„MATEMATIKA NA DÁLKU"

AUTOR TEXTU: JIŘÍ KLAŠKA
VUT BRNO

POKRAČOVÁNÍ PRVNÍ, 17. 3. 2020 – 19. 3. 2020
LOKÁLNÍ EXTRÉMY (14 STRAN)

Tento text je primárně určen studentům předmětu Matematika 2, které učím, ale může ho používat a sdílet kdokoliv.
Ručně psaný text „Matematika na dálku" vzniká v době šíření koronaviru a vyhlášení stavu nouze. Protože nevíme, kdy se vše vrátí do starých kolejí, nevím ani já, kolik pokračování napíši. Mým záměrem je, že další texty budou následovat.

Následující úloha pochází ze slavné sbírky sovětského matematika Georgije Nikolajeviče Bermana (1908 – 1949). Berman zemřel 9. února 1949 po dlouhé a těžké nemoci, kterou způsobilo zranění ve Velké vlastenecké válce. Ve slovenském vydání z roku 1955 má úloha číslo 2990. Bermanova sbírka a jeho příklady žijí dál i v roce 2020, kdy v celém světě řádí koronavirus.

Metodický pokyn: Úlohu nejprve samostatně vyřešte a pak srovnejte s mým postupem.

Zadání: Naleznete stacionární body funkce
$$f(x,y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$$

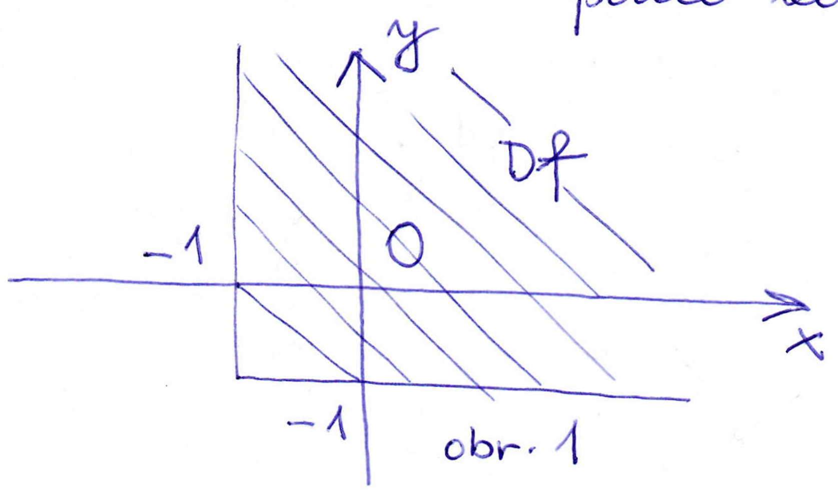
Řešení: I když to zadání úlohy přímo nevyžaduje vyšetřil bych nejprve definiční obor f. Budeme postupovat jako obvykle:

a) logická analýza podmínek:

$$[x,y] \in Df \Leftrightarrow 1+y \geq 0 \wedge 1+x \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge y \geq -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [x,y] \in \langle -1,\infty) \times \langle -1,\infty)$$

$$Df = \langle -1,\infty) \times \langle -1,\infty)$$

b) nakreslení obrázku podle konvence:



obr. 1

Definiční obor odpovídá vyšrafované části. Tímto krokem jsme si ujasnili, jak Df vypadá.

Nyní musíme znát <u>definici</u> stacionárního bodu:
Bod S se nazývá stacionární bod funkce f, když v S existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f a jsou v tomto bodě rovny nule.

Vypočteme parciální derivace 1. řádu a upravíme je:

$$f'_x = 1\cdot\sqrt{1+y} + y\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}+y}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f'_y = x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y}} + 1\cdot\sqrt{1+x} = \frac{x+2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}}{2\sqrt{1+y}}$$

Stacionární body získáme jako řešení soustavy rovnic: $f'_x = 0,\ f'_y = 0.$

$$f'_x = 0 \iff 2\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y} + y = 0 \qquad (*)$$

$$f'_y = 0 \iff 2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y} + x = 0.$$

Porovnáním obou rovnic obdržíme, že $x = y$.
Dosazením $y = x$ do rovnice $(*)$ dostaneme:

$$2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x} + x = 0$$

Odtud: $2\sqrt{(1+x)^2} + x = 0$

$$2|1+x| + x = 0$$

Protože $x \geq -1$, (to víme z vyšetření Df) platí, že $|1+x| = 1+x$ a tedy

$$2(1+x) + x = 0.$$
$$2 + 2x + x = 0$$
$$3x = -2$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

Protože $y = x$, je $S = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.
Z obr. 1 plyne, že $S \in Df$.
Tedy můžeme napsat závěr:

Závěr: $S = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$ je jediným stacionárním bodem funkce f

Bermanova úloha č. 2990 může mít pokračování:
Zadání:
Vyšetřete lokální extrémy funkce f.
Takto zformulovanou úlohu lze nalézt v učebním textu Zuzany Došlé a Ondřeje Došlého z roku 1994. (Masarykova univerzita, Přír. fak.)
[strana 80, cvičení 6.1, část g]

Nejprve prověříme existenci lokálního extrému v bodě S. Použijeme standardní metodu založenou na Hessově matici druhé derivace a na Sylvesterově kritériu.

Než začneme počítat, připomeňme si, že Ludwig Otto Hesse (1811 – 1874) byl slavný německý matematik a James Joseph Sylvester (1814 – 1897) byl anglický matematik. Stojí za zmínku, že název diskriminant použil poprvé v roce 1851 právě J. J. Sylvester.

Nyní k výpočtu: Vypočteme a upravíme parciální derivace druhého řádu a z nich sestavíme Hessovu matici f'':

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \frac{1}{2}y \cdot \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}\right) = \frac{-y}{4\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+y}}$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = \frac{1}{2}x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+y)^3}}\right) = \frac{-x}{4\cdot\sqrt{(1+y)^3}}$$

Odtud

$$f'' = \begin{bmatrix} \dfrac{-y}{4\sqrt{(1+x)^3}} & \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}} & \dfrac{-x}{4\cdot\sqrt{(1+y)^3}} \end{bmatrix}$$

Dále určíme hodnoty druhých parciálních derivací v bodě S:

$$f''_{xx}(S) = \frac{\frac{2}{3}}{4\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3\sqrt{3}}} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''_{xy}(S) = f''_{yx}(S) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3}$$

$$f''_{yy}(S) = \frac{\frac{2}{3}}{4\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dosazením do matice f'' získáme číselnou matici

$$f''(S) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Nyní použijeme kriterium Jamese Sylvestera: (tzv. rozhodovací kritérium)

$$D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

$$D_2 = \det f''(S) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{4} - 3 = \frac{-9}{4} < 0$$

Podle kritéria není v bodě S lokální extrém funkce f.

Poznámka: Zmíněný učební text Došlý, Došlá má ve výsledcích chybu. Uvádí (str. 121) ve výsledcích, že v $S = \left[\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right]$ je lokální minimum $z_{min} = \frac{-4}{3\sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}}{9}$.
To, jak jsme spočetli před chvílí není možné. Co když jsme ale udělali při výpočtu chybu? Chybovat je naše lidská přirozenost. Má-li text Došlý, Došlá chybu a náš výpočet je správný, pak musí existovat podokolí okolí bodu S tak, že v tomto podokolí budou mít některé body funkční hodnotu větší než je v S a některé menší než je v S.

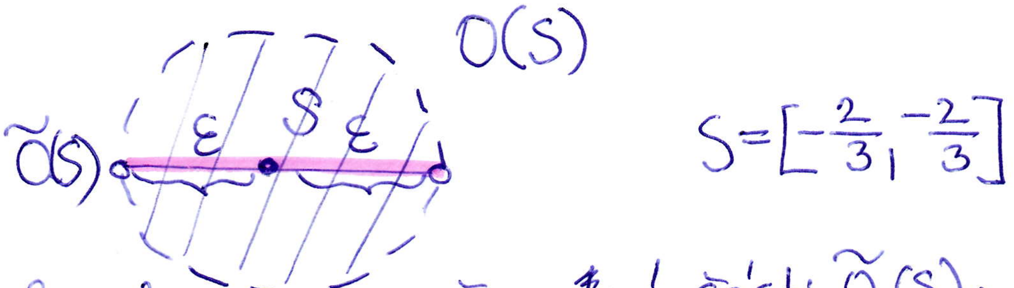
Pokusme se toto podokolí najít. Tento úkol může být obecně velmi obtížný! Začněme podokolím $\tilde{O}(S) \subset O(S) \subset Df$ co nejjednodušššího tvaru:

$$\tilde{O}(S): x \in \left(-\frac{2}{3}-\varepsilon, -\frac{2}{3}+\varepsilon\right) \text{ a } y = -\frac{2}{3}$$

Množinově lze toto podokolí zapsat jako

$$\tilde{O}(S) = \left(-\frac{2}{3}-\varepsilon, -\frac{2}{3}+\varepsilon\right) \times \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

Množina $\tilde{O}(S)$ je na obrázku znázorněna červeně:



Vyšetříme funkci f na červené části $\tilde{O}(S)$:

Definujme fci $g(x) = f\left(x, -\frac{2}{3}\right) =$

$$= x \cdot \sqrt{1-\frac{2}{3}} + \left(-\frac{2}{3}\right)\sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3}\sqrt{1+x}$$

Tedy

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3}\sqrt{1+x}. \qquad Dg = \langle -1, \infty)$$

Postupujeme metodami zimního semestru, které již umíte.

$$g'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1+x} - 1}{3\sqrt{1+x}}.$$

$$g'(x) = 0 \iff \sqrt{3} \cdot \sqrt{1+x} - 1 = 0.$$

Z poslední rovnice plyne

$$3(1+x)=1 \iff 3+3x=1 \iff x=-\frac{2}{3}$$

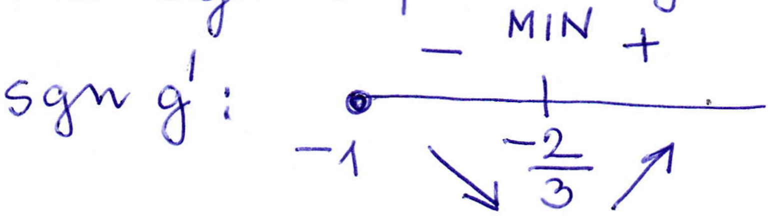
U řešení iracionální rovnice je zapotřebí udělat zkoušku! Dosazením dostaneme:

$$L = \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{3}}-1 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-1 = \sqrt{\frac{3}{3}}-1 = 0$$

$$P = 0$$

$$\underline{L = P}.$$

Určíme signum funkce g' v okolí bodu $x=-\frac{2}{3}$.

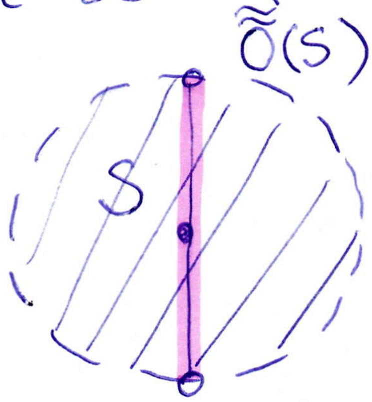


Závěr: Funkce g má v bodě $x=-\frac{2}{3}$ lokální minimum.

Že by měli autoři Došlý, Došlá pravdu??
Teď víme jen to, že v bodě S nemůže být maximum.
Zbývají dvě možnosti: V S je minimum nebo v S není extrém.

Vyzkoušejme jiné podokolí: Další „jednodušší" je $\widetilde{O}(S)$: $x=-\frac{2}{3}$, $y\in\left(-\frac{2}{3}-\varepsilon, -\frac{2}{3}+\varepsilon\right)$

$$\widetilde{O}(S) = \left\{-\frac{2}{3}\right\} \times \left(-\frac{2}{3}-\varepsilon, -\frac{2}{3}+\varepsilon\right)$$



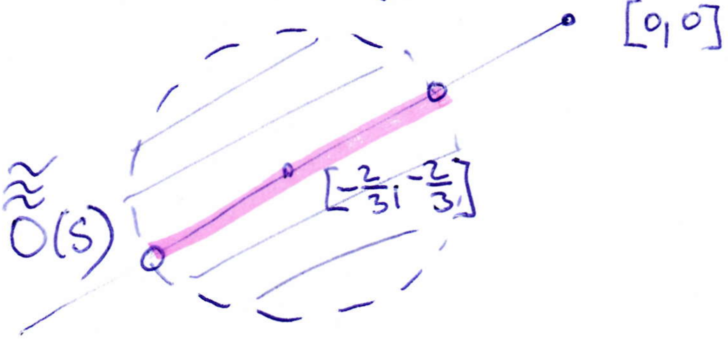
$S=\left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$

Toto podokolí vede ke zkoumání funkce

$$h(y) = f\left(-\tfrac{2}{3}, y\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{1+y} + y\sqrt{1-\frac{2}{3}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,y - \frac{2}{3}\sqrt{1+y}\,, \quad Dh = \langle -1, \infty).$$

Tato funkce je ale stejná jako $g(x)$, až na označení proměnné. Povede proto ke stejnému výsledku: V bodě $y = -\frac{2}{3}$ je lokální minimum fce h.

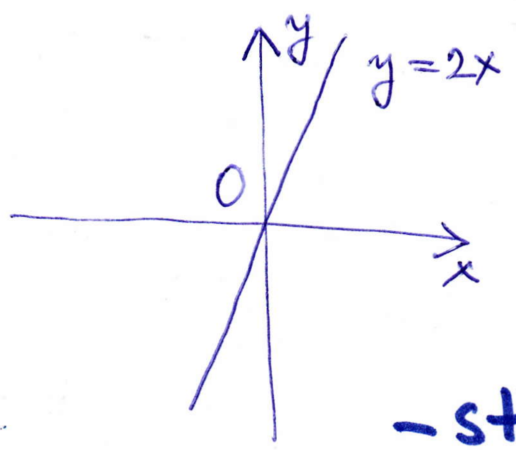
Zkusme tedy jiné podokolí. Bodem $S = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$ prochází přímka $y = x$.

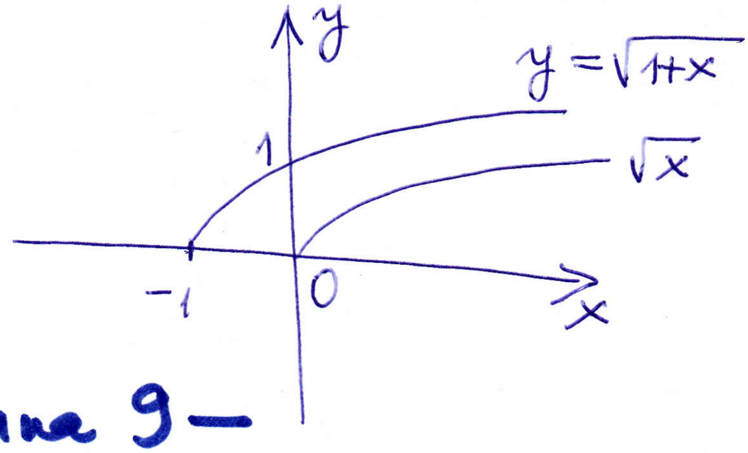


Zkoumejme funkci:

$$k(x) = f(x,x) = x\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+x} = 2x\sqrt{1+x}$$

Funkce $k(x)$ je součinem dvou funkcí $k_1(x) = 2x$ a $k_2(x) = \sqrt{1+x}$. Obě funkce umíme nakreslit:





Z obrázků je zřejmé, že obě funkce jsou rostoucí. Pokud by byl součin dvou rostoucích funkcí opět rostoucí funkce, pak bychom měli konečně protipříklad!

Muselo by totiž platit, že $k(-\frac{2}{3}-\varepsilon) < k(-\frac{2}{3}) < k(-\frac{2}{3}+\varepsilon)$.

I když tento nápad vypadá nadějně, součin dvou rostoucích funkcí obecně rostoucí není! Ukažme si to:

$$k(x) = 2x\sqrt{1+x}$$

$$k'(x) = 2\sqrt{1+x} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{2\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}+x}{\sqrt{1+x}} \overset{*}{=} \frac{2(1+x)+x}{\sqrt{1+x}} = \frac{2+3x}{\sqrt{1+x}}$$

(*) opět $\sqrt{(1+x)^2} = 1+x$ plyne z faktu $1+x \geq 0$.

$$2+3x = 0 \iff x = -\frac{2}{3}$$

sgn k': $-$ MIN $+$

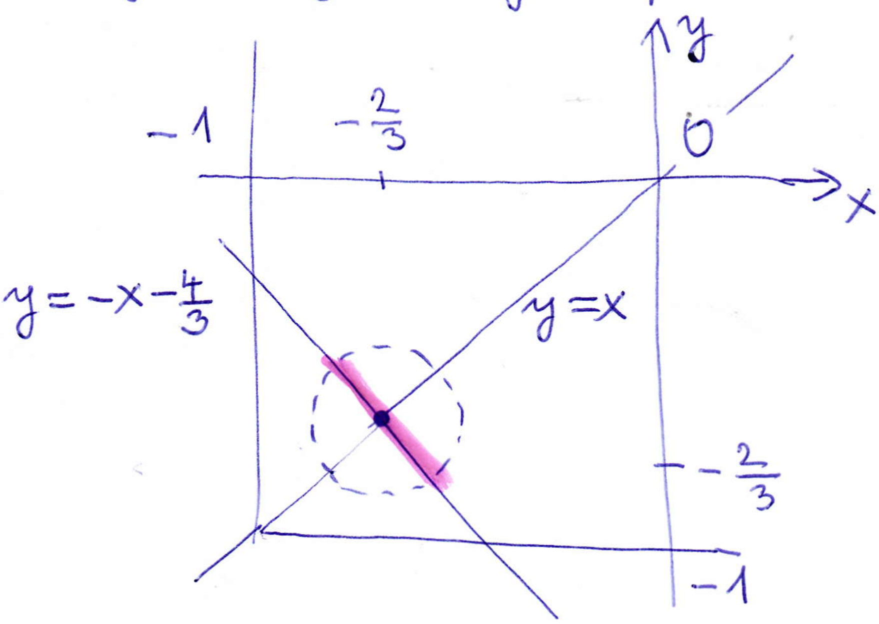
$\searrow \quad -\frac{2}{3} \quad \nearrow$

Tedy i třetí podobolí nás dovedlo k minimu.

Poznámka: Součet dvou rostoucích funkcí ale rostoucí funkce je.

Viz cvičení Vítězslav Novák, skriptum Diferenciální počet v $\mathbb{R}$, UJEP, 1983, strana 22, cvičení 15.

Pokusme se být trpěliví a počítat dál. Vyzkoušejme nyní podokolí tvaru úsečky,



Která je částí přímky $y=-x-\frac{4}{3}$. Tato přímka prochází stacionárním bodem $S=\left[-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right]$ a je kolmá k přímce $y=x$. Viz obrázek.

Sestavme funkci

$$\ell(x)=f\left(x,-x-\frac{4}{3}\right)=x\sqrt{1-x-\frac{4}{3}}+\left(-x-\frac{4}{3}\right)\sqrt{1+x}$$

$$=x\sqrt{-x-\frac{1}{3}}-\left(x+\frac{4}{3}\right)\sqrt{1+x}.$$

Definiční obor fce $\ell(x)$ je $D\ell=\left\langle -1,-\frac{1}{3}\right\rangle$

Spočítáme derivaci a upravíme ji:

$$\ell'(x)=\sqrt{-x-\frac{1}{3}}+x\cdot\frac{1}{2}\,\frac{-1}{\sqrt{-x-\frac{1}{3}}}-\sqrt{1+x}-\left(x+\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$=\sqrt{-x-\frac{1}{3}}-\frac{x}{2\sqrt{-x-\frac{1}{3}}}-\sqrt{1+x}-\frac{x+\frac{4}{3}}{2\sqrt{1+x}}$$

Derivaci položíme rovnu nule a nalezneme stacionární body

$$\frac{2\left(-x-\frac{1}{3}\right)-x}{2\sqrt{-x-\frac{1}{3}}} = \frac{2(1+x)+\left(x+\frac{4}{3}\right)}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{-3x-\frac{2}{3}}{\sqrt{-x-\frac{1}{3}}} = \frac{3x+\frac{10}{3}}{\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{-9x-2}{\sqrt{-x-\frac{1}{3}}} = \frac{9x+10}{\sqrt{1+x}}$$

$$(-9x-2)\sqrt{1+x} = (9x+10)\sqrt{-x-\frac{1}{3}}$$

$$(9x+2)^2\cdot(1+x) = (9x+10)^2\cdot\frac{-3x-1}{3}$$

$$3\cdot(9x+2)^2\cdot(1+x) = -(9x+10)^2\cdot(3x+1)$$

Nyní nezbývá než provést roznásobení a pak sloučit členy se stejnou mocninou x. Po „krátkém" výpočtu dostaneme kubickou rovnici:

$$G(x) := 486x^3 + 972x^2 + 600x + 112 = 0.$$

To je dost nepříjemné. Po delším hledání můžeme najít rozklad polynomu $G(x)$ nad $\mathbb{R}$ tvaru

$$G(x) = 2(3x+2)(81x^2+108x+28),$$

odkud ihned plyne $x=-\frac{2}{3}$, což jsme očekávali. Kvadratická rovnice

$$81x^2+108x+28 = 0$$

má další dvě reálná řešení

$$x_{1,2} = \frac{-108 \pm \sqrt{108^2 - 4\cdot 81\cdot 28}}{2\cdot 81} = \frac{-108 \pm \sqrt{2592}}{2\cdot 81} =$$

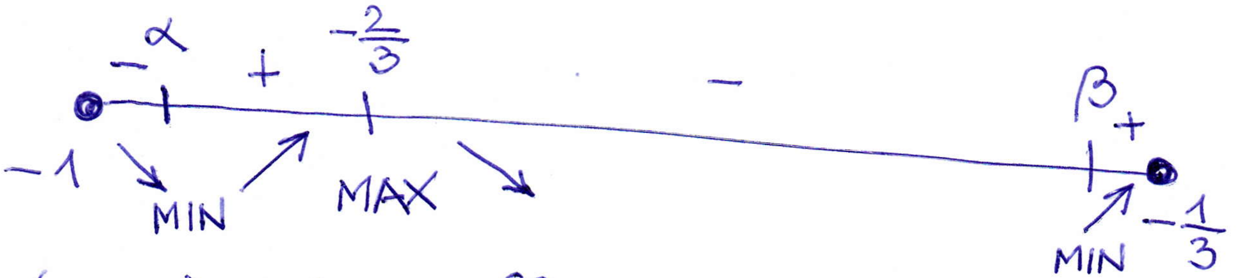
$$= \frac{-108 \pm \sqrt{2^5\cdot 3^4}}{2\cdot 3^4} = \frac{-2^2\cdot 3^3 \pm 2^2\cdot 3^2\cdot \sqrt{2}}{2\cdot 3^4} =$$

$$= -\frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

Označme $\alpha = -\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{9} \doteq -0{,}9809\ldots$

$\beta = -\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{9} = -0{,}3523\ldots$

Nyní je třeba zvolit reprezentanty vzniklých podintervalů. Definiční obor D_l se rozpadá na 4 části:



V $(-1, \alpha)$ volím $\frac{-99}{100}$; $f(-\frac{99}{100}) \doteq -0{,}3954 < 0$

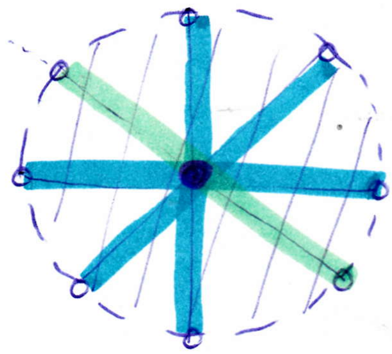
V $(\alpha, -\frac{2}{3})$ volím $\frac{-3}{4}$; $f(-\frac{3}{4}) \doteq 0{,}1431 > 0$

V $(-\frac{2}{3}, \beta)$ volím $-\frac{1}{2}$; $f(-\frac{1}{2}) \doteq -0{,}2757 < 0$

V $(\beta, -\frac{1}{3})$ volím $-\frac{34}{100}$; $f(-\frac{34}{100}) \doteq 0{,}7399 > 0$

Nás zajímá bod $x = -\frac{2}{3}$. V tomto bodě má funkce $l(x)$ lokální maximum.

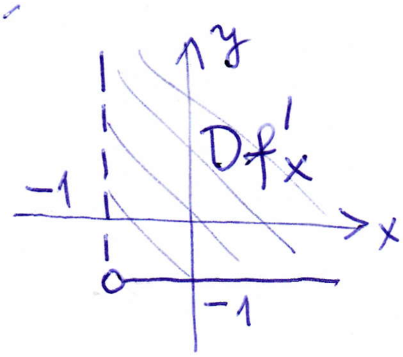
Tím je úloha nalézt podokolí vyřešena.

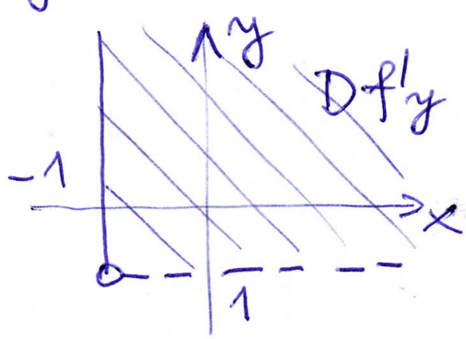


Na modrých částech podokolí jsou funkční hodnoty větší než v bodě S a na zelené části jsou menší než v bodě S.

Závěr: Náš výpočet podle rozhodovacího kritéria byl správný a v textu Došlý, Došlá je ve výsledku skutečná chyba.

Připomeňme, že funkce f může mít lokální extrémy buď ve stacionárních bodech nebo v bodech, kde neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.
Z tvaru f'_x a f'_y na straně 3 plyne, že Df'_x a Df'_y:





Tedy všechny body $A \in Df$ v nichž neexistuje aspoň 1 parciální derivace 1. řádu mají tu vlastnost, že $O(A) \not\subseteq Df$. V těchto bodech nemůže nastat lokální extrém podle definice.

KONEC PRVNÍ ČÁSTI