MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
Přírodovědecká fakulta

Ivan KOLÁŘ
Lenka POSPÍŠILOVÁ

DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH

elektronické skriptum

Brno 2007

Obsah

Předmluva

Diferenciální geometrie studuje vlastnosti geometrických objektů metodami diferenciálního počtu. Klasickými objekty diferenciální geometrie jsou křivky a plochy v trojrozměrném euklidovském prostoru. Těm je také věnováno toto skriptum.

Geometrické problémy výrazně přispěly již k samotnému vzniku diferenciálního počtu. Víme, že derivaci funkce jedné proměnné lze interpretovat buď fyzikálně jako okamžitou rychlost pohybu po přímce nebo geometricky jako směrnici tečny křivky, která je grafem uvažované funkce. Ke vzniku diferenciálního počtu došlo koncem 17. století v pracích G. W. Leibnize a I. Newtona, vznik samostatné diferenciální geometrie v 18. století je pak spojován především se jmény L. Euler a G. Monge. K velkému rozvoji diferenciální geometrie došlo v 19. století a zasloužili se o něj zejména C. F. Gauss a B. Riemann. Od přelomu 19. a 20. století začala vývoj diferenciální geometrie významně ovlivňovat Einsteinova obecná teorie relativity. I v dnešní době dochází k hlubokému vzájemnému ovlivňování moderní diferenciální geometrie a současné teoretické fyziky.

Toto skriptum je určeno především studujícím odborné matematiky a učitelské deskriptivní geometrie na Přírodovědecké fakultě MU v Brně. Skriptum sestává ze dvou částí: I. Přednášky (autor I. Kolář), II. Cvičení (autorka L. Pospíšilová). Probíraná látka je klasická, způsob jejího výkladu ovšem vychází ze současného stavu diferenciální geometrie. V první části zejména konstrukce různých oskulačních objektů systematicky opíráme o obecný pojem styku křivek a ploch.

První část skripta sestává ze 14ti kapitol, které jsou rozděleny do číslovaných odstavců neboli bodů. Uvnitř téže kapitoly odkazujeme jen na číslo odstavce nebo rovnice, při odkazu na jinou kapitolu přidáváme i její číslo. Tedy např. 6.3 znamená třetí bod šesté kapitoly, zatímco 6.(3) znamená rovnici (3) v šesté kapitole. V seznamu literatury uvádíme jen ty publikace, o nichž se domníváme, že mohou být čtenáři nejužitečnější.

Druhá část skripta obsahuje řešené příklady v přímé návaznosti na přednášky. Kapitoly, na které je druhá čast rozdělena, neodpovídají rozvržení kapitol v první části skripta vzhledem k různorodé obsáhlosti jednotlivých témat pro přednášku a cvičení. Přesto zůstává zachována stejná posloupnost výkladu jako v přednáškách. V každé kapitole jsou očíslované příklady, které jsou kromě samotného zadání doplněny vzorovým řešením a ve většině případů ještě řešením v systému počítačové algebry Maple. Podrobnější technický komentář je pak zmiňován v úvodu druhé části.

Autoři děkují Prof. RNDr. Josefu Janyškovi, DSc. za cenné připomínky k textu, Mgr. Janu Vondrovi za pečlivé přečtení rukopisu a cenné připomínky k němu a paní Iloně Lukešové za kvalitní počítačové zpracování náročného textu.

Část I

Přednášky

1 Pohyb a křivka

Budeme se zabývat křivkami v euklidovské rovině a trojrozměrném prostoru. Začneme ale s n-rozměrným euklidovským prostorem E_n, i když fakticky potřebujeme pouze případy $n = 2, 3$.

1.1. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Jeho body lze interpretovat jako hodnoty času t. Zobrazení $f\colon I \to E_n$ můžeme chápat jako pohyb, jehož trajektorie v "rozumném" případě je křivka.

Pro použití diferenciálního počtu potřebujeme především diferencovatelnost zobrazení f. Připomínáme, že číselná funkce $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ se nazývá třídy C^r, jestliže má v intervalu I spojité derivace až do řádu r včetně. Jestliže v E_n zvolíme kartézskou souřadnou soustavu, pak $f(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$ je n-tice číselných funkcí a můžeme říci, že zobrazení f je třídy C^r, právě když všechny funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou třídy C^r.

Je však třeba ukázat, že tento pojem nezávisí na volbě souřadné soustavy. To je sice pravda, ale přímé ověřování pomocí přechodu od jedné souřadné soustavy k druhé je klopotné. Mnohem jednodušší je sledovat nezávislost pouze na volbě počátku souřadnic. Volba počátku identifikuje E_n s jeho zaměřením $Z(E_n)$, což je n-rozměrný euklidovský vektorový prostor.

1.2. Budeme se tedy nejprve zabývat n-rozměrným euklidovským vektorovým prostorem V. Značíme $\|u\|$ velikost vektoru u a (u, v) skalární součin dvou vektorů u, v.

Definice. Zobrazení $v\colon I \to V$ se nazývá **vektorová funkce** na intervalu I.

1.3. Pojem limity vektorové funkce se zavádí analogicky k případu číselné funkce.

Definice. Vektorová funkce v má v bodě $t_0 \in I$ **limitu** v_0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna t splňující $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$, platí $\|v(t) - v_0\| < \varepsilon$.

Píšeme $v_0 = \lim\limits_{t \to t_0} v(t)$.

Je-li $\lim\limits_{t \to t_0} v(t) = v(t_0)$, pak říkáme, že vektorová funkce je **spojitá** v bodě t_0.

1.4 Definice. Jestliže existuje

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}\big(v(t) - v(t_0)\big),$$

nazýváme ji **derivace vektorové funkce** $v(t)$ v bodě t_0.

Tuto derivaci značíme $\frac{dv(t_0)}{dt}$ nebo $v'(t_0)$.

Derivace vyššího řádu se definují obvyklou iterací.

1.5. Nechť $e_1, \dots, e_n$ je nějaká báze ve V. Pro každé $t \in I$ máme

$$v(t) = v_1(t)e_1 + \cdots + v_n(t)e_n\,.$$

Číselné funkce $v_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ nazýváme **složky vektorové funkce** $v(t)$.

Následující věta má snadný důkaz, který však patří do analýzy. Proto jej neuvádíme.

Věta. Vektorová funkce je spojitá, právě když všechny její složky jsou spojité. Vektorová funkce $v(t)$ má derivaci v bodě t_0, právě když ji mají všechny její složky. Pak platí

$$\frac{dv(t_0)}{dt} = \Big(\frac{dv_1(t_0)}{dt}, \dots, \frac{dv_n(t_0)}{dt}\Big)\,.$$

Podobná tvrzení platí i pro limitu a derivace vyššího řádu.

1.6. Uvedeme jeden pomocný výsledek, který budeme dále potřebovat.

Nechť $v(t)$, $w(t)$ jsou dvě vektorové funkce třídy C^1 na I. Jejich skalární součin $\big(v(t), w(t)\big)$ je číselná funkce třídy C^1 na I. Také skalární součiny $\big(\frac{dv}{dt}, w\big)$ a $\big(v, \frac{dw}{dt}\big)$ jsou číselné funkce na I.

Věta. Platí

$$\frac{d(v,w)}{dt} = \Big(\frac{dv}{dt}, w\Big) + \Big(v, \frac{dw}{dt}\Big)\,.$$

Důkaz. V souřadnicích máme

$$\big(v(t), w(t)\big) = v_1(t)w_1(t) + \cdots + v_n(t)w_n(t)\,.$$

Při derivování použijeme pravidla pro derivování součtů a součinu. Tedy

$$\frac{d(v,w)}{dt} = \frac{dv_1}{dt}w_1 + v_1\frac{dw_1}{dt} + \cdots + \frac{dv_n}{dt}w_n + v_n\frac{dw_n}{dt}\,.$$

To je souřadný tvar našeho tvrzení. □

1.7. Uvažujme prostor E_n a jeho zaměření V. Zvolme počátek $P \in E_n$. Pak zobrazení $f\colon I \to E_n$ určuje vektorovou funkci $\overrightarrow{Pf}\colon I \to V$, $\overrightarrow{Pf}(t) = \overrightarrow{Pf(t)}$, která se nazývá **průvodič zobrazení** f.

Definice. Zobrazení $f\colon I \to E_n$ nazýváme **pohyb** v prostoru E_n. Říkáme, že f je pohyb třídy C^r, jestliže $\overrightarrow{Pf}$ je vektorová funkce třídy C^r.

Vedle slova pohyb se někdy ekvivalentně užívá název **dráha**. Termín “pohyb” je názornější, termín “dráha” má více technický charakter.

Vektor $\frac{d(\overrightarrow{Pf})}{dt}$ nezávisí na volbě počátku. Opravdu, pro jiný bod $Q \in E_n$ máme $\overrightarrow{Pf} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qf}$, kde $\overrightarrow{PQ}$ je konstantní vektor, takže $\frac{d\overrightarrow{Pf}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{Qf}}{dt}$.

1.8 Definice. Vektor $\frac{d(\overrightarrow{Pf})}{dt} =: \frac{df}{dt}$ nazýváme **vektor rychlosti pohybu** f.

Značíme jej též f'.

V druhém řádu klademe $f'' = (f')'$; zde již derivujeme vektorovou funkci f', a stejně tak i v každém vyšším řádu.

Je-li $f(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$ souřadné vyjádření pohybu f, platí

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} = \Big(\frac{d^k f_1(t)}{dt^k}, \dots, \frac{d^k f_n(t)}{dt^k}\Big).$$

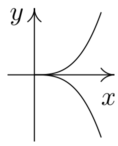
1.9 Definice. Pohyb $f\colon I \to E_n$ třídy C^1 nazveme **regulární**, jestliže $\frac{df(t)}{dt} \neq o$ pro každé $t \in I$. Bod o parametru t_0, v němž $\frac{df(t_0)}{dt} = o$, nazýváme **singulární bod pohybu** f.

Zde o značí nulový vektor prostoru $V = Z(E_n)$.

Uvedeme dva příklady.

(i) V případě konstantního pohybu $f(t) = Q \in E_n$, pro každé $t \in I$ platí $\frac{df(t)}{dt} = o$. Pro každou hodnotu času $t \in I$ máme tedy singulární bod.

(ii) V E_2 uvažujme pohyb $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in (-\infty, \infty)$. Ten probíhá po tzv. semikubické parabole $y^2 - x^3 = 0$. Máme $f(t) = (t^2, t^3)$, $f'(t) = (2t, 3t^2)$, takže $f'(0) = o$. Singulární bod $f(0)$ je tzv. **bod vratu** neboli **hrot**, viz obrázek.



1.10. Uvažujme jiný otevřený interval J, v němž proměnnou budeme značit τ, a bijektivní zobrazení $\varphi\colon J \to I$ (tedy číselnou funkci) třídy C^r takové, že $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$ pro všechna $\tau \in J$.

Lemma. Je-li $f\colon I \to E_n$ regulární pohyb třídy C^r, pak $f \circ \varphi\colon J \to E_n$ je také regulární pohyb třídy C^r.

Důkaz. Platí $\frac{d(f\circ\varphi)}{d\tau} = \frac{df}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}$, kde $\frac{d\varphi}{d\tau}$ je skalár a obě další veličiny jsou vektory. Opravdu, souřadné vyjádření $f \circ \varphi$ je $f_1(\varphi(\tau)), \dots, f_n(\varphi(\tau))$. Při derivování podle τ derivujeme v každé složce složenou funkci se stejnou vnitřní složkou $\varphi(\tau)$, takže $\frac{d(f\circ\varphi)}{d\tau} = \Big(\frac{df_1}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}, \dots, \frac{df_n}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}\Big) = \frac{df}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}$. Protože každé $\frac{df}{dt}$ je nenulový vektor a každé $\frac{d\varphi}{dt}$ je nenulový skalár, je každé $\frac{d(f\circ\varphi)}{d\tau}$ nenulový vektor. $\square$

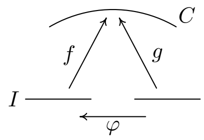
1.11 Definice. Pohyb $f\colon I \to E_n$ nazýváme **jednoduchý**, jestliže f je injektivní zobrazení, tedy při $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ platí $f(t_1) \neq f(t_2)$.

Z geometrického hlediska je f pohyb bez samoprotnutí.

1.12 Definice. Množinu $C \subset E_n$ nazveme **jednoduchá křivka třídy** C^r, jestliže existuje takový jednoduchý regulární pohyb $f\colon I \to E_n$ třídy C^r, že platí $C = f(I)$.

Zobrazení $f\colon I \to E_n$ nazýváme **parametrické vyjádření jednoduché křivky** C. Zobrazení φ z bodu 10 nazýváme **reparametrizace** křivky C.

1.13. Nechť J je další interval s proměnnou τ a $g\colon J \to E_n$ je další parametrické vyjádření jednoduché křivky C třídy C^r. Pravidlo $f\big(\varphi(\tau)\big) = g(\tau)$ určuje zobrazení $\varphi\colon J \to I$, $t = \varphi(\tau)$, viz obrázek.



Věta. φ je funkce třídy C^r a platí $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$ pro všechna $\tau \in J$.

Důkaz. Při souřadném vyjádření $f(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$, $g(\tau) = \big(g_1(\tau), \dots, g_n(\tau)\big)$ je funkce φ určena vztahy

$$f_i(t) = g_i(\tau)\,, \qquad i = 1, \dots, n\,. \tag{1}$$

Uvažujme libovolný bod $\tau_0 \in J$ a pišme $t_0 = \varphi(\tau_0) \in I$. Protože $\frac{df(t_0)}{dt} \neq o$, je aspoň jedna ze složek tohoto vektoru nenulová; označme ji k. Vztah $f_k(t) = g_k(\tau)$ pišme ve tvaru

$$f_k(t) - g_k(\tau) = 0\,. \tag{2}$$

Levá strana je funkce dvou proměnných t a τ, která je třídy C^r na součinu $I \times J$. Platí $\frac{df_k(t_0)}{dt} \neq 0$, takže na (2) můžeme použít větu o implicitní funkci. Ta říká, že v jistém okolí bodu t_0 je t určeno jako funkce třídy C^r proměnné τ. Bod po bodu dostáváme, že $t = \varphi(\tau)$ je funkce třídy C^r. Ta podle geometrické situace splňuje všechny rovnice (1), tedy $g(\tau) = f\big(\varphi(\tau)\big)$. Derivováním dostáváme rovnost vektorů $\frac{dg}{d\tau} = \frac{df}{dt}\frac{d\varphi}{d\tau}$, kde $\frac{d\varphi}{d\tau}$ je skalár. Kdyby bylo $\frac{d\varphi(t_0)}{d\tau} = 0$ v nějakém bodě, pak $\frac{dg(\tau_0)}{d\tau} = o$, ale to je v rozporu s předpokladem. $\square$

Odvodili jsme tedy, že každá dvě parametrická vyjádření jednoduché křivky třídy C^r se liší o reparametrizaci ve smyslu bodů 10 a 12.

1.14. V následující definici zavádíme globální pojem křivky.

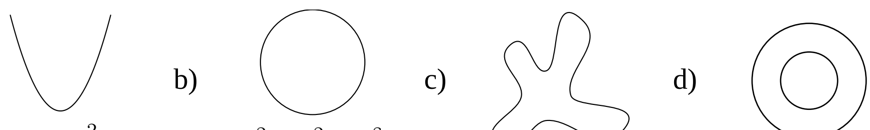
Definice. Podmnožinu $C \subset E_n$ nazveme **křivka třídy** C^r, jestliže pro každý bod $p \in C$ existuje takové jeho okolí U, že $C \cap U$ je jednoduchá křivka třídy C^r.

Parametrizace průniků nazýváme **lokální parametrizace křivky** C.

1.15. Úmluva. Dále budeme předpokládat, že třída r uvažované křivky nebo funkce je dostatečně vysoká pro námi prováděné úvahy a zpravidla se o ní nebudeme zmiňovat.

1.16. Uvedeme několik příkladů v rovině E_2.

a) b) c) d)

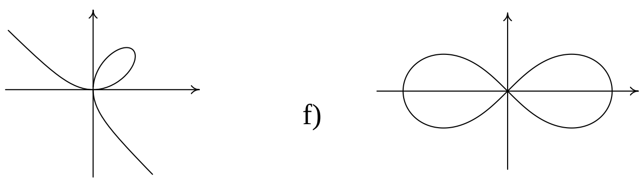


$y = x^2$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = r^2$

a) Parabola je globálně jednoduchá křivka. b) Kružnice je křivka, ale ne jednoduchá. c) Tento "čtyřlístek" je křivka ve smyslu naší (tj. diferenciálně geometrické) definice. d) Dvě soustředné kružnice můžeme chápat jako jednu křivku (souvislost se v definici 14 nepředpokládá). Často bývá totiž užitečné říci, že hranice jimi vytvořeného mezikruží je jedna křivka.

Na druhé straně, celá semikubická parabola z bodu 9, Descartův list, viz e), nebo lemniskata, viz f), nejsou křivkami v našem pojetí.

e) f)



$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $\qquad$ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

1.17 Definice. Dvě **parametrizace** $f(t)$ a $g(\tau)$ jednoduché křivky C nazýváme **souhlasné**, je-li $\frac{d\varphi}{d\tau} > 0$, kde φ je funkce z bodu 10.

Dvě souhlasné parametrizace určují tutéž orientaci jednoduché křivky C. Vybrat orientaci C znamená tedy určit na ní "směr pohybu". To je možné provést dvojím způsobem.

1.18 Definice. Nechť $f\colon I \to E_n$ je nějaká lokální parametrizace křivky C v E_n. Přímku určenou bodem $f(t_0)$, $t_0 \in I$, a vektorem $f'(t_0)$ nazýváme **tečnou křivky** C v bodě $f(t_0)$.

Tato definice nezávisí na zvolené parametrizaci, protože podle bodu 10 dvě různé parametrizace určují kolineární tečné vektory. Parametrické vyjádření tečny v bodě $f(t_0)$ tedy je

$$f(t_0) + vf'(t_0)\,, \qquad v \in \mathbb{R}\,.$$

1.19 Definice. Odchylkou dvou křivek C a $\bar{C}$ ve společném bodě p rozumíme odchylku jejich tečen v tomto bodě.

1.20 Definice. Řekneme, že dvě křivky C a $\bar{C}$ třídy C^r mají ve společném bodě p **styk řádu** k, $k \le r$, jestliže existují takové jejich lokální parametrizace $f(t)$, $\bar{f}(t)$ na společném intervalu I, $f(t_0) = \bar{f}(t_0) = p$, že platí

(3) $$\frac{d^i f(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i \bar{f}(t_0)}{dt^i} \qquad \text{pro všechna } i = 1, \dots, k\,.$$

Názorně řečeno, v uvažovaných parametrizacích obě křivky v daném bodě "splývají až do řádu k".

1.21 Poznámka. Snadno se ověří, že "míti styk k-tého řádu" je relace ekvivalence.

1.22 Věta. Dvě křivky C a $\bar{C}$ mají ve společném bodě p styk prvního řádu, právě když jejich tečny v bodě p splývají.

Důkaz. Mají-li C a $\bar{C}$ styk prvního řádu v bodě p, existují takové jejich parametrizace $f(t)$ a $\bar{f}(t)$, $f(t_0) = \bar{f}(t_0) = p$, že platí $\frac{df(t_0)}{dt} = \frac{d\bar{f}(t_0)}{dt}$. Tedy jejich tečny splývají. Obráceně, uvažujme $\bar{C}$ s libovolnou parametrizací $\bar{f}(\bar{t})$, $f(t_0) = \bar{f}(t_0)$. Jestliže obě tečny splývají, platí $\frac{d\bar{f}(t_0)}{d\bar{t}} = k\,\frac{df(t_0)}{dt}$, $k \neq 0$. Proveďme na $\bar{C}$ reparametrizaci $\bar{t} = t_0 + \frac{1}{k}(t - t_0)$. V nové parametrizaci $\bar{f}\big(t_0 + \frac{1}{k}(t-t_0)\big)$ křivky $\bar{C}$ platí $\frac{d\bar{f}(t_0)}{dt} = \frac{d\bar{f}(t_0)}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{d\bar{f}(t_0)}{d\bar{t}}\,\frac{1}{k}$. To se rovná $\frac{df(t_0)}{dt}$ podle definice k. Tedy C a $\bar{C}$ mají styk prvního řádu. □

1.23 Důsledek. Tečna křivky je jediná přímka, která s ní má styk prvního řádu.

1.24 Definice. Bod $p \in C$ nazýváme **inflexní bod křivky** C, jestliže tečna v něm má styk 2. řádu s křivkou C.

1.25 Věta. Nechť f je nějaká lokální parametrizace křivky C. Bod $p = f(t_0)$ je inflexní, právě když vektor $\frac{d^2 f(t_0)}{dt^2}$ je kolineární s vektorem $\frac{df(t_0)}{dt}$.

Důkaz. Označme $v = \frac{df(t_0)}{dt}$. Libovolný pohyb po tečně je tvaru $g(t) = p + h(t)v$, kde h je číselná funkce. Máme $\frac{dg(t_0)}{dt} = \frac{dh(t_0)}{dt}v$, $\frac{d^2g(t_0)}{dt^2} = \frac{d^2h(t_0)}{dt^2}v$, což jsou kolineární vektory. Mají-li C a její tečna styk 2. řádu, platí totéž pro $\frac{df(t_0)}{dt}$ a $\frac{d^2f(t_0)}{dt^2}$. Obráceně, nechť $\frac{d^2f(t_0)}{dt^2} = k\frac{df(t_0)}{dt}$. Uvažujme parametrizaci tečny

$$g(t) = p + \big[(t-t_0) + \frac{k}{2}(t-t_0)^2\big]v\,.$$

Pak $\frac{dg(t_0)}{dt} = v\frac{df(t_0)}{dt}$, $\frac{d^2g(t_0)}{dt^2} = kv = \frac{d^2f(t_0)}{dt^2}$. Tedy křivka C má se svou tečnou styk 2. řádu. □

1.26 Definice. Parametr s parametrického vyjádření $f\colon I \to E_n$ křivky C nazýváme **oblouk**, jestliže $\big\|\frac{df}{ds}\big\| = 1$ pro všechna $s \in I$.

Oblouk tedy představuje "rovnoměrný ve smyslu velikosti rychlosti" pohyb po křivce.

Nechť $f(t)$ je nějaká parametrizace křivky C. Hledáme takovou reparametrizaci $s = s(t)$, pro inverzní zobrazení píšeme $t = t(s)$, že s bude oblouk. Podmínka zní

$$1 = \Big\|\frac{df}{ds}\Big\| = \Big\|\frac{df}{dt}\Big\|\,\Big|\frac{dt}{ds}\Big|\,.$$

Tedy $\big|\frac{ds}{dt}\big| = \big\|\frac{df}{dt}\big\|$. Přidáme-li ještě podmínku souhlasnosti parametrů s a t, dostáváme

$$\frac{ds}{dt} = \Big\|\frac{df}{dt}\Big\| = \sqrt{\Big(\frac{df_1}{dt}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{df_n}{dt}\Big)^2}\,.$$

To můžeme přepsat jako

$$ds = \sqrt{(f_1')^2 + \cdots + (f_n')^2}\,dt\,. \tag{4}$$

Oblouk pak dostaneme integrací. Na každé jednoduché křivce je tedy oblouk určen až na aditivní konstantu a orientaci.

Vzorec (4) ukazuje, že námi definovaný oblouk souhlasí s pojmem délka křivky, který se zavádí v integrálním počtu. Fyzikálně to souhlasí se zřejmou skutečností, že pokud se po křivce pohybujeme s jednotkovou rychlostí, pak délka křivky, kterou urazíme za nějaký časový interval, je rovna velikosti tohoto časového intervalu.

1.27 Věta. Je-li křivka parametrizována obloukem $f(s)$, pak bod $f(s_0)$ je inflexní, právě když $\frac{d^2f(s_0)}{ds^2} = o$.

Důkaz. To, že $\frac{df}{ds}$ je jednotkový vektor, vyjádříme ve tvaru skalárního součinu

$$\Big(\frac{df}{ds}, \frac{df}{ds}\Big) = 1\,.$$

Derivací podle věty 6 dostáváme $2\left(\frac{df}{ds}, \frac{d^2f}{ds^2}\right) = 0$. To znamená, že vektor $\frac{d^2f(s_0)}{ds^2}$ je kolmý na jednotkový vektor $\frac{df(s_0)}{ds}$. V inflexním bodě musí být tyto vektory také kolineární podle věty 25. Odtud plyne $\frac{d^2f(s_0)}{ds^2} = o$. □

1.28 Věta. Jednoduchá křivka C, jejíž každý bod je inflexní, je částí přímky.

Důkaz. Při parametrizaci $f(s)$ křivky C obloukem, každý bod je inflexní, právě když $\frac{d^2f}{ds^2} = o$. Integrací dostáváme $\frac{df}{ds} = a$, kde a je konstantní vektor. Další integrace dává $f = as + b$, kde b je další konstantní vektor. To je parametrické vyjádření přímky. □

2 Rovinné křivky

2.1. V rovině E_2 zafixujeme kartézskou souřadnou soustavu (x, y). Parametrické vyjádření křivky má tvar $f(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big)$, $\frac{df}{dt} \neq o$. Zejména graf funkce $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ třídy C^r je křivka třídy C^r. Jeho parametrické vyjádření je $g(t) = \big(t, f(t)\big)$, $t \in (a, b)$, přičemž $\frac{dg}{dt} = \big(1, \frac{df}{dt}\big) \neq o$. V tomto případě hovoříme o **explicitním vyjádření rovinné křivky**.

2.2. Připomínáme, že o funkci dvou proměnných $f\colon U \to \mathbb{R}$ definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^2$ říkáme, že je třídy C^r, má-li na U spojité parciální derivace až do řádu r včetně.

Věta. Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $F\colon U \to \mathbb{R}$ je funkce třídy C^r taková, že množina C o rovnici $F(x, y) = 0$ je neprázdná a platí $\partial F(x_0, y_0) := \big(\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\big) \neq o$ pro každé $(x_0, y_0) \in C$. Pak C je křivka třídy C^r.

Důkaz. Nechť $F(x_0, y_0) = 0$ a třeba $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$. Pak podle věty o implicitní funkci lze množinu C lokálně vyjádřit ve tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je funkce třídy C^r. To je lokální explicitní vyjádření křivky C. Je-li $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x} \neq 0$, můžeme, opět podle věty o implicitní funkci, C lokálně vyjádřit ve tvaru $x = g(y)$. $\square$

Definice. Bod (x_0, y_0), pro nějž platí $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$ nazýváme **singulární bod** množiny $F(x, y) = 0$.

2.3. Příklady. (i) Uvažujme množinu $x^2 + y^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$; tedy $F(x, y) = x^2 + y^2 - a$. Pro $a < 0$ je množina $F(x, y) = 0$ prázdná. Pro $a = 0$ množinu $F(x, y) = 0$ tvoří pouze počátek $(0, 0)$. V něm se anulují obě derivace $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. Tento bod, samozřejmě, není křivka. Pro $a > 0$ máme kružnici se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{a}$. Vektor $\partial F = (2x, 2y)$ je ve všech jejích bodech nenulový.
(ii) Uvažujme Descartův list $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Máme $\partial F = (3x^2 - 3ay, 3y^2 - 3ax)$. Pro $a = 0$ je $(0, 0)$ jediný singulární bod. Pro $a \neq 0$ snadno nalezneme, že rovnice $\partial F = 0$ má dvě dvojice řešení $(0, 0)$ a (a, a). Bod (a, a) na křivce neleží, takže $(0, 0)$ je jediný singulární bod.
(iii) Pro semikubickou parabolu $F(x, y) = y^2 - x^3 = 0$ máme $\partial F = (-3x^2, 2y)$. Tedy počátek je jediný singulární bod.

2.4 Věta. Tečna ke křivce $F(x, y) = 0$ v bodě (x_0, y_0) má rovnici

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = 0\,. \tag{1}$$

Důkaz. Nechť $\big(f_1(t), f_2(t)\big)$ je nějaké parametrické vyjádření této křivky, $\big(f_1(t_0), f_2(t_0)\big) = (x_0, y_0)$. Derivováním vztahu $F\big(f_1(t), f_2(t)\big) = 0$ a dosazením $t = t_0$ dostáváme

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{df_1(t_0)}{dt} + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{df_2(t_0)}{dt} = 0\,.$$

Vektor $\partial F(x_0, y_0)$ je tedy kolmý k tečnému vektoru $\frac{df(t_0)}{dt}$. Rovnice (1) vyjadřuje přímku jdoucí bodem (x_0, y_0) a kolmou na vektor $\partial F(x_0, y_0)$, tedy tečnu. □

Podmínka $\partial F(x_0, y_0) \neq o$ při zadání křivky rovnicí tedy zaručuje existenci tečny podobně jako podmínka $\frac{df(t_0)}{dt} \neq o$ při parametrickém vyjádření křivky. V singulárním bodě nemusí jediná tečna existovat.

Přímku jdoucí bodem křivky a kolmou k tečně nazýváme **normála**. Vektor $\partial F(x_0, y_0)$ je tedy směrový vektor normály.

2.5. Podle 1.20, dvě rovinné křivky C a $\bar{C}$ mají ve společném bodě p styk k-tého řádu, jestliže existují takové jejich lokální parametrizace $\big(f_1(t), f_2(t)\big)$ a $\big(\bar{f}_1(t), \bar{f}_2(t)\big)$ na společném intervalu I, že platí

(2) $$\frac{d^i f_1(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i \bar{f}_1(t_0)}{dt^i}\,, \frac{d^i f_2(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i \bar{f}_2(t_0)}{dt^i}\,, \quad i = 1, \dots, k,$$

kde t_0 je parametr společného bodu p. Přímá diskuse toho, zda takováto společná parametrizace existuje nebo neexistuje, je obecně dosti složitá záležitost. Velmi jednoduchou proceduru však můžeme použít v tom případě, kdy $\bar{C}$ je dána rovnicí $F(x, y) = 0$. V tomto případě vytvoříme funkci jedné proměnné

(3) $$\Phi(t) = F\big(f_1(t), f_2(t)\big)\,.$$

Věta. Křivky $C \equiv \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ a $\bar{C} \equiv F(x, y) = 0$ mají ve společném bodě $(x_0, y_0) = \big(f_1(t_0), f_2(t_0)\big)$ styk řádu k, právě když platí

(4) $$\frac{d^i \Phi(t_0)}{dt^i} = 0\,, \qquad i = 1, \dots, k\,.$$

Důkaz. Nechť $\big(\bar{f}_1(t), \bar{f}_2(t)\big)$ je lokální parametrizace křivky $\bar{C}$ taková, že je splněna podmínka (2) pro styk. Platí tedy

(5) $$F\big(\bar{f}_1(t), \bar{f}_2(t)\big) = 0$$

pro všechna t, takže všechny derivace složené funkce na levé straně jsou nulové. Také funkce Φ je složená, přičemž vnější složkou je tatáž funkce $F(x, y)$ a vnitřní složky jsou $f_1(t)$, $f_2(t)$. Podle předpokladu o styku jsou derivace až do řádu k vnitřních složek v bodě t_0 stejné jako u $\bar{f}_1(t)$ a $\bar{f}_2(t)$, takže platí (4).

Obráceně, nechť platí (4). Předpokládejme $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$. Křivku $\bar{C}$ budeme lokálně parametrizovat ve tvaru $\big(f_1(t), g(t)\big)$, kde $g(t)$ je určeno rovnicí

$$F\big(f_1(t), g(t)\big) = 0\,. \tag{6}$$

To je možné udělat. Uvažujme totiž funkci

$$G(t,y) = F\big(f_1(t), y\big)\,,$$

která je definována na jistém okolí V bodu (t_0, y_0). Platí

$$\frac{\partial G(t_0,y_0)}{\partial y} = \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0\,,$$

takže můžeme použít větu o implicitní funkci na rovnici $G(t,y) = 0$. Je třeba dokázat

$$\frac{d^i f_2(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i g(t_0)}{dt^i}\,, \qquad i = 1, \dots, k\,. \tag{7}$$

Na $V \times \mathbb{R}$ uvažujme funkci tří proměnných

$$H(t,y,z) = G(t,y) - z\,.$$

Platí $H(t_0, y_0, 0) = 0$ a $\frac{\partial H(t_0,y_0,0)}{\partial y} = \frac{\partial G(t_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$, takže podle věty o implicitní funkci lokálně lze z rovnice $H = 0$ jednoznačně vypočítat $y = K(t,z)$. Protože $G\big(t, g(t)\big) = 0$ a $G\big(t, f_2(t)\big) = \Phi(t)$, platí

$$g(t) = K(t,0) \quad \text{a} \quad f_2(t) = K\big(t, \Phi(t)\big)\,.$$

Podobně jako v první části důkazu máme zde stejnou vnější složku $K(t,z)$. Derivace konstantní funkce $t \mapsto 0$ a funkce $\Phi(t)$ až do řádu k v bodě t_0 splývají, protože jsou nulové. Podle pravidla o derivování složené funkce z (4) plyne (7). $\square$

2.6. Zkoumejme nyní, jak nejlépe lze aproximovat libovolnou rovinnou křivku C v daném bodě p pomocí kružnice.

Definice. Kružnici, která má v bodě $p \in C$ styk 2. řádu s křivkou C, nazýváme **oskulační kružnice** v bodě p.

2.7 Věta. V neinflexním bodě existuje právě jedna oskulační kružnice.

Důkaz. Označme (a, b) střed a r poloměr kružnice. Její rovnice tedy je

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0\,. \tag{8}$$

Užitím věty 5 nalezneme podmínku, aby (8) měla s křivkou danou parametricky $\bigl(f_1(t), f_2(t)\bigr)$ v bodě t_0 styk 2. řádu. Máme

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \bigl(f_1(t)-a\bigr)^2 + \bigl(f_2(t)-b\bigr)^2 - r^2\,,\\ \Phi'(t) &= 2(f_1-a)f_1' + 2(f_2-b)f_2'\,,\\ \Phi''(t) &= 2(f_1')^2 + 2(f_1-a)f_1'' + 2(f_2')^2 + 2(f_2-b)f_2''\,.\end{aligned}$$

Souřadnice a, b jsou řešením rovnic $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$, které po úpravě mají tvar

$$\begin{aligned} af_1' + bf_2' &= f_1f_1' + f_2f_2'\,,\\ af_1'' + bf_2'' &= f_1f_1'' + f_2f_2'' + f_1'^2 + f_2'^2\,. \end{aligned} \tag{9}$$

V neinflexním bodě jsou vektory (f_1', f_2') a (f_1'', f_2'') lineárně nezávislé, takže determinant soustavy (9) je nenulový a tyto rovnice určují jedinou dvojici (a, b). Poloměr r pak spočteme z rovnice $\Phi = 0$. □

2.8 Věta. Pro poloměr r oskulační kružnice platí

$$r^2 = \frac{(f_1'^2 + f_2'^2)^3}{(f_1'f_2'' - f_2'f_1'')^2} \tag{10}$$

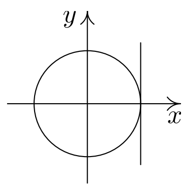
Důkaz. Výpočtem (vhodné je užít Cramerovo pravidlo) z (9) dostáváme

$$a = f_1 - \frac{f_2'(f_1'^2 + f_2'^2)}{\begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix}}\,, \quad b = f_2 + \frac{f_1'(f_1'^2 + f_2'^2)}{\begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix}}\,.$$

Formule $r^2 = (f_1-a)^2 + (f_2-b)^2$ pak dává (10). □

2.9. V inflexním bodě oskulační kružnice neexistuje. V inflexním bodě má tečna styk 2. řádu s danou křivkou, takže podle 1.21 by musela mít styk 2. řádu také s oskulační kružnicí. Jednoduchý výpočet však ukazuje, že kružnice má se svou tečnou styk jen 1. řádu.

Opravdu, souřadnou soustavu můžeme zvolit tak, že kružnice má parametrické vyjádření $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Její tečna v bodě $t = 0$ má rovnici $x - r = 0$. Máme tedy $\Phi(t) = r\cos t - r$. Platí $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = -r\sin 0 = 0$, ale $\Phi''(0) = r\cos 0 \neq 0$.



2.10 Definice. Nechť r je poloměr oskulační kružnice v neinflexním bodě $p \in C$. Číslo $\varkappa = \frac{1}{r}$ nazýváme **křivost křivky** C v bodě p. V inflexním bodě definujeme křivost $\varkappa = 0$.

Název vychází z toho, že čím má kružnice menší poloměr, tím je "křivější".

Střed oskulační kružnice se také nazývá **střed křivosti** křivky C v uvažovaném bodě.

2.11 Definice. Neinflexní bod $p \in C$, v němž oskulační kružnice má s C styk 3. řádu, nazýváme **vrchol křivky**.

V bodě 16 ukážeme, že u elipsy jsou vrcholy v tomto obecném pojetí právě její klasické vrcholy.

Oskulační kružnice ve vrcholu křivky se též nazývá **hyperoskulační**.

2.12. Uvažujme dále jako parametr oblouk s. Podle 1.26 a důkazu věty 1.27 je vektor $e_1 = \frac{df}{ds}$ jednotkový a vektor $\frac{de_1}{ds} = \frac{d^2f}{ds^2}$ je na něj kolmý. Přitom charakteristikou inflexního bodu $f(s_0)$ je $\frac{de_1(s_0)}{ds} = o$.

V neinflexním bodě $f(s_0)$ označíme jako $e_2(s_0)$ jednotkový vektor souhlasně rovnoběžný s $\frac{de_1(s_0)}{ds}$. Tedy $e_1(s_0)$ a $e_2(s_0)$ je dvojice ortonormálních vektorů.

Věta. Platí $\left\|\frac{de_1(s_0)}{ds}\right\| = \varkappa(s_0)$ a střed oskulační kružnice leží na polopřímce určené bodem $f(s_0)$ a vektorem $e_2(s_0)$.

Důkaz. To sice lze odvodit z výrazů pro střed oskulační kružnice z bodu 8, ale pro další úvahy bude užitečné provést celý výpočet s určitým zjednodušením ještě jednou. Víme, že střed oskulační kružnice leží na normále, takže je tvaru $f(s_0) + re_2(s_0)$, kde $r \in \mathbb{R}$ je nějaké číslo. Rovnici kružnice o tomto středu a poloměru r napíšeme ve tvaru skalárního součinu

$$\big(z - f(s_0) - re_2(s_0), z - f(s_0) - re_2(s_0)\big) - r^2 = 0\,,$$

kde $z = (x, y)$ je libovolný bod roviny. Pro výpočet styku tedy užijeme funkci

$$\Phi(s) = \big(f(s) - f(s_0) - re_2(s_0), f(s) - f(s_0) - re_2(s_0)\big) - r^2\,.$$

Derivací dostáváme, při použití 1.6,

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{ds} = \big(e_1(s), f(s) - f(s_0) - re_2(s_0)\big)\,.$$

Podmínky $\Phi(s_0) = 0$ a $\frac{d\Phi(s_0)}{ds} = 0$ jsou splněny; geometricky je to důsledek toho, že střed volíme na normále. Dalším derivováním dostáváme

$$(11)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{ds^2} = \Big(\frac{de_1(s)}{ds}, f(s) - f(s_0) - re_2(s_0)\Big) + \big(e_1(s), e_1(s)\big)\,.$$

Anulování v bodě s_0 dává

$$r\Big(\frac{de_1(s_0)}{ds}, e_2(s_0)\Big) = 1\,. \tag{12}$$

Protože vektor $\frac{de_1(s_0)}{ds}$ je souhlasně rovnoběžný s vektorem $e_2(s_0)$, skalární součin ve (12) je roven velikosti tohoto vektoru. Naše tvrzení je pak přímým důsledkem definice 10. $\square$

2.13 Důsledek. Platí $\frac{de_1(s)}{ds} = \varkappa(s)e_2(s)$.

Důkaz. V neinflexním bodě to plyne z věty 12, v inflexním bodě z 1.27. $\square$

2.14 Věta. Platí $\frac{de_2(s)}{ds} = -\varkappa(s)e_1(s)$.

Důkaz. Protože e_2 je jednotkový vektor, máme $(e_2, e_2) = 1$. Derivováním dostaneme $\big(e_2, \frac{de_2}{ds}\big) = 0$. Tedy vektor $\frac{de_2}{ds}$ je kolmý k e_2, takže $\frac{de_2}{ds} = ce_1$. Protože vektory e_1 a e_2 jsou kolmé, platí $(e_1, e_2) = 0$. Derivováním dostáváme

$$0 = \Big(\frac{de_1}{ds}, e_2\Big) + \Big(e_1, \frac{de_2}{ds}\Big) = \varkappa + c\,.$$

$\square$

2.15 Věta. Bod $f(s_0)$ je vrcholem křivky, právě když platí $\frac{d\varkappa(s_0)}{ds} = 0$.

Důkaz. Pokračujme ve výpočtu z věty 12 s užitím důsledku 13. Máme tedy

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\phi}{ds^2} = \varkappa(s)\big(e_2(s), f(s) - f(s_0) - re_2(s_0)\big) + 1\,.$$

Dalším derivováním dostáváme podmínku styku 3. řádu

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d^3\phi(s_0)}{ds^3} = \frac{d\varkappa(s_0)}{ds}\cdot(-r) + \varkappa(s_0)\left[\big(-\varkappa(s_0)e_1(s_0), -re_2(s_0)\big)\right]\,.$$

Z kolmosti vektorů $e_1(s_0)$, $e_2(s_0)$ a $r \neq 0$ plyne naše tvrzení. $\square$

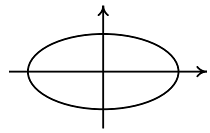
2.16 Důsledek. V libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky C platí, že neinflexní bod $f(t_0)$ je vrcholem, právě když $\frac{d\varkappa(t_0)}{dt} = 0$.

Důkaz. Přechod od t k s se děje reparametrizací $t = \varphi(s)$, $t_0 = \varphi(s_0)$. Podle pravidla pro derivování složené funkce máme

$$\frac{d\varkappa(\varphi(s_0))}{ds} = \frac{d\varkappa(t_0)}{dt}\,\frac{d\varphi(s_0)}{ds}\,.$$

Protože jde o reparametrizaci, je $\frac{d\varphi(s_0)}{ds} \neq 0$. $\square$

Odtud zejména plyne, že vrcholy elipsy ve smyslu diferenciální geometrie jsou její klasické vrcholy, protože křivost v nich zřejmě dosahuje maxima resp. minima.



2.17 Věta. Jednoduchá křivka, jejíž každý bod je vrcholem, je částí kružnice.

Důkaz. Pro střed oskulační kružnice máme $c(s) = f(s) + \frac{1}{\varkappa}e_2(s)$. Je-li každý bod vrcholem, $\varkappa$ je konstantní a derivováním dostáváme, s užitím bodu 13,

$$\frac{dc(s)}{ds} = e_1(s) - \frac{1}{\varkappa}\,\varkappa e_1(s) = o\,.$$

Je to tedy pevný bod a rovněž poloměr $\frac{1}{\varkappa}$ je konstantní. Všechny oskulační kružnice tedy splývají a křivka na této kružnici leží. □

2.18 Definice. Vzorce

$$\frac{df}{ds} = e_1\,, \quad \frac{de_1}{ds} = \varkappa e_2\,, \quad \frac{de_2}{ds} = -\varkappa e_1 \tag{13}$$

nazýváme **Frenetovy rovnice** rovinné křivky C bez inflexních bodů. “Pohyblivý” repér $\big(f(s), e_1(s), e_2(s)\big)$ nazýváme **Frenetův repér** křivky C.

2.19. Nyní ukážeme, jak lze vzorců (13) využít k charakterizování shodnosti roviných křivek.

Definice. Křivky C, $\bar{C} \subset E_2$ nazýváme **shodné**, jestliže existuje takové shodné zobrazení $\varphi\colon E_2 \to E_2$, že platí $\varphi(C) = \bar{C}$.

2.20 Věta. Nechť C a $\bar{C}$ jsou křivky bez inflexních bodů, $f\colon I \to E_2$, $\bar{f}\colon I \to E_2$ jsou jejich parametrizace obloukem na společném intervalu I a $\varkappa(s)$, $\bar{\varkappa}(s)$ jsou jejich křivosti. Pak křivky C a $\bar{C}$ jsou shodné, právě když $\varkappa = \bar{\varkappa}$ je tatáž funkce na I.

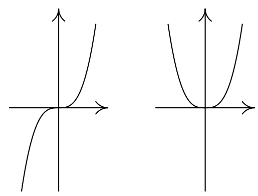
Důkaz. Z jedné strany je to jasné: shodné zobrazení převádí oblouk na oblouk a zachovává styk, takže poloměry oskulačních kružnic v odpovídajících bodech musí být stejné. Obráceně, uvažujme C resp. $\bar{C}$ s Frenetovým repérem $\big(f(s), e_1(s), e_2(s)\big)$ resp. $\big(\bar{f}(s), \bar{e}_1(s), \bar{e}_2(s)\big)$. Vedle (13) platí také

$$\frac{d\bar{f}}{ds} = \bar{e}_1\,, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds} = \varkappa\bar{e}_2\,, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds} = -\varkappa\bar{e}_1 \tag{14}$$

s týmž $\varkappa$. Tedy (13) a (14) je tatáž soustava diferenciálních rovnic pro šestici číselných funkcí, které jsou složkami f, e_1 a e_2. Pro $s_0 \in I$ je $f(s_0)$, $e_1(s_0)$, $e_2(s_0)$ stejně jako $\bar{f}(s_0)$, $\bar{e}_1(s_0)$, $\bar{e}_2(s_0)$ bod a dvojice ortonormálních vektorů.

Existuje tedy jediná shodnost $\varphi\colon E_2 \to E_2$, která převádí $f(s_0)$ do $\bar{f}(s_0)$, $e_1(s_0)$ do $\bar{e}_1(s_0)$ a $e_2(s_0)$ do $\bar{e}_2(s_0)$. Pak parametrizace $\bar{f}\colon I \to E_2$ křivky $\bar{C}$ spolu s vektorovými funkcemi $\bar{e}_1(s)$ a $\bar{e}_2(s)$ a parametrizace $\varphi \circ f\colon I \to E_2$ křivky $\varphi(C)$ spolu s vektorovými funkcemi $\varphi \circ e_1$ a $\varphi \circ e_2$ splňují tutéž soustavu diferenciálních rovnic se stejnými počátečními podmínkami. Podle věty o jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic platí $\bar{f} = \varphi \circ f$, $\bar{e}_1 = \varphi \circ e_1$, $\bar{e}_2 = \varphi \circ e_2$. Z prvního vztahu $\bar{f} = \varphi \circ f$ plyne $\bar{C} = \varphi(C)$. $\square$

2.21 Příklad. Podmínka, že křivky C i $\bar{C}$ jsou bez inflexních bodů, je podstatná. Uvažujme křivky zadané explicitně $y = x^3$ a $y = |x|^3$, $x \in (-\infty, \infty)$. Obě jsou třídy C^2 a mají stejnou křivost jako funkci oblouku, ale shodné nejsou.



2.22. Následující tvrzení se stručně vyjadřuje slovy, že křivost rovinné křivky můžeme zadat libovolně.

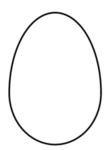
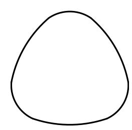
Věta. Nechť $\varkappa\colon I \to \mathbb{R}$ je kladná funkce. Pak lokálně existuje taková křivka C parametrizovaná obloukem na I, že $\varkappa$ je její křivost.

Idea důkazu: Řešíme soustavu diferenciálních rovnic (13). $\square$

Poznámka. Globálně tato křivka nemusí být jednoduchá. Například, je-li $\varkappa = \frac{1}{r}$ konstanta, řešením příslušné soustavy diferenciálních rovnic je kružnice $x = r\cos\frac{s}{r}$, $y = r\sin\frac{s}{r}$, kterou pro $s \in (-\infty, \infty)$ obíháme stále dokola.

2.23. Závěrem uvedeme jeden globální výsledek o rovinných křivkách. Připomínáme, že podmnožinu v E_2 nazýváme omezenou, jestliže celá leží uvnitř nějakého kruhu.

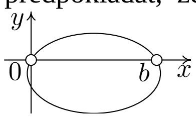
Definice. Rovinná křivka C třídy C^r se nazývá **ovál** třídy C^r, je-li hranicí omezené konvexní množiny v E_2.

Příklady: (i)  (ii) 

2.24. Věta (o čtyřech vrcholech). Každý ovál C třídy C^3 bez inflexních bodů má alespoň čtyři vrcholy.

Důkaz. Uvažujme C parametrizováno obloukem $f(s) = \big(f_1(s), f_2(s)\big)$ na intervalu $s \in [0, a]$, přičemž pro $s = a$ dochází k opětovnému spojení $f(0) = f(a)$

uvažovaného oválu. Tedy křivost $\varkappa$ je fakticky definována na uzavřeném intervalu, takže dosahuje svého maxima a minima. To dává dva vrcholy oválu C. Můžeme předpokládat, že pro $s = 0$ má $\varkappa$ minimum a v nějakém bodě o parametru



$b \in (0, a)$ má $\varkappa$ maximum. Zvolme $f(0)$ za počátek, bod $f(b)$ na ose x a orientaci osy y tak, že platí $f_2(s) > 0$ pro $s \in (0, b)$ (platí-li to pro nějaký bod, platí to pro všechny podle konvexity). Pak $f_2(s) < 0$ pro $s \in (b, a)$ rovněž podle konvexity.

Případ $\varkappa(0) = \varkappa(b)$, tedy $\varkappa$ je konstantní, odpovídá podle věty 17 kružnici, kterou můžeme z dalších úvah vyloučit.

Předpokládejme nyní, že $f(0)$ a $f(b)$ jsou jediné dva vrcholy. Pak $\frac{d\varkappa}{ds} > 0$ na $(0, b)$ a $\frac{d\varkappa}{ds} < 0$ na (b, a). Integrace per partes daná

$$0 < \int_0^a \frac{d\varkappa}{ds} f_2 ds = \big[\varkappa f_2\big]_0^a - \int_0^a \varkappa \frac{df_2}{ds}\, ds\,.$$

Ale $\big[\varkappa f_2\big]_0^a = 0$, protože $f(0) = f(a)$ a $\varkappa(0) = \varkappa(a)$.

Rozepišme vztah $\frac{de_1}{ds} = \varkappa e_2$. Máme $e_1 = \big(\frac{df_1}{ds}, \frac{df_2}{ds}\big)$. Protože e_2 je jednotkový vektor kolmý k e_1, platí $e_2 = \pm\big(\frac{df_2}{ds}, -\frac{df_1}{ds}\big)$, takže $\frac{d^2 f_1}{ds^2} = \pm\varkappa\frac{df_2}{ds}$. Tedy

$$0 < -\int_0^a \varkappa \frac{df_2}{ds}\, ds = \pm \int_0^a \frac{d^2 f_1}{ds^2}\, ds = \pm\Big[\frac{df_1}{ds}\Big]_0^a = 0\,,$$

neboť $\frac{df_1(0)}{ds} = \frac{df_1(a)}{ds}$ podle periodicity parametrického vyjádření oválu. A to je spor.

Fakticky jsme ukázali, že existuje ještě další bod, v němž $\frac{d\varkappa}{ds}$ mění znaménko, takže $\varkappa$ v něm má buď maximum nebo minimum. Ale maxima a minima se vyskytují ve dvojicích. Odtud plyne existence čtvrtého vrcholu. $\square$

3 Obálka soustavy rovinných křivek

3.1. Uvažujme jednoparametrickou soustavu rovinných křivek určených rovnicí

$$F(x, y, t) = 0\,, \tag{1}$$

$t \in I$, kde $F(x, y, t)$ je funkce třídy C^1 definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^3$. Křivku o rovnici $F(x, y, t_0) = 0$ značíme C_{t_0}, $t_0 \in I$, takže o (1) hovoříme také jako o soustavě křivek (C_t).

3.2. Společné body křivek C_t a C_s, $t \neq s$ jsou určeny dvojicí rovnic

$$F(x, y, t) = 0\,, \quad F(x, y, s) = 0\,.$$

Tato soustava rovnic je zřejmě ekvivalentní soustavě

$$F(x, y, t) = 0\,, \quad \frac{F(x, y, s) - F(x, y, t)}{s - t} = 0\,.$$

Uvažujeme-li pevné t, pak v limitě pro $s \to t$ dostáváme rovnice

$$F(x, y, t) = 0\,, \quad \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = 0\,. \tag{2}$$

Definice. Body určené rovnicemi (2) nazýváme **charakteristické body na křivce** C_t. Množinu těchto bodů pro všechna $t \in I$ nazýváme **charakteristická množina soustavy** (C_t).

Z početního hlediska máme dvě základní možnosti vyjádření charakteristické množiny. Když z (2) vyloučíme parametr t, dostáváme vyjádření charakteristické množiny rovnicí tvaru $G(x, y) = 0$. Jestliže z (2) spočteme x a y jako funkce t, dostáváme parametrické vyjádření charakteristické množiny.

3.3. Řekneme, že **dvě křivky se ve společném bodě dotýkají**, jestliže v něm mají styk 1. řádu, tedy společnou tečnu.

Definice. Křivku D s parametrickým vyjádřením $f(t)$, $t \in (a, b) \subset I$ nazýváme **obálka** soustavy (C_t), jestliže D se v bodě $f(t_0)$ dotýká křivky C_{t_0} pro každé $t_0 \in (a, b)$.

3.4 Věta. Každá obálka soustavy (C_t) je podmnožinou její charakteristické množiny.

Důkaz. Podmínka, aby bod obálky $f(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ ležel na křivce C_t, zní

(3) $$F\big(f_1(t), f_2(t), t\big) = 0\,.$$

Podmínka splývání tečny k D a tečny k C_t v bodě $f(t)$ má tvar

(4) $$\frac{\partial F(f_1(t), f_2(t), t)}{\partial x}\,\frac{df_1(t)}{dt} + \frac{\partial F(f_1(t), f_2(t), t)}{\partial y}\,\frac{df_2(t)}{dt} = 0\,.$$

Derivováním (3) dostáváme

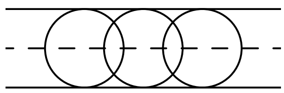
(5) $$\frac{\partial F(f_1(t), f_2(t), t)}{\partial x}\,\frac{df_1(t)}{dt} + \frac{\partial F(f_1(t), f_2(t), t)}{\partial y}\,\frac{df_2(t)}{dt} + \frac{\partial F(f_1(t), f_2(t), t)}{\partial t} = 0\,.$$

Odečtením (4) od (5) obdržíme

(6) $$\frac{\partial F(f_1(t), f_2(t), t)}{\partial t} = 0\,.$$

Tedy každá obálka je částí charakteristické množiny. □

3.5. Probereme velmi jednoduchý příklad soustavy kružnic se středy na ose x a konstatním poloměrem r. Tedy $F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - r^2 = 0$. Pak $\frac{\partial F}{\partial t} = -2(x - t) = 0$. Dosazení $x = t$ do první rovnice dává $y = \pm r$. Samozřejmě, obě tyto přímky jsou obálkou.

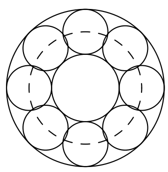


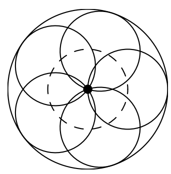
3.6. Obráceně platí

Věta. Je-li křivka $f(t)$ řešením soustavy (2), pak je to obálka soustavy (C_t).

Důkaz. Křivka $f(t)$ splňuje (3), takže $f(t) \in C_t$. Derivováním dostáváme (5). Dále platí (6) a odečtením (6) od (5) dostáváme (4). Tedy $f(t)$ se dotýká křivky C_t. □

3.7. Máme-li dvojici funkcí $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, která je řešením rovnic (2), pak k tomu, aby šlo o obálku soustavy (C_t), je ještě nutné splnění podmínky, že $f(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ je křivka. Zejména musí platit $\frac{df}{dt} \neq o$. Na obrázku máme jednak soustavu kružnic se středy na kružnici o poloměru r a konstantním poloměrem $\varrho < r$, kde vnější a vnitřní obálka jsou kružnice, jednak případ $\varrho = r$, kdy vnitřní obálka “degeneruje” v bod.





3.8. Normály libovolné rovinné křivky C tvoří jednoparametrickou soustavu křivek.

Definice. Charakteristickou množinu soustavy normál křivky C nazýváme **evoluta křivky** C.

Věta. Evoluta křivky C bez inflexních bodů splývá s množinou středů jejích oskulačních kružnic.

Důkaz. Označme $z = (x, y)$ libovolný bod v rovině. Křivku C parametrizujme obloukem a uvažujme její Frenetův repér $e_1(s)$, $e_2(s)$ v bodě $f(s)$. Rovnice normály v bodě $f(s)$ tedy je

$$F(x, y, s) = \big(e_1(s), z - f(s)\big) = 0\,. \tag{7}$$

Užitím Frenetových vzorců dostáváme podmínku

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \big(\varkappa(s)e_2(s), z - f(s)\big) - \big(e_1(s), e_1(s)\big) = 0\,. \tag{8}$$

Charakteristická množina je řešením rovnic (7) a (8), které budeme hledat geometrickým postupem. Z (7) geometricky plyne

$$z = f(s) + c(s)e_2(s)\,.$$

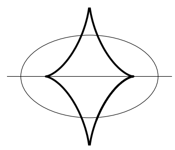
Dosazením do (8) dostáváme $\varkappa(s)c(s) - 1 = 0$, tedy $c(s) = \frac{1}{\varkappa(s)}$. To je střed oskulační kružnice. □

3.9. V předchozím výpočtu jsme nalezli parametrické vyjádření evoluty

$$z(s) = f(s) + \frac{1}{\varkappa(s)}e_2(s)\,.$$

Tedy $\dfrac{dz}{ds} = e_1(s) - \dfrac{\varkappa'(s)}{\varkappa(s)^2}e_2(s) - e_1(s)$. Pokud $\varkappa'(s) \neq 0$, tento vektor je nenulový. To znamená, že v okolí bodu, který není vrcholem, je evoluta křivkou.

Na obrázku máme nakreslenu evolutu elipsy. Její body vratu odpovídají vrcholům elipsy.



4 Prostorové křivky a plochy

Křivku v prostoru lze vedle parametrického vyjádření zadat i jako průsečnici dvou ploch. Kromě toho, ke studiu prostorových křivek budeme užívat také jejich styk s některými pomocnými plochami. Podáme proto nyní obecnou definici plochy v E_3.

4.1. K tomu potřebujeme pojem vektorové funkce dvou proměnných. Pro jednoduchost zápisu budeme od počátku uvažovat trojrozměrný euklidovský vektorový prostor V.

Souřadnice bodu $u \in \mathbb{R}^2$ budeme značit (u_1, u_2). Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Zobrazení $w\colon D \to V$ nazýváme **vektorová funkce dvou proměnných**. Je-li e_1, e_2, e_3 nějaká báze ve V, máme $w(u) = w(u_1, u_2) = w_1(u_1, u_2)e_1 + w_2(u_1, u_2)e_2 + w_3(u_1, u_2)e_3$. Číselné funkce w_1, w_2, w_3 nazýváme **složky vektorové funkce** w, píšeme

(1) $$w(u_1, u_2) = \big(w_1(u_1, u_2), w_2(u_1, u_2), w_3(u_1, u_2)\big)\,.$$

Limita a spojitost vektorové funkce w se definují podobně jako v 1.3. Řekneme, že w má v bodě $u_0 = (u_1^0, u_2^0)$ limitu $v \in V$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že z $|u_1 - u_1^0| < \delta$, $|u_2 - u_2^0| < \delta$, $(u_1, u_2) \neq (u_1^0, u_2^0)$ plyne $\|w(u_1, u_2) - v\| < \varepsilon$. Píšeme $\lim\limits_{u \to u_0} w(u) = v$. Spojitost w v bodě u_0 znamená $\lim\limits_{u \to u_0} w(u) = w(u_0)$.

4.2. Parciální derivace vektorové funkce w definujeme předpisem

$$\frac{\partial w(u_0)}{\partial u_1} = \lim_{u_1 \to u_1^0} \frac{w(u_1, u_2^0) - w(u_1^0, u_2^0)}{u_1 - u_1^0}$$
$$\frac{\partial w(u_0)}{\partial u_2} = \lim_{u_2 \to u_2^0} \frac{w(u_1^0, u_2) - w(u_1^0, u_2^0)}{u_2 - u_2^0}$$

Parciální derivace vyššího řádu $\frac{\partial^k w}{\partial u_1^i \partial u_2^j}$, $i + j = k$, se definují obvyklou iterací.

Stejně jako v 1.5 platí, že vektorová funkce je spojitá, právě když jsou spojité všechny její složky. Analogická tvrzení platí i pro limitu a parciální derivace. Zejména při vyjádření (1) máme

$$\partial_1 w\colon = \frac{\partial w}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_1}, \frac{\partial w_2}{\partial u_1}, \frac{\partial w_3}{\partial u_1}\right), \quad \partial_2 w\colon = \frac{\partial w}{\partial u_2} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_2}, \frac{\partial w_2}{\partial u_2}, \frac{\partial w_3}{\partial u_2}\right)$$

a podobně pro parciální derivace vyššího řádu.

Říkáme, že funkce $w\colon D \to V$ je **třídy** C^r, má-li v D spojité parciální derivace až do řádu r včetně.

4.3. Vezměme jako V zaměření prostoru E_3. Zvolme pomocný počátek $P \in E_3$. Pak zobrazení $f\colon D \to E_3$ určuje **průvodič**, kterým je vektorová funkce $\overrightarrow{Pf}\colon D \to V$, $\overrightarrow{Pf}(u) = \overrightarrow{Pf(u)}$. Definujeme

$$\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial(\overrightarrow{Pf})}{\partial u_1}\,, \quad \partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{\partial(\overrightarrow{Pf})}{\partial u_2}\,. \tag{2}$$

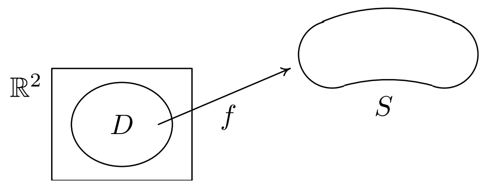
Podobně jako v 1.7 to nezávisí na volbě počátku P.

(2) jsou vektorové funkce dvou proměnných. Iterací zavádíme

$$\partial_{11} f = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_1}\,, \quad \partial_{12} f = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}\,, \quad \partial_{22} f = \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_2} \tag{3}$$

a podobně ve vyšším řádu.

4.4 Definice. Množinu $S \subset E_3$ nazýváme **jednoduchá plocha třídy** C^r, jestliže existuje otevřená množina $D \subset \mathbb{R}^2$ a injektivní zobrazení $f\colon D \to E_3$ třídy C^r takové, že vektory $\partial_1 f$ a $\partial_2 f$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě množiny D, a platí $S = f(D)$.



Říkáme, že f je **parametrické vyjádření plochy** S a D je **oblast parametrů**.

Podmínku, že vektory $\partial_1 f$ a $\partial_2 f$ jsou lineárně nezávislé, zapisujeme ve tvaru $\partial_1 f \times \partial_2 f \neq o$, kde $\times$ značí vektorový součin. Význam této podmínky si vyjasníme na parametrickém vyjádření roviny v E_3. Vezměme $D = \mathbb{R}^2$ a pišme

$$f = P + u_1 a \, + u_2 b\,, \quad P \in E_3\,, \quad a, b \in V,\ u_1, u_2 \in \mathbb{R}\,.$$

V souřadnicích (x, y, z) na E_3 máme

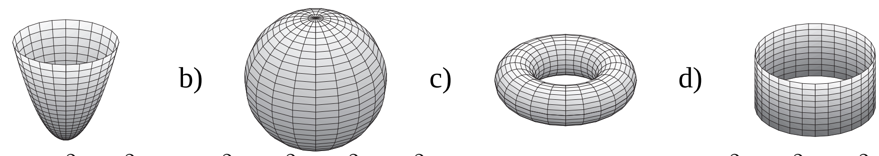
$$x = p_1 + u_1 a_1 + u_2 b_1\,, \quad y = p_2 + u_1 a_2 + u_2 b_2\,, \quad z = p_3 + u_1 a_3 + u_2 b_3\,.$$

Pak $\partial_1 f = a$ a $\partial_2 f = b$. Z analytické geometrie víme, že f určuje rovinu, právě když vektory a, b jsou lineárně nezávislé. Při lineární závislosti dostáváme jen přímku, v případě $a = b = o$ dokonce jen bod P.

4.5. Máme-li funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ třídy C^r na $D \subset \mathbb{R}^2$, pak její graf $\bar{f}(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big)$, $\bar{f}\colon D \to \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha třídy C^r. Máme totiž $\partial_1 \bar{f} = \big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\big)$, $\partial_2 \bar{f} = \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\big)$ a tyto dva vektory jsou všude lineárně nezávislé. V tomto případě hovoříme o **explicitním zadání plochy**.

4.6 Definice. Podmnožinu $S \subset E_3$ nazýváme **plocha třídy** C^r, jestliže pro každé $p \in S$ existuje takové jeho okolí U, že $U \cap S$ je jednoduchá plocha třídy C^r.

Příklady.



a) $z = x^2 + y^2$ b) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ c) anuloid d) $x^2 + y^2 = r^2$

a) Rotační paraboloid je globálně jednoduchá plocha. b) Sféra je plocha, ale ne jednoduchá. c) Anuloid je plocha, která vzniká rotací kružnice podle osy, která leží ve stejné rovině a má s ní prázdný průnik. Fyzickým modelem je pneumatika. d) Také rotační válcová plocha je zajímavým globálním příkladem plochy.

4.7. Úmluva. Dále budeme předpokládat, že třída r uvažované plochy nebo funkce je dostatečně vysoká pro námi prováděné úvahy a zpravidla se o ní nebudeme zmiňovat.

4.8. Křivku na ploše zadáváme zpravidla v oblasti D parametrů $u = u(t)$, tj. $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $t \in I$. Na ploše $S = f(D)$ pak máme křivku $f\big(u(t)\big) = f\big(u_1(t), u_2(t)\big)$.

Věta. Tečny všech křivek na ploše S v jejím bodě p vyplní rovinu, kterou nazýváme **tečná rovina plochy** S v bodě p.

Důkaz. Nechť $p = f(u_0)$. Vektor rychlosti pohybu $f\big(u(t)\big)$, $u(t_0) = u_0$ stanovíme podle pravidla pro derivování složené funkce

$$\frac{df(u_1(t_0), u_2(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(u_0)}{\partial u_1}\frac{du_1(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(u_0)}{\partial u_2}\frac{du_2(t_0)}{dt}\,. \tag{4}$$

Je to tedy lineární kombinace vektorů $\partial_1 f(u_0)$ a $\partial_2 f(u_0)$. Obráceně, pro libovolný vektor $a = a_1\partial_1 f(u_0) + a_2\partial_2 f(u_0)$ stačí vzít pohyb $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big)$ takový, že $\frac{du_1(t_0)}{dt} = a_1$, $\frac{du_2(t_0)}{dt} = a_2$. Uvažované tečny tedy vyplní celou rovinu určenou bodem p a vektory $\partial_1 f(u_0)$ a $\partial_2 f(u_0)$. □

Tečnou rovinu plochy S v bodě p označíme $\tau_p S$, její zaměření $T_p S$ nazýváme **tečný vektorový prostor** k S v bodě p.

Předchozí věta ukazuje geometrický smysl podmínky lineární nezávislosti vektorů $\partial_1 f$ a $\partial_2 f$, která zajišťuje existenci tečné roviny.

4.9. V následujících úvahách zafixujme souřadnou soustavu (x, y, z), takže $E_3 \approx \mathbb{R}^3$.

Věta. Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a $F\colon U \to \mathbb{R}$ je funkce třídy C^r taková, že množina S o rovnici $F(x, y, z) = 0$ je neprázdná a platí

$$\partial F(x_0, y_0, z_0) := \left(\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\right) \neq o$$

pro každé $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Pak S je plocha třídy C^r.

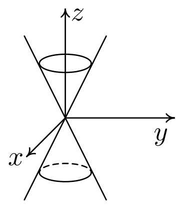
Důkaz. Nechť $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a třebas $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$. Podle věty o implicitní funkci můžeme z rovnice $F(x, y, z) = 0$ lokálně spočítat $z = f(x, y)$, kde f je rovněž funkce třídy C^r. To je lokálně explicitní vyjádření plochy S. Je-li $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} \neq 0$ resp. $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} \neq 0$, můžeme lokálně spočítat $y = g(x, z)$ resp. $x = h(y, z)$. $\square$

Bod (x_0, y_0, z_0), v němž $\partial F(x_0, y_0, z_0) = o$ nazýváme **singulární bod množiny** $F(x, y, z) = 0$.

4.10. Příklady. (i) V případě $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a$ máme podobnou situaci jako v 2.3. Pro $a < 0$ je množina $F(x, y, z) = 0$ prázdná. Pro $a = 0$ tuto rovnici splňuje jen počátek, který je singulárním bodem. Pro $a > 0$ máme sféru o středu v počátku a poloměru $\sqrt{a}$. Vektor $\partial F = (2x, 2y, 2z)$ je ve všech jejích bodech nenulový.

(ii) Uvažujme rotační kuželovou plochu

$$F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 = 0.$$



Bod $(0, 0, 0)$ je jeho jediným singulárním bodem. Všimněme si, že v něm neexistuje tečná rovina kuželové plochy.

4.11 Věta. Rovnice tečné roviny plochy S o rovnici $F(x, y, z) = 0$ v jejím bodě (x_0, y_0, z_0) je

(5)
$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0\,.$$

Důkaz. Nechť křivka $\big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$ leží na S a pro $t = t_0$ prochází bodem (x_0, y_0, z_0). Tedy

$$F\big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big) = 0\,.$$

Derivováním této složené funkce a dosazením $t = t_0$ dostáváme

(6)
$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\frac{df_1(t_0)}{dt} + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\frac{df_2(t_0)}{dt} + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\frac{df_3(t_0)}{dt} = 0\,.$$

Tedy normálový vektor roviny (5) je kolmý k tečnému vektoru libovolné křivky na S, takže (5) je tečná rovina. $\square$

4.12 Definice. Uvažujme plochu S. Přímku N_pS jdoucí bodem $p \in S$ a kolmou k tečné rovině τ_pS nazýváme **normála plochy** S v bodě p.

Tedy vektor $\partial F(x_0, y_0, z_0)$ je směrový vektor normály plochy $F(x, y, z) = 0$ v jejím bodě (x_0, y_0, z_0). Podmínka $\partial F \neq o$ geometricky zaručuje existenci tečné roviny stejně jako podmínka $\partial_1 f \times \partial_2 f \neq o$ při parametrickém vyjádření plochy.

4.13. Budeme se zabývat otázkou, kdy průnik dvou ploch

$$F(x, y, z) = 0\,, \qquad G(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

je křivka.

Věta. Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a F, $G\colon U \to \mathbb{R}$ jsou funkce třídy C^r takové, že množina C o rovnicích (7) je neprázdná a vektory $\partial F(x_0, y_0, z_0)$ a $\partial G(x_0, y_0, z_0)$ jsou lineárně nezávislé pro každé $(x_0, y_0, z_0) \in C$. Pak C je křivka třídy C^r.

Důkaz. Protože vektory ∂F a ∂G jsou lineárně nezávislé, v matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{8}$$

je aspoň jeden subdeterminant 2. řádu nenulový. Je-li to subdeterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}\,,$$

můžeme podle zobecněné věty o implicitní funkci z (7) lokálně spočítat $y = f(x)$ a $z = g(x)$, přičemž f a g jsou opět funkce třídy C^r. (Tuto větu lze nalézt v bodě 2.6 skripta “Úvod do globální analýzy”, které je v seznamu literatury uvedeno jako [5].) Tedy $\bigl(t, f(t), g(t)\bigr)$ je lokálně parametrické vyjádření křivky určené rovnicemi $F = 0, G = 0$. Je-li jiný ze subdeterminantů 2. řádu nenulový, můžeme lokálně vyjádřit x a z jako funkce y nebo x a y jako funkce z. $\square$

4.14. Zmíněné užití zobecněné věty o implicitní funkci budeme ilustrovat na nejjednodušším příkladu dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= a_1x + a_2y + a_3z = 0\,, \\ G(x, y, z) &= b_1x + b_2y + b_3z \ = 0\,. \end{aligned}$$

V tomto případě

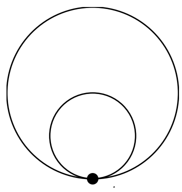
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

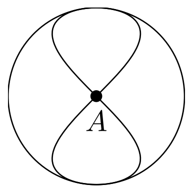
a nenulovost tohoto determinantu zaručuje možnost užití Cramerova pravidla k výpočtu y a z.

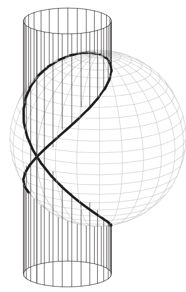
4.15. Geometricky věta 13 říká, že průnik dvou ploch S_1 a S_2 je lokálně křivkou v okolí takového bodu $p \in S_1 \cap S_2$, v němž tečné roviny $\tau_p S_1$ a $\tau_p S_2$ jsou různé.

Jednoduchý příklad dvou dotýkajících se sfér, jejichž průnik je jediný bod, ukazuje, že tato podmínka je nezbytná.

Zajímavým příkladem je tzv. Vivianiho křivka, která je průnikem sféry a válcové plochy o polovičním poloměru, který prochází středem sféry, viz pohled shora a). Tečné roviny obou ploch jsou různé s výjimkou bodu A. Zde také průnik obou ploch není lokálně křivka v našem pojetí, viz pohled zepředu b) a celkový pohled c).

a) 

b) 

c) 

4.16. Definice styku křivky s plochou se redukuje na styk dvou křivek.

Definice. Řekneme, že křivka C a plocha S mají ve společném bodě p **styk** k**-tého řádu**, jestliže na S existuje taková křivka $\bar{C}$, že C a $\bar{C}$ mají v bodě p styk k-tého řádu.

Snadno se nahlédne, že C a S mají styk 1. řádu, právě když tečna křivky leží v tečné rovině plochy.

4.17. Následující jednoduché početní kritérium pro vyšetřování styku křivky s plochou je podobné větě 2.5. Nechť S je dána rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a C je dána parametricky $\big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$.

Věta. Nechť $f(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ je společný bod křivky C a plochy S. Sestrojme funkci $\Phi(t) = F\big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$. Pak C a S mají v bodě $f(t_0)$ styk řádu k, právě když platí

$$\frac{d^i \Phi(t_0)}{dt^i} = 0\,, \qquad i = 1, \dots, k\,. \tag{9}$$

Důkaz. Nechť $\bar{f}(t)$ je parametrizace křivky $\bar{C}$ na ploše S taková, že derivace $f(t)$ a $\bar{f}(t)$ pro $t = t_0$ splývají až do řádu k. Protože $\bar{C}$ leží na S, platí

$$F\big(\bar{f}_1(t), \bar{f}_2(t), \bar{f}_3(t)\big) = 0\,, \tag{10}$$

takže všechny derivace levé strany podle t jsou nulové. Funkce $\Phi(t)$ a (10) mají stejnou vnější složku $F(x, y, z)$ a derivace vnitřních složek až do řádu k splývají podle podmínky styku. Platí tedy (9).

Obráceně, nechť třebas $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$. Podle věty o implicitní funkci, rovnice

$$F\big(f_1(t), f_2(t), z\big) = 0$$

určuje lokálně funkci $z = g(t)$ a křivka $\bar{C} \equiv \big(f_1(t), f_2(t), g(t)\big)$ leží na S. Stačí dokázat

$$\frac{d^i f_3(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i g(t_0)}{dt^i}\,, \qquad i = 1, \dots, k\,. \tag{11}$$

Označme $G(t, z) = F\big(f_1(t), f_2(t), z\big)$. To je funkce definovaná na jistém okolí V bodu (t_0, z_0). Na $V \times \mathbb{R}$ uvažujme funkci 3 proměnných

$$H(t, z, w) = G(t, z) - w\,. \tag{12}$$

Podle věty o implicitní funkci lze z rovnice $H(t, z, w) = 0$ lokálně spočítat $z = K(t, w)$. Protože $G\big(t, g(t)\big) = 0$ a $G\big(t, f_3(t)\big) = \Phi(t)$, platí

$$g(t) = K(t, 0) \quad \text{a} \quad f_3(t) = K\big(t, \Phi(t)\big)\,.$$

Stejně jako v důkazu věty 2.5 odtud plyne (11). $\square$

5 Frenetův repér prostorové křivky

Uvažujeme křivku $C \subset E_3$.

5.1 Věta. V neinflexním bodě $p \in C$ existuje jediná rovina ω, která má s C styk 2. řádu. Nazýváme ji **oskulační rovina** křivky C v bodě p.

Důkaz. Vezměme parametrické vyjádření $f(t) = \big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$ křivky C a libovolnou rovinu $ax + by + cz + d = 0$. Podle 4.17 sestrojíme funkci

$$\Phi(t) = af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) + d\,.$$

Pro styk 2. řádu máme podmínky $\Phi(t_0) = 0$ a

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(t_0)}{dt} &= a\frac{df_1(t_0)}{dt} + b\frac{df_2(t_0)}{dt} + c\frac{df_3(t_0)}{dt} = 0\,,\\ \frac{d^2\Phi(t_0)}{dt^2} &= a\frac{d^2f_1(t_0)}{dt^2} + b\frac{d^2f_2(t_0)}{dt^2} + c\frac{d^2f_3(t_0)}{dt^2} = 0\,.\end{aligned}$$

Tyto podmínky znamenají, že normálový vektor (a, b, c) hledané roviny je kolmý k vektorům $\frac{df(t_0)}{dt}$ a $\frac{d^2f(t_0)}{dt^2}$. Protože tyto dva vektory jsou lineárně nezávislé, je uvažovaná rovina určena jednoznačně. □

Podobně jako u oskulační kružnice rovinné křivky, podmínka styku 2. řádu oskulační roviny s prostorovou křivkou znamená, že oskulační rovina se ze všech rovin nejvíce přibližuje uvažované křivce.

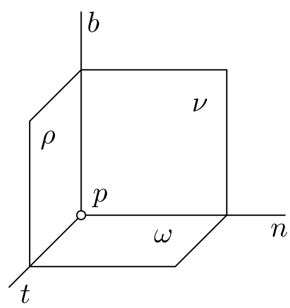
5.2 Důsledek. V neinflexním bodě $f(t_0)$ je zaměření oskulační roviny určeno vektory $\frac{df(t_0)}{dt}$ a $\frac{d^2f(t_0)}{dt^2}$.

Její rovnici lze tedy psát ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x - f_1(t_0), & y - f_2(t_0), & z - f_3(t_0) \\ f_1'(t_0), & f_2'(t_0), & f_3'(t_0) \\ f_1''(t_0), & f_2''(t_0), & f_3''(t_0) \end{vmatrix} = 0\,.$$

5.3. Nyní můžeme v neinflexním bodě $p \in C$ definovat tyto objekty:

(i) Rovinu ν bodem p kolmou k tečně nazýváme **normálová rovina**.
(ii) Průsečnici $n = \nu \cap \omega$ normálové roviny s oskulační rovinou nazýváme **hlavní normála**.
(iii) Přímku b bodem p kolmou k oskulační rovině nazýváme **binormála**.
(iv) Rovinu ϱ určenou tečnou a binormálou nazýváme **rektifikační rovina**.



5.4 Definice. Neinflexní bod $p \in C$ nazýváme **planární bod**, jestliže oskulační rovina v něm má styk 3. řádu s křivkou C.

5.5 Věta. Neinflexní bod $f(t_0)$ je planární právě když vektor $\frac{d^3 f(t_0)}{dt^3}$ je lineárně závislý na vektorech $\frac{df(t_0)}{dt}$ a $\frac{d^2 f(t_0)}{dt^2}$.

Důkaz. Uvažujme funkci $\Phi(t)$ z důkazu věty 1. Pro styk 3. řádu vedle dvou tam uvedených podmínek dostáváme ještě

(1) $$\frac{d^3\Phi(t_0)}{dt^3} = a\frac{d^3 f_1(t_0)}{dt^3} + b\frac{d^3 f_2(t_0)}{dt^3} + c\frac{d^3 f_3(t_0)}{dt^3} = 0\,.$$

Tedy vektor $\frac{d^3 f(t_0)}{dt^3}$ leží v zaměření oskulační roviny a proto je lineárně závislý na $\frac{df(t_0)}{dt}$ a $\frac{d^2 f(t_0)}{dt^2}$. Obráceně, platí-li uvažovaná lineární závislost, pak rovnice (1) je důsledkem rovnic z důkazu věty 1, takže C má s oskulační rovinou styk 3. řádu. □

5.6. Dále uvažujeme jako parametr oblouk s. Píšeme $e_1(s) = \frac{df(s)}{ds}$, což je tedy jednotkový vektor. V neinflexním bodě $f(s)$ označme $e_2(s)$ jednotkový vektor souhlasně rovnoběžný s $\frac{de_1(s)}{ds}$. Tedy

(2) $$\frac{de_1(s)}{ds} = \varkappa(s)e_2(s)\,, \quad \varkappa(s) > 0\,.$$

Vektor $e_2(s)$ leží v oskulační rovině, neboť je kolineární s $\frac{d^2 f(s)}{ds^2}$. Podle 1.26 je vektor $e_2(s)$ kolmý na vektor $e_1(s)$. Tedy $e_2(s)$ je směrový vektor hlavní normály v bodě $f(s)$.

5.7. Předpokládejme dále, že prostor E_3 je orientovaný. Jako $e_3(s)$ označíme jednotkový vektor kolmý k $e_1(s)$ a $e_2(s)$ takový, že báze $\big(e_1(s), e_2(s), e_3(s)\big)$ je kladná. Tedy $e_3(s)$ je směrový vektor binormály.

Definice. Repér $\big(f(s), e_1(s), e_2(s), e_3(s)\big)$ nazýváme **Frenetův repér křivky** C v neinflexním bodě $f(s)$.

V dalším zpravidla nebudeme argument s explicitně vypisovat.

5.8. Protože e_2 je jednotkový vektor, derivováním vztahu $(e_2, e_2) = 1$ dostáváme $\big(e_2, \frac{de_2}{ds}\big) = 0$. Tedy
$$\frac{de_2}{ds} = ce_1 + \tau e_3\,.$$

Derivováním vztahu $(e_1, e_2) = 0$ dostáváme $\left(\frac{de_1}{ds}, e_2\right) + \left(e_1, \frac{de_2}{ds}\right) = 0$, takže $\varkappa + c = 0$. Platí tedy

$$\frac{de_2(s)}{ds} = -\varkappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s)\,. \tag{3}$$

Derivováním vztahu $(e_3, e_3) = 1$ dostáváme, že vektor $\frac{de_3}{ds}$ je kolmý na e_3. Derivování vztahu $(e_1, e_3) = 0$ dává

$$\left(\frac{de_1}{ds}, e_3\right) + \left(e_1, \frac{de_3}{ds}\right) = 0\,.$$

Ale $\frac{de_1}{ds} = \varkappa e_2$, takže první skalární součin je nulový. Tedy $\frac{de_3}{ds} = ke_2$. Derivováním vztahu $(e_2, e_3) = 0$ dostáváme $\left(\frac{de_2}{ds}, e_3\right) + \left(e_2, \frac{de_3}{ds}\right) = 0$. Odtud plyne $\tau + k = 0$, takže

$$\frac{de_3(s)}{ds} = -\tau(s)e_2(s)\,. \tag{4}$$

Dokázali jsme tedy

Větu (Frenetovy rovnice). Pro křivku $f(s)$ bez inflexních bodů platí

$$\begin{aligned} \tfrac{df}{ds} &= e_1, \\ \tfrac{de_1}{ds} &= \qquad\quad \varkappa e_2, \\ \tfrac{de_2}{ds} &= -\varkappa e_1 \qquad\qquad +\tau e_3, \\ \tfrac{de_3}{ds} &= \qquad\quad -\tau e_2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

5.9 Definice. Číslo $\varkappa(s_0) > 0$ nazýváme **křivost** a číslo $\tau(s_0)$ nazýváme **torze** prostorové křivky $f(s)$ v neinflexním bodě $f(s_0)$.

5.10. Frenetovy rovnice křivky $f(s)$ dávají

$$\frac{df}{ds} = e_1\,, \quad \frac{d^2 f}{ds^2} = \varkappa e_2\,, \quad \frac{d^3 f}{ds^3} = \frac{d\varkappa}{ds}e_2 + \varkappa(-\varkappa e_1 + \tau e_3)\,. \tag{6}$$

Předpokládejme, že 0 patří do definičního oboru $f(s)$. Tedy pro $s = 0$ máme vektorový Taylorův rozvoj

$$\begin{aligned} f(s) = f(0) + s\, e_1(0) + \frac{\varkappa(0)s^2}{2}e_2(0) + \frac{s^3}{6}\Big[\frac{d\varkappa(0)}{ds}e_2(0) - \varkappa^2(0)e_1(0) \\ + \varkappa(0)\,\tau(0)\,e_3(0)\Big] + \nu(s)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

kde $\nu(s)$ je vektorová funkce, jejíž hodnota a první 3 derivace v počátku jsou nulové. Jinak řečeno, platí

Věta. Nechť x, y, z jsou souřadnice vzhledem k Frenetovu repéru $\big(f(0), e_1(0), e_2(0), e_3(0)\big)$. Pak křivka $f(s)$ je v okolí bodu $f(0)$ dána výrazy

$$
\begin{aligned}
x &= s - \frac{\varkappa^2(0)}{6} s^3 + \xi(s)\,, \\
y &= \frac{\varkappa(0)}{2} s^2 + \frac{1}{6}\frac{d\varkappa(0)}{ds} s^3 + \eta(s)\,, \qquad (8)\\
z &= \frac{\varkappa(0)\tau(0)}{6} s^3 + \zeta(s)\,,
\end{aligned}
$$

kde číselné funkce $\xi(s)$, $\eta(s)$ a $\zeta(s)$ mají v počátku funkční hodnotu a první 3 derivace nulové.

Výrazy (8) představují tzv. **lokální rozvoje křivky** $f(s)$ **vzhledem k jejímu Frenetovu repéru**. Probereme jejich využití ke studiu pravoúhlých průmětů křivky do tří základních rovin jejího Frenetova repéru.

5.11. Geometrický význam křivosti rovinné křivky je dán definicí 2.10. Pro křivku $C \equiv f(s)$ v E_3 platí

Věta. V neinflexním bodě $p \in C$ je křivost křivky C rovna křivosti jejího pravoúhlého průmětu C_p do oskulační roviny.

Důkaz. Můžeme předpokládat $p = f(0)$. Podle (8) má C_p parametrické vyjádření

$$x = s + \alpha(s)\,, \quad y = \frac{\varkappa(0)}{2} s^2 + \beta(s)\,, \qquad (9)$$

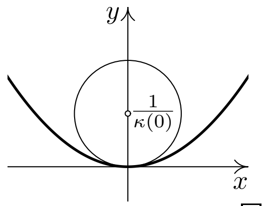
kde $\alpha(s)$ a $\beta(s)$ jsou funkce, které mají v počátku funkční hodnotu a první 2 derivace nulové. Kružnice

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{\varkappa(0)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\varkappa(0)}\right)^2, \quad \text{tj.} \quad x^2 + y^2 - \frac{2}{\varkappa(0)} y = 0 \qquad (10)$$

má s C_p styk 2. řádu v počátku. Opravdu, dosazení (9) do (10) dává

$$s^2 - s^2 + \gamma(s) = 0\,,$$

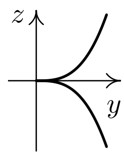
kde $\gamma(s)$ je funkce, která má v počátku funkční hodnotu a první 2 derivace nulové.



□

5.12. Podobně, parametrické vyjádření průmětu křivky C do normálové roviny je

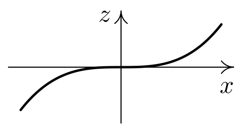
$$y = \frac{\varkappa(0)}{2} s^2 + \frac{1}{6}\frac{d\varkappa(0)}{ds} s^3 + \eta(s)\,, \quad z = \frac{\varkappa(0)\tau(0)}{6} s^3 + \zeta(s)\,.$$



Označíme-li tuto vektorovou funkci $g(s)$, platí $\frac{dg(0)}{ds} = o$.
Počátek je tedy v jistém smyslu bod vratu typu semikubické paraboly.

5.13. Pro průmět C do její rektifikační roviny platí

$$x = s - \frac{\varkappa^2(0)}{6}s^3 + \xi(s)\,, \quad z = \frac{\varkappa(0)\tau(0)}{6}s^3 + \zeta(s)\,.$$



Označíme-li $h(s)$ tuto vektorovou funkci, platí $\frac{dh(0)}{ds} = (1,0)$, $\frac{d^2h(0)}{ds^2} = (0,0)$. Počátek je tedy inflexní bod.

Srovnání všech tří průmětů dává názornou představu o tom, jakým způsobem křivka C prochází svým Frenetovým repérem.

5.14. Z Frenetových rovnic dále vyplývá, že planární bod prostorové křivky C lze jednoduše charakterizovat pomocí torze.

Věta. Bod $f(s_0)$ je planární, právě když $\tau(s_0) = 0$.

Důkaz. Podle (6) je vektor $\frac{d^3f(s_0)}{ds^3}$ lineární kombinací vektorů $e_1(s_0)$ a $e_2(s_0)$, právě když $\tau(s_0) = 0$. □

5.15. Křivku $C \subset E_3$ nazýváme **rovinná**, jestliže leží v nějaké rovině $\varrho \subset E_3$. Protože C v ϱ leží, je každý její bod planární, takže torze rovinné křivky je nulová. Z Frenetových rovnic vyplývá i obrácené tvrzení.

Věta. Jednoduchá křivka, jejíž každý bod je planární, je rovinná.

Důkaz. Podmínka $\tau = 0$ dává $\frac{de_3}{ds} = o$, takže e_3 je konstantní vektor. Uvažujme rovinu, která jde bodem $f(s_0)$ a je kolmá na vektor $e_3(s_0)$. Její rovnice je $\big(e_3(s_0), w - f(s_0)\big) = 0$, kde $w = (x,y,z)$ je libovolný bod prostoru E_3. Uvažujme funkci $\varphi(s) = \big(e_3(s_0), f(s) - f(s_0)\big)$. Platí $\frac{d\varphi}{ds} = \big(e_3(s_0), e_1(s)\big) = 0$, protože $e_3(s_0) = e_3(s)$. Tedy φ je konstantní funkce. Dále $\varphi(s_0) = 0$, takže φ je funkce identicky nulová. Celá křivka tedy leží v uvažované rovině. □

5.16. Základní geometrický výzman torze plyne přímo z (5).

Věta. Platí $|\tau| = \big\|\frac{de_3}{ds}\big\|$. □

Lze tedy říci, že torze je rychlost otáčení vektoru binormály. Nulovému otáčení logicky odpovídají rovinné křivky. Obecně řečeno, čím větší je absolutní hodnota torze, tím více se uvažovaná křivka odchyluje od rovinné křivky.

5.17. Nalezneme vzorec pro výpočet křivosti $\varkappa$ při libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky C. Z (6) plyne $\varkappa = \big\|\frac{df}{ds} \times \frac{d^2f}{ds^2}\big\|$. Pišme $t = t(s)$. Pravidlo pro derivování složené funkce dává

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{ds}\,, \quad \frac{d^2f}{ds^2} = \frac{d^2f}{dt^2}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 + \frac{df}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\,. \tag{11}$$

Dále víme $\left|\frac{dt}{ds}\right| = 1/\left\|\frac{df}{dt}\right\|$. Protože vektorový součin dvou kolineárních vektorů je nulový, platí

$$\frac{df}{ds} \times \frac{d^2f}{ds^2} = \left(\frac{df}{dt}\frac{dt}{ds}\right) \times \left(\frac{d^2f}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{df}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right) = \left(\frac{df}{dt} \times \frac{d^2f}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 .$$

Dokázali jsme tedy

Větu. Platí

$$\varkappa = \frac{\left\|\frac{df}{dt} \times \frac{d^2f}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{df}{dt}\right\|^3} \tag{12}$$

5.18. Odvodíme rovněž vzorec pro výpočet torze τ při libovolné parametrizaci $f(t)$ křivky C. Připomínáme, že tři vektory $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ orientovaného trojrozměrného euklidovského vektorového prostoru určují vnější součin

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} .$$

Věta. Platí

$$\tau = \frac{\left[\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \frac{d^3f}{dt^3}\right]}{\left\|\frac{df}{dt} \times \frac{d^2f}{dt^2}\right\|^2} . \tag{13}$$

Důkaz. Uvědomněme si nejprve, že pro vnější součin platí

$$[u, v + au, w + bu + cv] = [u, v, w] .$$

Z (6) dostáváme

$$\left[\frac{df}{ds}, \frac{d^2f}{ds^2}, \frac{d^3f}{ds^3}\right] = \varkappa^2\tau[e_1, e_2, e_3] = \varkappa^2\tau ,$$

neboť e_1, e_2, e_3 je kladná orientovaná báze. Při důkazu věty 17 jsme odvodili (11). To nyní přepíšeme ve tvaru

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{ds} , \quad \frac{d^2f}{ds^2} = \frac{d^2f}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + g\frac{df}{dt} , \tag{14}$$

kde sice víme, že $g = \frac{d^2t}{ds^2}$, ale to nás nezajímá. Dalším derivováním dostáváme

$$\frac{d^3f}{ds^3} = \frac{d^3f}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + h\frac{d^2f}{dt^2} + k\frac{df}{dt} , \tag{15}$$

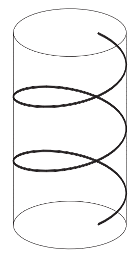
kde koeficienty h a k nás rovněž nezajímají. Máme tedy

$$\begin{aligned}\varkappa^2\tau = \left[\frac{df}{ds}, \frac{d^2f}{ds^2}, \frac{d^3f}{ds^3}\right] &= \left[\frac{dt}{ds}\frac{df}{dt}, \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2f}{dt^2}, \left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3f}{dt^3}\right] = \\ &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^6\left[\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \frac{d^3f}{dt^3}\right].\end{aligned}$$

Užitím vzorce (12) pro $\varkappa$ a vztahu $\left|\frac{dt}{ds}\right| = 1/\left\|\frac{df}{dt}\right\|$ dostáváme (13). □

5.19 Příklad. Nalezneme křivost a torzi šroubovice. Tato křivka vzniká jako trajektorie rovnoměrného šroubového pohybu. Její parametrické vyjádření tedy je

$$f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)\,, \qquad t \in (-\infty, \infty),\ a > 0\,.$$



Číslo a je poloměr rotačního válce, na němž uvažovaná šroubovice leží, číslo b se nazývá **zdvih** (též výška závitu) **šroubovice**. Postupným derivováním dostáváme

$$\begin{aligned}f' &= (-a\sin t, a\cos t, b)\,,\\ f'' &= (-a\cos t, -a\sin t, 0)\,,\\ f''' &= (a\sin t, -a\cos t, 0)\,.\end{aligned}$$

Tedy $f' \times f'' = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$, $\left\|f' \times f''\right\| = a\sqrt{a^2+b^2}$. Dále $\|f'\| = \sqrt{a^2+b^2}$. Podle (12) máme $\varkappa = \frac{a}{a^2+b^2}$. Ke stanovení torze spočítáme determinant

$$[f', f'', f'''] = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = ba^2\,.$$

Podle (13) máme $\tau = \frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}$.

Šroubovice má tedy konstantní křivost i torzi.

5.20. Připomínáme, že **přímá shodnost v orientovaném prostoru** E_3 je takové shodné zobrazení $\varphi\colon E_3 \to E_3$, které zachovává orientaci. Podobně jako v rovině nazveme dvě křivky C, $\bar{C} \subset E_3$ shodné, jestliže existuje taková přímá shodnost φ, že platí $\varphi(C) = \bar{C}$. Stejně jako v rovině budeme předpokládat, že C a $\bar{C}$ jsou jednoduché a že máme dánu jejich parametrizaci obloukem na společném intervalu I.

Věta. Nechť křivky C a $\bar{C}$ jsou bez inflexních bodů, nechť $f\colon I \to E_3$ a $\bar{f}\colon I \to E_3$ jsou jejich parametrizace obloukem na společném intervalu I a $\varkappa(s)$, $\bar{\varkappa}(s)$ resp. $\tau(s)$, $\bar{\tau}(s)$ jsou jejich křivosti resp. torze. Pak křivky C a $\bar{C}$ jsou shodné, právě když na I platí $\varkappa = \bar{\varkappa}$ a $\tau = \bar{\tau}$.

Důkaz. Na jedné straně, z geometričnosti konstrukce Frenetova repéru přímo plyne, že u dvou shodných křivek jsou křivosti a torze stejnou funkcí oblouku. Obráceně, uvažujme C resp. $\bar{C}$ s Frenetovým repérem $\big(f(s), e_1(s), e_2(s), e_3(s)\big)$ resp. $\big(\bar{f}(s), \bar{e}_1(s), \bar{e}_2(s), \bar{e}_3(s)\big)$. Vedle (5) platí také

$$\frac{d\bar{f}}{ds} = \bar{e}_1\,, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds} = \varkappa\bar{e}_2\,, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds} = -\varkappa\bar{e}_1 + \tau\bar{e}_3\,, \quad \frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\tau\bar{e}_2 \tag{16}$$

s týmž $\varkappa$ a τ. Tedy (5) a (16) je tatáž soustava diferenciálních rovnic pro dvanáct číselných funkcí, které jsou složkami f, e_1, e_2 a e_3. Pro $s_0 \in I$ je $f(s_0)$, $e_1(s_0)$, $e_2(s_0)$, $e_3(s_0)$ stejně jako $\bar{f}(s_0)$, $\bar{e}_1(s_0)$, $\bar{e}_2(s_0)$, $\bar{e}_3(s_0)$ bod a kladný ortonormální repér. Existuje tedy jediná přímá shodnost $\varphi\colon E_3 \to E_3$, která převádí první z těchto čtveřic do druhé z nich. Pak parametrizace $\bar{f}\colon I \to E_3$ křivky $\bar{C}$ spolu s vektorovými funkcemi $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ a $\bar{e}_3$ a parametrizace $\varphi \circ f\colon I \to E_3$ křivky $\varphi(C)$ spolu s vektorovými funkcemi $\varphi \circ e_1$, $\varphi \circ e_2$ a $\varphi \circ e_3$ splňují tutéž soustavu diferenciálních rovnic se stejnými počátečními podmínkami. Podle věty o jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic platí zejména $\bar{f} = \varphi \circ f$. Odtud plyne $\bar{C} = \varphi(C)$. □

5.21. Stejně jako v rovině se dokáže i obrácené tvrzení.

Věta. Nechť $\varkappa, \tau\colon I \to \mathbb{R}$ jsou funkce, $\varkappa > 0$. Pak lokálně existuje taková křivka C parametrizovaná obloukem na I, že $\varkappa$ je její křivost a τ je její torze.

5.22 Příklad. Ukážeme, že šroubovice jsou jediné křivky s konstantní křivostí a torzí. (Případu nulové torze odpovídá kružnice jako šroubovice s nulovým zdvihem.) Opravdu, pro šroubovici jsme v bodě 19 spočítali

$$\varkappa = \frac{a}{a^2 + b^2}\,, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}\,. \tag{17}$$

Nechť je dáno $\varkappa > 0$ a τ. Pak z (17) spočteme nejprve $\frac{\tau}{\varkappa} = \frac{b}{a}$, tedy $a = k\varkappa, b = k\tau$ pro nějaké $k > 0$. Dosazením do vzorce pro $\varkappa$ dostáváme $\varkappa = \frac{k\varkappa}{k^2(\varkappa^2+\tau^2)}$, tedy $k = \frac{1}{\varkappa^2+\tau^2}$. Z vět 20 a 21 vyplývá, že části šroubovice s hodnotami $a = \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}$, $b = \frac{\tau}{\varkappa^2+\tau^2}$ jsou jediné křivky se zadaným konstantním $\varkappa$ a τ.

5.23 Poznámka. Dalším zajímavým, i když prakticky méně významným, geometrickým objektem určeným křivkou $C \equiv f(s)$ je její **oskulační sféra**. Platí, že v neplanárním bodě $f(s_0)$ existuje jediná sféra S, která má s křivkou C styk 3. řádu. Způsob jejího nalezení pouze naznačíme. Ze styku 1. řádu vyplývá, že tečna křivky v bodě $f(s_0)$ je současně tečnou S, takže střed oskulační sféry musí ležet v normálové rovině. Nechť je to bod $f(s_0) + ae_2(s_0) + be_3(s_0)$. Rovnici sféry S zapíšeme ve tvaru skalárního součinu

$$\big(w - f(s_0) - ae_2(s_0) - be_3(s_0), w - f(s_0) - ae_2(s_0) + be_3(s_0)\big) = a^2 + b^2\,,$$

kde $w = (x, y, z)$ je libovolný bod v E_3. K vyšetřování styku C a S užijeme tedy funkci

$$\begin{aligned}\Phi(s) = \big(&f(s) - f(s_0) - ae_2(s_0) - be_3(s_0),\\ &f(s) - f(s_0) - ae_2(s_0) - be_3(s_0)\big) - a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Vztahy $\Phi(s_0) = 0$ a $\frac{d\Phi(s_0)}{ds} = 0$ jsou splněny podle konstrukce. Podmínky $\frac{d^2\Phi(s_0)}{ds^2} = 0$ a $\frac{d^3\Phi(s_0)}{ds^3} = 0$ dávají

(18) $$a = \frac{1}{\varkappa(s_0)}\,, \quad b = -\frac{\varkappa'(s_0)}{\varkappa^2(s_0)\tau(s_0)}\,, \quad \varkappa'(s) = \frac{d\varkappa}{ds}\,.$$

Poloměr $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ oskulační sféry tedy je

(19) $$r = \frac{1}{\varkappa^2|\tau|}\sqrt{\varkappa^2\tau^2 + \left(\frac{d\varkappa}{ds}\right)^2}\,.$$

Všimněme si, že vzorce (18) a (19) ilustrují zajímavý obecný poznatek. Podle vět 20 a 21 je křivka C geometricky určena svou křivostí a torzí. Tedy také další geometrické objekty křivkou určené a její číselné invarianty se vyjadřují pomocí $\varkappa$ a τ a jejich derivací podle oblouku.

6 První základní forma plochy

Začínáme se systematicky zabývat studiem ploch v E_3.

6.1. Uvažujme plochu S s lokálním parametrickým vyjádřením $f(u_1, u_2)$, $(u_1, u_2) \in D$, viz 4.4. Při delších výpočtech budeme užívat zkrácené označení $f_1 = \partial_1 f$, $f_2 = \partial_2 f$. Tedy $f_1(u_0)$, $f_2(u_0)$ tvoří bázi tečného prostoru T_pS plochy S v bodě $p = f(u_0)$.

Uvažujme dva vektory A, $B \in T_pS$, $A = a_1 f_1 + a_2 f_2$, $B = b_1 f_1 + b_2 f_2$. Jejich skalární součin je dán výrazem

$$(A, B) = (a_1 f_1 + a_2 f_2, b_1 f_1 + b_2 f_2)\,. \tag{1}$$

Označme

$$g_{11} = (f_1, f_1)\,, \quad g_{12} = (f_1, f_2)\,, \quad g_{22} = (f_2, f_2)\,. \tag{2}$$

Tedy g_{ij}, $i, j = 1, 2$ jsou funkce na D. Pak (1) můžeme zapsat ve tvaru

$$(A, B) = g_{11} a_1 b_1 + g_{12}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + g_{22} a_2 b_2\,. \tag{3}$$

To je bilineární forma na T_pS. Příslušná kvadratická forma určuje velikost vektoru A,

$$\|A\| = \sqrt{g_{11} a_1^2 + 2 g_{12} a_1 a_2 + g_{22} a_2^2}\,.$$

Pro odchylku φ vektorů A, B platí

$$\cos\varphi = \frac{g_{11} a_1 b_1 + g_{12}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + g_{22} a_2 b_2}{\sqrt{g_{11} a_1^2 + 2 g_{12} a_1 a_2 + g_{22} a_2^2}\,\sqrt{g_{11} b_1^2 + 2 g_{12} b_1 b_2 + g_{22} b_2^2}} \tag{4}$$

6.2. Na S uvažujme křivku $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big)$. Pro její tečný vektor máme, viz 4.(4), $\frac{df}{dt} = f_1 \frac{du_1}{dt} + f_2 \frac{du_2}{dt}$, takže

$$\Big\|\frac{df}{dt}\Big\| = \sqrt{g_{11}\Big(\frac{du_1}{dt}\Big)^2 + 2 g_{12} \frac{du_1}{dt}\,\frac{du_2}{dt} + g_{22}\Big(\frac{du_2}{dt}\Big)^2}$$

Ze vzorce pro výpočet oblouku prostorové křivky dostáváme

Větu. Délka s oblouku křivky $u(t)$ na ploše $f(u)$ mezi body o parametrech t_1 a t_2 je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}\Big(\frac{du_1}{dt}\Big)^2 + 2 g_{12} \frac{du_1}{dt}\,\frac{du_2}{dt} + g_{22}\Big(\frac{du_2}{dt}\Big)^2}\,dt\,. \tag{5}$$

Diferenciál ds je tedy roven výrazu za symbolem integrálu. Jeho čtverec

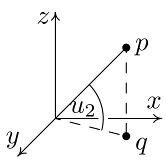
$$(ds)^2 = g_{11}(du_1)^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}(du_2)^2 \tag{6}$$

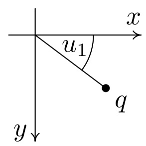
je kvadratická forma určená bilineární formou (3).

6.3 Definice. Kvadratickou formu (6) nazýváme **první základní forma plochy**. Značíme ji Φ_1 nebo $(ds)^2$.

Stejným symbolem Φ_1 budeme značit i polární bilineární formu, která je touto kvadratickou formou určena.

6.4 Příklad. Uvažujme sféru S se středem v počátku a poloměrem r. Pro bod $p \in S$ neležící na ose z označíme q jeho průmět do roviny (x, y). Jako parametr u_1 zvolíme úhel průvodiče bodu q s kladnou poloosou x, tedy $u_1 \in [0, 2\pi)$, jako parametr u_2 zvolíme úhel průvodiče bodu p s rovinou (x, y), takže $u_2 \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \big)$.





Tedy $z = r \sin u_2$ a velikost průvodiče bodu q je $r \cos u_2$. V rovině (x, y) máme situaci odpovídající polárním souřadnicím, takže $x = r \cos u_2 \cos u_1$, $y = r \cos u_2 \sin u_1$.

Celkově tedy dostáváme

$$f(u_1, u_2) = (r \cos u_1 \cos u_2, r \sin u_1 \cos u_2, r \sin u_2)\,, \qquad u_1 \in (0, 2\pi),\ u_2 \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \big)\,. \tag{7}$$

Sféra není jednoduchá plocha, takže naše parametrizace nezahrnuje polokružnici, která je průnikem sféry s polorovinou $x \geq 0$ v rovině (x, z). Při běžných praktických úvahách se však s touto drobnou neúplností dovedeme snadno vyrovnat.

Nalezneme první základní formu sféry. Máme

$$f_1 = r(-\sin u_1 \cos u_2, \cos u_1 \cos u_2, 0)\,,$$

$$f_2 = r(-\cos u_1 \sin u_2, -\sin u_1 \sin u_2, \cos u_2)\,.$$

Tedy $g_{11} = (f_1, f_1) = r^2 \cos^2 u_2$, $g_{12} = (f_1, f_2) = 0$, $g_{22} = r^2$. První základní forma sféry má tvar

$$\Phi_1 = r^2 \big[\cos^2 u_2 (du_1)^2 + (du_2)^2 \big]\,. \tag{8}$$

6.5. Spočteme první základní formu plochy dané explicitně $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, viz 4.5. Její parametrické vyjádření je $\bar{f}(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big)$. Tedy $\bar{f}_1 = (1, 0, f_x)$, $\bar{f}_2 = (0, 1, f_y)$, kde f_x resp. f_y je parciální derivace funkce f podle x resp. y. Spočtením skalárních součinů (2) dostáváme

$$\Phi_1 = (1 + f_x^2)\,(dx)^2 + 2 f_x f_y\, dx\, dy + (1 + f_y^2)\,(dy)^2\,. \tag{9}$$

6.6 Definice. **Vrstvou křivek** na jednoduché ploše S nazýváme takovou jednoparametrickou soustavu $\mathscr{L}$ křivek na S, že každým bodem plochy S prochází právě jedna křivka soustavy $\mathscr{L}$.

Uvažujme nejprve vrstvu $\mathscr{L}$ v oblasti D roviny (u_1, u_2). Předpokládejme, že tečny křivek vrstvy nejsou rovnoběžné s osou u_2. Pak pro směrnice $L(u_1, u_2)$ tečen vrstvy $\mathscr{L}$ platí

$$\frac{du_2}{du_1} = L(u_1, u_2)\,. \tag{10}$$

Říkáme, že (10) je **diferenciální rovnice vrstvy** $\mathscr{L}$.

Vektorovým polem na oblasti D rozumíme pravidlo, které každému bodu $p \in D$ přiřazuje vektor v tečném prostoru T_pD. Máme-li na D nějaké všude nenulové vektorové pole $\big(F_1(u_1, u_2), F_2(u_1, u_2)\big)$ tečné k vrstvě $\mathscr{L}$, nerovnoběžnost tečen s osou u_2 je rovnocenná $F_1(u_1, u_2) \neq 0$. Pak diferenciální rovnice vrstvy $\mathscr{L}$ je

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{F_2(u_1, u_2)}{F_1(u_1, u_2)}\,. \tag{11}$$

Na libovolné ploše S vrstvu křivek $\mathscr{L}$ zpravidla zadáváme v oblasti parametrů. **Vektorové pole na ploše** S se rovněž definuje jako pravidlo, které každému bodu $p \in S$ přiřazuje vektor v tečném prostoru T_pS.

6.7 Definice. **Ortogonálními trajektoriemi vrstvy** $\mathscr{L}$ na ploše S nazýváme takovou vrstvu $\mathscr{L}'$ na S, že křivky vrstev $\mathscr{L}$ a $\mathscr{L}'$ jsou kolmé v každém bodě.

Věta. Je-li $\big(F_1(u_1, u_2), F_2(u_1, u_2)\big)$ souřadné vyjádření nějakého vektorového pole tečného k vrstvě $\mathscr{L}$, pak diferenciální rovnice jejích ortogonálních trajektorií je

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{g_{11}F_1 + g_{12}F_2}{g_{12}F_1 + g_{22}F_2}\,. \tag{12}$$

Důkaz. Nechť (du_1, du_2) je tečný vektor k hledané vrstvě $\mathscr{L}'$. Podle (3), podmínka kolmosti obou vrstev zní

$$g_{11}F_1du_1 + g_{12}(F_1du_2 + F_2du_1) + g_{22}F_2du_2 = 0\,.$$

Algebraickou úpravou dostaneme (12). □

Poznámka. Pokud se v nějakém bodě plochy objeví na pravé straně (12) nulový jmenovatel, znamená to, že ortogonální trajektorie tímto bodem má, uvažováno v oblasti parametrů, tečnu rovnoběžnou s osou u_2. Pak je třeba uvažovat diferenciální rovnici vrstvy se zaměněním u_1 a u_2.

6.8 Příklad. Na sféře z bodu 4 nalezneme ortogonální trajektorie vrstvy $u_1 + u_2 =$ konst. Diferencováním dostáváme $du_1 + du_2 = 0$, takže diferenciální rovnice uvažované vrstvy je $\frac{du_2}{du_1} = -1$. Můžeme tedy vzít např. $F_1 = 1$, $F_2 = -1$. V bodě 4 jsme nalezli $g_{11} = r^2 \cos^2 u_2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$. Podle (2), diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií je

$$\frac{du_2}{du_1} = \cos^2 u_2\,. \tag{13}$$

Separací proměnných v (13) a integrací dostáváme rovnici ortogonálních trajektorií uvažované vrstvy ve tvaru

$$\operatorname{tg} u_2 = u_1 + \text{konst.}$$

6.9 Definice. Sítí na ploše S nazýváme dvě vrstvy $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$, jejichž křivky svírají nenulový úhel v každém bodě. Síť se nazývá **ortogonální**, jestliže tento úhel je v každém bodě pravý.

Jednoduchým příkladem je parametrická či souřadnicová síť, která je tvořena křivkami $u_1 =$ konst. a $u_2 =$ konst. dané parametrizace $f(u_1, u_2)$ plochy S. Nenulovost úhlu svíraného oběma parametrickými vrstvami je zaručena podmínkou $f_1 \times f_2 \neq o$.

Následující tvrzení využijeme v mnoha konkrétních situacích.

Věta. Parametrická síť je ortogonální, právě když $g_{12} = 0$.

Důkaz. Vektory f_1 a f_2 jsou tečné k parametrickým vrstvám a $g_{12} = (f_1, f_2)$. □

6.10 Lemma. Platí $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$.

Důkaz. Známá Cauchyho nerovnost pro dva vektory a, b říká, že $|(a,b)| \leq \|a\|.\|b\|$, neboli $(a,b)^2 \leq \|a\|^2.\|b\|^2$, přičemž rovnost platí pouze pro kolineární vektory. Vezmeme-li $a = f_1$, $b = f_2$, máme $\|a\|^2 = g_{11}$, $\|b\|^2 = g_{22}$, $(a,b) = g_{12}$, přičemž vektory f_1 a f_2 nejsou kolineární. Odtud plyne naše lemma. □

6.11. V analýze se ukazuje, že obsah plochy vyjádřené explicitně ve tvaru $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, kde f je ohraničená funkce na ohraničené oblasti D, je dán dvojným integrálem

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy. \tag{14}$$

6.12. O zobrazení $f\colon D \to E_3$ řekneme, že je **ohraničené**, jestliže množina $f(D)$ celá leží uvnitř nějaké koule.

Věta. Nechť plocha S je dána ohraničeným zobrazením $f(u_1, u_2)$ na ohraničené oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Pak její obsah je roven

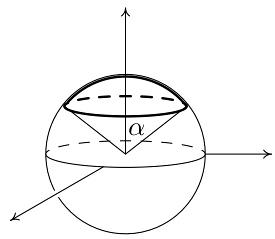
$$\iint\limits_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du_1\, du_2\,. \tag{15}$$

Důkaz. Víme, že plochu můžeme v okolí každého jejího bodu zadat explicitně, třebas ve tvaru $z = f(x, y)$. V příkladu 5 jsme nalezli $g_{11} = 1 + f_x^2$, $g_{12} = f_x f_y$, $g_{22} = 1 + f_y^2$, takže $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$. Lokálně se tedy (15) redukuje na klasický výraz (14). Globálně naše tvrzení plyne z aditivnosti obsahu plochy. □

Výraz $dV := \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du_1\, du_2$ se také nazývá **objemový element plochy** S. Vzorec pro obsah plochy lze tedy psát ve tvaru $V = \iint\limits_D dV$.

6.13 Příklad. Stanovíme obsah V tzv. vrchlíku na sféře o poloměru r určeného úhlem α podle obrázku. Tedy $D = (0, 2\pi) \times \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}\right)$. V příkladu 4 jsme nalezli $g_{11} = r^2 \cos^2 u_2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$. Tedy

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D r^2 \cos u_2\, du_1\, du_2 \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} du_1 \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \cos u_2 du_2 \\ &= 2\pi r^2 \big[\sin u_2\big]_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} = 2\pi r^2 (1 - \cos\alpha)\,. \end{aligned}$$



V případě $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dostáváme plošný obsah $2\pi r^2$ poloviny sféry.

6.14. Závěrem můžeme shrnout, že první základní forma Φ_1, která je určena skalárním součinem v každém tečném prostoru plochy, slouží především k výpočtu délky křivek na ploše, odchylek těchto křivek a obsahu plochy. Zásadní teoretický význam formy Φ_1 poznáme později.

7 Druhá základní forma plochy

7.1. Uvažujme normálu N_pS plochy S v bodě p. Na normále máme dva jednotkové vektory, výběr jednoho z nich představuje orientaci přímky N_pS.

Definice. Orientací plochy S nazýváme výběr orientací jejích normál, který je proveden spojitým způsobem.

Jednoduchou plochu lze vždy orientovat. Máme-li dáno její parametrické vyjádření $f(u_1, u_2)$, můžeme za orientaci normály vzít směr vektorového součinu $f_1 \times f_2$.

7.2. Příklad Möbiova listu ukazuje, že existují plochy, které globálně nelze orientovat.

Definice. Plochu S, kterou lze orientovat, nazýváme **orientovatelná**. Orientovatelnou plochu spolu s výběrem jedné z jejích orientací nazýváme **orientovaná**.

Jednotkový vektor orientované normály značíme n. Chceme-li vyjádřit jeho závislost na parametrech plochy, píšeme $n(u_1, u_2)$. V případě orientace normály určené parametrizací $f(u)$ máme

$$n = \frac{f_1 \times f_2}{\|f_1 \times f_2\|} \,. \tag{1}$$

Podmínka kolmosti normály na tečnou rovinu je charakterizována rovnicemi

$$(n, f_1) = 0\,, \quad (n, f_2) = 0\,. \tag{2}$$

7.3. Dále uvažujeme orientovanou plochu S.

Pro libovolný pohyb $\gamma(t)$ v prostoru E_3, vektor $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ nazýváme jeho **zrychlením**. Uvažujme pohyb na ploše S s lokální parametrizací $f(u)$, který je zadán v oblasti parametrů D jako $\big(u_1(t), u_2(t)\big)$, takže v E_3 jde o pohyb $\gamma(t) = f\big(u_1(t), u_2(t)\big)$. Spočteme jeho zrychlení. První derivování této složené funkce dává známý výraz

$$\frac{d\gamma}{dt} = f_1\big(u_1(t), u_2(t)\big)\frac{du_1}{dt} + f_2\big(u_1(t), u_2(t)\big)\frac{du_2}{dt}\,.$$

Při výpočtu druhé derivace použijeme zkrácené označení

$$f_{11} = \partial_{11} f\,, \quad f_{12} = \partial_{12} f\,, \quad f_{22} = \partial_{22} f\,. \tag{3}$$

Máme tedy

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = f_{11}\Big(\frac{du_1}{dt}\Big)^2 + 2f_{12}\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + f_{22}\Big(\frac{du_2}{dt}\Big)^2 + f_1\frac{d^2u_1}{dt^2} + f_2\frac{d^2u_2}{dt^2}\,. \tag{4}$$

Podle (2) skalární součin vektorů n a $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ závisí jen na $\frac{d\gamma}{dt}$.

Definice. Skalární součin $\left(n, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)$ nazýváme **normálové zrychlení** přiřazené vektoru $\frac{d\gamma}{dt} \in T_pS$. V případě $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|$=1 hovoříme o **normálové křivosti orientované plochy** S ve směru tohoto vektoru.

Znaménko normálového zrychlení tedy závisí na orientaci plochy.

7.4. Uvažujme skalární součiny

$$h_{11} = (n, f_{11}), \quad h_{12} = (n, f_{12}), \quad h_{22} = (n, f_{22}), \tag{5}$$

které jsou funkcemi na oblasti D. Ze (4) vyplývá, že pravidlo, které ke každému vektoru $(du_1, du_2) \in T_pS$ přiřazuje příslušné normálové zrychlení, je kvadratická forma na T_pS tvaru

$$h_{11}(du_1)^2 + 2h_{12}du_1\, du_2 + h_{22}(du_2)^2 . \tag{6}$$

Definice. Kvadratickou formu (6) nazýváme **druhá základní forma plochy** S a značíme ji Φ_2.

Druhá základní forma orientované plochy S je tedy pravidlo, které každému vektoru $A \in T_pS$ přiřazuje číslo $\Phi_2(A)$, které jsme získali takto. Na ploše S uvažujeme pohyb $\gamma(t)$ takový, že $A = \frac{d\gamma(t_0)}{dt}$. Spočteme jeho zrychlení $\frac{d^2\gamma(t_0)}{dt^2}$. Číslo $\Phi_2(A)$ je pak rovno skalárnímu součinu $\left(n(\gamma(t_0)), \frac{d^2\gamma(t_0)}{dt^2}\right)$, kde $n(\gamma(t_0))$ je orientovaný vektor normály v bodě $\gamma(t_0)$.

7.5. V tečném prostoru T_pS uvažujme směr určený nenulovým vektorem A. Řez plochy S rovinou určenou normálou N_pS a směrem A je křivka, kterou nazýváme **normálový řez plochy ve směru** A.

Základní geometrický význam formy Φ_2 podává

Věta. Absolutní hodnota normálové křivosti ve směru vektoru A je rovna křivosti normálového řezu v tomto směru.

Důkaz. Uvažujme parametrizaci $\gamma(s)$ tohoto řezu obloukem, $\gamma(s_0) = p$. Pak $\frac{d\gamma}{ds}$ je jednotkový vektor a $\frac{d^2\gamma(s_0)}{ds^2}$ je vektor k němu kolmý, o němž z teorie křivek víme, že jeho velikost je rovna křivosti uvažovaného normálového řezu. Vektory $n(p)$ a $\frac{d^2\gamma(s_0)}{ds^2}$ jsou tedy kolineární. Protože vektor $n(p)$ je jednotkový, absolutní hodnota skalárního součinu $\left(n(p), \frac{d^2\gamma(s_0)}{ds^2}\right)$ je rovna velikosti druhého vektoru. $\square$

7.6. Pro normálovou křivost $\varkappa$ ve směru vektoru $A = (du_1, du_2)$ platí

$$\varkappa = \frac{h_{11}(du_1)^2 + 2h_{12}du_1\, du_2 + h_{22}(du_2)^2}{g_{11}(du_1)^2 + 2g_{12}du_1\, du_2 + g_{22}(du_2)^2} . \tag{7}$$

Opravdu, jednotkový vektor v tomto směru je $\frac{1}{\|A\|}(du_1, du_2)$, přičemž $\|A\|^2 = g_{11}(du_1)^2 + 2g_{12}du_1\,du_2 + g_{22}(du_2)^2$. Dosazením do (6) dostáváme (7).

7.7 Definice. Bod $f(u_0) \in S$ nazýváme **planární bod**, jestliže $\Phi_2(u_0)$ je nulová forma, tj. platí $h_{11}(u_0) = 0$, $h_{12}(u_0) = 0$, $h_{22}(u_0) = 0$.

7.8 Definice. Plocha S se nazývá **souvislá**, jestliže každé dva její body lze spojit dráhou, která celá na S leží.

7.9 Věta. Jednoduchá souvislá plocha S, jejíž každý bod je planární, je částí roviny.

Důkaz. Pišme $n_1 = \partial_1 n$, $n_2 = \partial_2 n$. Derivací (2) podle u_1 a u_2 dostáváme

$$\begin{aligned} (n_1, f_1) + (n, f_{11}) = 0\,, \quad (n_1, f_2) + (n, f_{12}) = 0\,, \\ (n_2, f_1) + (n, f_{12}) = 0\,, \quad (n_2, f_2) + (n, f_{22}) = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Zde především vidíme, že v případě roviny, jejíž normálový vektor je konstantní, je každý bod planární. Dále využijeme skutečnost, že n je jednotkový vektor. Derivováním vztahu $(n, n) = 1$ dostáváme

$$(n, n_1) = 0\,, \quad (n, n_2) = 0\,. \tag{9}$$

Je-li každý bod plochy S planární, anulují se podle (5) druhé členy v (8). Pak první dvě rovnice (8) a první rovnice (9) říkají, že vektor n_1 je kolmý ke třem lineárně nezávislým vektorům n, f_1, f_2. Je to tedy nulový vektor. Ze zbývajících rovnic (8) a (9) stejným způsobem plyne, že n_2 je nulový vektor. Normálový vektor je tedy konstantní, $n = a$. Uvažujme funkci

$$\varphi(u_1, u_2) = \big(a, f(u_1, u_2) - f(u_1^0, u_2^0)\big)\,.$$

Máme $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = (a, f_1) = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(a, f_2) = 0$, takže φ je konstantní funkce. Přitom $\varphi(u_1^0, u_2^0) = 0$, tedy $\varphi(u) = 0$ pro všechna u. To znamená, že celá plocha S leží na své tečné rovině jdoucí bodem $f(u_0)$. $\square$

7.10 Definice. Bod $f(u_0) \in S$ nazýváme **sférický bod**, jestliže forma $\Phi_2(u_0)$ je nenulovým konstantním násobkem formy $\Phi_1(u_0)$.

Sférický bod $f(u_0)$ je tedy charakterizován podmínkami

$$h_{11}(u_0) = cg_{11}(u_0)\,,\ h_{12}(u_0) = cg_{12}(u_0)\,,\ h_{22}(u_0) = cg_{22}(u_0), \tag{10}$$

kde $0 \neq c \in \mathbb{R}$.

Pro normálový vektor $n(u)$ sféry se středem v počátku a poloměrem r platí $n(u) = \frac{1}{r}\,f(u)$. Rovnice (8) pak ukazují, že každý bod sféry je sférický.

7.11 Věta. Jednoduchá souvislá plocha S, jejíž každý bod je sférický, je částí sféry.

Důkaz. Nechť (10) platí v každém bodě. Tedy

$$(n, f_{11}) = c(f_1, f_1)\,, \quad (n, f_{12}) = c(f_1, f_2)\,, \quad (n, f_{22}) = c(f_2, f_2)\,. \tag{11}$$

Z (8) a (11) plyne

$$\begin{aligned} (f_1, n_1 + cf_1) &= 0\,, \quad (f_2, n_1 + cf_1) = 0, \\ (f_1, n_2 + cf_2) &= 0\,, \quad (f_2, n_2 + cf_2) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Podle (2) a (9) platí také

$$(n, n_1 + cf_1) = 0\,, \quad (n, n_2 + cf_2) = 0\,. \tag{13}$$

Stejně jako v důkazu věty (9) odtud plyne

$$n_1 + cf_1 = o\,, \quad n_2 + cf_2 = o\,. \tag{14}$$

Derivováním první rovnice podle u_2 a druhé podle u_1 dostáváme

$$n_{12} + \frac{\partial c}{\partial u_2}\, f_1 + cf_{12} = 0\,, \quad n_{12} + \frac{\partial c}{\partial u_1}\, f_2 + cf_{12} = 0\,, \tag{15}$$

kde $n_{12} = \frac{\partial^2 n}{\partial u_1 \partial u_2}$. Nulový je tedy i rozdíl

$$\frac{\partial c}{\partial u_2}\, f_1 - \frac{\partial c}{\partial u_1}\, f_2 = o\,.$$

Protože vektory f_1 a f_2 jsou lineárně nezávislé, musí platit $\frac{\partial c}{\partial u_1} = 0$, $\frac{\partial c}{\partial u_2} = 0$, takže c je konstanta. Podle (14) je bod $f + \frac{1}{c}\, n$ pevný. Každý bod plochy S má od tohoto bodu konstantní vzdálenost $\frac{1}{|c|}$, takže S je částí příslušné sféry. □

7.12 Definice. Směr v tečné rovině plochy nazýváme **asymptotický směr**, jestliže normálová křivost v něm je nulová. Tečnu v tomto směru nazýváme **asymptotická tečna**.

Rovnice asymptotických směrů tedy je

$$h_{11}(du_1)^2 + 2h_{12} du_1\, du_2 + h_{22}(du_2)^2 = 0. \tag{16}$$

V planárním bodě je každý směr asymptotický.

Předpokládáme-li, že směr $du_2 = 0$ není asymptotický, tedy $h_{11} \neq 0$, položíme $\varrho = \frac{du_1}{du_2}$ a (16) dává kvadratickou rovnici pro asymptotické směry

$$h_{11}\varrho^2 + 2h_{12}\varrho + h_{22} = 0\,. \tag{17}$$

Pro její kořeny platí $\varrho_{1,2} = \frac{-h_{12} \pm \sqrt{h_{12}^2 - h_{11}h_{22}}}{h_{11}}$. Označme

$$h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2\,. \tag{18}$$

Dva (reálné) asymptotické směry máme tedy při $h < 0$, oba směry splývají při $h = 0$ a imaginární kořeny dostáváme při $h > 0$. Je-li $h_{11} = 0$ a $h_{22} \neq 0$, (16) dává kvadratickou rovnici pro podíl $\frac{du_2}{du_1}$ a máme stejnou situaci. Pokud $h_{11} = 0$ a $h_{22} = 0$, v neplanárním bodě musí být $h_{12} \neq 0$, takže asymptotické směry jsou $du_1 = 0$ a $du_2 = 0$.

7.13 Definice. Neplanární bod se nazývá **hyperbolický** resp. **parabolický** resp. **eliptický**, jestliže $h < 0$ resp. $h = 0$ resp. $h > 0$.

Ve sférickém bodě z nerovnosti 6.10 plyne $h > 0$, takže jde o speciální případ eliptického bodu.

7.14 Definice. Křivka C na ploše S se nazývá **asymptotická**, jestliže její tečna v každém bodě je asymptotická tečna.

Na ploše s pouze hyperbolickými body máme tedy dvě vrstvy asymptotických křivek. Na ploše jen s parabolickými body máme jednu vrstvu asymptotických křivek. Na ploše jen s eliptickými body asymptotické křivky neexistují.

7.15 Věta. Přímka v tečné rovině $\tau_p S$ je asymptotická tečna, právě když má s plochou styk 2. řádu.

Důkaz. Je-li směr asymptotický, pak normálový řez v tomto směru má v bodě p nulovou křivost. Tedy p je inflexní bod normálového řezu, takže tečna má s ním styk 2. řádu. Obráceně, má-li nějaká tečna v bodě $p \in S$ styk 2. řádu s nějakou křivkou $\gamma(t)$ na S, $\gamma(t_0) = p$, jde o inflexní bod této křivky. Tedy vektor $\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}$ je kolineární s vektorem $\frac{d\gamma(t_0)}{dt}$, který je kolmý na normálový vektor $n(p)$, takže

$$\left(n(p), \frac{d^2\gamma(t_0)}{dt^2}\right) = 0\,. \tag{19}$$

□

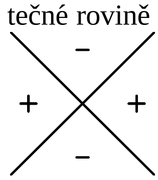
7.16. Připomínáme, že oskulační rovina prostorové křivky není určena v jejích inflexních bodech.

Věta. Křivka C na ploše S je asymptotická, právě když v každém bodě její oskulační rovina splývá s tečnou rovinou plochy nebo není určena.

Důkaz. Oskulační rovina křivky $C \equiv \gamma(t)$ v bodě $p = \gamma(t_0)$ je určena vektory $\frac{d\gamma(t_0)}{dt}$, $\frac{d^2\gamma(t_0)}{dt^2}$, pokud jsou lineárně nezávislé. Přitom $\frac{d\gamma(t_0)}{dt}$ leží v tečné rovině plochy. Tedy tečná rovina plochy S splývá s oskulační rovinou křivky C, právě když normálový vektor $n(s)$ je kolmý na $\frac{d^2\gamma(t_0)}{dt^2}$, tj. platí (19). Jde-li o inflexní bod, je vektor $\frac{d^2\gamma(t_0)}{dt^2}$ kolineární s $\frac{d\gamma(t_0)}{dt}$, a rovněž platí (19). Obráceně, je-li $\Phi_2\big(\frac{d\gamma(t_0)}{dt}\big) = 0$, platí (19) a stejně jako v první části důkazu nahlédneme, že nastává jeden z obou uvažovaných případů. □

7.17. Z 1.28 víme, že přímka nebo její část je charakterizována tím, že každý její bod je inflexní. Pokud tedy leží na ploše přímka nebo její část, je to asymptotická křivka. Tím máme např. stanoveny asymptotické směry a křivky na regulárních přímkových kvadrikách, tj. na jednodílném hyperboloidu a hyperbolickém paraboloidu.

7.18. V hyperbolickém bodě asymptotické směry rozdělují směry v tečné rovině na dvě části. V jedné z nich mají normálové křivosti kladné znaménko, v druhé znaménko záporné. V kladné části tedy lokálně leží normálové řezy nad tečnou rovinou ve směru orientované normály, v záporné části lokálně leží normálové řezy na druhé straně tečné roviny. Plocha tedy leží po obou stanách své tečné roviny. Výrazným příkladem je plocha $z = xy$. Osy x a y na ní leží, takže to jsou asymptotické křivky, a tečná rovina v počátku je $z = 0$. Pro $x > 0$, $y > 0$ nebo $x < 0$, $y < 0$ plocha leží nad tečnou rovinou, pro $x > 0$, $y < 0$ nebo $x < 0$, $y > 0$ leží plocha pod tečnou rovinou.



V eliptickém bodě je znaménko křivosti ve všech směrech stejné, takže celá plocha lokálně leží po jedné straně tečné roviny. Nejjednoduššími příklady jsou sféra nebo elipsoid.

Dalším pěkným příkladem je anuloid. Na “vnější straně pneumatiky” leží plocha celá po jedné straně tečné roviny, jsou tam vesměs eliptické body. Na celé vnitřní části anuloid lokálně leží po obou stranách každé tečné roviny, jsou tam vesměs hyperbolické body. “Horní a dolní” kružnice jsou pak tvořeny body parabolickými.

7.19 Poznámka. Závěrem ještě ukážeme, jak lze planární a sférické body charakterizovat pomocí obecného pojmu **styk ploch**.

Nechť p je společný bod ploch S a $\bar{S}$. Řekneme, že **plochy** S a $\bar{S}$ **mají v bodě** p **styk řádu** k, jestliže ke každé křivce $C \subset S$ jdoucí bodem p existuje taková křivka $\bar{C} \subset \bar{S}$, že křivky C a $\bar{C}$ mají v bodě p styk k-tého řádu. Ve skriptu [5] se ukazuje, že takto vzniká relace ekvivalence, a odvozuje se toto početní kritérium pro styk ploch, které je podobné 2.5 a 4.7.

Jestliže plocha S je zadána parametrickým vyjádřením $f(u)$ a plocha $\bar{S}$ je dána rovnicí $F(x, y, z) = 0$, pak vytvoříme funkci dvou proměnných

$$\Phi(u_1, u_2) = F\big(f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_3(u_1, u_2)\big)\,.$$

Platí, že plochy S a $\bar{S}$ mají ve společném bodě $p = f(u_0)$ styk k-tého řádu, právě když všechny parciální derivace funkce Φ v bodě $u_0 = (u_1^0, u_2^0)$ až do řádu k včetně jsou nulové. Pro $k = 1$ takto dostáváme, že dvě plochy mají ve společném bodě styk 1. řádu, právě když v něm mají společnou tečnou rovinu.

Uvažujeme-li jako plochu $\bar{S}$ rovinu

$$ax + by + cz + d = 0\,,$$

máme

$$\Phi(u_1, u_2) = af_1(u_1, u_2) + bf_2(u_1, u_2) + cf_3(u_1, u_2) + d\,.$$

Podmínky pro styk 1. řádu

$$a\partial_1 f_1(u_0)+b\partial_1 f_2(u_0)+c\partial_1 f_3(u_0) = 0\,,\ a\partial_2 f_1(u_0)+b\partial_2 f_2(u_0)+c\partial_2 f_3(u_0) = 0$$

znamenají, že vektor (a, b, c) je kolineární s normálovým vektorem $n(u_0)$ plochy S v bodě $f(u_0)$. Podmínka pro styk 2. řádu pak zní

$$\big(n(u_0), \partial_{11} f(u_0)\big) = 0\,, \quad \big(n(u_0), \partial_{12} f(u_0)\big) = 0\,, \quad \big(n(u_0), \partial_{22} f(u_0)\big) = 0\,.$$

Tedy bod $p \in S$ je planární, právě když tečná rovina plochy S v něm má s plochou styk 2. řádu.

Podobným výpočtem dokážeme, že bod $f(u_0) \in S$ je sférický, právě když existuje sféra Q taková, že S a Q mají v bodě $f(u_0)$ styk 2. řádu.

8 Hlavní křivky

8.1. Rozložení normálové křivosti plochy $S \equiv f(u)$ v jejím neplanárním bodě p lze vizualizovat následujícím způsobem. Na tečnu v neasymptotickém směru naneseme, v obou směrech, hodnotu $\frac{1}{\sqrt{|\varkappa|}}$, kde $\varkappa$ je normálová křivost v tomto směru. Je-li $a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p)$ vektor odpovídající takovému bodu, je čtverec jeho velikosti roven $\frac{1}{|\varkappa|}$, tj.

$$g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2 = \frac{1}{|\varkappa|}\,. \tag{1}$$

Ale $\varkappa$ je dáno výrazem 7.(7), takže (1) je rovnocenné rovnici

$$|h_{11}a_1^2 + 2h_{12}a_1a_2 + h_{22}a_2^2| = 1\,. \tag{2}$$

Definice. Křivka (2) se nazývá **Dupinova indikatrix** v neplanárním bodě plochy.

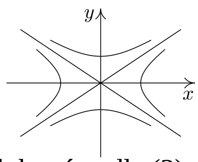
8.2. V eliptickém bodě je (2) elipsa. Uvědomíme-li si, že rovnice jednotkové kružnice v naší afinní souřadné soustavě v tečné rovině je

$$g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2 = 1$$

pak z 7.(10) plyne, že uvažovaná elipsa je kružnicí právě ve sférických bodech plochy.

V hyperbolickém bodě můžeme rovnici $h_{11}a_1^2 + 2h_{12}a_1a_2 + h_{22}a_2^2 = 1$ převést změnou souřadné soustavy na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{3}$$



Tedy (2) představuje dvojici tzv. sdružených hyperbol, která vedle (3) sestává ještě z hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

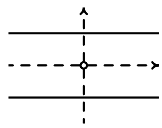
V parabolickém bodě představuje (2) rovnici dvojice rovnoběžných přímek v tečné rovině, která je souměrná podle bodu dotyku. Opravdu, v tomto případě platí $h_{11}h_{22} = h_{12}^2$. Uvažujme případ $h_{11} > 0$, $h_{12} > 0$. Pak $h_{12} = \pm\sqrt{h_{11}}\sqrt{h_{22}}$. Začněme případem kladného znaménka. Tedy rovnice (2) má tvar

$$1 = h_{11}a_1^2 + 2\sqrt{h_{11}}\sqrt{h_{22}}a_1a_2 + h_{22}a_2^2 = \left(\sqrt{h_{11}}a_1 + \sqrt{h_{22}}a_2\right)^2. \tag{4}$$

To je rovnice dvojice rovnoběžných přímek

$$1 = \sqrt{h_{11}}a_1 + \sqrt{h_{22}}a_2\,, \quad -1 = \sqrt{h_{11}}a_1 + \sqrt{h_{22}}a_2\,. \tag{5}$$

Tato dvojice je souměrná podle počátku. Stejný výsledek dostaneme v případě záporného znaménka. Pokud je $h_{11} < 0$, $h_{22} < 0$, dává podobný výpočet týž výsledek.



8.3. V nesférickém bodě definujeme **osy Dupinovy indikatrix** jako osy elipsy nebo jako společné osy dvojice sdružených hyperbol nebo jako osu dvojice rovnoběžných přímek a přímku na ni kolmou jdoucí počátkem.

Definice. Směry os Dupinovy indikatrix nazýváme **hlavní směry plochy** S v uvažovaném bodě. Křivku na S, která se v každém svém bodě dotýká hlavního směru, nazýváme **hlavní křivka**.

V planárních a sférických bodech nejsou hlavní směry definovány.

Na ploše bez planárních a sférických bodů máme tedy **síť hlavních křivek**. Tato síť je ortogonální.

8.4. Protože Φ_2 je kvadratická forma, určuje polární bilineární formu, kterou budeme značit stejným symbolem. Pro dva vektory $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2) \in T_pS$ tedy platí

(6) $$\Phi_2(A, B) = h_{11}(p)a_1b_1 + h_{12}(p)(a_1b_2 + a_2b_1) + h_{22}(p)a_2b_2 \,.$$

Podmínka $\Phi_2(A, B) = 0$ závisí jen na směrech určených vektory A, B. Je to podmínka polární sdruženosti vzhledem k $\Phi_2(p)$.

Definice. Směry v tečné rovině plochy určené nenulovými vektory A, $B \in T_pS$ nazýváme **sdružené**, jsou-li polárně sdružené vzhledem k $\Phi_2(p)$.

Početně je podmínka sdruženosti dána anulováním výrazu (6).

8.5 Věta. Hlavní směry plochy jsou směry, které jsou současně sdružené a kolmé.

Důkaz. Z analytické geometrie víme, že takto jsou charakterizovány osy elipsy a hyperboly. Případ dvojice rovnoběžných přímek se snadno spočítá samostatně. □

8.6. Vedle anulování (6) tedy hlavní směry splňují i podmínku kolmosti

(7) $$\Phi_1(A, B) = g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2 = 0 \,.$$

Je-li (b_1, b_2) nenulový směr, který splňuje (7) a anuluje (6), máme soustavu dvou homogenních lineárních rovnic s nenulovým řešením. Determinant soustavy je tedy nulový, tj.

(8) $$\begin{vmatrix} g_{11}a_1 + g_{12}a_2, & g_{12}a_1 + g_{22}a_2 \\ h_{11}a_1 + h_{12}a_2, & h_{12}a_1 + h_{22}a_2 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Přejdeme-li k diferenciálům $du_1 = a_1$, $du_2 = a_2$, dostáváme

Větu. Diferenciální rovnice sítě hlavních křivek je

$$\begin{vmatrix} g_{11}du_1 + g_{12}du_2, & g_{12}du_1 + g_{22}du_2 \\ h_{11}du_1 + h_{12}du_2, & h_{12}du_1 + h_{22}du_2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{9}$$

Uvědomněme si, že (9) je v obecném případě kvadratická rovnice pro podíl $\frac{du_2}{du_1}$. Její dvě řešení $\frac{du_2}{du_1} = F_1(u_1, u_2)$, $\frac{du_2}{du_1} = F_2(u_1, u_2)$ jsou diferenciální rovnice obou vrstev hlavních křivek.

8.7 Definice. Normálové křivosti $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ v hlavních směrech nazýváme **hlavní křivosti plochy**. Součet $H = \varkappa_1 + \varkappa_2$ hlavních křivostí se nazývá **střední křivost**, součin $K = \varkappa_1\varkappa_2$ se nazývá **Gaussova** (či **totální**) **křivost**.

Ve sférickém bodě má normálová křivost ve všech směrech stejnou hodnotu $\varkappa$. Zde definujeme $H = 2\varkappa$, $K = \varkappa^2$. V planárním bodě jsou všechny normálové křivosti nulové. Zde klademe $H = 0$, $K = 0$.

Při změně orientace plochy S normálové křivosti mění znaménko. Znaménko střední křivosti H tedy závisí na orientaci plochy, znaménko Gaussovy křivosti K však na orientaci plochy nezávisí.

8.8. Na Dupinově indikatrix vidíme, že normálová křivost má v hlavních směrech extrém. Toho využijeme k odvození vzorce pro stanovení hlavních křivostí. Následující přehledný výpočet se bude týkat jen "obecného" případu, ale laskavý čtenář si prodiskutuje sám, že výsledek platí ve všech případech. Uvažujeme-li směr $\varrho = \frac{du_1}{du_2}$, pak pro normálovou křivost $\varkappa(\varrho)$ v tomto směru podle 7. (7) platí

$$\varkappa(\varrho) = \frac{h_{11}\varrho^2 + 2h_{12}\varrho + h_{22}}{g_{11}\varrho^2 + 2g_{12}\varrho + g_{22}}\,.$$

K ulehčení výpočtu to zapíšeme ve tvaru

$$\varkappa(g_{11}\varrho^2 + 2g_{12}\varrho + g_{22}) - (h_{11}\varrho^2 + 2h_{12}\varrho + h_{22}) = 0\,. \tag{10}$$

Derivováním podle ϱ a dosazením podmínky pro extrém $\frac{d\varkappa}{d\varrho} = 0$ dostáváme

$$\varkappa(g_{11}\varrho + g_{12}) - (h_{11}\varrho + h_{12}) = 0\,. \tag{11}$$

Násobíme-li to $-\varrho$ a přičteme k (10), dostáváme

$$\varkappa(g_{12}\varrho + g_{22}) - (h_{12}\varrho + h_{22}) = 0. \tag{12}$$

Po zpětném dosazení $\varrho = \frac{du_1}{du_2}$ a úpravě má (11) a (12) tvar

$$\begin{aligned} (\varkappa g_{11} - h_{11})\,du_1 + (\varkappa g_{12} - h_{12})\,du_2 &= 0, \\ (\varkappa g_{12} - h_{12})\,du_1 + (\varkappa g_{22} - h_{22})\,du_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Zde (du_1, du_2) je nenulový směr, v němž extrém nastává. Tedy determinant soustavy dvou lineárních rovnic (13) musí být nulový. Odtud plyne

Věta. Hlavní křivosti $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\begin{vmatrix} \varkappa g_{11} - h_{11}, & \varkappa g_{12} - h_{12} \\ \varkappa g_{12} - h_{12}, & \varkappa g_{22} - h_{22} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{14}$$

8.9. Jednoduchým důsledkem (14) je

Věta. Pro střední a Gaussovu křivost platí

$$H = \frac{g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,, \quad K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,. \tag{15}$$

Důkaz. Úpravou rovnice (14) dostáváme

$$\varkappa^2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) - \varkappa(g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}) + (h_{11}h_{22} - h_{12}^2) = 0\,.$$

Součet $H = \varkappa_1 + \varkappa_2$ resp. součin $K = \varkappa_1\varkappa_2$ kořenů má tvar (15) podle známé vlastnosti kořenů kvadratické rovnice. □

Ukážeme ještě, že (15) platí i ve sférickém a planárním bodě. Ve sférickém bodě podle 7. (7) máme $h_{ij} = \varkappa g_{ij}$, $i = 1, 2$, kde $\varkappa$ je společná hodnota normálové křivosti ve všech směrech. Pak z (15) dostáváme $H = 2\varkappa$, $K = \varkappa^2$. V planárním bodě máme $h_{ij} = 0$, takže $H = 0$ a $K = 0$.

8.10. Protože $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ a $h_{11}h_{22} - h_{12}^2$ je výraz použitý v definici 7.13, získali jsme i jiný pohled na tuto definici.

Důsledek. Eliptický resp. parabolický resp. hyperbolický bod je charakterizován podmínkou $K > 0$ resp. $K = 0$ resp. $K < 0$.

Poznámka. V planárním bodě rovněž platí $K = 0$. Proto se planární body někdy také zařazují mezi body parabolické.

8.11 Příklad. Gaussova křivost sféry o poloměru r je $\frac{1}{r^2}$. Opravdu, všechny její body jsou sférické a normálový řez v každém směru je kružnice o poloměru r. Tedy $K = \frac{1}{r^2}$.

8.12. Následující formule přehledně vyjadřuje normálovou křivost v libovolném směru pomocí hlavních křivostí.

Věta (Eulerův vzorec). Nechť σ_1 a σ_2 jsou hlavní směry v bodě p plochy S, nechť $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ jsou příslušné hlavní křivosti a s je směr, který se směrem σ_1 svírá úhel φ. Pak pro normálovou křivost $\varkappa_s$ v tomto směru platí

$$\varkappa_s = \varkappa_1 \cos^2\varphi + \varkappa_2 \sin^2\varphi\,. \tag{16}$$

Důkaz. Nechť e_1, e_2 jsou jednotkové vektory ve směrech σ_1, σ_2. Na S můžeme uvažovat takové parametry u_1, u_2, že e_1 a e_2 jsou tečné vektory k parametrické síti, tj. $e_1 = (du_1, 0)$, $e_2 = (0, du_2)$. Pak $g_{11}(p) = g_{22}(p) = 1$, $g_{12}(p) = 0$ a sdruženost směrů σ_1 a σ_2 dává $h_{12}(p) = 0$. Z obecného vzorce 7.(7) pro $\varkappa$ pak plyne $\varkappa_1 = h_{11}(p)$, $\varkappa_2 = h_{22}(p)$. Jednotkový vektor ve směru s má tvar $e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi$. Dosazením tohoto vektoru do 7.(7) dostáváme $\varkappa_s = \varkappa_1 \cos^2\varphi + \varkappa_2 \sin^2\varphi$. □

8.13. Probereme ještě jednu geometrickou vlastnost, která přímo charakterizuje hlavní křivky. Pro křivku $\gamma(t)$ na ploše S označíme n_γ jednoparametrickou soustavu normálových vektorů podél γ.

Věta. Křivka $\gamma(t)$ je hlavní křivka plochy S, právě když vektor $\frac{dn_\gamma}{dt}$ je kolineární s vektorem $\frac{d\gamma}{dt}$ pro všechna t.

Důkaz. Nechť S je zadána parametrizací $f(u)$ a γ je v oblasti parametrů vyjádřena jako $\big(u_1(t), u_2(t)\big)$. Tedy

$$\frac{d\gamma}{dt} = f_1 \frac{du_1}{dt} + f_2 \frac{du_2}{dt}\,. \tag{17}$$

Označme

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 \tag{18}$$

vektor kolmý k (17). Podobně máme $n_\gamma(t) = n\big(u_1(t), u_2(t)\big)$, takže

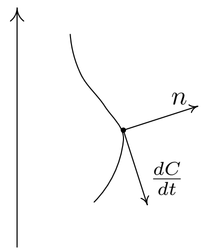
$$\frac{dn_\gamma}{dt} = n_1 \frac{du_1}{dt} + n_2 \frac{du_2}{dt}\,. \tag{19}$$

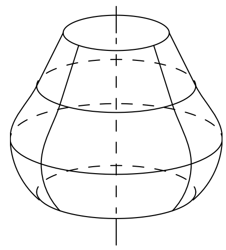
Tento vektor leží v tečné rovině, protože vektory n_1 a n_2 jsou kolmé na n, viz 7.(9). Vektory (17) a (19) jsou kolineární, právě když vektory (18) a (19) jsou kolmé. S užitím vzorců 7.(8) dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(f_1 a_1 + f_2 a_2, n_1 \frac{du_1}{dt} + n_2 \frac{du_2}{dt}\Big) \\ &= -\Big[h_{11} a_1 \frac{du_1}{dt} + h_{12}\Big(a_2 \frac{du_1}{dt} + a_1 \frac{du_2}{dt}\Big) + h_{22} a_2 \frac{du_2}{dt}\Big]\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Směry $\left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}\right)$ a (a_1, a_2) jsou tedy ortogonální a sdružené, takže to jsou hlavní směry. Tedy $\gamma(t)$ je hlavní křivka. Obráceně, je-li $\gamma(t)$ hlavní křivka, je vektor $\frac{d\gamma}{dt}$ sdružen s kolmým vektorem, takže platí druhá rovnice v (20). Pak z první rovnice v (20) plyne, že vektor $\frac{dn_\gamma}{dt}$ je kolineární s vektorem $\frac{d\gamma}{dt}$ pro všechna t. □

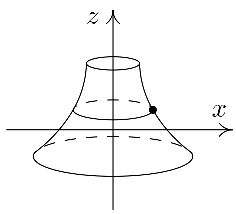
8.14 Příklad. Uvažujme **rotační plochu** S vznikající rotací rovinné křivky C podle osy, která leží v téže rovině a křivku neprotíná. Podobně jako na zeměkouli, **rovnoběžky** na S jsou kružnice, které vznikají rotací jednotlivých bodů křivky C, zatímco **poledníky** na S jsou polohy křivky C v jednotlivých okamžicích rotace. Ukážeme, že rovnoběžky a poledníky jsou hlavní křivky na rotační ploše S.





Uvažujme libovolný poledník plochy S, který ztotožníme s křivkou C. Tedy normály $n_C(t)$ rovinné křivky C jsou současně normálami plochy. Všechny vektory $n_C(t)$ jsou jednotkové. Derivací vztahu $\big(n_C(t), n_C(t)\big) = 1$ dostáváme, že vektory $\frac{dn_C(t)}{dt}$ jsou kolmé na $n_C(t)$ a tedy kolineární s tečným vektorem křivky C. Tedy poledníky jsou hlavní křivky podle věty 13. Rovnoběžky jsou na ně kolmé, takže jsou to rovněž hlavní křivky, protože síť hlavních křivek je ortogonální síť.

8.15. Jako užitečnou ilustraci odvodíme předchozí výsledek také početně. Křivku C zadáme v rovině (x, z) lokální parametrizací $x = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in I$, takže dvourozměrný vektor $\big(g'(t), h'(t)\big)$ je nenulový pro každé $t \in I$. Přitom můžeme předpokládat, že hodnoty parametru t jsou kladné.



Rotaci provedeme kolem osy z a požadavek, aby C neprotínala osu rotace, zajistíme předpokladem, že C leží v polorovině $x > 0$, tedy $g(t) > 0$ pro všechna $t \in I$. Jako v označíme odchylku, kterou průmět rotujícího bodu do roviny (x, y) svírá s kladnou poloosou x. Oblast parametrů D můžeme nazírat jako mezikruží v $\mathbb{R}^2$, které je v polárních souřadnicích charakterizováno tím, že velikost průvodiče leží v intervalu I a polární úhel je libovolný. V tomto smyslu můžeme psát $v \in [0, 2\pi)$.

Bod o x-ové souřadnici $g(t)$ opisuje v rovině $z = h(t)$ kružnici $x = g(t) \cos v$, $y = g(t) \sin v$. Parametrické vyjádření naší rotační plochy tedy je

$$f(t, v) = \big(g(t) \cos v, g(t) \sin v, h(t)\big)\,, \quad t \in I, v \in [0, 2\pi)\,.$$

Z hlediska obecné teorie hraje t resp. v roli parametru u_1 resp. u_2.

Parciální derivování podle t a v dává

$$f_1 = (g' \cos v, g' \sin v, h')\,, \quad f_2 = g(-\sin v, \cos v, 0)\,.$$

Koeficienty první základní formy tedy jsou

$$g_{11} = g'^2 + h'^2 \,, \quad g_{12} = 0 \,, \quad g_{22} = g^2 \,.$$

Dále máme

$$f_1 \times f_2 = g(-h' \cos v, -h' \sin v, g') \,, \quad n = \frac{1}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}(-h' \cos v, -h' \sin v, g') \,.$$

V druhém řádu dostáváme parciální derivace

$$\begin{aligned} f_{11} &= (g'' \cos v, g'' \sin v, h''), \\ f_{12} &= g'(-\sin v, \cos v, 0) \,, \\ f_{22} &= g(-\cos v, -\sin v, 0) \,. \end{aligned}$$

Podle 7. (5) koeficienty druhé základní formy jsou

$$h_{11} = \frac{g'h'' - h'g''}{\sqrt{g'^2 + h'^2}} \,, \quad h_{12} = 0 \,, \quad h_{22} = \frac{h'g}{\sqrt{g'^2 + h'^2}} \,.$$

Obecně již samy podmínky $g_{12} = 0$, $h_{12} = 0$ zjednodušují diferenciální rovnici hlavních křivek (9) na tvar

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ h_{11} & h_{22} \end{vmatrix} du_1 \, du_2 = 0 \,.$$

Anulování determinantu znamená $h_{11} = cg_{11}$, $h_{22} = cg_{22}$, takže se jedná o sférický nebo planární bod, které jsou z úvah o hlavních křivkách vyloučeny. Rovnice $du_1 du_2 = 0$ pak charakterizuje parametrickou síť $u_1 =$ konst. a $u_2 =$ konst. V našem případě rotační plochy to jsou rovnoběžky a poledníky.

8.16. Popíšeme vztah křivosti libovolného rovinného řezu plochy S a křivosti normálového řezu ve stejném směru. Nechť ϱ je libovolná rovina jdoucí bodem $p \in S$ různá od tečné roviny $\tau_p S$.

Věta (**Meusnierova).** Nechť $\varkappa_n$ je normálová křivost plochy S ve směru přímky $\varrho \cap \tau_p S$ a $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ je odchylka, kterou normála $N_p S$ svírá s rovinou ϱ. Pak pro křivost $\varkappa_\varrho$ řezu plochy S rovinou ϱ v bodě p platí

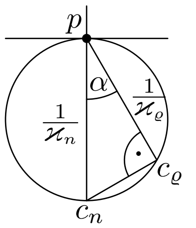
$$\varkappa_n = \varkappa_\varrho \cos \alpha \,.$$

Důkaz. Nechť $\gamma(s)$ je parametrizace průsečné křivky obloukem, $\gamma(0) = p$. Podle věty 7.5 platí

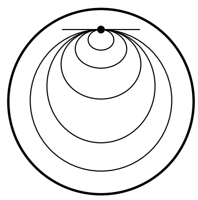
$$\varkappa_n = \left| \left(n, \frac{d^2\gamma(0)}{ds^2} \right) \right| .$$

Z teorie rovinných křivek víme, že $\frac{d^2\gamma(0)}{ds^2} = \varkappa_\varrho e_2$, kde e_2 je jednotkový vektor v rovině ϱ. V naší situaci $|(n, e_2)| = \cos\alpha$. □

8.17.



Uvažujme neasymptotický směr A v tečné rovině. Označme c_n střed křivosti normálového řezu a c_ϱ střed křivosti řezu rovinou ϱ, viz obrázek, na němž je znázorněn řez rovinou kolmou na směr A. Z Meusnierovy věty plyne $\cos\alpha = \frac{\varkappa_n}{\varkappa_\varrho}$, takže trojúhelník $p\,c_n\,c_\varrho$ má při vrcholu c_ϱ pravý úhel.



Geometricky to znamená, že středy křivostí všech rovinných řezů plochy S ve směru A leží na kružnici, pro niž je úsečka pc_n průměrem. Při daném A má tedy normálový řez nejmenší křivost a křivost ostatních rovinných řezů se zvětšuje způsobem popsaným v Meusnierově větě. Jako příklad uvádíme sféru, kde tyto řezy jsou kružnice s poloměrem, který se zmenšuje uvedeným způsobem.

8.18. Závěrem se zmíníme o jedné třídě ploch, které jsou zajímavé jak z ryze geometrického, tak i aplikačního hlediska.

Definice. Plocha S se nazývá **minimální**, jestliže její střední křivost H je nulová ve všech bodech.

Netriviálním příkladem minimální plochy je **helikoid**, kterým se budeme zabývat v bodech 10.7 a 10.9.

Přívlastek "minimální" má kořeny ve variačním počtu. Jedním z důležitých variačních problémů je úloha "natáhnout" na zadanou hraniční křivku v E_3 plochu s minimálním plošným obsahem. Za dosti obecných předpokladů je řešením této úlohy plocha s nulovou střední křivostí.

9 Obálky soustav ploch

V případě ploch můžeme uvažovat obálku jednoparametrické i dvouparametrické soustavy. Probereme nejprve dvouparametrický případ, který je jednodušší.

9.1. Uvažujme **dvouparametrickou soustavu ploch** určených rovnicí

$$F(x, y, z, u, v) = 0\,, \tag{1}$$

$(u, v) \in D$, kde F je funkce třídy C^1 definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^5$. Plochu o rovnici $F(x, y, z, u_0, v_0) = 0$ značíme S_{u_0,v_0}, $(u_0, v_0) \in D$, takže o (1) hovoříme také jako o soustavě ploch $(S_{u,v})$.

9.2. Společné body ploch $S_{u,v}$, $S_{a,v}$, $S_{u,b}$, $a \neq u$, $b \neq v$ jsou určeny soustavou rovnic

$$F(x, y, z, u, v) = 0\,, \quad F(x, y, z, a, v) = 0\,, \quad F(x, y, z, u, b) = 0\,.$$

Ta je ekvivalentní soustavě

$$F(x, y, z, u, v) = 0\,, \quad \frac{F(x, y, z, a, v) - F(x, y, z, u, v)}{a - u} = 0\,,$$
$$\frac{F(x, y, z, u, b) - F(x, y, z, u, v)}{b - v} = 0$$

Uvažujeme-li pevné (u, v), pak v limitě pro $a \to u$ a $b \to v$ dostáváme rovnice

$$F(x, y, z, u, v) = 0\,, \quad \frac{\partial F(x, y, z, u, v)}{\partial u} = 0\,, \quad \frac{\partial F(x, y, z, u, v)}{\partial v} = 0\,. \tag{2}$$

Definice. Body určené rovnicemi (2) nazýváme **charakteristické body** na ploše $S_{u,v}$. Množinu těchto bodů pro všechna $(u, v) \in D$ nazýváme **charakteristická množina soustavy** $(S_{u,v})$.

Stejně jako v 3.2 máme dvě základní početní možnosti vyjádření charakteristické množiny. Když v (2) vyloučíme parametry u a v, dostáváme popis charakteristické množiny rovnicí tvaru $G(x, y, z) = 0$. Jestliže z (2) spočteme x, y, z jako funkce u a v, dostáváme parametrické vyjádření charakteristické množiny.

9.3. Podobně jako v 3.3 řekneme, že **dvě plochy se ve společném bodě dotýkají**, jestliže v něm mají společnou tečnou rovinu. (Ve smyslu poznámky 7.19 jde o styk 1. řádu.)

Definice. Plochu E danou parametrizací $f(u,v), (u,v) \in D$, nazýváme **obálka soustavy** (1), jestliže E se v bodě $f(u,v)$ dotýká plochy $S_{u,v}$ pro všechna $(u,v) \in D$.

9.4 Věta. Každá obálka soustavy $(S_{u,v})$ je podmnožinou její charakteristické množiny. Obráceně, je-li $f(u,v)$ plocha, která splňuje rovnice (2), pak je to obálka soustavy $(S_{u,v})$.

Důkaz. Podmínka, aby bod obálky $f(u,v)$ ležel na ploše $S_{u,v}$, zní

$$F\big(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v), u, v\big) = 0\,. \tag{3}$$

Tečná rovina k ploše $S_{u,v}$ v bodě $f(u,v)$ je kolmá na vektor

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\Big)\,\big(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v), u, v\big)\,.$$

Tečná rovina k ploše $f(u,v)$ je určena vektory $\partial_1 f$, $\partial_2 f$. Podmínka splývání obou tečných rovin tedy zní

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial u} &= 0\,,\\
\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial v} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Derivováním rovnice (3) podle u a v dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} &= 0\,,\\
\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Jestliže tečné roviny splývají, pak z (4) a (5) plyne $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$. Tedy obálka je podmnožinou charakteristické množiny. Obráceně, máme-li plochu E danou parametricky $f(u,v)$, která splňuje rovnice (2), pak z (5) plyne (4). Tedy E je obálka. □

9.5. Jako ilustraci početního postupu probereme nejjednodušší příklad dvouparametrické soustavy sfér se středy v rovině $z = 0$ a konstantním poloměrem r. Máme tedy rovnice

$$\begin{aligned}
&F(x,y,z,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2 - r^2 = 0\,,\\
&\frac{\partial F}{\partial u} = -2(x-u) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = -2(y-v) = 0\,.
\end{aligned}$$

Dosazením z druhé a třetí rovnice do první dostáváme $z^2 = r^2$. Samozřejmě, obálka sestává z dvojice rovin $z = \pm r$.

9.6. Uvažujme **jednoparametrickou soustavu ploch** určených rovnicí

$$F(x, y, z, t) = 0\,, \tag{6}$$

$t \in I$, kde F je funkce třídy C^2 definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^4$. Plochu o rovnici $F(x, y, z, t_0) = 0$ značíme S_{t_0}, $t_0 \in I$, a o (6) hovoříme také jako o soustavě ploch (S_t).

Společné body ploch S_t a S_s, $s \neq t$ jsou určeny soustavou rovnic

$$F(x, y, z, t) = 0\,, \quad F(x, y, z, s) = 0\,,$$

která je ekvivalentní soustavě

$$F(x, y, z, t) = 0\,, \quad \frac{F(x, z, y, s) - F(x, y, z, t)}{s - t} = 0\,.$$

V limitě pro $s \to t$ dostáváme

$$F(x, y, z, t) = 0\,, \quad \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} = 0\,. \tag{7}$$

Definice. Množinu určenou rovnicemi (7) nazýváme **charakteristikou na ploše** S_t. Sjednocení těchto množin pro všechna $t \in I$ nazýváme **charakteristická množina soustavy** (S_t).

Rovnici charakteristické množiny získáme vyloučením t z rovnic (7).

Je-li charakteristika na S_t křivka (jsou-li tedy splněny kvalitativní podmínky definice 1.14), mluvíme o **charakteristické křivce** na ploše S_t.

9.7. Situace u jednoparametrické soustavy ploch je taková, že po její obálce E se požaduje, aby se dotýkala každé plochy S_{t_0} podél křivky.

Definice. Plochu E s parametrickým vyjádřením $f(t, \tau)$, $(t, \tau) \in D \subset \mathbb{R}^2$, nazýváme **obálka soustavy** (S_t), jestliže E se dotýká každé plochy S_{t_0} podél křivky $f(t_0, \tau)$.

Na křivce $f(t_0, \tau)$, kterou značíme C_{t_0}, je parametrem τ.

9.8 Věta. Každá obálka soustavy (S_t) je podmnožinou její charakteristické množiny.

Důkaz. Nechť $f(t, \tau)$ je parametrické vyjádření obálky E v souladu s definicí 7. Protože C_t leží na S_t, platí

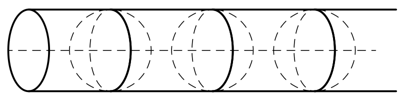
$$F\big(f_1(t,\tau), f_2(t,\tau), f_3(t,\tau), t\big) = 0\,.$$

Derivací podle t dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0\,.$$

Anulování součtu prvních tří členů znamená kolmost normály plochy S_t na vektor $\frac{\partial f}{\partial t}$. Protože E a S_t mají podél křivky C_t stejné tečné roviny, tato podmínka je splněna. Platí tedy $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. □

Z předchozího důkazu vidíme, že platí i toto obrácené tvrzení. Jestliže plocha E s parametrickým vyjádřením $f(t, \tau)$ splňuje rovnice (7), pak E je obálka soustavy (S_t).



9.9. Probereme opět jen nejjednodušší příklad jednoparametrické soustavy sfér konstantního poloměru r se středy na ose x. Máme tedy $F(x, y, z, t) = (x - t)^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial t} = -2(x - t) = 0$. Dosazení $x = t$ do první rovnice dává $y^2 + z^2 = r^2$. Samozřejmě, tato válcová plocha je obálkou uvažované soustavy.

9.10. Uvažujme průnik charakteristiky (7) s plochou S_s o rovnici $F(x, y, z, s) = 0$, $s \neq t$. Místo ní můžeme ekvivalentně připojit k (7) rovnici

$$\frac{2}{(s-t)^2}\Big[F(x,y,z,s) - F(x,y,z,t) - (s-t)\frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial t}\Big] = 0\,.$$

Limitu levé strany pro $s \to t$ spočteme tak, že dvakrát použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Tím dostáváme

(8) $$\frac{\partial^2 F(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0\,.$$

Definice. Množinu H o rovnicích

(9) $$F = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

nazýváme **hrana vratu** soustavy (S_t).

9.11 Poznámka. Příklad 9 je z hlediska konstrukce hrany vratu nezajímavý. Zde máme $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2$, takže hrana vratu je prázdná množina.

Parametrické vyjádření hrany vratu získáme výpočtem x, y, z jako funkce t z těchto rovnic.

Název hrana vratu vysvětlíme v bodech 4 a 19 následující kapitoly o přímkových plochách, když budeme hovořit o ploše tečen prostorové křivky.

9.12. Dále předpokládáme, že charakteristiky C_t jsou křivky, které jsou průsečnicemi dvou ploch $F = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ ve smyslu 4.13.

Definice. Křivku Γ s parametrickým vyjádřením $f(t)$, $t \in I$, nazýváme **obálka soustavy charakteristik** (C_t), jestliže Γ se v bodě $f(t_0)$ dotýká křivky C_{t_0} pro každé $t_0 \in I$.

9.13 Věta. Každá obálka soustavy charakteristických křivek (C_t) je podmnožinou hrany vratu. Obráceně, jestliže křivka $f(t)$ splňuje rovnice (9), tak je to obálka soustavy charakteristických křivek.

Důkaz. Nechť $f(t)$ je obálka. Protože $f(t) \in C_t$, platí

$$F\big(f_1(t), f_2(t), f_3(t), t\big) = 0\,,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}\big(f_1(t), f_2(t), f_3(t), t\big) = 0\,.$$

Derivováním druhé rovnice dostáváme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}\frac{df_1}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}\frac{df_2}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial t}\frac{df_3}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0\,. \tag{10}$$

Pro pevné t uvažujme plochu

$$\frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} = 0\,. \tag{11}$$

Její normálový vektor je

$$\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial t}\Big)\,.$$

Tento vektor je kolmý k $\frac{df}{dt}$ podle podmínky obálky, protože $\frac{df}{dt}$ leží v tečné rovině plochy (11). Součet prvních tří členů v (10) se tedy anuluje a zbývá $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$. Obrácené tvrzení získáme obráceným postupem v této úvaze. $\square$

9.14. Poznamenáváme ještě, že libovolná jednoparametrická soustava prostorových křivek nemusí mít obálku. Podobně jako dříve nalezneme, že obálka soustavy prostorových křivek

$$F(x,y,z,t) = 0\,, \quad G(x,y,z,t) = 0$$

musí splňovat také rovnice

$$\frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{\partial G(x,y,z,t)}{\partial t} = 0\,.$$

To jsou 4 rovnice pro stanovení x, y, z jako funkcí t, což obecně je příliš mnoho.

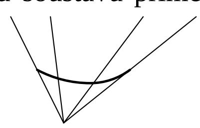
10 Přímkové plochy

10.1. Jednoparametrickou soustavou přímek v E_3 rozumíme zobrazení, které každému $t \in I$ přiřazuje přímku $p(t)$, kde I je otevřený interval. Přímka $p(t)$ se nazývá **tvořící přímka soustavy**. Tuto přímku určujeme pomocí jednoho bodu $g(t) \in p(t)$ a nenulového směrového vektoru $h(t)$. Libovolný bod přímky $p(t)$ pak má tvar

(1) $$f(t,v) = g(t) + vh(t)\,, \qquad v \in \mathbb{R}\,.$$

Podobně jako v úmluvě 1.15 nebo 4.7 budeme dále předpokládat, že $g(t)$ a $h(t)$ jsou funkce třídy C^r, kde řád r je dostatečně vysoký pro naše úvahy. Pak $f\colon I \times \mathbb{R} \to E_3$ je zobrazení třídy C^r. Jde tedy v jistém smyslu o dvouparametrický pohyb. Podmínka z definice plochy vyžaduje vedle injektivnosti f ještě to, že vektory $\frac{\partial f}{\partial t} =: f_t = g' + vh'$ a $\frac{\partial f}{\partial v} =: f_v = h$ jsou v každém bodě lineárně nezávislé. Budeme to nejprve ilustrovat na příkladech.

10.2. Nechť bod $g(t) = a$ je pevný. Tuto jednoparametrickou soustavu přímek nazýváme **obecný kužel**



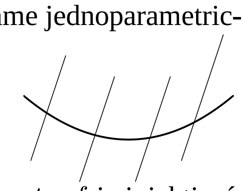
(2) $$f(t,v) = a + v\,h(t)\,.$$

V tomto případě $f_t = v\,h'$, $f_v = h$, $f_t \times f_v = v(h' \times h)$. Pro $v = 0$ dostáváme vrchol kužele, který je zřejmě singulární. Pro $v \neq 0$ musí platit $h' \times h \neq o$ pro všechna $t \in I$. Je-li to splněno, pak při injektivnosti f jde o plochu. Platí-li $h' \times h = o$ všude, máme

(3) $$\frac{\partial h}{\partial t} = k(t)\,h(t)\,,$$

kde $k(t)$ je reálná funkce. Pokud místo $h(t)$ uvažujeme reálnou funkci $z(t)$, pak separací proměnných nalezneme, že naše diferenciální rovnice má obecné řešení $z = l(t)c$, kde $l(t) = e^{\int k(t)\,dt}$. Tuto situaci máme na každé složce vektorové funkce $h(t)$, takže $h(t) = l(t)b$, kde b je konstantní vektor. V tomto případě tedy jde o dvouparametrický pohyb po přímce, ne o plochu.

10.3. Nechť $h(t) = a$ je pevný nenulový vektor. Pak dostáváme jednoparametrickou soustavu přímek, která se nazývá **obecný válec**



(4) $$f(t,v) = g(t) + va\,, \qquad t \in I,\ v \in \mathbb{R}\,.$$

Zde $f_t = g'$, $f_v = a$. Pokud je $g'(t) \times a \neq o$ pro všechna t a f je injektivní, jde o plochu. Je-li tečný vektor $g'(t)$ v nějakém bodě kolineární s vektorem a, jde o singulární případ.

10.4. Uvažujme křivku $C \equiv g(t)$ zadanou parametricky a v každém bodě $g(t)$ sestrojme její tečnu. Tato jednoparametrická soustava přímek se nazývá **plocha tečen křivky** C. Její parametrické vyjádření má tvar

$$f(t,v) = g(t) + v\,g'(t)\,. \tag{5}$$

Máme $f_t = g'(t) + v\,g''(t)$, $f_v = g'(t)$, takže

$$f_t \times f_v = -v\big(g'(t) \times g''(t)\big)\,. \tag{6}$$

Dále budeme předpokládat, že C **nemá inflexní body**. Pak vektor (6) je nulový, právě když $v = 0$, což je bod výchozí křivky.

V bodě $g'(t_0)$ vezměme normálovou rovinu $\nu(t_0)$ křivky C a zkoumejme její průnik s plochou tečen. Rovnici $\nu(t_0)$ zapíšeme ve tvaru skalárního součinu

$$\big(g'(t_0), w - g(t_0)\big) = 0\,, \quad w = (x,y,z) \in E_3\,. \tag{7}$$

Tečna v bodě $g(t)$ má parametrické vyjádření

$$g(t) + v\,g'(t)\,.$$

Označme $v(t)$ parametr jejího průsečíku s $\nu(t_0)$. Pro něj platí

$$\big(g'(t_0), g(t) + v(t)\,g'(t) - g(t_0)\big) = 0\,. \tag{8}$$

Uvažovaný průnik je pohyb v normálové rovině $\nu(t_0)$ s parametrickým vyjádřením

$$h(t) = g(t) + v(t)g'(t)\,, \qquad v(t_0) = 0\,. \tag{9}$$

Ukážeme, že platí $h'(t_0) = o$. Máme

$$h'(t_0) = g'(t_0) + v'(t_0)\,g'(t_0) + v(t_0)\,g''(t_0)\,.$$

Protože $v(t_0) = 0$, stačí dokázat $v'(t_0) = -1$. Derivováním (8) dostáváme

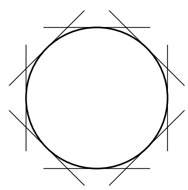
$$\big(g'(t_0), g'(t) + v'(t)\,g'(t) + v(t)\,g''(t)\big) = 0\,.$$

Dosazení $t = t_0$ dává

$$\big(g'(t_0), g'(t_0)\big) + v'(t_0)\big(g'(t_0), g'(t_0)\big) = 0\,.$$

Protože $\big(g'(t_0), g'(t_0)\big) \neq 0$, musí být $v'(t_0) = -1$.

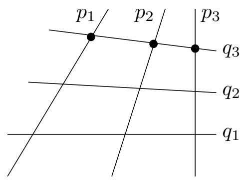
Pro pohyb $h(t)$ podmínka $h'(t_0) = o$ znamená, že $h(t_0)$ je singulární bod. Obecně je to bod vratu, viz 1.9. Je užitečné si to představit na ploše tečen šroubovice, jejíž průmět ve směru osy šroubovice je na obrázku. Takto jsme geometricky objasnili, že plocha tečen není v okolí vytvářející křivky plochou ve smyslu definice 4.6.



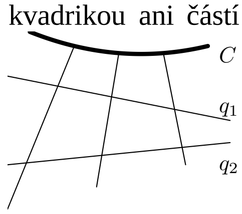
10.5. Chceme-li, abychom i v případě jednoparametrické soustavy přímek uvažovali plochu ve smyslu definice 4.6, můžeme použít tento přístup.

Definice. Plochu $S \subset E_3$ nazýváme **přímková plocha**, jestliže je částí jednoparametrické soustavy přímek.

Také v tomto případě hovoříme o tvořící přímce plochy S, i když to může být jen část přímky.

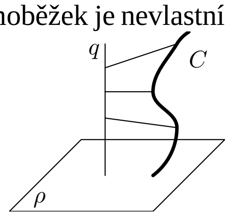


10.6. Probereme ještě dva příklady. Nejprve uvažujme 3 mimoběžky q_1, q_2, q_3. Každým bodem $p \in q_3$ vedeme příčku mimoběžek q_1, q_2, která je průsečnicí rovin určených bodem p a přímkou q_1 resp. q_2. V projektivní geometrii se ukazuje, že takto vzniká regulární přímková kvadrika. Vezmeme-li 3 přímky námi vytvořené soustavy a opakujeme konstrukci, dostáváme druhou jednoparametrickou soustavu přímek na téže regulární přímkové kvadrice.

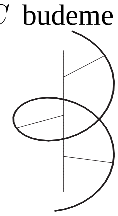


10.7. Na přímkové ploše, která není regulární přímkovou kvadrikou ani částí roviny, mohou tedy vedle tvořících přímek ležet nejvýše dvě další přímky. S tím souvisí následující obecná konstrukce. Vezmeme dvě mimoběžky q_1, q_2 a křivku C. Každým bodem křivky C vedeme příčku obou mimoběžek. Tím dostáváme jednoparametrickou soustavu přímek.

Významný pro technickou praxi je případ, kdy jedna z mimoběžek je nevlastní přímka nějaké roviny ϱ. Máme tedy dánu rovinu ϱ, přímku q a křivku C. Každým bodem křivky C pak vedeme přímku, která protíná q a je rovnoběžná s ϱ. Takto vzniklá jednoparametrická soustava přímek se nazývá **konoid**. Je-li přímka q kolmá na rovinu ϱ, hovoří se o **přímém konoidu**.



Příklad. Je-li C šroubovice, q je její osa a jako ϱ zvolíme rovinu kolmou na q, pak příslušný přímý konoid se také nazývá **přímý šroubový konoid** neboli **helikoid**. O této ploše jsme se zmiňovali v 8.18. Vezmeme q za osu z a o C budeme předpokládat, že leží na rotačním válci s jednotkovým poloměrem. Parametrické vyjádření C tedy je $(\cos t, \sin t, bt)$, $b \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Pro naši šroubovou plochu pak dostáváme



$$f(t,v) = (v\cos t, v\sin t, bt)\,, \qquad b \neq 0, v \in \mathbb{R}\,. \tag{10}$$

Snadno se nahlédne, že kinematicky tato plocha vzniká šroubováním tvořící přímky, která kolmo protíná osu q, ve směru této osy.

10.8 Definice. **Přímková plocha** se nazývá **rozvinutelná**, jestliže ve všech bodech libovolné tvořící přímky je tečná rovina plochy stejná.

Říkáme též, že tečná rovina je pevná podél tvořících přímek.

Geometricky je jasné (a početně se to snadno ověří), že tuto vlastnost mají obecné kužely a obecné válce. Ukážeme, že také pro plochu tečen křivky C je tečná rovina plochy ve všech bodech tvořící přímky stejná. Podle bodu 4, tečná rovina plochy $g(t) + vg'(t)$ v bodě $g(t_0) + v_0 g'(t_0)$, $v_0 \neq 0$, je určena tímto bodem a vektory $g'(t_0)$ a $g''(t_0)$. Pro pevné t_0 a každé $v_0 \neq 0$ tato rovina splývá s oskulační rovinou křivky C v bodě $g(t_0)$, takže je pevná podél celé přímky $g(t_0) + vg(t_0)$.

Na druhé straně, tečná rovina podél tvořící přímky regulární kvadriky není pevná. Tečná rovina je totiž určena danou tvořící přímkou a přímkou druhé soustavy, která uvažovaným bodem prochází. Druhá soustava je však tvořena příčkami mimoběžek, které nemohou ležet v jedné rovině. Také u šroubové plochy z bodu 7 se tečná rovina podél tvořící přímky mění. Z (10) totiž dostáváme

$$f_t = (-v \sin t, v \cos t, b), \quad f_v = (\cos t, \sin t, 0), \tag{11}$$

takže jednotkový vektor normály plochy je

$$\frac{f_t \times f_v}{\|f_t \times f_v\|} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + b^2}}(-b \sin t, b \cos t, -v),$$

a ten se při pevném $t = t_0$ mění v závislosti na v.

10.9. Pro další úvahy si **vyjádříme koeficienty druhé základní formy pomocí vnějšího součinu**. Víme, že vnější součin $[a, b, c]$ tří vektorů orientovaného euklidovského trojrozměrného prostoru je roven skalárnímu součinu vektorového součinu prvních dvou z nich s třetím vektorem, tj.

$$[a, b, c] = (a \times b, c).$$

Použijeme-li tuto formuli na vzorce 7.(1) a 7.(5), dostáváme

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{1}{\|f_1 \times f_2\|} [f_1, f_2, f_{11}], \\ h_{12} &= \frac{1}{\|f_1 \times f_2\|} [f_1, f_2, f_{12}], \\ h_{22} &= \frac{1}{\|f_1 \times f_2\|} [f_1, f_2, f_{22}]. \end{aligned} \tag{12}$$

Příklad. Ukážeme, že helikoid z bodu 8 je minimální plocha ve smyslu 8.18, tj. platí $H = 0$. Derivováním (11) dostáváme $f_{tt} = (-v\cos t, -v\sin t, 0)$, $f_{tv} = (-\sin t, \cos t, 0)$, $f_{vv} = o$. Tedy $h_{11} = 0$, $h_{22} = 0$. Protože také $g_{12} = 0$, vzorec 8.(15) dává $H = 0$.

10.10. Protože každá přímka na ploše je asymptotická křivka, na přímkové ploše máme jen body hyperbolické, v nichž pro Gaussovu křivost platí $K < 0$, nebo body parabolické či planární, v nichž platí $K = 0$.

Věta. Rozvinutelná přímková plocha S má nulovou Gaussovu křivost.

Důkaz. Při parametrickém vyjádření $f(t, v) = g(t) + v\,h(t)$ plochy S máme $f_1 = g'(t) + v\,h'(t)$, $f_2 = h(t)$. Pro pevné t v zaměření tečné roviny leží vektor $h(t)$ a tečná rovina je stejná pro všechna v, právě když pro každé $v_1 \neq v_2$ jsou vektory $h(t)$, $g'(t) + v_1 h'(t)$, $g'(t) + v_2 h'(t)$ komplanární. Lineární kombinace dvou posledních vektorů dávají $g'(t)$ a $h'(t)$, takže podmínka pro pevnou tečnou rovinu zní

$$\big[g'(t),\ h(t),\ h'(t)\big] = 0\,. \tag{13}$$

Dalším výpočtem dostáváme $f_{11} = g''(t) + v\,h''(t)$, $f_{12} = h'(t)$, $f_{22} = o$. Podle (12) nalezneme nejprve $h_{22} = 0$, dále

$$h_{12} = \frac{1}{\|f_1 \times f_2\|}\big[g'(t) + v\,h'(t), h(t), h'(t)\big]\,,$$

takže $h_{12} = 0$ podle (13). Ze vzorce 8.(15) pak plyne $K = 0$ nezávisle na h_{11}. □

10.11. V obráceném směru platí toto tvrzení.

Věta. Jestliže každý bod plochy S je parabolický, pak S lokálně je rozvinutelná přímková plocha.

Důkaz. Na parabolické ploše zvolme lokální parametry tak, aby vrstva asymptotických křivek byla $u_1 =$ konst.. Tedy $0 = h_{12} = (n, f_{12})$ a $0 = h_{22} = (n, f_{22})$. Víme, že platí $(n, f_1) = 0$, $(n, f_2) = 0$, $(n, n) = 1$. Derivováním podle u_2 dostáváme, podobně jako v 7.(8),

$$(n_2, f_1) = 0\,, \quad (n_2, f_2) = 0\,, \quad (n_2, n) = 0\,.$$

Odtud plyne $n_2 = o$, takže normálový vektor podle křivky $u_1 =$ konst. je pevný. Podle 7.(8) z $h_{12} = 0$ plyne $(n_1, f_2) = 0$. Derivováním tohoto vztahu podle u_2 a užitím $n_{12} = o$ dostáváme $(n_1, f_{22}) = 0$. Vektory f_2 a f_{22} jsou tedy kolmé na vektory n a n_1, které jsou lineárně nezávislé. Opravdu, vektor n_1 je kolmý na n

a je nenulový. První z rovnic 7.(8) totiž říká $(n_1, f_1) + (n, f_{11}) = 0$. V případě $n_1 = o$ tedy platí $h_{11} = 0$. Spolu s $h_{12} = 0$ a $h_{22} = 0$ to znamená, že by se jednalo o planární bod, ale tyto body neuvažujeme. Protože vektory f_2 a f_{22} jsou kolmé na dva lineárně nezávislé vektory, jsou kolineární. Každý bod křivky $u_1 =$ konst. je tedy inflexní, takže jde o část přímky. Tečná rovina podél této tvořící přímky je pevná, tedy S lokálně je rozvinutelná přímková plocha. □

10.12 Definice. **Tvořící přímka** $g(t_0) + vh(t_0)$ přímkové plochy (1) se nazývá **cylindrická**, jestliže vektor $h'(t_0)$ je kolineární s $h(t_0)$.

Věta. Přímková plocha, jejíž každá tvořící přímka je cylindrická, je obecný válec.

Důkaz. V bodě 2 jsme ukázali, že ze vztahu $\frac{dh}{dt} = k(t)\,h(t)$ plyne $h(t) = l(t)b$, kde b je konstantní vektor. Můžeme tedy psát

$$f(t, v) = g(t) + v\,l(t)b\,,$$

což je obecný válec s jinou parametrizací tvořících přímek. □

10.13. Podáme přímou geometrickou charakterizaci cylindrické přímky. Při parametrickém vyjádření $p(t) \equiv g(t) + v\,h(t)$ můžeme předpokládat, že vektor $h(t)$ je jednotkový. Pak $h(t)$ je pohyb po jednotkové sféře, který nazýváme **sférickým obrazem přímkové plochy**.

Derivování vztahu $(h, h) = 1$ dává $(h, h') = 0$, tedy vektor $h'(t)$ je kolmý na $h(t)$ pro každé t. Požadujeme-li ještě, že $h'(t_0)$ je kolineární s $h(t_0)$, musí být $h'(t_0) = o$. Odtud plyne

Věta. Tvořící přímka $p(t_0)$ přímkové plochy S je cylindrická, právě když t_0 je singulární bod sférického obrazu plochy S.

10.14. Význam slova "obecně" v následujícím tvrzení bude definován během důkazu.

Věta. Rozvinutelná přímková plocha bez cylindrických přímek je obecně buď plocha tečen nebo obecný kužel.

Důkaz. Pevnost tečné roviny znamená $[g', h, h'] = 0$. Vektor $g'(t)$ je tedy lineární kombinací

$$g'(t) = k(t)\,h(t) + l(t)\,h'(t)\,, \tag{14}$$

kde $k(t)$ a $l(t)$ jsou funkce. Pro bod $\tilde{g}(t) = g(t) - l(t)\,h(t)$ na tvořící přímce platí

$$\tilde{g}'(t) = g'(t) - l'(t)\,h(t) - l(t)\,h'(t) = \big(k(t) - l'(t)\big)\,h(t)\,.$$

Za obecný případ budeme považovat buď to, že $k(t) - l'(t) \neq 0$ pro každé t nebo $k(t) - l'(t) = 0$ pro všechna t. V prvém případě je vektor $h(t)$ kolineární s $\tilde{g}'(t)$, takže jde o plochu tečen. V druhém případě je $\tilde{g}'(t) = o$ pro všechna t, takže $\tilde{g}(t)$ je pevný bod a máme případ obecného kužele. □

10.15. Naše výsledky z bodů 12 a 14 se někdy shrnují slovy, že **plocha s nulovou Gaussovou křivostí je obecně plocha tečen nebo obecný kužel nebo obecný válec**.

10.16. Nyní se budeme zabývat obálkou jednoparametrické soustavy rovin (S_t), $t \in I$. Její rovnice tedy jsou

$$F(x, y, z, t) = a(t)x + b(t)y + c(t)z + d(t) = 0\,. \tag{15}$$

Zde $n(t) = \big(a(t), b(t), c(t)\big)$ je směrový vektor normály roviny S_t. Rovnici (15) tedy můžeme psát ve tvaru

$$\big(n(t), w\big) + d(t) = 0\,, \qquad w = (x, y, z) \in E_3\,. \tag{16}$$

Podle 9.6 je charakteristika určena ještě rovnicí $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, tj.

$$\big(n'(t), w\big) + d'(t) = 0\,. \tag{17}$$

Jestliže

$$n(t) \times n'(t) \neq o\,, \tag{18}$$

pak (16) a (17) pro každé t určují přímku. Protože (16) a (17) je soustava dvou nezávislých lineárních rovnic pro tři veličiny x, y, z, její řešení je tvaru

$$k(t) + v\,h(t)\,, \tag{19}$$

kde $k(t)$ je jedno řešení nehomogenní soustavy a $v\,h(t)$ je obecné řešené homogenizované soustavy. Za předpokladu (18) je tedy charakteristická množina jednoparametrická soustava přímek (19).

10.17. Pro hranu vratu H máme ještě rovnici $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$, tj.

$$\big(n''(t), w\big) + d''(t) = 0\,. \tag{20}$$

Předpokládejme, že vektory $n(t)$, $n'(t)$ a $n''(t)$ jsou lineárně nezávislé. Pak soustava (16), (17), (20) má pro každé t jediné řešení, které označíme $f(t)$. Tedy $f(t)$, $t \in I$, je pohyb.

Definice. Řekneme, že **jednoparametrická soustava rovin** (S_t) **je regulární**, jestliže $\big[n(t), n'(t), n''(t)\big] \neq 0$ pro všechna $t \in I$ a řešení soustavy (16), (17), (20) je křivka bez inflexních bodů.

Hrana vratu regulární soustavy rovin je tedy křivka, která odpovídá situaci z bodu 4.

10.18 Věta. Charakteristická množina regulární jednoparametrické soustavy rovin je plocha tečen její hrany vratu.

Důkaz. Parametrické vyjádření (19) charakteristické množiny můžeme volit tak, že $k(t) = f(t)$ je bod hrany vratu. Podle (16) platí

$$\big(n(t), f(t)\big) + d(t) = 0\,. \tag{21}$$

Derivování dává

$$\big(n(t), f'(t)\big) + \big(n'(t), f(t)\big) + d'(t) = 0\,. \tag{22}$$

Součet druhého a třetího členu je nulový podle (17), takže platí

$$\big(n(t), f'(t)\big) = 0\,. \tag{23}$$

Derivováním vztahu $\big(n'(t), f(t)\big) + d'(t) = 0$ dostáváme

$$\big(n'(t), f'(t)\big) + \big(n''(t), f(t)\big) + d''(t) = 0\,. \tag{24}$$

Součet druhého a třetího členu je nulový podle (20). Vektor $f'(t)$ tedy splňuje rovnice

$$\big(n(t), f'(t)\big) = 0\,, \quad \big(n'(t), f'(t)\big) = 0\,. \tag{25}$$

To je homogenizovaná soustava k (16) a (17). Stejnou soustavu splňuje vektor $h(t)$. Tedy $f'(t)$ a $h(t)$ jsou kolineární vektory, takže v (19) můžeme vektor $h(t)$ nahradit vektorem $f'(t)$. Protože jsme volili $k(t) = f(t)$, (19) má tvar $f(t) + v\, f'(t)$. To je plocha tečen hrany vratu. □

10.19. V případě obálky regulární jednoparametrické soustavy rovin vzniká situace, která je popsána v bodě 4. Název hrana vratu má zde tedy jasnou geometrickou motivaci. Podobné geometrické důvody jsou i pro rozšíření názvu hrana vratu na obecnější situaci z bodu 9.10.

11 Isometrická zobrazení

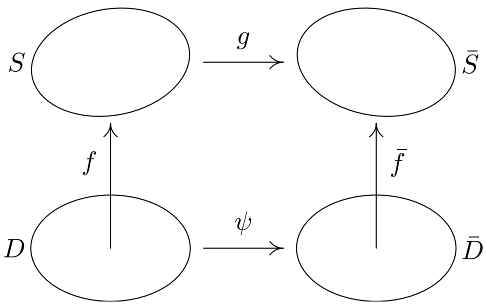
11.1. Nechť D, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ jsou otevřené množiny. Zobrazení $\varphi\colon D \to \bar{D}$ je určeno dvojicí číselných funkcí φ_1, $\varphi_2\colon D \to \mathbb{R}$, které nazýváme **složky zobrazení** φ. Označíme-li u_1, u_2 souřadnice v D a v_1, v_2 souřadnice v $\bar{D}$, máme $v_1 = \varphi_1(u_1, u_2)$, $v_2 = \varphi_2(u_1, u_2)$.

Definice. Řekneme, že φ je **zobrazení třídy** C^r, jestliže φ_1 i φ_2 jsou funkce třídy C^r.

Všude dále předpokládáme, že φ je zobrazení třídy C^r, $r \geq 1$.

11.2 Definice. Determinant $J(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}$ nazýváme **Jacobián zobrazení** φ.

11.3. Budeme studovat zobrazení $g\colon S \to \bar{S}$ mezi dvěma jednoduchými plochami třídy C^r. Předpokládejme, že S a $\bar{S}$ jsou zadány parametricky $f(u_1, u_2)$, $(u_1, u_2) \in D$ a $\bar{f}(v_1, v_2)$, $(v_1, v_2) \in \bar{D}$. Zobrazení g určuje jediné zobrazení $\psi\colon D \to \bar{D}$ takové, že $g \circ f = \bar{f} \circ \psi$. Tedy ψ vyjadřuje g v oblasti parametrů. Obráceně, máme-li zadáno ψ, je tím určeno g.



Definice. Řekneme, že $g\colon S \to \bar{S}$ je **zobrazení třídy** C^r, jestliže jím určené zobrazení $\psi\colon D \to \bar{D}$ je třídy C^r.

11.4. V předchozí definici se využívá parametrizací ploch S a $\bar{S}$. Ukážeme, že třída diferencovatelnosti zobrazení g nezávisí na volbě parametrizací f a $\bar{f}$. Nejprve probereme změnu parametrizace $f(u_1, u_2)$ plochy S, $(u_1, u_2) \in D$.

Uvažujme bijektivní zobrazení $\varphi\colon \bar{D} \to D$ třídy C^r, $\varphi = \big(\varphi_1(v_1, v_2), \varphi_2(v_1, v_2)\big)$, $(v_1, v_2) \in \bar{D}$. Pak $\bar{f} = f \circ \varphi$ je opět zobrazení třídy C^r. U parametrizace plochy máme ještě podmínku $f_1 \times f_2 \neq o$. Označíme-li $\bar{f}_1 = \partial_1(f \circ \varphi)$,

$\bar{f}_2 = \partial_2(f \circ \varphi)$, dostáváme podle pravidla pro derivování složené funkce

$$(1) \qquad \bar{f}_1 = f_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_1}\,, \quad \bar{f}_2 = f_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2} + f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_2}\,.$$

Tedy

$$\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2} \Big)\, f_1 \times f_2 = J(\varphi)\, f_1 \times f_2\,.$$

Definice. Bijektivní zobrazení $\varphi\colon \bar{D} \to D$ třídy C^r nazýváme **reparametrizace**, jestliže $J(\varphi) \neq 0$ pro všechna $(v_1, v_2) \in \bar{D}$.

11.5. Nyní je jasné, že definice 3 nezávisí na volbě parametrizací. Na S proveďme reparametrizaci $\varphi\colon D_1 \to D$ a na S reparametrizaci $\bar{\varphi}\colon \bar{D}_1 \to \bar{D}$. Pak $\bar{\varphi}^{-1}\colon \bar{D} \to \bar{D}_1$ je také zobrazení třídy C^r (to přímo plyne ze zobecněné věty o implicitní funkci, viz skriptum [5]). V definici 3 pak místo zobrazení ψ máme $\bar{\varphi}^{-1} \circ \psi \circ \varphi$, což je rovněž zobrazení třídy C^r.

11.6. Pro pohyb na ploše budeme dále systematicky užívat název **dráha**, který je v této oblasti diferenciální geometrie obvyklý.

Zkoumejme nejprve zobrazení $\psi\colon D \to \bar{D}, v_1 = \psi_1(u_1, u_2), v_2 = \psi_2(u_1, u_2)$. Samo D jako část roviny je plocha, takže pro každý bod $u \in D$ máme tečný prostor $T_u D$, který splývá s $\mathbb{R}^2$. Jeho prvky jsou tečné vektory v nule ke dráhám $h(t)$, $h\colon I \to D$, $h(0) = u$, kde předpokládáme $0 \in I$. Souřadnice tečného vektoru jsou $\frac{dh_1(0)}{dt}$, $\frac{dh_2(0)}{dt}$. Uvažujme dráhu $\psi \circ h\colon I \to \bar{D}$. Souřadnice jejího tečného vektoru pro $t = 0$, které získáme derivováním složených funkcí $\psi_1\big(h_1(t), h_2(t)\big)$ a $\psi_2\big(h_1(t), h_2(t)\big)$, jsou

$$(2) \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} \frac{dh_1(0)}{dt} + \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} \frac{dh_2(0)}{dt}\,, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial u_1} \frac{dh_1(0)}{dt} + \frac{\partial \psi_2}{\partial u_2} \frac{dh_2(0)}{dt}\,.$$

Odtud plyne, že tečný vektor $\frac{d(\psi \circ h)(0)}{dt}$ je určen pouze vektorem $\frac{dh(0)}{dt}$. S přihlédnutím k lineárnosti výrazů (2) dostáváme

Větu. Pravidlo $\frac{dh(0)}{dt} \mapsto \frac{d(\psi \circ h)(0)}{dt}$ určuje lineární zobrazení $T_u\psi\colon T_u D \to T_{\psi(u)} \bar{D}$ pro každé $u \in D$.

Definice. Toto zobrazení nazýváme **tečné zobrazení k zobrazení ψ v bodě u**.

Označíme-li (du_1, du_2) souřadnice v $T_u D$ a (dv_1, dv_2) souřadnice v $T_{\psi(u)} \bar{D}$, pak (2) lze psát ve tvaru

$$(3) \qquad dv_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2}\, du_2\,, \quad dv_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial u_2}\, du_2\,.$$

Jde tedy o diferenciály funkcí ψ_1 a ψ_2.

11.7. Uvažujme původní zobrazení $g\colon S \to \bar{S}$ a označme $p = f(u) \in S$. Uvažujme tečný prostor T_pS a v něm vektor A, který je tečný ke dráze $\gamma(t)$ na S, $A = \frac{d\gamma(0)}{dt}$. Pak $g \circ \gamma$ je dráha na $\bar{S}$ a tečný vektor $\frac{d(g\circ\gamma)(0)}{dt}$ k této dráze závisí jen na A. Opravdu, v parametrizacích jde právě o výraz (2). Tím jsme dokázali

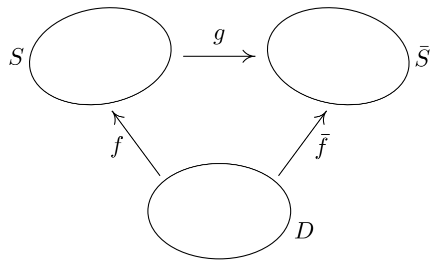
Větu. Pravidlo $\frac{d\gamma(0)}{dt} \mapsto \frac{d(g\circ\gamma)(0)}{dt}$ určuje lineární zobrazení $T_pg\colon T_pS \to T_{g(p)}\bar{S}$.

Definice. Zobrazení T_pg nazýváme **tečné zobrazení k zobrazení** g **v bodě** p.

11.8 Definice. Řekneme, že zobrazení $g\colon S \to \bar{S}$ je **isometrické**, jestliže každé tečné zobrazení $T_pg\colon T_pS \to T_p\bar{S}$, $p \in S$, zachovává skalární součin.

To znamená $(A, B) = \big(T_pg(A), T_pg(B)\big)$ pro každé $A, B \in T_pS$.
Je-li g bijektivní, pak hovoříme o **isometrii** ploch S a $\bar{S}$.

11.9. Bijektivní zobrazení $g\colon S \to \bar{S}$ můžeme realizovat tak, že vezmeme společnou oblast parametrů D a odpovídající si body jsou $f(u_1, u_2) \in S$ a $\bar{f}(u_1, u_2) \in \bar{S}$. V tomto případě říkáme, že zobrazení g **je dáno rovností parametrů**.



Věta. Bijekce $g\colon S \to \bar{S}$ daná rovností parametrů je isometrie, právě když první základní formy Φ_1 a $\bar{\Phi}_1$ ploch S a $\bar{S}$ jsou stejné.

Důkaz. Báze v T_pS je dána vektory f_1, f_2, báze v $T_{g(p)}\bar{S}$ je dána vektory $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ a T_pg má tvar $du_1 = du_1$, $du_2 = du_2$. Podle 6.1 skalární součiny tečných vektorů k S i $\bar{S}$ jsou dány první základní formou. $\square$

Podmínka $\Phi_1 = \bar{\Phi}_1$ explicitně znamená $g_{11} = \bar{g}_{11}$, $g_{12} = \bar{g}_{12}$, $g_{22} = \bar{g}_{22}$, kde pruhované veličiny jsou spočteny na ploše $\bar{S}$ v týchž parametrech (u_1, u_2).

11.10. Následující tvrzení zdůvodňuje název isometrie.

Věta. Bijekce $g\colon S \to \bar{S}$ je isometrie, právě když zachovává délky křivek.

Důkaz. Bijekci g můžeme zadat rovností parametrů. Protože délka křivky $\big(u_1(t), u_2(t)\big)$, $t \in [a, b]$ je

(4) $$s = \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + g_{22}\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2}\,dt\,,$$

z věty 9 plyne, že při isometrii jsou délky odpovídajících si křivek stejné. Obráceně, jsou-li délky křivek s týmž parametrickým vyjádřením stejné, pak i délky jejich tečných vektorů jsou stejné podle (4). Tedy lineární zobrazení $T_p g$ pro každé $p \in S$ zachovává velikosti vektorů. Z lineární algebry víme, že takové zobrazení zachovává i skalární součin. $\square$

11.11. Geometricky je evidentní, že rotační válcová plocha $f(u) = (r\cos u_1, r\sin u_1, u_2)$, $u_1 \in (0, 2\pi)$, $u_2 \in \mathbb{R}$ je isometrická rovinnému pruhu $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Fyzikálně tato isometrie vzniká rozvinutím válcové plochy do roviny. Ověříme to i početně užitím věty 9. Pro válcovou plochu máme $f_1 = (-r\sin u_1, r\cos u_1, 0)$, $f_2 = (0, 0, 1)$, takže $g_{11} = r^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$. Rovinu $z = 0$ lze parametricky vyjádřit ve tvaru $\bar{f}(u) = (ru_1, u_2, 0)$. Tedy $\bar{f}_1 = (r, 0, 0)$, $\bar{f}_2 = (0, 1, 0)$ a $\bar{g}_{11} = r^2$, $\bar{g}_{12} = 0$, $\bar{g}_{22} = 1$ stejně jako u válcové plochy.

11.12 Definice. **Vnitřní geometrií plochy** S rozumíme ty její vlastnosti, které se zachovávají při isometriích.

Podle věty 9 patří tedy do vnitřní geometrie plochy ty její vlastnosti, které lze odvodit z první základní formy. O těch vlastnostech plochy S, které podstatně závisejí na druhé základní formě, se také říká, že patří do **vnější geometrie plochy**.

11.13. Pojem vnitřní geometrie plochy vznikl nad Gaussovými pracemi. On odvodil její nejvýznamnější tvrzení. Je to hluboký výsledek, který dokážeme v následující kapitole ve 12.14. Gauss sám si ho latinsky nazval Theorema egregium (v překladu: znamenitá věta). Nechť K_S značí totální křivost plochy S a $K_{\bar{S}}$ totální křivost plochy $\bar{S}$.

Teoréma egregium (Gauss). Je-li $g\colon S \to \bar{S}$ isometrie, pak $K_S(p) = K_{\bar{S}}\big(g(p)\big)$ pro všechna $p \in S$.

Je třeba zdůraznit, že obě hlavní křivosti nepatří do vnitřní geometrie plochy (při jejich výpočtu se podstatně užívá druhá základní forma), jejich součin však ano.

11.14 Příklad. Otevřená množina v rovině nemůže být isometrická otevřené množině na sféře. Opravdu, totální křivost roviny je nulová a totální křivost sféry o poloměru r je $\frac{1}{r^2}$.

11.15. Připomínáme, že okolím na ploše S bodu $p \in S$ rozumíme průnik okolí bodu p v E_3 s plochou S.

Definice. Plocha S se nazývá **rozvinutelná**, jestliže každý bod $p \in S$ má okolí, které je isometrické otevřené množině v rovině.

Tato isometrie se chápe jako rozvinutí příslušné části plochy do roviny, viz příklad 11, což zdůvodňuje použitý název. Na druhé straně, v 10.8 jsem zavedli pojem rozvinutelná přímková plocha. Shoda názvů je založena na tom, že oba pojmy téměř splývají, jak nyní ukážeme. Při potřebě rozlišení budeme v případě právě zavedené definice hovořit o rozvinutelnosti v metrickém smyslu.

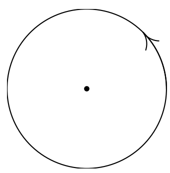
11.16. Uvažujme obecný válec. Osu z zvolme rovnoběžně s tvořícími přímkami válce, za křivku g vezměme řez válce rovinou $z = 0$ a parametrizujme ji obloukem. Parametrické vyjádření našeho válce je

$$f(s, v) = \big(g_1(s), g_2(s), v\big)\,.$$

Tedy $f_1 = (g_1', g_2', 0)$, $f_2 = (0, 0, 1)$, $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$. Při parametrizaci roviny $\bar f(s, v) = (s, v, 0)$ dostáváme stejně $\bar g_{11} = 1$, $\bar g_{12} = 0$, $\bar g_{22} = 1$. Rovnost parametrů tedy dává lokální isometrii obou ploch.

11.17. Uvažujme obecný kužel s vrcholem v počátku, takže $f(t, v) = g(t)\,v$. Přitom můžeme ještě předpokládat, že křivka g je parametrizována obloukem s a $\|g(s)\| = 1$ pro všechna s. Tedy $f_1 = g'(s)\,v$, $f_2 = g(s)$, takže $g_{11} = v^2$, $g_{22} = 1$ a $g_{12} = 0$, neboť vektory $g(s)$ a $g'(s)$ jsou kolmé.

Jestliže v rovině zvolíme za g jednotkovou kružnici $k(s)$, můžeme rovinu lokálně parametrizovat ve tvaru $\bar f(s, v) = k(s)\,v$. Tedy $\bar g_{11} = v^2$, $\bar g_{12} = 0$, $\bar g_{22} = 1$, což dokazuje lokální isometrii obecného kužele a roviny.



11.18. Uvažujme plochu tečen $g(t) + vg'(t)$ křivky C. Jako parametr na C vezmeme oblouk. Z hlediska Frenetových rovnic můžeme psát parametrické vyjádření naší plochy ve tvaru

$$f(s, v) = g(s) + ve_1(s)\,.$$

Tedy $f_1 = e_1(s) + v\varkappa(s)\,e_2(s)$, $f_2 = e_1(s)$, takže $g_{11} = 1 + v^2\,\varkappa^2(s)$, $g_{12} = 1$, $g_{22} = 1$. V rovině uvažujme křivku $\bar g(s)$, která lokálně má stejnou křivost jako prostorová křivka C, a zaveďme lokální parametrizaci roviny $\bar f(s, v) = \bar g(s) + v\,\bar g'(s)$. To lze také psát ve tvaru

$$\bar f(s, v) = \bar g(s) + v\,\bar e_1(s)\,.$$

Máme $\bar f_1 = \bar e_1(s) + v\,\varkappa(s)\,\bar e_2(s)$, $\bar f_2 = \bar e_1(s)$. I zde platí $\bar g_{11} = 1 + v^2\varkappa^2(s)$, $\bar g_{12} = 1$, $\bar g_{22} = 1$. Sestrojili jsme tedy lokální isometrii plochy tečen s rovinou.

11.19. V 10.11 jsme dokázali, že plocha s nulovou Gaussovou křivostí, na níž nejsou planární body, je lokálně rozvinutelná plocha přímková. Z 10.15 víme, že rozvinutelná plocha přímková obecně je plocha tečen nebo obecný válec nebo obecný kužel. O těchto plochách jsme nyní dokázali, že jsou rozvinutelné v metrickém smyslu. Při jiném přístupu, kterým se zde již nebudeme zabývat, se dá dokázat následující tvrzení (viz též větu 14.6).

Věta. Plocha S je lokálně isometrická rovině, právě když má nulovou Gaussovu křivost.

12 Paralelní přenášení vektorů po ploše

12.1. Uvažujme plochu $S \subset E_3$ a dráhu $\gamma\colon I \to S$ na ní. Zaměření prostoru E_3 značíme V.

Definice. Zobrazení $A\colon I \to V$ nazýváme **tečné vektorové pole plochy** S **podél dráhy** γ, jestliže $A(t) \in T_{\gamma(t)}S$ pro všechna $t \in I$.

Nulové tečné vektory podél γ tvoří pole, které značíme 0_γ. Je-li A tečné vektorové pole podél γ a $g\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce, pak $g(t)A(t)$ je opět tečné vektorové pole podél γ. Jsou-li A_1 a A_2 dvě tečná vektorová pole podél γ, pak i $A_1(t)+A_2(t)$ je tečné vektorové pole podél γ.

12.2. Připomínáme, že N_pS značí normálu plochy S v bodě p. Následující definice má pro diferenciální geometrii ploch zásadní význam.

Definice. Řekneme, že **tečné vektorové pole** A **podél dráhy** γ **je tvořeno vektory paralelními na** S, jestliže $\frac{dA}{dt} \in N_{\gamma(t)}S$ pro všechna $t \in I$.

12.3. Vektor $\frac{dA}{dt}$ se v každém bodě dráhy $\gamma(t)$ rozkládá do směru tečné roviny $T_{\gamma(t)}S$ a normály $N_{\gamma(t)}S$. Tečné složky představují opět tečné vektorové pole plochy S podél γ.

Definice. Tečné vektorové pole $\frac{\nabla A}{dt}$ plochy S podél dráhy γ, které je tvořeno tečnými složkami vektorů $\frac{dA}{dt}$, nazýváme **kovariantní derivací tečného vektorového pole** A **plochy** S **podél dráhy** γ.

Pole A je tedy tvořeno vektory paralelními na S, právě když $\frac{\nabla A}{dt}$ je nulové pole podél γ.

12.4. Nalezneme souřadné vyjádření pro $\frac{\nabla A}{dt}$. Protože vektory f_1, f_2, n jsou v každém bodě plochy lineárně nezávislé, platí pro druhé parciální derivace rozklady

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= \Gamma^1_{11}(u_1,u_2)\, f_1 + \Gamma^2_{11}(u_1,u_2)\, f_2 + h_{11}(u_1,u_2)\, n\,,\\
f_{12} &= \Gamma^1_{12}(u_1,u_2)\, f_1 + \Gamma^2_{12}(u_1,u_2)\, f_2 + h_{12}(u_1,u_2)\, n\,,\\
f_{22} &= \Gamma^1_{22}(u_1,u_2)\, f_1 + \Gamma^2_{22}(u_1,u_2)\, f_2 + h_{22}(u_1,u_2)\, n\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Skalární násobení každé z rovnic jednotkovým vektorem n kolmým na f_1 a f_2 ukazuje, že koeficienty při n jsou opravdu koeficienty druhé základní formy, jak označení napovídá.

Definice. Funkce Γ^i_{jk}, $i,j,k = 1,2$, $\Gamma^i_{21} = \Gamma^i_{12}$, nazýváme **Christoffelovy symboly plochy** S příslušné parametrizaci $f(u_1,u_2)$.

12.5. Nechť dráha $\gamma(t)$ je dána parametricky $\big(u_1(t), u_2(t)\big)$ a nechť $A(t) = \big(U_1(t), U_2(t)\big)$. Tedy

$$A(t) = U_1(t)\, f_1\big(u_1(t), u_2(t)\big) + U_2(t)\, f_2\big(u_1(t), u_2(t)\big)\,. \tag{2}$$

Odtud přímo spočteme a upravíme užitím (1)

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} =& \frac{dU_1}{dt}\, f_1 + U_1\Big(f_{11}\frac{du_1}{dt} + f_{12}\frac{du_2}{dt}\Big) + \frac{dU_2}{dt}\, f_2 + U_2\Big(f_{12}\frac{du_1}{dt} + f_{22}\frac{du_2}{dt}\Big) \\
=& \left[\frac{dU_1}{dt} + \Gamma^1_{11}U_1\frac{du_1}{dt} + \Gamma^1_{12}\Big(U_1\frac{du_2}{dt} + U_2\frac{du_1}{dt}\Big) + \Gamma^1_{22}U_2\frac{du_2}{dt}\right] f_1 \\
&+ \left[\frac{dU_2}{dt} + \Gamma^2_{11}U_1\frac{du_1}{dt} + \Gamma^2_{12}\Big(U_1\frac{du_2}{dt} + U_2\frac{du_1}{dt}\Big) + \Gamma^2_{22}U_2\frac{du_2}{dt}\right] f_2 + (\dots)n\,.
\end{aligned}$$

kde výraz u n nás nezajímá. Označíme-li $\frac{\nabla U_1}{dt}$, $\frac{\nabla U_2}{dt}$ souřadnice tečného vektorového pole $\frac{\nabla A}{dt}$ podél γ, máme

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla U_1}{dt} &= \frac{dU_1}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^1_{ij}\big(u(t)\big)U_i\frac{du_j}{dt}\,, \\
\frac{\nabla U_2}{dt} &= \frac{dU_2}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^2_{ij}\big(u(t)\big)U_i\frac{du_j}{dt}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

12.6. Pro první seznámení se s vzorci (3) odvodíme

Větu. Pro tečná vektorová pole A, B plochy S podél dráhy γ a funkci $g\colon I \to \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\nabla(A+B)}{dt} = \frac{\nabla A}{dt} + \frac{\nabla B}{dt}\,, \qquad \frac{\nabla(gA)}{dt} = \frac{dg}{dt}A + g\frac{\nabla A}{dt}\,. \tag{4}$$

Důkaz. To přímo plyne z (3). ☐

12.7. Následující tvrzení ukazuje, že paralelní přenášení podél zadané dráhy má podobné vlastnosti jako paralelní přenášení vektorů v rovině.

Věta. Pro každou dráhu $\gamma\colon I \to S$, každé $t_0 \in I$ a každý vektor $A_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$ existuje právě jedno tečné vektorové pole podél γ splňující $A(t_0) = A_0$, které je tvořeno vektory paralelními na S.

Důkaz. Při dané dráze γ podmínka anulování rovnic (3) tvoří soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic. Hodnota A_0 představuje počáteční podmínku pro tuto soustavu. Ta řešení jednoznačně určuje. ☐

12.8 Definice. Říkáme, že tečné vektorové pole A z věty 7 představuje **paralelní přenášení vektoru A podél dráhy γ na ploše S.**

Předpokládejme, že dráha $\gamma(t)$ je parametrizací jednoduché křivky C na S. Při reparametrizaci $t = \varphi(\tau)$ křivky C dostáváme jinou dráhu $\gamma \circ \varphi$. Když tuto změnu parametrizace dosadíme do (3), derivace podle t se násobí $\frac{d\varphi}{d\tau}$. Protože výrazy (3) jsou lineární v $\frac{dU_i}{dt}$ a $\frac{du_i}{dt}$, $i = 1, 2$, diferenciální rovnice $\frac{\nabla U_i}{dt} = 0$, $i = 1, 2$, pro paralelní přenášení jsou rovnocenné s $\frac{\nabla(U_i \circ \varphi)}{d\tau} = 0$. Geometricky to znamená, že při různých parametrizacích téže křivky C na S dostáváme totéž paralelní přenášení vektorů. Hovoříme tedy nejen o paralelním přenášení vektorů podél dráhy na S, ale také o **paralelním přenášení vektorů podél křivky na S.**

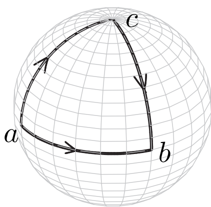
12.9 Věta. Jestliže tečné vektorové pole A resp. B podél dráhy γ představuje paralelní přenášení vektoru $A_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$ resp. $B_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$, pak pole $k_1A + k_2B$ představuje paralelní přenášení vektoru $k_1A_0 + k_2B_0$, k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Věta 6 pro konstantní $g = k$ dává $\frac{\nabla(kA)}{dt} = k\frac{\nabla A}{dt}$. Tedy $\frac{\nabla(k_1A+k_2B)}{dt} = k_1\frac{\nabla A}{dt} + k_2\frac{\nabla B}{dt}$. Z anulování pravé strany plyne anulování strany levé. □

Geometricky řečeno, paralelní přenášení zachovává lineární kombinace vektorů.

12.10 Příklad. Uvažujeme-li rovinu ϱ jako plochu v E_3, pak pro každé tečné vektorové pole $A(t) = \big(U_1(t), U_2(t)\big)$ podél libovolné dráhy $\gamma(t)$ v ϱ je normálová složka vektoru $\frac{dA}{dt}$ nulová, takže $A(t)$ se paralelně přenáší podle γ, právě když $\frac{dA}{dt} = 0$, tedy $U_1(t)$ a $U_2(t)$ jsou konstanty. To je klasické paralelní přenášení v rovině. Toto přenášení nezávisí na dráze.

Ukážeme však, že již na sféře S paralelní přenášení vektorů na dráze závisí. Uvažujme osminu sféry podle obrázku. Hlavní kružnice v rovině $z = 0$ má parametrické vyjádření $f(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Její tečný vektor je $v(t) = \frac{df}{dt} = (-r\sin t, r\cos t)$. Tedy $\frac{dv}{dt} = (-r\cos t, -r\sin t)$. Vektor normály sféry v bodě $f(t)$ je $(\cos t, \sin t)$, takže $\frac{dv}{dt} \in N_{f(t)}S$. Tečné vektory k hlavní kružnici se tedy podél ní paralelně přenášejí. Označme a bod s parametrem $t = 0$ a b bod s parametrem $t = \frac{\pi}{2}$.



Přenášejme tentýž vektor $v = v(0)$ podél hlavní kružnice v rovině kolmé na v do bodu c o parametru $\frac{\pi}{2}$. Podél této křivky máme konstantní vektor v, takže $\frac{dv}{dt} = o$. Pokračujme v přenášení podle menšího oblouku hlavní kružnice z bodu c do b. Zde přenášíme opět tečné vektory podél hlavní kružnice, takže jde o paralelní přenášení. — Výsledkem přenesení vektoru v do bodu b po dvou různých dráhách I a II jsou tedy dva různé vektory, které dokonce jsou na sebe kolmé. Druhá dráha je sice jen po částech diferencovatelná, ale její “zlom” v bodě c není příčinou různých výsledků paralelního přenosu vektoru v po dráhách I a II.

12.11. Rozklady (1) lze použít i k výpočtu Christoffelových symbolů. Velmi jednoduchou proceduru dostáváme v případě, že parametrická síť je ortogonální, tedy $g_{12} = (f_1, f_2) = 0$. Probereme případ sféry

$$f(u_1, u_2) = r(\cos u_1 \cos u_2, \sin u_1 \cos u_2, \sin u_2)$$

z 6.4. Tam jsme nalezli

$$\begin{aligned} &f_1 = r(-\sin u_1 \cos u_2, \cos u_1 \cos u_2, 0)\,, \\ (5)\qquad &f_2 = r(-\cos u_1 \sin u_2, -\sin u_1 \sin u_2, \cos u_2)\,, \end{aligned}$$

$$g_{11} = (f_1, f_1) = r^2 \cos^2 u_2\,, \quad g_{12} = (f_1, f_2) = 0\,, \quad g_{22} = (f_2, f_2) = r^2\,.$$

Dalším derivováním dostáváme

$$\begin{aligned} &f_{11} = r(-\cos u_1 \cos u_2, -\sin u_1 \cos u_2, 0)\,, \\ (6)\qquad &f_{12} = r(\sin u_1 \sin u_2, -\cos u_1 \sin u_2, 0)\,, \\ &f_{22} = r(-\cos u_1 \cos u_2, -\sin u_1 \cos u_2, -\sin u_2)\,. \end{aligned}$$

Rovnice (1) skalárně násobíme postupně vektory f_1 a f_2, přičemž skalární součiny na levé straně musíme vyčíslit. Takto dostáváme

$$0 = \Gamma^1_{11} r^2 \cos^2 u_2, r^2 \sin u_2 \cos u_2 = \Gamma^2_{11} r^2, -r^2 \sin u_2 \cos u_2 = \Gamma^1_{12} r^2 \cos^2 u_2\,,$$
$$0 = \Gamma^2_{12} r^2\,, \quad 0 = \Gamma^1_{22} r^2 \cos u_2\,, \quad 0 = \Gamma^2_{22} r^2.$$

Tedy

$$\Gamma^1_{11} = 0\,,\ \Gamma^2_{11} = \sin u_2 \cos u_2\,,\ \Gamma^1_{12} = -\operatorname{tg}\, u_2\,,\ \Gamma^2_{12} = 0\,,\ \Gamma^1_{22} = 0\,,\ \Gamma^2_{22} = 0\,.$$

12.12. Následující věta je především zásadní teoretický výsledek. Rovnice (7) ukazují, že Christoffelovy symboly lze vyjádřit pomocí koeficientů první základní formy. **Paralelní přenášení vektorů po ploše patří tedy do vnitřní geometrie plochy**.

Protože $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$, čtvercová (2×2)-matice (g_{ij}) je regulární. Označme $(\tilde{g}_{kl})$ matici k ní inverzní.

Věta. Platí

$$(7)\qquad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} \tilde{g}_{kl} \Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \Big)\,.$$

Důkaz. Derivováním vztahu $(f_i, f_j) = g_{ij}$ podle u_l dostáváme

(8) $$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} = (f_{il}, f_j) + (f_i, f_{jl})\,.$$

Podle (1) máme $f_{ij} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij}^m f_m + h_{ij} n$. Dosazením dostáváme

$$(f_{il}, f_j) = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{il}^m g_{mj}\,.$$

Tedy (8) můžeme přepsat jako

(9) $$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} = \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{il}^m g_{mj} + \Gamma_{jl}^m g_{mi}\right).$$

Další dvě rovnice získáme záměnou indexů

(10) $$\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} = \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{ij}^m g_{ml} + \Gamma_{lj}^m g_{mi}\right),$$

(11) $$\frac{\partial g_{lj}}{\partial u_i} = \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{ji}^m g_{ml} + \Gamma_{li}^m g_{mj}\right).$$

Sečtením $(10) + (11) - (9)$ s přihlédnutím k symetrii g_{ij} a Γ_{ij}^k v dolních indexech dostáváme

(12) $$\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} = 2\sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij}^m g_{ml}\,.$$

Vydělíme číslem 2 a pro pevné i, j uvažujeme (Γ_{ij}^m) jako dvourozměrný řádkový vektor. Pak maticový tvar pravé strany (12) je $(\Gamma_{ij}^m)(g_{ml})$. Neznámé Γ_{ij}^m spočteme násobením inverzní maticí $(\tilde{g}_{kl})$. To dává (7). □

12.13. Samozřejmě, (7) může sloužit i jako vzorec pro výpočet Christoffelových symbolů. Jednoduchým příkladem je obecný válec z 11.16. Tam jsme nalezli $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$. Všechny parciální derivace ve vzorci (7) jsou tedy nulové, protože jde o derivace konstant. Všechny Christoffelovy symboly obecného válce jsou tedy nulové.

12.14. Nyní dokážeme Gaussovu teorému egregium. Vyjdeme z rovnic (1), které budeme psát ve tvaru

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^{l} f_l + h_{ij} n \,. \tag{13}$$

Označíme $f_{ijk} = \frac{\partial^3 f}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}$, $\Gamma_{ij,k}^{l} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{l}}{\partial u_k}$, $n_i = \frac{\partial n}{\partial u_i}$, $h_{ij,k} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_k}$. Rovnice 7.(8) zapíšeme ve tvaru

$$(n_i, f_j) = -h_{ij} \,. \tag{14}$$

Derivováním (13) podle u_k dostáváme

$$f_{ijk} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij,k}^{m} f_m + \sum_{n=1}^{2} \Gamma_{ij}^{n} f_{nk} + h_{ij,k} n + h_{ij} n_k \,. \tag{15}$$

Podle (13) pro druhý člen na pravé straně platí

$$\sum_{n=1}^{2} \Gamma_{ij}^{n} f_{nk} = \sum_{m,n=1}^{2} \Gamma_{ij}^{n} (\Gamma_{nk}^{m} f_m + h_{nk} n) \,. \tag{16}$$

Skalárním násobením (15) vektorem f_l dostáváme, s užitím (14),

$$(f_{ijk}, f_l) = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ij,k}^{m} g_{ml} + \sum_{m,n=1}^{2} \Gamma_{ij}^{n} \Gamma_{nk}^{m} g_{ml} - h_{ij} h_{kl} \,. \tag{17}$$

Protože ze symetrie třetích parciálních derivací plyne $f_{ikj} = f_{ijk}$, musí (17) platit i při výměně j a k. Odečtením obou vztahů získáváme

$$h_{ij} h_{kl} - h_{ik} h_{jl} = \sum_{m=1}^{2} g_{ml} \left[\Gamma_{ij,k}^{m} - \Gamma_{ik,j}^{m} + \sum_{n=1}^{2} (\Gamma_{ij}^{n} \Gamma_{nk}^{m} - \Gamma_{ik}^{n} \Gamma_{nj}^{m}) \right] . \tag{18}$$

Pro $i = 1$, $j = 1$, $k = 2$, $l = 2$ dostáváme

Větu (Gaussova rovnice). Platí

$$h_{11} h_{22} - h_{12}^2 = \sum_{m=1}^{2} g_{m2} \left[\Gamma_{11,2}^{m} - \Gamma_{12,1}^{m} + \sum_{n=1}^{2} (\Gamma_{11}^{n} \Gamma_{n2}^{m} - \Gamma_{12}^{n} \Gamma_{n1}^{m}) \right] . \tag{19}$$

□

Podle věty 12 pravá strana závisí jen na koeficientech g_{ij} první základní formy a jejích parciálních derivacích prvního a druhého řádu. V 8.9 jsme nalezli $K = (h_{11}h_{22} - h_{12}^2)/(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$. Tedy Gaussova křivost K patří do vnitřní geometrie plochy, jak tvrdí teoréma egregium.

Poznamenáváme, že při dosazení jiných indexů i, j, k, l do (18) dostáváme buď stejnou rovnici (19) nebo identitu.

12.15. Informace. Jestliže podobně rozložíme vektory n_i, $i = 1, 2$ do repéru f_1, f_2, n a vyčíslíme vztah $\frac{\partial n_i}{\partial u_j} = \frac{\partial n_j}{\partial u_i}$ $\left(= \frac{\partial^2 n}{\partial u_i \partial u_j}\right)$, dostáváme tzv. **Codazziho rovnice** (podstatné jsou dvě)

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} + \sum_{l=1}^{2} (\Gamma_{ij}^l h_{lk} - \Gamma_{ik}^l h_{lj}) = 0\,. \tag{20}$$

Užitím základní techniky pro soustavy parciálních diferenciálních rovnic (kterou je věta 7.8 ve skriptu [5]) se dokáží tato dvě tvrzení o existenci a jednoznačnosti, která se někdy nazývají **Základní věta teorie ploch**.

I. Jsou-li S resp. $\bar{S}$ dvě jednoduché plochy s parametrizací $f\colon D \to E_3$ resp. $\bar{f}\colon D \to E_3$ na stejné oblasti D, které mají stejnou první a druhou základní formu, pak existuje shodnost $\varphi\colon E_3 \to E_3$ taková, že $\varphi \circ f = \bar{f}$.

Stručně řečeno: Plochy, které mají stejnou první a druhou základní formu, jsou shodné.

II. Uvažujme dvě kvadratické formy Φ_1 a Φ_2 na $D \subset \mathbb{R}^2$, přičemž Φ_1 je pozitivně definitní ve všech bodech. Jestliže Φ_1 a Φ_2 splňují Gaussovu a Codazziho rovnice, pak lokálně existuje plocha s parametrizací $f\colon D \to E_3$ taková, že Φ_1 a Φ_2 jsou její první a druhá základní forma.

13 Geodetické křivky

13.1. Na ploše S můžeme podél každé dráhy $\gamma\colon I \to S$ uvažovat pole jejích tečných vektorů, které označíme $\dot\gamma$.

Definice. Dráhu $\gamma\colon U \to S$ nazýváme **geodetická dráha**, jestliže pole $\dot\gamma$ jejích tečných vektorů se podél ní paralelně přenáší.

V rovině ϱ to znamená, že tečný vektor $\dot\gamma = a$ je konstantní, takže jde o rovnoměrný pohyb $p + ta$ po přímce, $p \in \varrho$.

13.2. Podmínka, aby dráha γ byla geodetická, tedy zní $\frac{\nabla\dot\gamma}{dt} = o$. Nechť $\gamma(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big)$. Do vzorců 12.(4) tedy musíme dosadit $U_i = \frac{du_i}{dt}$, $i = 1, 2$ a anulovat je. Geodetická dráha je tedy řešením soustavy dvou diferenciálních rovnic 2. řádu

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma^i_{jk}\big(u(t)\big)\frac{du_j}{dt}\,\frac{du_k}{dt} = 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Takováto soustava se v mnoha směrech chová podobně jako jedna diferenciální rovnice 2. řádu.

13.3. Je známo, že řešení diferenciální rovnice 2. řádu je určeno počáteční hodnotou a počáteční rychlostí (tj. hodnotou derivace). Analogicky v případě soustavy (1) platí

Věta. Pro každý bod $p \in S$ a každý vektor $A \in T_pS$ existuje interval $0 \in I_A \subset \mathbb{R}$ a jediná geodetická dráha $\gamma_A\colon I_A \to S$ taková, že $\gamma(0) = p$ a $\dot\gamma(0) = A$.

Interval I_A se obecně mění v závislosti na A.

13.4. Je užitečné si uvědomit tuto jednoduchou skutečnost.

Lemma. Je-li $\gamma(t)$ geodetická dráha, pak i dráha $\gamma(at+b)$ je geodetická pro každá $a, b \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Označme $\tilde\gamma(t) = \gamma(at + b)$. Máme $\frac{d\tilde\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}\,a$, $\frac{d^2\tilde\gamma(t)}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}\,a^2$. Vynásobíme-li rovnice (1) výrazem a^2, pak pro $\tilde\gamma(t) = \big(\tilde u_1(t), \tilde u_2(t)\big)$ rovněž platí

$$\frac{d^2 \tilde u_i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma^i_{jk}\big(\tilde u(t)\big)\frac{d\tilde u_j}{dt}\,\frac{d\tilde u_k}{dt} = 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

□

Toto lemma má v rovině přirozenou kinematickou interpretaci: Jestliže u rovnoměrného přímočarého pohybu lineárně změníme parametrizaci, dostáváme opět rovnoměrný přímočarý pohyb.

13.5 Definice. Křivka $C \subset S$ se nazývá **geodetická křivka**, jestliže existuje taková její parametrizace $\gamma(t)$, že γ je geodetická dráha.

Stručně se hovoří o **geodetice**. — Geodetické křivky v rovině jsou přímky.
Z bodů 3 a 4 ihned plyne

Věta. Pro každý bod $p \in S$ a každý směr v T_pS existuje jediná geodetika na S, která se v bodě p tohoto směru dotýká.

13.6. Z vlastností řešení soustav diferenciálních rovnic 2. řádu, které zde podrobněji nebudeme uvádět, dále plyne

Věta. Pro každý bod $p \in S$ existuje takové jeho okolí $Z \subset S$, že pro každé dva body $q_1 \neq q_2$ v Z existuje jediná geodetika v Z, která prochází body q_1 a q_2.

Tato vlastnost je analogická tomu, že každé dva různé body v rovině lze spojit jedinou přímkou. Jednoduchý příklad však ukazuje, že na ploše je požadavek lokálnosti v tomto tvrzení podstatný. Hned v následujícím bodě dokážeme, že geodetiky na sféře S jsou hlavní kružnice. Každým bodem $q_1 \in S$ a každým bodem q_2 různým od "opačného pólu" prochází jediná hlavní kružnice. Jestliže však za q_2 vezmeme bod souměrný s q_1 vzhledem ke středu sféry, pak body q_1 a q_2 prochází nekonečně mnoho hlavních kružnic.

13.7. Připomínáme, že oskulační rovina křivky není definována v inflexních bodech. Následující věta podává "vnější" charakteristiku geodetik.

Věta. Křivka $C \subset S$ je geodetická, právě když její oskulační rovina v každém bodě obsahuje normálu plochy nebo oskulační rovina není definována.

Důkaz. Podmínka $\frac{\nabla\dot\gamma}{dt} = o$ znamená, že vektor $\frac{d\dot\gamma}{dt}$ leží v zaměření normály. Je-li $\frac{d\dot\gamma}{dt} \neq o$, vektory $\dot\gamma$ a $\frac{d\dot\gamma}{dt}$ určují oskulační rovinu, která tedy obsahuje normálu plochy. Je-li $\frac{d\dot\gamma}{dt} = o$, jde o inflexní bod. Obráceně, uvažujme křivku C parametrizovanou obloukem $\gamma(s)$. Pak $\big(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\big) = 1$. Derivováním dostáváme $\big(\dot\gamma, \frac{d\dot\gamma}{ds}\big) = 0$. Je-li $\frac{d\dot\gamma}{ds} \neq o$, vektory $\dot\gamma$ a $\frac{d\dot\gamma}{ds}$ určují oskulační rovinu, o níž předpokládáme, že obsahuje normálu plochy. Protože vektor $\frac{d\dot\gamma}{ds}$ je kolmý na vektor $\dot\gamma(s)$, je rovnoběžný s normálou. Tedy $\frac{\nabla\dot\gamma}{ds} = o$. Je-li $\frac{d\dot\gamma}{ds} = o$, pak také $\frac{\nabla\dot\gamma}{ds} = o$. $\square$

Příklad. Hlavní kružnice C na sféře S je kružnice, jejíž střed splývá se středem sféry. Její oskulační rovina v každém bodě splývá s rovinou, v níž tato kružnice leží, a v této rovině také leží normály sféry podél C. Každá hlavní kružnice je tedy geodetika. Na druhé straně, každým bodem $p \in S$ v každém směru v T_pS prochází jediná hlavní kružnice. Podle věty 5 jiné geodetiky na S neexistují.

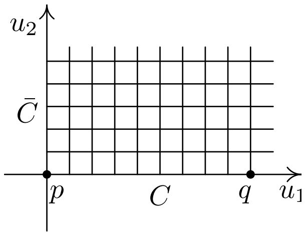
13.8 Důsledek. Je-li C geodetická křivka a $\gamma(s)$ je její parametrizace obloukem, pak $\gamma(s)$ je geodetická dráha.

Důkaz. Podle věty 7 prochází oskulační rovina křivky C normálou plochy. Podle druhé části důkazu této věty je $\frac{\nabla\dot\gamma}{ds} = o$. □

13.9. Nechť $Z \subset S$ je nějaké okolí bodu $p \in S$ s vlastností věty 6.

Věta. Pro každé $q \in Z$, $q \neq p$, geodetika procházející body p a q je nejkratší křivka v Z, která spojuje body p a q.

Důkaz.



Označme C geodetiku spojující body p a q. Bodem p veďme nějakou křivku $\bar C$ kolmou na C. Každým bodem křivky $\bar C$ veďme geodetiku kolmou na ni. To dává jednu vrstvu parametrických křivek. Jako druhou vrstvu zvolme ortogonální trajektorie. Vezmeme-li na C nějaký parametr u_1 a na $\bar C$ nějaký parametr u_2, dostáváme tak souřadnou soustavu na jistém okolí U geodetiky C. Můžeme volit $p = (0,0)$, $q = (a,0)$, $a > 0$.

Parametrizujeme-li křivku $u_2 = c$ obloukem s, tedy $u_1 = s$, je to geodetická dráha. Splňuje tedy rovnice (1). Máme $\frac{du_2}{ds} = 0$, $\frac{d^2u_2}{ds^2} = 0$, neboť $u_2 = c$, a dále $\frac{du_1}{ds} = 1$ (parametr je oblouk) a $\frac{d^2u_1}{ds^2} = 0$. Když to dosadíme do (1), dostáváme

$$\Gamma^1_{11} = 0\,, \quad \Gamma^2_{11} = 0\,.$$

Protože parametrická síť je ortogonální, máme $g_{12} = (f_1, f_2) = 0$. Užitím rozkladů 12.(1) dostáváme

$$\frac{dg_{11}}{du_1} = \frac{\partial(f_1, f_1)}{\partial u_1} = 2(f_1, f_{11}) = 2\Gamma^1_{11}(f_1, f_1) = 0\,.$$

Derivování $(f_1, f_2) = 0$ dává pomocný vztah

$$0 = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_1} = (f_{11}, f_2) + (f_1, f_{12}) = \Gamma^2_{11}(f_2, f_2) + (f_1, f_{12}) = 0\,,$$

takže $(f_1, f_{12}) = 0$. Nyní dostáváme

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = \frac{\partial (f_1, f_1)}{\partial u_2} = 2(f_1, f_{12}) = 0\,.$$

Tedy g_{11} je konstanta $k > 0$.

Vezměme křivku z p do q danou parametricky $u_1 = t$, $u_2 = f(t)$, $f(0) = 0$, $f(a) = 0$. Její délka je rovna

$$\int_0^a \sqrt{k + g_{22}\big(t, f(t)\big)\Big(\frac{df}{dt}\Big)^2}\, dt\,. \tag{2}$$

Délka geodetiky C je $\int_0^a \sqrt{k}\, dt = a\sqrt{k}$. Protože $g_{22} > 0$, integrál (2) je větší nebo roven $a\sqrt{k}$ a rovnost platí jedině pro $\frac{df}{dt} = 0$. Spolu s $f(0) = 0$ to znamená $f(t) = 0$ pro všechna t. $\square$

13.10 Poznámka. Nejstarší přístup k pojmu geodetika vycházel právě z toho, že jde o nejkratší spojnici dvou bodů na ploše. Diferenciální rovnice geodetik se tehdy odvozovaly metodami variačního počtu.

13.11. Křivost $\varkappa$ rovinné křivky $f(s)$ splňuje $\varkappa = \big\|\frac{de_1}{ds}\big\|$, $e_1 = \frac{df}{ds}$. Analogie této vlastnosti se bere jako definice geodetické křivosti křivky $C \subset S$. Předpokládejme, že C je parametrizována obloukem $\gamma(s)$. Pak $\dot\gamma = \frac{d\gamma}{ds}$ je jednotkový vektor.

Definice. Geodetickou křivost $\varkappa_g$ křivky $\gamma(s)$ **na ploše** S definujeme vztahem $\varkappa_g = \big\|\frac{\nabla\dot\gamma}{ds}\big\|$.

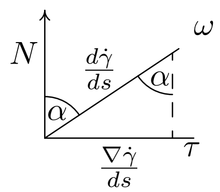
Geodetická křivost tedy patří do vnitřní geometrie plochy.

Poznámka. Existuje i pojem **geodetická torze křivky na ploše**, ale ten již nepatří do vnitřní geometrie plochy.

13.12. Podáme srovnání obyčejné křivosti $\varkappa$ a geodetické křivosti $\varkappa_g$ křivky C na ploše S.

Věta. Nechť α je úhel, který svírá normála plochy s oskulační rovinou křivky $C \subset S$. Pak $\varkappa_g = \varkappa \sin\alpha$. V inflexním bodě křivky C je $\varkappa_g = 0$.

Důkaz.



V neinflexním bodě vektor $\frac{d\dot\gamma}{ds}$ leží v oskulační rovině. Z obrázku, na němž je nakreslen řez rovinou kolmou na oskulační rovinu ω křivky C, plyne $\big\|\frac{\nabla\dot\gamma}{ds}\big\| = \big\|\frac{d\dot\gamma}{ds}\big\| \sin\alpha$. V inflexním bodě je $\frac{d\dot\gamma}{ds} = o$, takže také $\frac{\nabla\dot\gamma}{ds} = o$. $\square$

13.13 Důsledek. Křivka C na ploše S je geodetická, právě když $\varkappa_g = 0$ ve všech jejích bodech.

Důkaz. To přímo plyne z vět 7 a 12. □

V rovině jsou přímky charakterizovány vlastností $\varkappa = 0$. I toto ukazuje analogii některých vlastností přímek v rovině a geodetik na ploše.

13.14. Pomocí geodetik můžeme na plochu přenášet některé konstrukce z rovinné euklidovské geometrie. Nejjednodušší je pojem geodetické kružnice na ploše S.

Z vlastností řešení soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu plyne, že ke každému bodu $p \in S$ existuje takové číslo $r_p > 0$, že pro každé $0 < r < r_p$ na každé geodetice bodem p existují právě dva body q_1 a q_2, v každém směru jeden, takové, že délka oblouku geodetiky mezi body p a q_1 stejně jako mezi body p a q_2 je rovna r a množina $K(p,r)$ všech těchto bodů je křivka na S.

Definice. Křivku $K(p,r)$ nazýváme **geodetická kružnice** o poloměru r a středu p na ploše S.

Na příkladě sféry S o poloměru ϱ ukážeme, že uvažovaná konstrukce má obecně jen lokální charakter. Je-li $r < \pi\varrho$, pak $K(p,r)$ je obyčejná kružnice na S, což je křivka. Pro $r = \pi\varrho$ se po geodetikách ve všech směrech dostáváme do bodu protilehlého k p na S. V jistém smyslu lze říci, že pro $r = \pi\varrho$ kružnice $K(p,r)$ "kolabuje" v jediný bod.

13.15. V rovině mají kružnice konstantní křivost a právě jsme viděli, že i na sféře mají geodetické kružnice konstantní geodetickou křivost. Obecně to však neplatí. Již na trojosém elipsoidu (tj. elipsoidu s různými délkami os) geodetické kružnice nemají konstantní geodetickou křivost. — Jedno obecné tvrzení v tomto směru uvedeme ještě v 14.7.

14 Plochy s konstantní Gaussovou křivostí

V této kapitole chceme především ukázat souvislosti vnitřní geometrie ploch s neeuklidovskou geometrií. Tyto poznatky jsou nejen geometricky krásné, ale hrály i významnou roli v historii matematiky. Byly to hlavně nové výsledky z vnitřní geometrie ploch, které začátkem druhé poloviny 19. století vedly přední geometry té doby k přesvědčení, že neeuklidovská geometrie tvoří matematickou teorii ve stejném smyslu jako geometrie euklidovská. — Důkazy některých tvrzení v této kapitole vyžadují buď příliš rozsáhlé výpočty nebo použití jiných prostředků, než máme k dispozici. Tyto důkazy budeme vypouštět — jde nám více o celkový pohled než o detailní zvládnutí technických záležitostí.

14.1. Nejprve budeme zkoumat lokální isometrie plochy S do sebe. V případě libovolné plochy je předpoklad lokálnosti isometrie natolik přirozený, že přívlastek "lokální" budeme dále vynechávat. Uvažujme rotační plochu S z bodu 8.15, parametr t však přejmenujeme na u. Parametrické vyjádření plochy S tedy je

$$f(u,v) = \big(g(u)\cos v, g(u)\sin v, h(u)\big)\,. \tag{1}$$

V 8.15 jsme nalezli $g_{11} = g'^2 + h'^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = g^2$. Rotační plocha zřejmě má jednoparametrickou soustavu isometrií, která je určena rotacemi. To vidíme i na 1. základní formě

$$\Phi_1 = g_{11}(u)\,du^2 + g_{22}(u)\,dv^2\,, \quad g_{11} = g'^2 + h'^2,\ g_{22} = g^2\,. \tag{2}$$

Zobrazení $u = \bar u$, $v = \bar v\ + c$ tuto formu zachovává, neboť $du = d\bar u$, $dv = d\bar v$.

14.2. Předpokládejme obráceně, že plocha S má jednoparametrickou soustavu isometrií takovou, že její trajektorie tvoří vrstvu $\mathscr{L}$ křivek. Uvažujme ortogonální trajektorie $\mathscr{L}'$ této vrstvy. Křivky vrstvy $\mathscr{L}'$ přecházejí při isometriích jedna na druhou, protože isometrie zachovává úhly. Zvolme $\mathscr{L}$ za souřadné křivky $u =$ konst. a $\mathscr{L}'$ za souřadné křivky $v =$ konst. Naše isometrie pak mají tvar $\bar u = u$, $\bar v\ = v + c$. Forma Φ_1 se při nich zachovává a máme $g_{12} = 0$ podle ortogonálnosti souřadné sítě, takže

$$\Phi_1 = A_1(u)\,du^2 + A_2(u)\,dv^2\,, \quad A_1 > 0\,, A_2 > 0\,. \tag{3}$$

Změníme parametr u na $\bar u$ tak, že platí $d\bar u = \sqrt{A_1}\,du$, tedy $\bar u = \int \sqrt{A_1}\,du$, přičemž ponecháváme $\bar v\ = v$. Pak máme

$$\Phi_1 = d\bar u^2 + B(\bar u)\,d\bar v^2\,, \quad B > 0\,.$$

To je 1. základní forma rotační plochy vytvořené grafem funkce $x = \sqrt{B(z)}$, přičemž tuto křivku parametrizujeme obloukem. Dokázali jsme tedy

Větu. Pokud plocha S má jednoparametrickou soustavu isometrií, pak je lokálně isometrická rotační ploše.

14.3. Víme, že Gaussova křivost se zachovává při isometriích. Pokud tedy plocha S má více než jednoparametrickou soustavu isometrií, musí mít konstantní Gaussovu křivost. Z 11.19 víme, že plocha je lokálně isometrická rovině, právě když má nulovou Gaussovu křivost. Platí však i obecněji, že každé dvě plochy s touž konstantní Gaussovou křivostí K jsou lokálně isometrické, viz bod 14.6 dále.

Základní příklad plochy s nulovým K je rovina. Základní příklad plochy s konstantní kladnou křivostí $K = \frac{1}{r^2}$ je sféra o poloměru r, viz 8.11. S příkladem plochy o konstantní záporné křivosti $K = -\frac{1}{a^2}$ se nyní seznámíme.

14.4. Budeme potřebovat vzorec pro Gaussovu křivost rotační plochy (1). Koeficienty 1. a 2. základní formy jsme spočetli v 8.15. Tedy

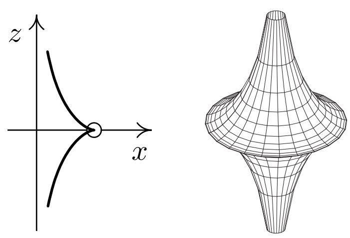
$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{h'(g'h'' - h'g'')}{g(g'^2 + h'^2)^2}\,. \tag{4}$$

Protože rotace jsou isometriemi, K nezávisí na rotačním parametru v.

14.5. Rovinná křivka s parametrickým vyjádřením

$$x = a \sin u = g(u)\,,\ z = a\Big[\ln\big(\operatorname{tg}\frac{u}{2}\big) + \cos u\Big] = h(u)\,, \qquad u \in (0,\pi), u \neq \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

se nazývá **traktrix** s parametrem $a > 0$, viz obrázek. (Pro $u = \frac{\pi}{2}$ je $x = a$ a $\lim_{u\to\frac{\pi}{2}} h(u) = 0$. Bod $(a, 0)$ však na křivce neleží, zde jde o jistý druh singularity.) Rotací kolem osy z vzniká plocha trubkovitého tvaru, která se nazývá **pseudosféra**. Její Gaussovu křivost spočteme podle (4). Máme $g' = a\cos u$, $g'' = -a\sin u$,



$$h' = a\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \sin u\right) = a\left(\frac{1}{\sin u} - \sin u\right), \quad h'' = a\left(-\frac{\cos u}{\sin^2 u} - \cos u\right).$$

Dosazení do (4) dává $K = -\frac{1}{a^2}$.

Pseudosféra s parametrem a má tedy zápornou konstantní Gaussovu křivost $-\frac{1}{a^2}$. V tomto směru je protipólem sféry, pro niž $K = \frac{1}{r^2}$. Odtud také pochází název plochy.

14.6. O rovině, jejíž isometrie jsou klasická shodná zobrazení, dobře víme, že má trojparametrickou soustavu isometrií. Isometrie sféry S vznikají zúžením těch shodných zobrazení v E_3, která S zachovávají. Geometricky snadno nahlédneme, že pro každé dva body p, $\bar{p} \in S$ a každé dvě dvojice jednotkových kolmých vektorů e_1, $e_2 \in T_pS$ a $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2 \in T_{\bar{p}}S$ existuje jediná isometrie $g\colon S \to S$ taková, že $g(p) = \bar{p}$, $T_pg(e_1) = \bar{e}_1$, $T_pg(e_2) = \bar{e}_2$. Podobné tvrzení platí i pro libovolné plochy s konstantní Gaussovou křivostí. Uvádíme je bez důkazu.

Věta (**Mindingova**). Nechť S a $\bar{S}$ jsou plochy s touž konstantní Gaussovou křivostí. Pak pro každé body $p \in S$ a $\bar{p} \in \bar{S}$ a každé dvojice jednotkových kolmých vektorů e_1, $e_2 \in T_pS$ a $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2 \in T_{\bar{p}}\bar{S}$ existuje jediná lokální isometrie g z S do $\bar{S}$ taková, že $g(p) = \bar{p}$, $T_pg(e_1) = \bar{e}_1$, $T_pg(e_2) = \bar{e}_2$. $\square$

Lokální isometrie každé plochy s konstantní Gaussovou křivostí tvoří tedy trojparametrickou soustavu, stejně jako shodnosti v rovině.

14.7. Uvažujme geodetickou kružnici $K(p,r)$ na ploše S s konstantní Gaussovou křivostí. Z věty 6 plyne, že na S existuje jednoparametrická soustava lokálních isometrií, která zachovává bod p (v jistém smyslu jde o rotace kolem bodu p). Pro malá r odtud plyne, že geodetická křivost geodetické kružnice je ve všech bodech stejná. Případ sféry byl již zmíněn v 13.15. Dá se ukázat, že toto tvrzení platí i globálně, jak říká

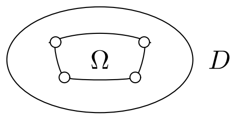
Věta. Na ploše s konstantní Gaussovou křivostí mají geodetické kružnice konstantní geodetickou křivost.

14.8. Dalším naším nástrojem bude Gaussova-Bonnetova věta. Vyložíme nejprve potřebné pojmy.

Nechť C je křivka s parametrizací $f(t)$, $t \in I$.

Definice. **Úsekem** U **křivky** C odpovídajícím uzavřenému intervalu $[a,b] \subset I$ rozumíme množinu $f(t)$, $t \in [a,b]$.

14.9. Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. **Jednoduchou oblastí** $\Omega \subset D$ rozumíme takovou otevřenou, konvexní a ohraničenou podmnožinu, že i její uzávěr $\overline{\Omega}$ leží v D a její hranice $\partial\Omega$ je tvořena konečným počtem úseků křivek.



Definice. Podmnožinu $W \subset S$ nazýváme **jednoduchá oblast na ploše** S, existuje-li taková parametrizace $f\colon D \to E_3$ plochy S, že $W = f(\Omega)$, kde Ω je jednoduchá oblast v D.

Uvědomněme si, že je třeba jasně rozlišovat mezi jednoduchou plochou a jednoduchou oblastí na ploše.

14.10. Nechť h je funkce definovaná na křivce C. Při dané parametrizaci $f\colon I \to E_3$ křivky C jde o funkci $h(t)\colon I \to \mathbb{R}$. Uvažujme úsek U křivky C, který odpovídá intervalu $[a,b] \subset I$. Pak **integrál** $\int\limits_U h\,ds$ definujeme výrazem

$$\int\limits_U h\,ds = \int\limits_a^b h(t)\sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2}\,dt\,. \tag{6}$$

Tato definice nezávisí na volbě parametrizace křivky.

Integrál $\int\limits_C h\,ds$ se definuje pomocí rozkladu křivky C na úseky.

14.11. Nechť h je funkce definovaná na ploše S. Při dané parametrizaci $f\colon D \to E_3$ jde o funkci $h(u_1,u_2)\colon D \to \mathbb{R}$. Nechť $\Omega \subset D$ je ohraničená oblast taková, že $\overline{\Omega} \subset D$. Pišme $W = f(\Omega)$. Připomínáme, že v 6.12 jsme zavedli objemový element plochy $dV = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du_1\,du_2$. **Integrál** $\iint\limits_W h\,dV$ definujeme výrazem

$$\iint\limits_W h\,dV = \iint\limits_\Omega h(u_1,u_2)\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du_1\,du_2\,. \tag{7}$$

Také tato definice nezávisí na volbě parametrizace plochy.

14.12. Bez důkazu uvádíme jeden z nejzajímavějších výsledků vnitřní geometrie ploch.

Věta (**Gaussova-Bonnetova).** Nechť W je jednoduchá oblast na ploše S, jejíž hranicí je křivka C třídy C^2. Nechť $\varkappa_g$ je geodetická křivost křivky C a K je Gaussova křivost plochy S. Pak platí

$$\iint\limits_W K\,dV = 2\pi - \int\limits_C \varkappa_g\,ds\,. \tag{8}$$

Příklad. Pro první seznámení se s touto větou probereme případ jednoduché oblasti Ω v rovině, jejíž hranicí je křivka C třídy C^2. Její geodetická křivost je obyčejná křivost a pro rovinu máme $K = 0$. Tedy (8) dává

$$\int\limits_C \varkappa\,ds = 2\pi\,. \tag{9}$$

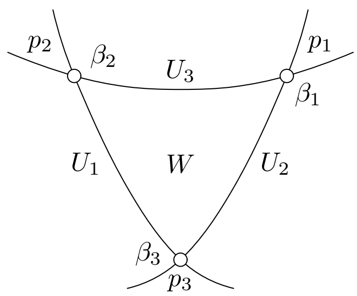
Na případě kružnice $f(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$ si to ověříme i výpočtem. Máme $\varkappa = \frac{1}{r}$, $ds = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t}\, dt = r dt$. Tedy

$$\int\limits_C \varkappa\, ds = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r} r dt = 2\pi\,.$$

Všimněme si ještě, že v tomto případě platí $\int\limits_{t_1}^{t_2} \varkappa\, ds = t_2 - t_1$.

14.13. Gaussovu-Bonnetovu větu lze rozšířit i na některé jednoduché oblasti, jejichž hranice není diferencovatelná, ale jsou na ní “zlomy”. Budeme se zabývat pouze případem křivočarého trojúhelníka na ploše S. V následující definici chápeme trojúhelník v $\mathbb{R}^2$ jako uzavřenou množinu, do níž se počítá i celý jeho vnitřek.

Definice. Množinu $W \subset S$ nazveme **křivočarý trojúhelník na ploše** S, jestliže existuje taková lokální parametrizace $f\colon D \to E_3$ plochy S a takový trojúhelník $\Delta \subset D$, že $W = f(\Delta)$.

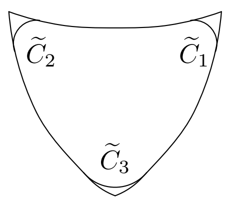


Křivočarý trojúhelník je tedy jednoduchá oblast na S. Jeho strany jsou úseky U_1, U_2, U_3 křivek na S. Označme β_1, β_2, β_3 vnější úhly jejich tečen ve vrcholech p_1, p_2, p_3 podle obrázku.

Věta (**Zobecněná Gaussova-Bonnetova).** Platí

$$\iint\limits_W K\, dV = 2\pi - \sum_{i=1}^{3} \beta_i - \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{U_i} \varkappa_g\, ds\,. \tag{10}$$

Idea důkazu: V okolí vrcholu p_i “vyhladíme” hranici W pomocí geodetické kružnice $\widetilde{C}_i$ o malém poloměru r podle obrázku. Pak lze dokázat, že $\lim\limits_{r\to 0} \int\limits_{\widetilde{C}_i} \varkappa_g\, ds = \beta_i$.



To můžeme říci i tak, že v limitě máme situaci podobnou rovině, o níž jsme se zmínili na konci příkladu 12. Podle (8) v limitě dostáváme formuli (10).

14.14 Definice. Křivočarý trojúhelník W nazýváme **geodetický trojúhelník na ploše** S, jestliže všechny jeho strany jsou úseky geodetických křivek.

Tento pojem je tedy přímým přenesením pojmu trojúhelníka do vnitřní geometrie ploch.

V tomto případě v (10) máme $\varkappa_g = 0$. To dokazuje

Důsledek. Pro geodetický trojúhelník W na ploše S platí

$$\iint_W K\,dV = 2\pi - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3\,. \tag{11}$$

14.15. Z (11) přímo plyne toto geometricky velmi zajímavé tvrzení.

Věta (**Speciální Gaussova-Bonnetova).** Je-li W geodetický trojúhelník na ploše s konstantní Gaussovou křivostí K o obsahu V a α_1, α_2, α_3 jsou jeho vnitřní úhly, pak platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + KV\,. \tag{12}$$

Důkaz. Pro konstantní K je integrál v (11) roven KV a vnitřní úhly jsou s vnějšími svázány vztahem $\beta_i = \pi - \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. □

14.16. Příklady. a) Na rozvinutelné ploše máme stejně jako v rovině $K = 0$. Pak (12) dává dobře známou větu o součtu úhlů v trojúhelníku $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$.
b) Na sféře S o poloměru r máme $K = \frac{1}{r^2}$. Součet úhlů v geodetickém trojúhelníku je tedy větší než π. Z (12) dokonce plyne, že součet úhlů zmenšený o π je úměrný obsahu geodetického trojúhelníka. Je zábavné si uvědomit, že z (12) lze spočítat plošný obsah sféry. Protože geodetické křivky na S jsou hlavní kružnice, osmina koule je geodetický trojúhelník, jehož všechny úhly jsou pravé. Označme V jeho obsah. Protože Gaussova křivost sféry o poloměru r je $\frac{1}{r^2}$, z (12) plyne $\frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{1}{r^2}V$, tedy $V = \frac{1}{2}\pi r^2$.

14.17. Obsahem Euklidova 5. postulátu je tvrzení, že k přímce p v rovině lze každým bodem $A \notin p$ vést jedinou přímku, která p neprotíná. Z dnešního pohledu hovoříme o Euklidově axiomu o rovnoběžkách. Toto tvrzení je tak zásadně odlišné od ostatních Euklidových axiomů, že po řadu staletí se mnoho matematiků snažilo ukázat, že 5. postulát je důsledkem ostatních Euklidových axiomů. Nepodařilo se však dokázat, přes mnoho chybných pokusů, že z negace Euklidova axiomu o rovnoběžkách plyne spor.

Jedním z důsledků negace 5. postulátu, tedy předpokladu o existenci alespoň dvou přímek bodem A neprotínajích p, je tvrzení, že součet Σ úhlů v trojúhelníku je menší než π a rozdíl $\pi - \Sigma$, tzv. **úhlový defekt uvažovaného trojúhelníka**, je úměrný velikosti plochy trojúhelníka. Mnoha matematikům se toto tvrzení zdálo být absurdní. Speciální Gaussova-Bonnetova věta však jasně ukazuje, že tato situace nastává ve vnitřní geometrii plochy se zápornou konstantní Gaussovou křivostí. Rovněž naše věta 6 o trojparametrické soustavě lokálních isometrií na ploše s konstantní Gaussovou křivostí odpovídá shodnostem v klasické geometrii roviny, ať s platností Euklidova axiomu o rovnoběžkách, nebo při jeho negaci. — Přesné konstrukce neeuklidovských geometrií byly pak podány v 2. polovině 19. století v podstatě prostředky projektivní geometrie.

14.18. Negace 5. postulátu vede pouze k jednomu druhu neeuklidovských geometrií, který se nazývá **geometrie Lobačevského** či **hyperbolická**. Jí odpovídají plochy se zápornou konstantní Gaussovou křivostí. Přitom D. Hilbert v r. 1901 dokázal, že Lobačevského rovinu nelze globálně realizovat na ploše v E_3. (To je zásadní vysvětlení k tomu, že v bodě 5 máme na traktrix, jejíž rotací pseudosféra vzniká, singulární bod.)

Významné analogie mezi vlastnostmi ploch s kladnou a zápornou konstantní Gaussovou křivostí, uvedené zejména ve větách 6 a 15, vedly k tomu, že se mezi neeuklidovské geometrie začaly řadit i tzv. **eliptické geometrie**, někdy spojované se jménem B. Riemanna. Jejich geometrie odpovídá vnitřní geometrii ploch s kladnou konstantní Gaussovou křivostí. (Upozorňujeme, že název **Riemannova geometrie** se běžně užívá v jiném významu než pro eliptické geometrie. Označuje se tak mnohem významnější teorie, jejímž otcem také B. Riemann byl a která je jednou z nejdůležitějších částí dnešní diferenciální geometrie, viz např. skriptum [5] pro první informaci.)

Reference k části I.

[1] J. Bureš, K. Hrubčík, Diferenciální geometrie křivek a ploch, Skriptum, UK Praha, 1998.

[2] M. P. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[3] M. Doupovec, Diferenciální geometrie a tenzorový počet, Skriptum, VUT Brno, 1999.

[4] W. Klingenberg, A Course in Differential Geometry, Springer-Verlag, 1978.

[5] I. Kolář, Úvod do globální analýzy, Skriptum, MU Brno, 2003.

[6] A. Vanžurová, Diferenciální geometrie křivek a ploch, Skriptum, UP Olomouc, 1996.

Část II

Cvičení

Předmluva k druhé části

Druhá část skripta bude zveřejněna do konce února 2008.