované soustavy $n(t) \cdot w = 0$, $n'(t) \cdot w = 0$ a $g(t)$ je jedno řešení nehomogenní soustavy (7), (8). Přidejme k (7) a (8) ještě další rovnici

$$n''(t) \cdot w + d''(t) = 0 \tag{10}$$

a uvažujme soustavu (7), (8), (10). Předpokládejme, že vektory $n(t), n'(t), n''(t)$ jsou lineárně nezávislé. Pak soustava (7), (8), (10) má pro každé t jediné řešení $f(t)$.

Definice. Řekneme, že soustava (6) je *regulární*, jestliže vektory $n(t), n'(t), n''(t)$ jsou pro každé t lineárně nezávislé a řešením soustavy (7), (8), (10) je křivka $f(t)$ bez inflexních bodů. Tato křivka se nazývá *hrana vratu* soustavy (6).

Věta 17.4. *Obálkou regulární jednoparametrické soustavy rovin je plocha tečen její hrany vratu.*

Důkaz. Dosazením $f(t)$ za w do (7), (8) a (10) dostamene tři identity $n(t) \cdot f(t) + d(t) = 0$, $n'(t) \cdot f(t) + d'(t) = 0$, $n''(t) \cdot f(t) + d''(t) = 0$. Derivováním odvodíme $n(t) \cdot f'(t) = 0$ a $n'(t) \cdot f'(t) = 0$. Toto je však zhomogenizovaná soustava k (7) a (8), přičemž stejnou soustavu splňuje vektor $h(t)$. Tedy $f'(t)$ a $h(t)$ jsou kolineární, takže (9) má tvar $f(t) + vf'(t)$. Toto je rovnice plochy tečen křivky $f(t)$.

□

Příklad 17.4. Určíme hranu vratu a obálku jednoparametrické soustavy rovin $F(x,y,z,t) = x \sin t - y \cos t + z - bt = 0$. Soustava (7), (8), (10) má v našem případě tvar $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial t} = x \cos t + y \sin t - b = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -x \sin t + y \cos t = 0$. Z této soustavy tří lineárních rovnic vypočteme $x = b \cos t$, $y = b \sin t$, $z = bt$, což je rovnice šroubovice. Hranou vratu je tedy šroubovice a podle předchozí věty je obálkou plocha tečen šroubovice $f(t,v) = (b \cos t, b \sin t, bt) + v(-b \sin t, b \cos t, b)$.

Je zřejmé, že všechny tvořící přímky přímkové plochy jsou jejími asymptotickými křivkami. Na přímkové ploše proto existuje alespoň jeden reálný asymptotický směr (jde o směr, který odpovídá tvořící přímce). Tedy *všechny body přímkové plochy jsou buď parabolické (Gaussova křivost $K = 0$) nebo hyperbolické ($K < 0$).*

Věta 17.5. *Obecný válec, obecný kužel a plocha tečen mají nulovou Gaussovu křivost K.*

Důkaz. Podle Věty 16.3 je $K = 0 \Leftrightarrow \det(h_{ij}) = 0$. V případě plochy tečen $f(t,v) = g(t) + vg'(t)$, $v \neq 0$ je $f'_t = g'(t) + vg''(t)$, $f'_v = g'(t)$. Máme $f''_{vv} = \overrightarrow{0}$, takže $h_{22} = n \cdot f''_{vv} = 0$. Dále, $h_{12} = n \cdot f''_{tv} = n \cdot g''(t)$. Protože normálový vektor n je rovnoběžný s vektorem $f'_t \times f'_v = v(g''(t) \times g'(t))$, tak h_{12} je násobkem $(g''(t) \times g'(t)) \cdot g''(t) = 0$. Podle Věty 16.3 je $K = 0$. U obecného válce $f(t,v) = g(t) + va$ máme $f'_t = g'(t)$, $f'_v = a$, takže $f''_{tv} = \overrightarrow{0} = f''_{vv}$. Odtud $h_{12} = 0 = h_{22}$. Nakonec, u obecného kužele $f(t,v) = a + vg(t)$, $v \neq 0$ dostaneme $f''_{tv} = g'(t)$ a $f''_{vv} = \overrightarrow{0}$. Tedy $h_{22} = 0$ a h_{12} je násobkem $(g'(t) \times g(t)) \cdot g'(t) = 0$.

□

Věta 17.6. *Jestliže každý bod souvislé plochy $\mathcal{S}$ bez planárních bodů je parabolický, pak $\mathcal{S}$ je rozvinutelná přímková plocha.*

Důkaz. Na parabolické ploše $f(u,v)$ zvolme parametry tak, aby dvojnásobný asymptotický směr byl $u =$ konst. Z Věty 15.1 plyne $0 = h_{22} = n \cdot f''_{vv}$ a $0 = h_{12} = n \cdot f''_{uv}$. Pak derivováním identit $n \cdot f'_u = 0$, $n \cdot f'_v = 0$, $n \cdot n = 1$ odvodíme $n'_v \cdot f'_u = 0$, $n'_v \cdot f'_v = 0$, $n'_v \cdot n = 0$. Tedy $n'_v = \overrightarrow{0}$, takže normálový vektor podél křivky $u =$ konst je pevný. Dále, protože $n \cdot f'_v = 0$, tak $n'_u \cdot f'_v = 0$. Poněvadž $n''_{uv} = \overrightarrow{0}$, tak derivací vztahu $n'_u \cdot f'_v = 0$ podle v dostaneme $n'_u \cdot f''_{vv} = 0$. Protože oba vektory f'_v a f''_{vv} jsou kolmé k n a n'_u, tak jsou kolineární. To znamená, že každý bod křivky $u =$ konst je inflexní, takže se jedná o část přímky. Tečná rovina podél této přímky je pak pevná.

□

Věta 17.7. *Rozvinutelná přímková plocha má nulovou Gaussovu křivost K.*

Důkaz. Podle Věty 16.3 je $K = 0 \Longleftrightarrow \det(h_{ij}) = 0$. Jednotkový vektor normály plochy (1) má tvar $n = \frac{u}{\|u\|}$, kde $u = f'_t \times f'_v = (g' \times h) + v(h' \times h)$. Protože $f''_{vv} = \overrightarrow{0}$, tak $h_{22} = 0$ a tedy stačí ukázat, že $h_{12} = 0$. Platí $h_{12} = f''_{tv} \cdot n = h' \cdot n = \frac{1}{\|u\|} h' \cdot u = \frac{1}{\|u\|} \left(h' \cdot (g' \times h) + vh' \cdot (h' \times h) \right)$. Druhý člen je evidentně nulový, zatímco první člen můžeme zapsat ve tvaru $[h', g', h]$. Podle Věty 17.1 je však $[g', h, h'] = 0$.

□

Tedy přímková plocha je rozvinutelná právě když má nulovou Gaussovu křivost.

18 VNITŘNÍ GEOMETRIE PLOCHY

Nechť $D, \overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ jsou otevřené množiny. Pak zobrazení $\varphi : \overline{D} \to D$ je určeno dvojicí funkcí $\varphi_1, \varphi_2 : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $u = \varphi_1(\overline{u}, \overline{v})$, $v = \varphi_2(\overline{u}, \overline{v})$.

Definice. Řekneme že φ je *zobrazení třídy C^r*, jestliže φ_1, φ_2 jsou funkce třídy C^r. *Jacobiánem* zobrazení φ nazýváme determinant

$$J(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{u}} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{v}} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{u}} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{v}} \end{vmatrix}.$$

Následující tvrzení je analogií Věty 6.3 o reparametrizaci křivek. Dokážeme zde jen jeden směr ekvivalence a vypustíme druhou část důkazu, která se provede s využitím věty o implicitních funkcích analogicky jako v důkazu Věty 6.3

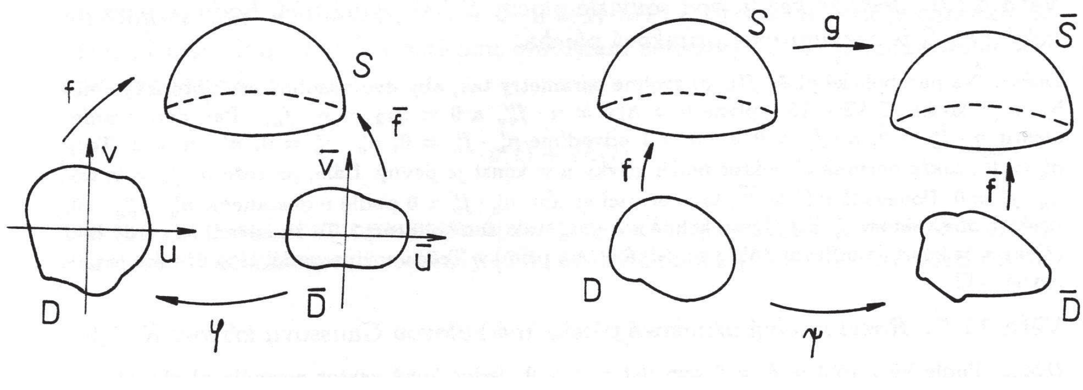
Věta 18.1. *Zobrazení* $f : D \to E_3$ *a* $\overline{f} : \overline{D} \to E_3$, $f = f(u, v)$, $\overline{f} = \overline{f}(\overline{u}, \overline{v})$ *jsou dvě parametrizace téže jednoduché plochy* $\mathcal{S}$ *třídy* C^r *právě když existuje bijektivní zobrazení* $\varphi : \overline{D} \to D$ *třídy* C^r *takové že pro všechna* $(\overline{u}, \overline{v}) \in \overline{D}$ *platí* $J(\varphi) \neq 0$ *a* $\overline{f} = f \circ \varphi$.

Důkaz. Dokážeme implikaci zprava doleva. Předpokládejme tedy, že $f : D \to E_3$ je parametrizace $\mathcal{S}$ a že existuje zobrazení φ třídy C^r takové že $J(\varphi) \neq 0$ na $\overline{D}$ a nechť $\overline{f} = f \circ \varphi$. Pak $\overline{f}$ je opět třídy C^r a platí $\overline{f}'_{\overline{u}} = f'_u \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{u}} + f'_v \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{u}}$, $\overline{f}'_{\overline{v}} = f'_u \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{v}} + f'_v \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{v}}$. Pak $\overline{f}'_{\overline{u}} \times \overline{f}'_{\overline{v}} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{u}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{v}} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{u}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{v}} \right) (f'_u \times f'_v) = J(\varphi) \cdot (f'_u \times f'_v)$, takže vektory $\overline{f}'_{\overline{u}}$ a $\overline{f}'_{\overline{v}}$ jsou lineárně nezávislé.

$\square$

Definice. Zobrazení $\varphi : \overline{D} \to D$ z předchozí věty se nazývá *reparametrizací* nebo též *transformací parametrů* plochy $\mathcal{S}$, viz Obr. 40.

Nechť nyní $\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}$ jsou dvě jednoduché plochy třídy C^r s parametrizacemi $f = f(u, v) : D \to \mathcal{S}$, $\overline{f} = \overline{f}(\overline{u}, \overline{v}) : \overline{D} \to \overline{\mathcal{S}}$ a nechť $g : \mathcal{S} \to \overline{\mathcal{S}}$ je zobrazení. Pak g jednoznačně určuje zobrazení $\psi : D \to \overline{D}$ v oblasti parametrů takové že $\overline{f} \circ \psi = g \circ f$. Zobrazení $\psi : D \to \overline{D}$ se nazývá *souřadnicovým vyjádřením* zobrazení g, Obr. 41.



Obr. 40: Transformace parametrů a Obr. 41: Zobrazení z plochy na plochu

Definice. Řekneme, že zobrazení $g : \mathcal{S} \to \overline{\mathcal{S}}$ je třídy C^r, pokud jeho souřadnicové vyjádření $\psi : D \to \overline{D}$ je třídy C^r.

Podle předchozí věty tato definice nezávisí na volbě parametrizací $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$. Provedeme-li totiž na $\mathcal{S}$ reparametrizaci $\varphi : D_1 \to D$ a na $\overline{\mathcal{S}}$ reparametrizaci $\overline{\varphi} : \overline{D}_1 \to \overline{D}$, pak $(\overline{\varphi})^{-1} : \overline{D} \to \overline{D}_1$ je také zobrazení třídy C^r a místo $\psi : D \to \overline{D}$ máme kompozici $(\overline{\varphi})^{-1} \circ \psi \circ \varphi : D_1 \to \overline{D}_1$, což je opět zobrazení třídy C^r. Je dále zřejmé, že v případě bijektivního zobrazení $g : \mathcal{S} \to \overline{\mathcal{S}}$ třídy C^r lze docílit toho, že na obou plochách $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$ máme společnou oblast parametrů D a odpovídající si body na plochách jsou $f(u, v) \in \mathcal{S}$ a $\overline{f}(u, v) \in \overline{\mathcal{S}}$, $(u, v) \in D$. V tomto případě říkáme, že *g je dáno rovností parametrů*.

Definice. Bijektivní zobrazení $g : \mathcal{S} \to \overline{\mathcal{S}}$ třídy C^r se nazývá *izometrie* (resp. *konformní zobrazení*), jestliže g zachovává délky (resp. úhly) odpovídajících si křivek na $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$. Pokud g zachovává obsahy odpovídajících si částí ploch na $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$, tak se nazývá *rovnoploché zobrazení*.

Nechť φ_1 a $\overline{\varphi}_1$ jsou první základní formy ploch $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$ a nechť g_{ij} a $\overline{g}_{ij}$ jsou příslušné koeficienty.

Věta 18.2. *Nechť $g : \mathcal{S} \to \overline{\mathcal{S}}$ je bijektivní zobrazení třídy C^r dané rovností parametrů. Pak platí:*

1. *g je izometrie právě když v odpovídajících si bodech platí $\varphi_1 = \overline{\varphi}_1$*
2. *g je konformní zobrazení právě když v odpovídajících si bodech jsou úměrné první základní formy obou ploch*
3. *g je rovnoploché zobrazení právě když v odpovídajících si bodech platí $det(g_{ij}) = det(\overline{g}_{ij})$*

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení, (2) a (3) se dokáží podobně. Abychom mohli použít sčítací konvenci, tak zde označíme parametry u, v symboly u^1, u^2, tj. $u^1 = u$, $u^2 = v$.
I. Jestliže v odpovídajících si bodech ploch $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$ platí $g_{ij} = \overline{g}_{ij}$, tak podle Věty 13.2 zobrazení g zachovává délky křivek a je tedy izometrické.
II. Nechť g zachovává délky křivek. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme tedy, že existuje taková dvojice parametrů $(u_0^1, u_0^2) \in D$, že $g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \neq \overline{g}_{ij}(u_0^1, u_0^2)$. Pak existuje vektor (du_0^1, du_0^2) takový, že

$$g_{ij}(u_0^1, u_0^2)du_0^i du_0^j \neq \overline{g}_{ij}(u_0^1, u_0^2)du_0^i du_0^j. \tag{1}$$

Sestrojme nyní v oblasti parametrů D křivku γ, která prochází bodem (u_0^1, u_0^2) a má v tomto bodě tečný vektor (du_0^1, du_0^2). Nechť $u^i = u^i(t), i = 1, 2$ jsou rovnice této křivky. Nechť dále bod (u_0^1, u_0^2) odpovídá parametru $t = t_1$, tj. $u^i = u^i(t_1)$. Z nerovnosti (1) a ze spojitosti uvažovaných funkcí plyne, že existuje takové číslo $t_2 > t_1$, že pro všechna $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ platí

$$g_{ij}du^i du^j \neq \overline{g}_{ij}du^i du^j. \tag{2}$$

Rovnice $u^i = u^i(t), t \in (t_1, t_2)$ zadávají dvě křivky $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ na plochách $\mathcal{S}$ a $\overline{\mathcal{S}}$. Z (2) a z Věty 13.2 však plyne, že tyto křivky mají různé délky, což je spor.

□

Protože úhly i obsahy na ploše se vypočtou pomocí koeficientů první základní formy (viz Věta 13.3 a 13.4), tak z Věty 18.2 vyplývá

Důsledek 18.1. Každá izometrie je konformní a rovnoploché zobrazení. Tedy na izometrických plochách se odpovídající křivky protínají pod stejnými úhly a odpovídající oblasti mají stejné obsahy.

Příklad 18.1. Podle Příkladu 13.1 existují takové souřadnice, v nichž první základní formy roviny a kruhového válce splývají. Tedy kruhový válec je izometrický rovinnému pásu o stejných souřadnicích. Příslušnou izometrií z roviny na válec je např. lokální parametrizace válce $(r \cos u, r \sin u, v)$.

Definice. *Vnitřní geometrií plochy* nazýváme ty její vlastnosti, které se zachovávají při izometriích.

Podle Věty 18.2 patří do vnitřní geometrie plochy ty její vlastnosti, které lze odvodit z první základní formy. Např. kruhový válec a rovinný pruh z pohledu vnitřní geometrie splývají, ale z vnějšího pohledu jsou to naprosto odlišné plochy. V předchozí kapitole jsme definovali rozvinutelné přímkové plochy. Nyní zavedeme pojem rozvinutelné plochy pro libovolnou (ne nutně přímkovou) plochu.

Definice. Plocha $\mathcal{S}$ se nazývá *rozvinutelná*, je-li izometrická otevřené množině v rovině.

Příklad 18.2. Nechť $\mathcal{S}$ je obecný válec zadaný řídící křivkou $g(u)$ v rovině xy, vytvořený přímkami protínajícími křivku $g(u)$ a rovnoběžnými s osou z. Ukážeme, že $\mathcal{S}$ je rozvinutelná plocha. Parametrizace $\mathcal{S}$ je $f(u,v) = (g_1(u), g_2(u), v)$, přičemž zřejmě můžeme předpokládat, že křivka $g(u)$ je parametrizovaná obloukem. Pak $f'_u = (g'_1, g'_2, 0)$, $f'_v = (0,0,1)$, takže $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 1$ a $\varphi_1 = du^2 + dv^2$. To je však rovněž první základní forma roviny $\overline{f}(u,v) = (u,v,0)$.

Příklad 18.3. Uvažujme obecný kužel $f(u,v) = vh(u)$ s vrcholem v počátku. Můžeme navíc předpokládat, že křivka $h(u)$ je parametrizovaná obloukem a že $||h(u)|| = 1$. Pak vyjde $g_{11} = v^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$, $\varphi_1 = v^2du^2 + dv^2$. Ukážeme, že toto lze převést na první základní formu roviny $dx^2 + dy^2$. Skutečně, pokud u výrazu $dx^2 + dy^2$ přejdeme k novým souřadnicím $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, tak dostaneme $dx^2 + dy^2 = (-v\sin u du + \cos u dv)^2 + (v\cos u du + \sin u dv)^2 = v^2du^2 + dv^2$. Tedy kuželová plocha je ve vhodných souřadnicích izometrická s rovinou a je proto rozvinutelná.

Příklad 18.4. Ukážeme, že plocha tečen $f(u,v) = g(u) + vg'(u)$ je rozvinutelná. Předpokládáme-li, že křivka $g(u)$ je parametrizovaná obloukem, tak $g'(u) \cdot g'(u) = 1$, $g'(u) \cdot g''(u) = 0$, $g''(u) \cdot g''(u) = \kappa^2$ a proto $\varphi_1 = (1 + \kappa^2v^2)du^2 + 2dudv + dv^2$, kde κ je křivost křivky $g(u)$. Tedy první základní forma je závislá pouze na křivosti κ. Podle Věty 10.10 je každá křivka jednoznačně určená svou křivostí κ a torzí τ. Lze tedy sestrojit rovinnou křivku ($\tau = 0$) s touž křivostí κ. Plocha tečen této rovinné křivky je pak částí roviny.

Podle Věty 16.5 (Theorema egregium) Gaussova křivost K patří do vnitřní geometrie plochy. I když žádná z hlavních křivostí κ_1, κ_2 do vnitřní geometrie plochy nepatří, tak jejich součin $K = \kappa_1\kappa_2$ ano. Jako důsledek dostáváme

Věta 18.3. *Izometrické plochy mají v odpovídajících si bodech stejnou Gaussovu křivost K.*

Protože rovina má nulovou Gaussovu křivost, tak platí

Věta 18.4. *Rozvinutelná plocha má ve všech bodech nulovou Gaussovu křivost.*

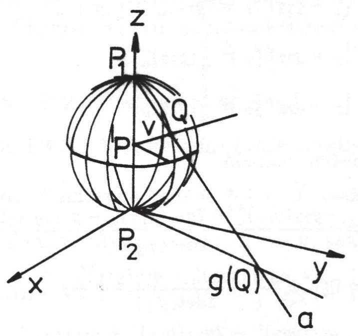
Obecně lze ukázat, že plocha je rozvinutelná právě když má ve všech bodech nulovou Gaussovu křivost K. Tedy pojmy rozvinutelné plochy a rozvinutelné přímkové plochy obecně splývají.

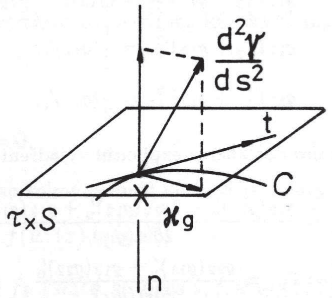
Příklad 18.5. Otevřená podmnožina v rovině nemůže být izometrická otevřené množině na sféře. Důvodem je skutečnost, že Gaussova křivost roviny je nulová, zatímco Gaussova křivost sféry o poloměru r je podle Věty 16.4 rovna $\frac{1}{r^2}$. Odtud vyplývá, že každá mapa zemského povrchu deformuje vzdálenosti.

Nyní uvedeme příklad konformního zobrazení, které není izometrické ani rovnoploché. Tedy konformní zobrazení obecně deformuje plochy.

Příklad 18.6 (Stereografická projekce)**.** Nechť $\mathcal{S}$ je jednotková sféra $f(u,v) = (\cos v\cos u, \cos v\sin u, \sin v + 1)$ umístěná jižním pólem P_2 do počátku. Označme dále P_1 její severní pól a P její střed. Stereografická projekce $g(Q)$ bodu $Q \in \mathcal{S}$, $Q \neq P_1$ je definována jako průsečík polopřímky a, vedené ze severního pólu P_1 bodem Q, s rovinou $z = 0$, Obr. 42. Parametr v zřejmě určuje odchylku polopřímky PQ od rovníkové roviny sféry. Označme dále

ρ a φ polární souřadnice bodu $g(Q)$ v rovině xy. Je zřejmé, že $\varphi = u$ a přímým výpočtem odvodíme, že $\rho = 2\mathrm{tg}(\frac{1}{2}(v + \frac{\pi}{2}))$. Transformace do kartézských souřadnic pak dává rovnice stereografické projekce g tvaru $x = 2\mathrm{tg}(\frac{1}{2}(v + \frac{\pi}{2}))\cos u$, $y = 2\mathrm{tg}(\frac{1}{2}(v + \frac{\pi}{2}))\sin u$. Pak první základní forma roviny $dx^2 + dy^2$ přejde na $\frac{1}{\cos^4(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4})}(\cos^2 v du^2 + dv^2)$, což je násobek první základní formy sféry. Podle (2) z Věty 18.2 je tedy g konformní zobrazení.





Obr. 42: Stereografická projekce a Obr. 43: Geodetická křivost

Příklad 18.7 (Lambertova projekce)**.** Nechť $\mathcal{S}$ je jednotková sféra s parametrizací $f(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ a uvažujme zobrazení g z této sféry do roviny zadané rovnicemi $x = u, y = \sin v$. Pak souřadnicová síť poledníků a rovnoběžkových kružnic sféry zřejmě přejde na ortogonální síť přímek (úseček) v rovině. První základní forma sféry je $\varphi_1 = \cos^2 v du^2 + dv^2$, takže $\det(g_{ij}) = \cos^2 v$. Na druhou stranu, první základní forma roviny $dx^2 + dy^2$ přejde na $du^2 + \cos^2 v dv^2$. Je tedy splněna podmínka (3) Věty 18.2, takže Lambertova projekce je rovnoploché zobrazení.

19 GEODETICKÉ KŘIVKY

Nechť $f : D \to E_3$ je parametrizace jednoduché plochy $\mathcal{S} = f(D)$ a nechť n je jednotkový vektor normály plochy $\mathcal{S}$. Abychom mohli použít sumační konvenci, tak budeme v dalším značit parciální derivace f podle u a v dolními indexy 1 a 2, tj. $f_1 = f'_u$, $f_2 = f'_v$, $f_{12} = f''_{uv}$ atd. Protože tři vektory f_1, f_2, n jsou lineárně nezávislé, tak tvoří bázi vektorového prostoru V_3, takže můžeme vyjádřit čtyři vektory f_{ij} jako lineární kombinaci vektorů f_1, f_2, n. Platí

Věta 19.1. *V každém bodě plochy $\mathcal{S}$ platí tzv. Gaussovy rovnice*

$$f_{ij} = \Gamma^k_{ij} f_k + h_{ij} n, \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (\textit{sčítá se přes } k) \tag{1}$$

kde h_{ij} jsou koeficienty 2. základní formy a reálná čísla Γ^k_{ij} (tzv. Christoffelovy symboly) určená rovnicemi (3) patří do vnitřní geometrie plochy.

Důkaz. Napišme vyjádření vektorů f_{ij} v bázi f_1, f_2, n ve tvaru $f_{ij} = \Gamma^k_{ij} f_k + b_{ij} n$ a hledejme tvar koeficientů Γ^k_{ij} a b_{ij}. Skalárním vynásobením obou stran této rovnice vektorem n dostaneme $h_{ij} = b_{ij}$ a skalárním vynásobením vektorem f_p dostaneme

$$f_{ij} \cdot f_p = \Gamma^k_{ij} g_{kp}. \tag{2}$$

Derivováním rovností $f_1 \cdot f_1 = g_{11}$ a $f_2 \cdot f_2 = g_{22}$ odvodíme $f_{11} \cdot f_1 = \frac{1}{2}(g_{11})'_u$, $f_{12} \cdot f_1 = \frac{1}{2}(g_{11})'_v$, $f_{22} \cdot f_2 = \frac{1}{2}(g_{22})'_v$, $f_{12} \cdot f_2 = \frac{1}{2}(g_{22})'_u$. Derivace vztahu $f_1 \cdot f_2 = g_{12}$ dávají $f_{11} \cdot f_2 + f_1 \cdot f_{12} = (g_{12})'_u$, $f_{12} \cdot f_2 + f_1 \cdot f_{22} = (g_{12})'_v$, takže $f_{11} \cdot f_2 = (g_{12})'_u - \frac{1}{2}(g_{11})'_v$, $f_{22} \cdot f_1 = (g_{12})'_v - \frac{1}{2}(g_{22})'_u$. Tedy (2) znamená následující soustavu 6 rovnic pro 6 koeficientů Γ^k_{ij}

$$
\begin{aligned}
g_{11}\Gamma^1_{22} + g_{12}\Gamma^2_{22} &= (g_{12})'_v - \frac{1}{2}(g_{22})'_u, & g_{12}\Gamma^1_{11} + g_{22}\Gamma^2_{11} &= (g_{12})'_u - \frac{1}{2}(g_{11})'_v,\\
g_{11}\Gamma^1_{12} + g_{12}\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}(g_{11})'_v, & g_{12}\Gamma^1_{12} + g_{22}\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}(g_{22})'_u,\\
g_{11}\Gamma^1_{11} + g_{12}\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}(g_{11})'_u, & g_{12}\Gamma^1_{22} + g_{22}\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}(g_{22})'_v.
\end{aligned}
$$

Vyřešením dostaneme explicitní vyjádření Christoffelových symbolů

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{g_{22}(g_{11})'_u - 2g_{12}(g_{12})'_u + g_{12}(g_{11})'_v}{2\det(g_{ij})}, & \Gamma^2_{11} &= \frac{-g_{12}(g_{11})'_u + 2g_{11}(g_{12})'_u - g_{11}(g_{11})'_v}{2\det(g_{ij})},\\
\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} &= \frac{g_{22}(g_{11})'_v - g_{12}(g_{22})'_u}{2\det(g_{ij})}, & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{g_{11}(g_{22})'_u - g_{12}(g_{11})'_v}{2\det(g_{ij})},\\
\Gamma^1_{22} &= \frac{-g_{12}(g_{22})'_v + 2g_{22}(g_{12})'_v - g_{22}(g_{22})'_u}{2\det(g_{ij})}, & \Gamma^2_{22} &= \frac{g_{11}(g_{22})'_v - 2g_{12}(g_{12})'_v + g_{12}(g_{22})'_u}{2\det(g_{ij})}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Protože Γ^k_{ij} se vyjadřují pomocí koeficientů g_{ij} a jejich derivací, tak patří do vnitřní geometrie plochy. □

Je zřejmé, že Christoffelovy symboly Γ^k_{ij} jsou symetrické v dolních indexech.

Příklad 19.1
(a) Protože v rovině jsou g_{ij} konstantní funkce, tak jejich parciální derivace jsou nulové. Z (3) pak vyplývá, že Christoffelovy symboly roviny jsou $\Gamma^k_{ij} = 0$. Proto také všechny Cristoffelovy symboly libovolné rozvinutelné plochy jsou nulové.
(b) Koeficienty 1. základní formy sféry jsou $g_{11} = r^2\cos^2 v$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$ (viz Příklad 13.1). Z (3) pak dostáváme, že $\Gamma^1_{12} = -\mathrm{tg} v$, $\Gamma^2_{11} = \sin v \cos v$ a ostatní Christoffelovy symboly sféry jsou nulové. Uvažujme křivku $\mathcal{C}$ na ploše $\mathcal{S}$ procházející bodem $X \in \mathcal{S}$ a nechť $\gamma : I \to E_3$ je parametrizace $\mathcal{C}$ obloukem s, tj. $\left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| = 1$. Nechť dále $\tau_X\mathcal{S}$ je tečná rovina plochy $\mathcal{S}$ a $n = n_X$ jednotkový vektor normály v bodě X. Ve 14. kapitole jsme definovali normálovou křivost křivky $\mathcal{C}$ v bodě X jako číslo $\kappa_n = n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2}$, jehož absolutní hodnota vyjadřuje velikost kolmého průmětu vektoru křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ do směru normály. Vektor křivosti můžeme kolmo promítnout rovněž do tečné roviny $\tau_X\mathcal{S}$.

Definice. Kolmý průmět vektoru křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ do tečné roviny $\tau_X\mathcal{S}$ se nazývá *vektor geodetické křivosti* křivky $\mathcal{C}$ v bodě X a značí se symbolem γ''_τ.

Je zřejmé, že $\gamma''_\tau \perp n$. Dále, protože vektor $\frac{d\gamma}{ds}$ leží v tečné rovině $\tau_X\mathcal{S}$ a je kolmý k vektoru $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$, tak rovněž platí $\gamma''_\tau \perp \frac{d\gamma}{ds}$. Odtud vyplývá, že vektor geodetické křivosti γ''_τ je kolineární s jednotkovým vektorem $n \times \frac{d\gamma}{ds}$.

Definice. Číslo $\kappa_g = \frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot \left(n \times \frac{d\gamma}{ds}\right)$ se nazývá *geodetická křivost* $\mathcal{C}$ v bodě X.

Geometricky se jedná o velikost kolmého průmětu (opatřeného patřičným znaménkem) vektoru křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ do tečné roviny $\tau_X\mathcal{S}$, (viz Obr. 43) takže

$$|\kappa_g| = \|\gamma''_\tau\|. \tag{4}$$

Podobně jako u normálové křivosti κ_n nemá znaménko geodetické křivosti κ_g žádný hlubší geometrický význam. Z Pythagorovy věty ihned vyplývá následující vztah mezi křivostí κ, normálovou křivostí κ_n a geodetickou křivostí κ_g křivky $\mathcal{C}$ na ploše $\mathcal{S}$.

Věta 19.2. *Platí* $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$.

Věta 19.3. *V inflexním bodě křivky* $\mathcal{C}$ *je* $\kappa_g = 0$.

Důkaz. V inflexním bodě je $\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \overrightarrow{0}$, takže rovněž jeho kolmý průmět do $\tau_X\mathcal{S}$ je nulový. □

Označme nyní $u^1 = u$, $u^2 = v$, takže $\gamma(s) = f(u^1(s), u^2(s))$.

Lemma 19.1. *Platí* $\gamma''_\tau = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right) f_k$ *(sčítá se přes* $i, j, k \in \{1, 2\}$*).*

Důkaz. Platí $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{du^i}{ds} = f_i\frac{du^i}{ds}$, $\frac{d^2\gamma}{ds^2} = f_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + f_k\frac{d^2u^k}{ds^2}$. Toto upravíme pomocí Gaussových rovnic (1) na $\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right) f_k + h_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} n$ (všude používáme sumační konvenci). Kolmým průmětem do tečné roviny dostaneme vektor z tvrzení věty. □

Důsledek 19.1. Absolutní hodnota geodetické křivosti κ_g patří do vnitřní geometrie plochy. Zejména platí, že izometrie ploch zachovává absolutní hodnotu geodetické křivosti odpovídajících si křivek v odpovídajících si bodech.

Věta 19.4. *Nechť křivka* $\mathcal{C}$ *leží v rovině. Pak v každém bodě křivky* $\mathcal{C}$ *se její křivost* κ *rovná geodetické křivosti* κ_g.

Důkaz. Je-li plocha $\mathcal{S}$ rovina, tak pro libovolné $X \in \mathcal{S}$ platí $\tau_X\mathcal{S} = \mathcal{S}$, přičemž vektor $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ leží v této rovině. Tedy platí $\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \gamma''_\tau$. □

Důsledek 19.2. Přímky jsou jediné rovinné křivky, které mají v každém bodě nulovou geodetickou křivost.

Definice. Křivka na ploše se nazývá *geodetická křivka (geodetika)*, jestliže v každém bodě této křivky je geodetická křivost rovna nule.

Podle předchozí věty jsou jedinými geodetickými křivkami v rovině přímky.

Věta 19.5. *Křivka* $\mathcal{C}$ *na ploše* $\mathcal{S}$ *je geodetickou křivkou plochy* $\mathcal{S}$ *právě když pro každý bod této křivky platí že je buď inflexní nebo v něm hlavní normála křivky splývá s normálou plochy (tj. normála plochy leží v oskulační rovině křivky).*

Důkaz. Je-li $\mathcal{C}$ geodetika, tak v každém jejím bodě je vektor γ''_τ nulový, takže podle důkazu Lemmatu 19.1 má vektor křivosti tvar $\frac{d^2\gamma}{ds^2} = h_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}n$. V neinflexním bodě jsou vektory $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ a n nenulové, takže obě uvažované přímky splývají. Naopak, pokud obě uvažované přímky splývají, tak stejnou úvahou odvodíme, že $\gamma''_\tau = \overrightarrow{0}$, takže $\mathcal{C}$ je geodetika.

□

Věta 19.6. *Nechť $\gamma(s)$ je parametrizace obloukem křivky $\mathcal{C}$ na ploše $\mathcal{S}$ a nechť rovnice $\mathcal{C}$ v oblasti parametrů D jsou $u^1 = u^1(s)$, $u^2 = u^2(s)$. Pak $\mathcal{C}$ je geodetikou plochy $\mathcal{S}$ právě když funkce u^1, u^2 jsou řešením soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

Důkaz. Křivka $\mathcal{C}$ je geodetikou právě když v každém jejím bodě je vektor geodetické křivosti nulový. Tvrzení pak plyne z Lemmatu 19.1.

□

Příklad 19.2 (Geodetiky roviny, kruhového válce a sféry)**.**
(a) Podle Příkladu 19.1 je v případě roviny $\Gamma^k_{ij} = 0$, takže geodetiky roviny jsou jednoznačně určeny systémem rovnic $\frac{d^2u}{ds^2} = 0$, $\frac{d^2v}{ds^2} = 0$ (a příslušnými počátečními podmínkami, tj. bodem a směrovým vektorem). Řešení je pak tvaru $u = c_1s + c_2$, $v = d_1s + d_2$, takže jsme opět odvodili známou skutečnost, že v rovině jsou geodetickými křivkami přímky.
(b) Protože válec je izometrický s rovinou, tak $\Gamma^k_{ij} = 0$ a pro geodetiky máme stejnou soustavu diferenciálních rovnic jako u geodetik v rovině, jejímž řešením je $u = c_1s + c_2$, $v = d_1s + d_2$. Dosazením dostaneme $v = \frac{d_1}{c_1}(u - c_2) + d_2$. Toto dosadíme do parametrického popisu válce $f(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v)$, takže parametrický popis geodetik na válci je $g(u) = (r\cos u, r\sin u, \frac{d_1}{c_1}(u - c_2) + d_2)$. Pro $d_1 = 0$ dostaneme horizontální kružnice a pro $d_1 \neq 0, c_1 = 0$ tvořící přímky válce. Jestliže $d_1 \neq 0$ a $c_1 \neq 0$, tak jsou geodetikami šroubovice.
(c) Z Věty 19.5 plyne, že geodetikami sféry jsou právě hlavní kružnice. Z Důsledku 19.1 plyne

Věta 19.7. *Při izometrii ploch se zobrazují geodetiky na geodetiky. Zejména platí, že při izometrii plochy do roviny se zobrazují geodetiky plochy na přímky.*

Užitím věty o existenci a jednoznačnosti obyčejných diferenciálních rovnic snadno ukážeme

Věta 19.8. *Nechť t je tečna plochy $\mathcal{S}$ v bodě $X \in \mathcal{S}$. Pak lokálně existuje právě jedna geodetika na $\mathcal{S}$ procházející bodem X a dotýkající se v tomto bodě tečny t.*

Podle Věty 19.7 jsou geodetiky lokálně „nejpřímější křivky“ na ploše. Následující věta říká, že jsou to rovněž nejkratší spojnice dvou bodů na $\mathcal{S}$. Tuto větu však nebudeme dokazovat, její důkaz se provádí například ve variačním počtu.

Věta 19.9. *Jestliže mezi všemi křivkami, které na dané ploše spojují dva body, existuje křivka nejmenší délky, pak je tato křivka geodetickou křivkou.*

Na závěr uvedeme bez důkazu Gauss–Bonnetovu větu, která je bezesporu jedním z nejhlubších (a snad i nejkrásnějších) výsledků diferenciální geometrie ploch. Nechť $f : D \to E_3$ je lokální parametrizace plochy $\mathcal{S}$ a $\overline{\Delta} \subset D$ je trojúhelník v oblasti parametrů.

Definice. Množina $\Delta := f(\overline{\Delta})$ se nazývá *trojúhelník na ploše $\mathcal{S}$*. Tento trojúhelník se nazývá *geodetický*, jestliže jeho strany jsou geodetiky plochy $\mathcal{S}$.

Jedná se tedy o „křivočarý“ trojúhelník na $\mathcal{S}$, neboť jeho strany jsou křivky. V dalším budeme uvažovat pouze takové trojúhelníky, které uvnitř neobsahují „díry“ plochy $\mathcal{S}$ (tento pojem nebudeme precizovat). Označme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vnitřní úhly trojúhelníka Δ. Nechť dále $\mathrm{vol}(\Delta)$ značí plošný obsah Δ ve smyslu Věty 13.4.

Věta 19.10 (Gauss–Bonnetova)**.** *Pro součet úhlů v geodetickém trojúhelníku na ploše s konstantní Gaussovou křivostí K platí*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + K vol(\Delta). \tag{6}$$

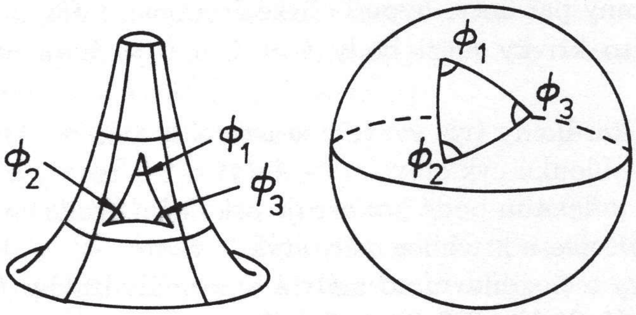
Pro $K = 0$ (tj. v případě roviny a libovolné rozvinutelné plochy) je

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi.$$

Příkladem plochy s konstantní kladnou Gaussovou křivostí je sféra. Podle Věty 16.4 má sféra o poloměru r Gaussovu křivost $K = \frac{1}{r^2}$, takže na sféře platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \frac{1}{r^2}\mathrm{vol}(\Delta).$$

Součet úhlů v geodetickém trojúhelníku na sféře je tedy větší než π a závisí na obsahu tohoto trojúhelníka, viz Obr. 44. Na pseudosféře máme podle Příkladu 16.1 $K = -\frac{1}{r^2}$, takže součet úhů je zde menší než π.



Obr. 44: Geodetický trojúhelník na sféře a pseudosféře

Výše uvedené výsledky týkající se součtu vnitřních úhlů geodetického trojúhelníka na sféře a na pseudosféře rovněž ukazují, že neeuklidovská geometrie má dobrý smysl. Věta 19.10 je speciálním případem obecnějšího tvaru Gauss–Bonnetovy věty, která platí pro plochy s libovolnou (ne nutně konstantní) Gaussovou křivostí K. V tomto případě nahradíme (6) vzorcem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_{\Delta} K d\sigma \tag{7}$$

(vpravo je plošný integrál z Gaussovy křivosti K). Je zřejmé, že je-li K konstantní, tak vzorec (7) přejde na (6). Nakonec, nejobecnější verze Gauss–Bonnetovy věty se týká libovolných trojúhelníků Δ na ploše $\mathcal{S}$, jejichž strany s_i jsou libovolné křivky(ne nutně geodetiky). Pak platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{s_i} \kappa_g ds = \pi + \iint\limits_{\Delta} K d\sigma \tag{8}$$

kde $\int_{s_i} \kappa_g ds$ je integrál z geodetické křivosti po straně s_i trojúhelníka Δ.

Cvičení II (Křivky)

(1) Rozhodněte, zda pohyb $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$ je jednoduchý. [Není, bod samoprotnutí odpovídá hodnotám $t = 1$ a $t = -1$].

(2) Určete singulární body pohybu $x = r(2\cos t - \cos 2t)$, $y = r(2\sin t - \sin 2t)$ (kardioida). [$(r, 0)$].

(3) Určete singulární body pohybu $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ (asteroida). [$(0, \pm a)$, $(\pm a, 0)$].

(4) Dokažte, že rovnice $3x^2 + 2y^2 + 6x - 3 = 0$ představuje křivku třídy C^r pro libovolné r a najděte její parametrizaci. [Jde o elipsu $(\sqrt{2}\cos t - 1, \sqrt{3}\sin t)$].

(5) Najděte reparametrizaci šroubovice $(a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in (0, 2\pi)$, tak, aby nový parametr probíhal interval $(0, \pi)$. [Provedeme transformaci parametru $\tau = \frac{t}{2}$].

(6) Napište rovnici tečny ke křivce $f(t) = (t, t^2, t^3)$ v bodě $(1, 1, 1)$. [$x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 3t$].

(7) Najděte tečnu k elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ v bodě $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$. [$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+t)$, $y = \sqrt{2}(1-t)$].

(8) Najděte tečnu ke křivce $f(t) = (t^2, t, \mathrm{e}^t)$ rovnoběžně s rovinou $x - 2y - 5 = 0$. [$x = 1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = \mathrm{e} + \mathrm{e}t$].

(9) Dokažte že tečny ke šroubovici (viz cv. (5)) svírají s rovinou xy konstantní úhel.

(10) Nalezněte přirozený parametr šroubovice (viz cv. (5)). [$s = t\sqrt{a^2 + b^2}$].

(11) Určete přirozený parametr hyperbolické šroubovice $f(t) = (a\mathrm{cosh}t, a\mathrm{sinh}t, at)$ a určete délku této křivky mezi body $t = 0$ a $t = 1$. [$s = \pm a\sqrt{2}\mathrm{sinh}t$, $L = a\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1})$].

(12) Určete délku kardioidy (viz cv. (2)) a asteroidy (viz cv. (3)). [$16r$, $6a$].

(13) Určete délku oblouku cykloidy $(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ pro $t \in (0, 2\pi)$. [$8a$].

(14) Dokažte že v inflexním bodě neexistuje oskulační kružnice. Návod: Ukažte, že není možné, aby přímka a kružnice měly styk 2. řádu.

(15) Určete vektory tečny, hlavní normály a binormály křivky $f(t) = (t, t^2, t + 1)$ v libovolném bodě. [$(1, 2t, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, 2)$].

(16) Určete směrové vektory tečny, hlavní normály a binormály šroubovice $f(t) = (t, \sin t, \cos t)$ v bodě $t = 0$. [$(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, -1, 0)$].

(17) Určete křivost následujících rovinných křivek: grafu funkce $y = \sin x$ v bodě $(\frac{\pi}{2}, 1)$, grafu funkce $y = -\ln\cos x$ pro $x \in (-1, \frac{\pi}{2})$, cykloidy (viz cv. (13)) pro $t \in (0, 2\pi)$, kardioidy (viz cv. (2)) pro $t = \frac{\pi}{2}$, asteroidy (viz cv. (3)) pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. [1, $|\cos x|$, $\frac{1}{4a\sin(t/2)}$, $\frac{3\sqrt{2}}{8r}$, $\frac{2}{3a\sin(2t)}$].

(18) Dokažte, že žádný bod elipsy $f(t) = (a\cos t, b\sin t)$ není inflexní a určete poloměr její oskulační kružnice v libovolném bodě. Nalezněte dále vrcholy. [Vektory $f'(t)$ a $f''(t)$ nejsou kolineární, $r^2 = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}{a^2 b^2}$, $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$].

(19) Totéž pro parabolu $y = ax^2$. [$r^2 = \frac{(1+4a^2x^2)^3}{4a^2}$, $(0, 0)$].

(20) Vypočtěte poloměr oskulační kružnice křivky $y = \sin x$. [$r^2 = \frac{(1+\cos^2 x)^3}{\sin^2 x}$].

(21) Určete křivost a torzi následujících křivek: $f(t) = (t^2, t^3, t + 1)$ pro $t = 1$, $f(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$, $f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$. [$\kappa = \frac{\sqrt{266}}{98}$ a $\tau = \frac{3}{19}$; $\kappa = \tau = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$; $\kappa = \frac{3}{25\sin t\cos t}$ a $\tau = \frac{4}{25\sin t\cos t}$].

(22) Dokažte, že pro křivku $f(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}\right)$ platí $\kappa = \tau$.

(23) Určete funkci $f(t)$ tak, aby křivka $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = f(t)$, $a > 0$ byla rovinnou křivkou. [$f(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3$].

(24) Určete rovnice oskulační, rektifikační a normálové roviny šroubovice (viz cv. (5)) pro $t = \frac{\pi}{2}$. $[2bx + 2az - ab\pi = 0,\ y = a,\ 2ax - 2bz + b^2\pi = 0]$.
(25) Nalezněte kružnici, která má s parabolou $y = x^2$ v jejím vrcholu styk 2. řádu. $[x^2 + y^2 = y]$.
(26) Ukažte, že každá normálová rovina křivky $f(t) = (a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t)$ kde $a \neq 0$, prochází počátkem soustavy souřadnic.
(27) Nalezněte parametrizaci Vivianiho křivky, která je průnikem sféry $x^2+y^2+z^2 = r^2$ s válcem $x^2 + y^2 = rx$. $[(r\cos^2 t, r\sin t\cos t, r\sin t)]$.
(28) Určete střed oskulační kružnice elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ v jejím vrcholu $(a, 0)$. $[(a-\frac{b^2}{a}, 0)]$.
(29) Dokažte, že nutnou podmínkou pro inflexní bod rovinné křivky zadané v polárních souřadnicích ρ, φ je splnění rovnosti $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$. Vysvětlete dále, jak byste hledali oskulační kružnici a vrcholy křivky v polárních souřadnicích.
(30) Určete vrcholy křivek $y = \mathrm{e}^x$ a $y = \ln x$. $[\left(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\ln 2}{2}\right)]$.
(31) Určete evolutu paraboly $x^2 = 2py$. $[27px^2 = 8(y - p)^3]$.
(32) Nalezněte parametrizaci asteroidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. $[(\cos^3 t, \sin^3 t)]$.
(33) Napište rovnici jednoparametrické soustavy úseček o konstantní délce a, jejichž koncové body se pohybují po kladné části osy x a osy y. Určete dále charakteristickou množinu této soustavy křivek. $[(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y - a\sin\alpha\cos\alpha = 0$, char. množinou je asteroida $x = a\cos^3\alpha$, $y = a\sin^3\alpha]$.
(34) Určete obálku jednoparametrické soustavy kružnic s poloměrem k, jejichž středy jsou na kružnici $x^2 + y^2 = r^2$. $[x^2 + y^2 = (r \pm k)^2]$.
(35) Určete evolutu cykloidy $f(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$ a dále evolutu elipsy $f(t) = (a\cos t, b\sin t)$. [Evolutou cykloidy je posunutá cykloida $x = r(t + \sin t)$, $y = -r(1 - \cos t)$. Evolutou elipsy je křivka $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$, přičemž vrcholům elipsy odpovídají hroty (body vratu) evoluty].
(36) Určete evolutu křivky $y = \ln x$. $[x = \frac{1+2t^2}{t},\ y = \ln t - (1 + t^2)]$.
(37) Určete obálku jednoparametrické soustavy elips se středem v počátku, jejichž poloosy mají konstantní součin t (tj. jejichž obsahy mají konstantní velikost). [Dvě rovnoosé hyperboly $xy = \pm\frac{t}{2}$].
(38) Určete parametry a a b šroubovice, pokud znáte její křivost a torzi. $[a = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2},\ b = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}]$.
(39) Určete explicitní vyjádření šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$. Nalezněte dále nějakou parametrizaci šroubovice, která je nesouhlasná se zadanou parametrizací. [$x - a\cos\frac{z}{b} = 0$, $y - a\sin\frac{z}{b} = 0$. Nesouhlasnou parametrizaci dostaneme reparametrizací $t = -\tau$]
(40) Dokažte, že jediný singulární bod traktrix $(a\sin t, a\cos t + a\ln\mathrm{tg}\frac{t}{2})$ je $(a, 0)$. Dokažte dále, že délka úseku tečny traktrix z libovolného jejího bodu na vertikální osu je konstantní. Určete dále křivost traktrix. $[\kappa = -|\mathrm{tg}t|]$.
(41) Dokažte, že rovnice $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Descartesův list) vyjadřuje křivku třídy C^r ve všech bodech kromě počátku.
(42) Určete střed a poloměr oskulační kružnice kissoidy $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$ v bodě (a, a). $[(-9a, 6a),\ r = 5\sqrt{5}a]$.
(43) Určete poloměr oskulační kružnice Bernoulliovy lemniskaty v bodě $(a\sqrt{2}, 0)$. $[\frac{a}{3}\sqrt{2}]$.

(44) Určete všechny rovinné křivky s předepsanou konstantní křivostí κ. [$\kappa = 0$: přímka, $\kappa \neq 0$: kružnice].
(45) Dokažte, že křivka $(a_1t^2 + b_1t + c_1, a_2t^2 + b_2t + c_2, a_3t^2 + b_3t + c_3)$ je rovinná.
(46) Dokažte, že průsečnice válců $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ je rovinná křivka.

Cvičení III (Plochy)
(1) Najděte implicitní vyjádření roviny $(u + v, u - v, z = 3 + u)$. [$x + y - 2z + 6 = 0$]
(2) Najděte explicitní vyjádření sféry $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ v okolí bodu $(0, r, 0)$. [$y = \sqrt{r^2 - x^2 - z^2}$].
(3) Rotací kružnice $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ kolem osy z vznikne anuloid. Nalezněte jeho parametrické rovnice. [Jde o rotační plochu s profilem $x = a + r\cos v$, $z = r\sin v$. Parametrizace anuloidu je $(a + r\cos v)\cos u, y = (a + r\cos v)\sin u, z = r\sin v$].
(4) Dokažte, že parametrizace $f(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$ a $g(u, v) = (\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}, \frac{1}{u^2+v^2})$ definují mimo počátek tutéž plochu a nalezněte příslušnou transformaci souřadnic. [Jedná se o paraboloid $z = x^2 + y^2$, $\overline{u} = \frac{\cos v}{u}$, $\overline{v} = \frac{\sin v}{u}$].
(5) Dokažte, že dvě plochy zadané rovnicemi $z = f(x, y)$ a $z = \overline{f}(x, y)$ mají ve společném bodě $f(x_0, y_0) = \overline{f}(x_0, y_0)$ styk k-tého řádu právě když $\frac{\partial f^i(x_0,y_0)}{\partial x^{i_1} y^{i_2}} = \frac{\partial \overline{f}^i(x_0,y_0)}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}}$ $\forall i = 0, \ldots, k, i_1 + i_2 = i$.
(6) Napište rovnici tečny ke křivce zadané implicitně rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = x$ v bodě $(0, 0, 1)$. [$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$].
(7) Určete rovnici tečné roviny kruhového válce $(r\cos u, r\sin u, v)$ v bodě (u_0, v_0). [$x\cos u_0 + y\sin u_0 - r = 0$].
(8) Dokažte, že tečná rovina k libovolné rovině splývá s touto rovinou.
(9) Dokažte, že normála v libovolném bodě rotační plochy protíná osu z.
(10) Dokažte, že jestliže všechny normály dané plochy procházejí jedním bodem, pak jde o sféru nebo její část.
(11) Určete první základní formu obecné rotační plochy. [$\varphi_1 = x^2(v)du^2 + (x'^2(v) + z'^2(v))dv^2$].
(12) Určete první základní formu helikoidu $(v\cos u, v\sin u, u)$. [$\varphi_1 = (v^2 + 1)du^2 + dv^2$].
(13) Katenoid je rotační plocha s profilem $x(v) = \cosh v$, $z(v) = v$. Určete její první základní formu. [$\varphi_1 = \cosh^2 v(du^2 + dv^2)$].
(14) Určete první základní formu anuloidu (viz cv. (3)). [$\varphi_1 = (r\cos v + a)^2du^2 + r^2dv^2$].
(15) Určete první základní formu paraboloidu $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$. [$\varphi_1 = \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)dx^2 + 2\frac{xy}{pq}dxdy + \left(1 + \frac{y^2}{q^2}\right)dy^2$].
(16) Určete délku rovnoběžkové kružnice $v = v_0$ na sféře zadané parametrizací $(r\cos v\cos u, r\cos v\sin u, r\sin v)$. [$2\pi r\cos v_0$].
(17) Dokažte, že souřadnicové křivky libovolné rotační plochy tvoří ortogonální souřadnicovou síť. [U rotační plochy je $g_{12} = 0$, pak to plyne z Důsledku 13.1].
(18) Najděte úhel křivek $u + v = 0$, $u - v = 0$ na ploše $(\cosh v\cos u, \cosh v\sin u, v)$. [$\frac{\pi}{2}$].
(19) Určete délku křivky $u(t) = t$, $v(t) = 2t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ na ploše s $\varphi_1 = du^2 + \frac{1}{4}\cos v dv^2$. [2].
(20) Určete plošný obsah části paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq r^2$. [$\frac{\pi}{6}((4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1)$].

(21) Vypočtěte plošný obsah plochy rotačního paraboloidu $(v\cos u, v\sin u, v^2)$, $u\in(0,2\pi)$, $v\in(0,\sqrt{2})$. [$\frac{13}{3}\pi$].
(22) Vypočtěte plošný obsah elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$. [$\frac{4}{3}abc\pi r^3$].
(23) Určete plošný obsah anuloidu (viz cv. (3)). [$4\pi^2 ar$].
(24) Dokažte, že plošné obsahy oblastí na plochách $z=axy$, $z=\frac{a}{2}(x^2+y^2)$, které se promítají na stejnou část roviny xy, jsou si rovny.
(25) Ukažte, že Möbiův list $(2\cos u+v\sin\frac{u}{2}\cos u, 2\sin u+v\sin\frac{u}{2}\sin u, v\cos\frac{u}{2})$ není orientovatelná plocha. [Vektor normály $n(u,v)$ přejde po uzavřené křivce $v=v_0$ z $n(u,v_0)$ na vektor $-n(u+2\pi,v_0)$].
(26) Určete druhou základní formu helikoidu $(v\cos u, v\sin u, u)$. [$\varphi_2=\frac{2}{\sqrt{1+v^2}}dudv$]
(27) Určete druhou základní formu a Gaussovu křivost anuloidu (viz cv. (3)). Vyšetřete dále typy bodů na anuloidu. [$\varphi_2=\cos v(a+r\cos v)du^2+rdv^2$, $K=\frac{\cos v}{r(a+r\cos v)}$. Parabolické body: podél křivek $v=\pm\frac{\pi}{2}$, hyperbolické body pro $v\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$, eliptické pro $v\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$].
(28) Určete normálovou křivost hyperbolického paraboloidu $z=ax^2-by^2$ v bodě $(0,0)$ ve směru vektoru $dy:dx=1:2$. [$\frac{2}{5}(4a-b)$].
(29) Určete obě základní formy plochy $\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2, v-\frac{v^3}{3}+vu^2, u^2-v^2\right)$. [$\varphi_1=(1+u^2+v^2)^2(du^2+dv^2)$, $\varphi_2=2(du^2-dv^2$].
(30) Určete Gaussovu křivost kruhového válce s poloměrem r. [$K=0$].
(31) Určete Gaussovu a střední křivost a typy bodů helikoidu $(v\cos u, v\sin u, u)$. [$K=-\frac{1}{(1+v^2)^2}$, $H=0$, všechny body jsou hyperbolické].
(32) Určete Gaussovu křivost a typy bodů hyperbolického paraboloidu $z=axy$, $a\neq 0$. [$K=\frac{-a^2}{(1+a^2x^2+a^2y^2)^2}$, všechny body jsou hyperbolické].
(33) Odvoďte vzorec pro Gaussovu křivost rotační plochy z Příkladu 16.1.
(34) Určete asymptotické a hlavní křivky plochy s $\varphi_1=du^2$, $\varphi_2=du^2-dv^2$. [asymptotické: $v=\pm u+c$, hlavní: $u=$ konst, $v=$ konst].
(35) Rozhodněte o charakteru bodů na: 1.elipsoidu, 2.jednodílném hyperboloidu, 3.dvojdílném hyperboloidu, 4.eliptickém paraboloidu, 5.hyperbolickém paraboloidu, 6.eliptickém válci, 7.parabolickém válci, 8.hyperbolickém válci, 9.kuželi. [Všechny body jsou eliptické pro 1,3,4; hyperbolické pro 2,5; parabolické pro 6–9].
(36) Určete asymptotické křivky plochy $(\mathrm{cosh} u\cos v, \mathrm{cosh} u\sin v, u)$. [$u+v=c_1$, $u-v=c_2$].
(37) Určete asymptotické křivky helikoidu $(v\cos u, v\sin u, u)$. [$u=$ konst, $v=$ konst].
(38) Dokažte, že pokud $g_{12}=0=h_{12}$, tak souřadnicové křivky plochy jsou jejími hlavními křivkami. Ukažte pak, že souřadnicové křivky libovolné rotační plochy jsou jejími hlavními křivkami.
(39) Dokažte, že rotační plocha má planární body právě tam, kde rotující křivka má inflexní bod a tečnu rovnoběžnou s osou x.
(40) Dokažte, že Gaussova křivost plochy $z=f(x,y)$ je $K=\frac{f''_{xx}f''_{yy}-f''^2_{xy}}{(1+f'^2_x+f'^2_y)^2}$. [plyne to z vět 16.3, 13.1 a 14.5].
(41) Napište parametrické rovnice válce určeného elipsou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a směrem $c=(c_1,c_2,c_3)$ tvořících přímek. [$x=a\cos t+vc_1$, $y=b\sin t+vc_2$, $z=vc_3$].
(42) Napište parametrické rovnice křivky, která je průnikem roviny $z=0$ s plochou

tečen šroubovice $(a\cos t, a\sin t, bt)$. $[(a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t), 0)]$.
(43) Určete obálku dvouparametrické soustavy kulových ploch konstantního poloměru r, jejichž středy probíhají rovinu $z = 0$. [dvě rovnoběžné roviny $z = \pm r$].
(44) Určete obálku jednoparametrické soustavy kulových ploch $x^2 + (y-t)^2 + z^2 = 1$. [válec $x^2 + z^2 = 1$].
(45) Určete hranu vratu a obálku jednoparametrické soustavy rovin $t^2x - ty + z = t^3$. [hrana vratu je křivka $f(t) = (3t, 3t^2, t^3)$, obálka je plocha tečen hrany vratu].
(46) Rozhodněte, zda každé konformní zobrazení je i rovnoploché. [není].
(47) Nechť rovnicemi $x = v$, $y = \mathrm{e}^{-u}$ je dáno zobrazení plochy s první základní formou $\varphi_1 = du^2 + \mathrm{e}^{2u}dv^2$ do poloroviny $y > 0$. Ukažte, že toto zobrazení je konformní.
(48) Ukažte, že Sansonova projekce $x = u\cos v$, $y = v$ sféry do roviny je rovnoplochým zobrazením.
(49) Co je možno říct o ploše s $\varphi_1 = E(u)du^2 + G(v)dv^2$? [Je rozvinutelná, neboť transformace $\overline{u} = \int E(u)du$, $\overline{v} = \int G(v)dv$ převádí φ_1 na $d\overline{u}^2 + d\overline{v}^2$].
(50) U jakých ploch lze provést takovou transformaci souřadnic, aby koeficienty 1. základní formy byly konstantní? [U rozvinutelných].
(51) Určete Christoffelovy symboly helikoidu $(v\cos u, v\sin u, v)$ a napište dif. rovnice geodetik. $[\Gamma^1_{12} = \frac{v}{v^2+1}$, $\Gamma^2_{11} = -v$, ostatní nulové; $\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2v}{v^2+1}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} = 0$, $\frac{d^2v}{ds^2} - v\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0]$.
(52) Určete sférické body paraboloidu $z = x^2 + y^2$. $[(0,0,0)]$.
(53) Napište diferenciální rovnici asymptotických křivek plochy $f(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$. Tato plocha se nazývá opičí sedlo (opice má v tomto sedle totiž kam strčit ocas, zatímco u klasického sedla $z = x^2 - y^2$ místo pro ocas nemá. $[udu^2 - 2vdudv - udv^2 = 0]$.
(54) Napište diferenciální rovnici asymptotických křivek „trychtýře" zadaného parametrizací $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u)$. $[-\frac{1}{u}du^2 + udv^2 = 0]$.
(55) Dokažte, že poledníky a rovnoběžky rotační plochy jsou hlavními křivkami.
(56) Napište diferenciální rovnici hlavních křivek helikoidu $(v\cos u, v\sin u, u)$. $[(1+v^2)du^2 = dv^2]$.
(57) Vyjádřete prostorovou křivku (t, t^2, e^t) implicitně jako průnik dvou ploch. $[y = x^2$, $z = \mathrm{e}^x]$.
(58) Dokažte, že křivka $(a\sin^2 t, b\sin t\cos t, c\cos t)$ leží na elipsoidu.
(59) Najděte parametrizaci plochy tečen ke křivce (t, t^2, t^3). $[(t+u, t^2+2ut, t^3+3ut^2)]$.
(60) Určete křivost křivky zadané implicitně rovnicemi $x + \sinh x = \sin y + y$, $z + \mathrm{e}^z = x + \ln(1+x) + 1$ v bodě $(0,0,0)$. $[\kappa = \frac{\sqrt{6}}{9}]$.

LITERATURA

[1] Akivis, M. A., Goldberg, V. V., *Tenzornoe isčislenie*, Moskva, 1972.

[2] Boček, L., *Tenzorový počet*, SNTL, Praha, 1976.

[3] Budinský, B., *Analytická a diferenciální geometrie*, SNTL, Praha, 1983.

[4] Budinský, B., Kepr, B., *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi*, SNTL, Praha, 1970.

[5] do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice–Hall, London, 1976.

[6] Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, London, 1993

[7] Gusak, A. A., Nachimovskaja, A. N., Rjabuško, A. P., *Sbornik zadač po differencialnoj geometrii*, Minsk, 1963.

[8] Hlavatý, B., *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet*, Praha, 1937.

[9] Hostinský, B., *Diferenciální geometrie křivek a ploch*, Praha, 1950.

[10] Ilkovič, D., *Vektorový počet*, Praha, 1950.

[11] Kilčevskij, N. A., *Základy tensorového počtu a jeho použití v mechanice*, Praha, 1956.

[12] Pogorelov, A. V., *Differencialnaja geometrija*, Moskva, 1969.

[13] Raševskij, P. K., *Kurs differencialnoj geometrii*, Moskva, 1956.

[14] Savelov, A. A., *Ploskie krivye*, Moskva, 1960.

[15] Vondra, A., *Diferenciální geometrie křivek a ploch*, skripta VA v Brně, Brno, 1994.