

Témata k bakalářské státní závěrečné zkoušce (ak. rok 25/26)

I. Algebra, geometrie, polynomy

- 1) **Základní algebraické struktury:** grupoidy, pologrupy, grupy, okruhy, tělesa, pole, obory integrity, uspořádané množiny a svazy).
- 2) **Polynomy:** Okruh polynomů, polynomy s reálnými koeficienty, kořen polynomu, násobnost kořene, základní věta algebry, rozklad polynomu na součin v oboru reálných a komplexních čísel.
- 3) **Základy teorie množin:** relace mezi množinami, zobrazení, relace na množině, ekvivalence a rozklady, morfismus, monomorfismus, epimorfismus, izomorfismus, axiom výběru a věty s ním ekvivalentní, ordinální a kardinální čísla.
- 4) **Lineární prostory:** vektorové prostory a podprostory, lineární závislost a nezávislost, báze, dimenze, homomorfismus (lineární zobrazení), izomorfismus vektorových prostorů, bilineární zobrazení, lineární a bilineární forma, kvadratická forma.
- 5) **Maticе a determinanty:** operace s maticemi, hodnota matice, determinant, inverzní matice, vlastní čísla a vlastní vektory.
- 6) **Soustavy lineárních rovnic:** maticový zápis soustavy lineárních rovnic, Cramerovo pravidlo, Gaussova eliminační metoda, Frobeniova věta.
- 7) **Unitární, afinní a Eukleidovské prostory:** skalární součin, unitární prostor, ortonormální báze, afinní prostor, Eukleidovský prostor, vektorový součin, vnější (smíšený) součin, analytická geometrie.
- 8) **Diferenciální geometrie:** parametrické a implicitní rovnice křivky, parametrické a implicitní rovnice plochy, tečna křivky a tečná rovina plochy, křivost a torse křivky, isometrické zobrazení.

II. Matematická analýza

1) **Posloupnosti a funkce jedné reálné proměnné:** axiomatičké zavedení množiny reálných čísel, posloupnosti (monotonie a ohraničenost, limita a její vlastnosti, hromadné body, Cauchyovská posloupnost), funkce (definiční obor a obor hodnot, funkce prostá, surjektivní a bijektivní, sudost, lichost, periodičnost, ohraničenost, monotonie, konvexnost a konkávnost, složená funkce, inverzní funkce), základní elementární funkce, limita a spojitost funkce (věty o spojitosti).

2) **Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné:** derivace, derivace elementárních funkcí a pravidla pro derivování, diferencovatelnost a diferenciál, věty o derivaci (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova, l'Hospitalovo pravidlo), Taylorův polynom a Taylorova věta, aplikace diferenciálního počtu (průběh funkce).

3) **Integrační počet funkcí jedné reálné proměnné:** primitivní funkce, základní integrační techniky (metoda per-partes, substituční metody), Riemannův integrál (konstrukce a podmínky zaručující integrovatelnost, vlastnosti), Newtonova–Leibnizova formule, aplikace Riemannova integrálu, integrál jako funkce horní meze, nevlastní integrál.

4) **Funkce více reálných proměnných:** limita a spojitost, parciální derivace, derivace ve směru a gradient, diferencovatelnost a totální diferenciál funkce, Taylorův polynom a Taylorova věta, volné, vázané a globální extrém, zobrazení mezi prostory vyšší dimenze, funkce zadaná implicitně (jedné a více proměnných).

5) **Dvojný a trojný integrál:** klasická konstrukce na obdélníku (normální množině) a konstrukce skrze Jordanovu míru, Fubiniova věta, substituční věty (substituce do polárních, cylindrických a sférických souřadnic), aplikace dvojného a trojného integrálu.

6) **Křivkový a plošný integrál:** křivkový integrál 1. a 2. druhu, nezávislost na integrační cestě (potenciál), Greenova věta, aplikace křivkového integrálu, plošný integrál 1. a 2. druhu, Gaussova–Ostrogradského a Stokesova věta, aplikace plošného integrálu, základy teorie pole (skalární a vektorové pole, gradient, divergence a rotace, Laplaceův operátor).

7) **Nekonečné číselné a funkční řady:** konvergence a divergence číselné řady, kritéria konvergence, základní aritmetické operace s řadami, absolutní konvergence. bodová a stejnoměrná konvergence funkční řady (Weierstrassovo kritérium, spojitost součtové funkce, integrování a derivování funkční řady člen po členu).

8) **Taylorovy a Fourierovy řady:** mocninné a Taylorovy řady, bodová a stejnoměrná konvergence mocninných řad, rovnost funkce a její Taylorovy řady, aplikace, trigonometrické a Fourierovy řady, typy konvergence Fourierovy řady (bodová, stejnoměrná, v normě).

9) **Obyčejné diferenciální rovnice prvního a vyšších řádů:** obecný tvar počátečního problému, existence a jednoznačnost řešení, lineární rovnice (struktura prostoru řešení a metody řešení), okrajový problém pro rovnici druhého řádu.

10) **Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu:** obecný tvar počátečního problému, existence a jednoznačnost řešení, vztah k diferenciálním rovnicím vyšších řádů, lineární soustavy (struktura prostoru řešení a metody a metody řešení), integrační křivky a fázové trajektorie.

11) **Metrické prostory, normované lineární prostory, unitární prostory:** základní vlastnosti, vztahy mezi prostory, příklady prostorů posloupností a funkcí, Banachovy prostory, Hilbertovy prostory.

12) **Základy teorie lineárních parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu:** základní pojmy, klasifikace, rovnice matematické fyziky, metody řešení (metoda charakteristik, Fourierova metoda řad).

III. Pravděpodobnost a statistika, optimalizace, numerická matematika

- 1) **Náhodná veličina, náhodný vektor:** definice, funkční a číselné charakteristiky, základní typy rozdělení, funkce náhodné veličiny a náhodného vektoru, rozdělení transformovaných náhodných veličin a vektorů.
- 2) **Náhodný výběr, statistiky:** centrální limitní věta, náhodný výběr, statistiky, bodové odhady a jejich vlastnosti, intervalové odhady, testy hypotéz, testy hypotéz pro binomické a normální rozdělení.
- 3) **Regresní analýza:** mnohorozměrné normální rozdělení, podmíněné normální rozdělení, lineární regresní model, metoda nejmenších čtverců, analýza rozptylu, testy hypotéz o regresních parametrech, koeficient determinace, regresní diagnostika.
- 4) **Analýza závislosti náhodných proměnných:** kovarianční a korelační matice, koeficient mnohonásobné korelace, parciální korelační koeficient, kontingenční tabulky, chí-kvadrát test nezávislosti kategoriálních proměnných, multinomické rozdělení.
- 5) **Optimalizace:** úlohy matematického programování, jejich popis, prvky, základní vlastnosti a softwarové nástroje, úvodní poznatky o konvexních množinách a konvexních funkcích.
- 6) **Numerické metody řešení algebraických rovnic:** řešení jedné nelineární rovnice, řešení soustav nelineárních rovnic, řešení soustav lineárních rovnic (přímé a iterační metody).
- 7) **Interpolace a aproximace, numerické derivování a integrování:** pojem interpolace a aproximace, Lagrangeovy a Hermitovy interpolační polynomy, interpolační splajny, metoda nejmenších čtverců, numerické derivování a integrování.
- 8) **Numerické metody řešení počátečních problémů pro ODR:** diskretizace diferenciální rovnice, metody jednokrokové a vícečkové, A-stabilita, tuhé problémy.

doc. Mgr. Petr Vašík, PhD.
garant studijního programu