POKRAČOVÁNÍ PLOŠNÝCH INTEGRÁLŮ

Zadání: Vypočtěte integrál 2. druhu

$$\iint_{\vec{S}} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy, \text{ kde } \vec{S} \text{ je}$$

povrch krychle $K = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle = \langle 0,1\rangle^3$.

Orientace krychle míří od krychle (vnější).

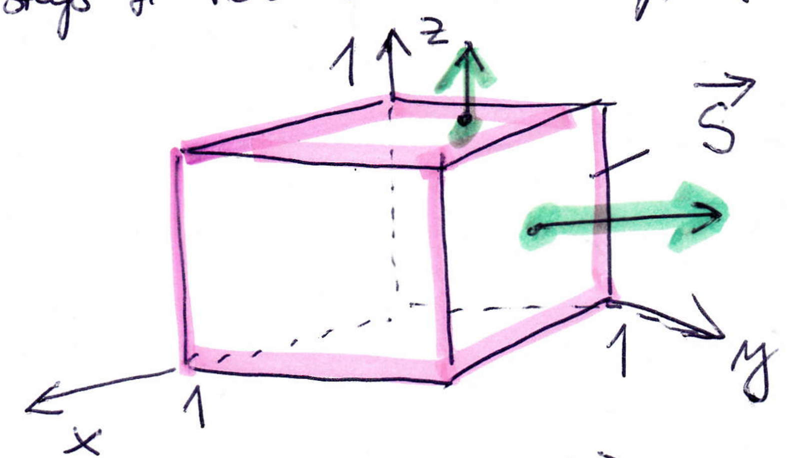
Řešení: Geometricky zápis $K = \langle 0,1\rangle^3$ znamená, že krychle K má vrcholy $[x, y, z]$, kde $x, y, z \in \{0, 1\}$, tj.

$[0,0,0]$, $[0,0,1]$, $[0,1,0]$, $[1,0,0]$, $[1,1,0]$, $[1,0,1]$, $[0,1,1]$, $[1,1,1]$ (8 vrcholů).

Celkem má tedy povrch K šest stěn ležících v příslušných rovinách. Je třeba vypočítat 6 plošných integrálů:

$$\iint_{\vec{S}} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{6} \iint_{\vec{S}_i} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

Tento postup je velmi zdlouhavý. (Zkuste za cvičení!)



Zeleně je znázorněna orientace $\vec{S}$. Z každé stěny míří ven.

K výpočtu použijeme Gauss - Ostrogradského větu

$$\iint\limits_{\vec{S}} \vec{F}(x,y,z) \circ d\vec{S} = \iiint\limits_{M} \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

Symbol $\operatorname{div} \vec{F}$ značí divergenci vektorového pole $\vec{F}$.
Platí

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = f_1(x,y,z)'_x + f_2(x,y,z)'_y + f_3(x,y,z)'_z .$$

Integrační obor M je těleso ohraničené uzavřenou plochou S. V našem příkladě je

$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 1+1+1 = 3$.

Aplikací Gauss - Ostrogradského věty obdržíme:

$$\iint\limits_{\vec{S}} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy = \iiint\limits_{M} 3\,dx\,dy\,dz =$$

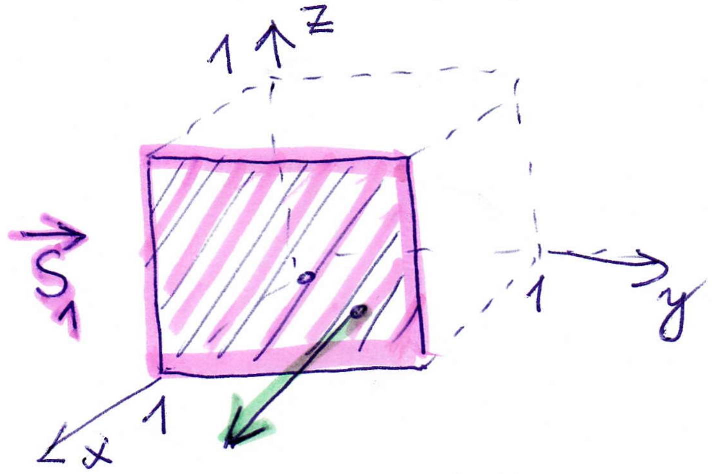
$$= 3 \iiint\limits_{M} dx\,dy\,dz \overset{\text{DIRICHLET}}{=} 3 \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 dy \cdot \int_0^1 dz =$$

$$= 3 [x]_0^1 \cdot [y]_0^1 \cdot [z]_0^1 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$$

Navíc trojrozměrný integrál $\iiint\limits_M dx\,dy\,dz$ nebylo třeba počítat. Jeho hodnota je rovna objemu M. Protože M je krychle o straně 1 je její objem $1^3 = 1$.

Ukažme si nyní výpočet některého ze 6-ti integrálů za cvičení!

Zvolme například plochu $\vec{S}_1$ ležící v rovině $x = 1$. Tato plocha je čtverec určený body $[1,0,0]$, $[1,1,0]$, $[1,0,1]$, $[1,1,1]$.



Napíšeme parametrizaci plochy $\vec{S}_1$:

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) = 1 \\ y &= y(u,v) = u \\ z &= z(u,v) = v \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x'_u &= 0, \quad x'_v = 0 \\ y'_u &= 1, \quad y'_v = 0 \\ z'_u &= 0, \quad z'_v = 1 \end{aligned}$$

Obor parametrů $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle = \langle 0,1\rangle^2$.

K výpočtu integrálu použijeme obecný

$$\iint_{\vec{S}} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

použijeme obecný vzorec:

$$\iint_{\vec{S}} \vec{F}(x,y,z) \circ d\vec{S} = \varepsilon \cdot \iint_M \vec{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \circ \vec{n}(u,v)\,du\,dv$$

S: $x = x(u,v)$, $[u,v] \in M$
$y = y(u,v)$
$z = z(u,v)$,

$$\vec{n}(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}.$$

Tedy $\vec{n}(u,v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \vec{i} = (1,0,0)$.

Protože ze zadání je orientace S_1 vnější a $\vec{n}(A) = (1,0,0)$ pro každý bod A ležící na ploše S_1, je $\varepsilon = 1$. (orientace normál je souhlasná). Odtud

$$\iint_{\vec{S}_1} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy = \overset{\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot \iint_M (1,u,v) \circ (1,0,0)\,du\,dv$$

$$\overset{\text{Dirichletova věta}}{=} \iint_M 1\,du\,dv = \int_0^1 du \cdot \int_0^1 dv = [u]_0^1 \cdot [v]_0^1 = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

Zbývajících 5 integrálů se vypočítá podobně.

<u>Domácí cvičení:</u>

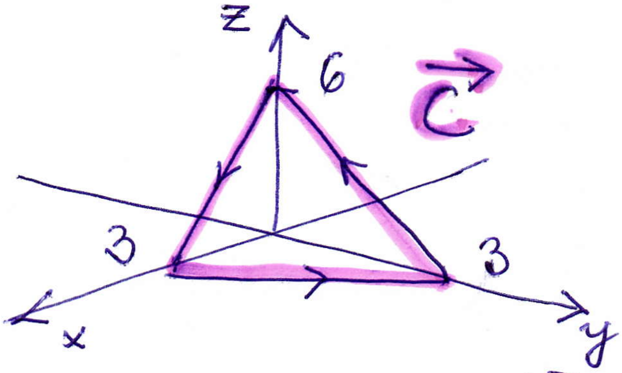
Pomocí Gauss-Ostrogradského věty vypočtěte

$\iint_{\vec{S}} z - r\,dx\,dy$, kde plocha $\vec{S}$ je definována vztahem $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2rz$, kde $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ je libovolné číslo. Orientace plochy S je vnější, tj. směřuje od uzavřené plochy „ven".

<u>Návod:</u> Nerovnici $x^2+y^2+z^2 \leq 2rz$ upravíme na tvar $x^2 + y^2 + (z-r)^2 \leq r^2$. Odtud je zřejmé, že $\vec{S}$ je sféra s poloměrem r a středem v bodě $[0,0,r]$.

Zadání:

Pomocí Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál 2. druhu $\displaystyle\int_{\vec{C}} -y^2\,dx + z\,dy + x\,dz$, kde křivka $\vec{C}$ je po částech hladká křivka daná obrázkem:



Řešení: Z obrázku plyne, že $\vec{C}$ je hranice prostorového $\triangle ABC$, kde $A=[3,0,0]$, $B=[0,3,0]$ a $C=[0,0,6]$. Stokesova věta říká, že

$$\int_{\vec{C}} \vec{F}(x,y,z)\circ d\vec{s} = \iint_{\vec{S}} \operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)\circ d\vec{S},$$

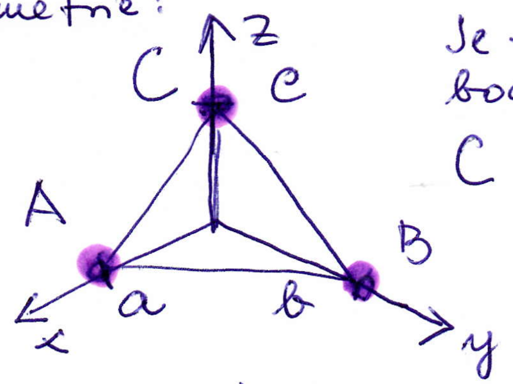
Plocha $\vec{S}$ je zcela libovolná plocha, jejíž okraj je právě křivka $\vec{C}$ a křivka $\vec{C}$ a plocha $\vec{S}$ jsou souhlasně orientované. Symbol $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)$ značí rotaci vektorového pole $\vec{F}(x,y,z)$, kterou můžeme určit ze vztahu:

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}, \quad \text{kde } \vec{F}(x,y,z) =$$

$$= \big(f(x,y,z),\ g(x,y,z),\ h(x,y,z)\big).$$

Plochu $\vec{S}$ si tedy musíme sami vymyslet. Nejjednodušší možnost je, proložit body A, B, C rovinu a tu pak parametrizovat. To jde samozřejmě udělat mnoha způsoby:

Připomeňme si jeden hezký způsob z analytické geometrie:



Je-li rovina α určena červenými body $A=[a,0,0]$, $B=[0,b,0]$ a $C=[0,0,c]$ pak pro α platí

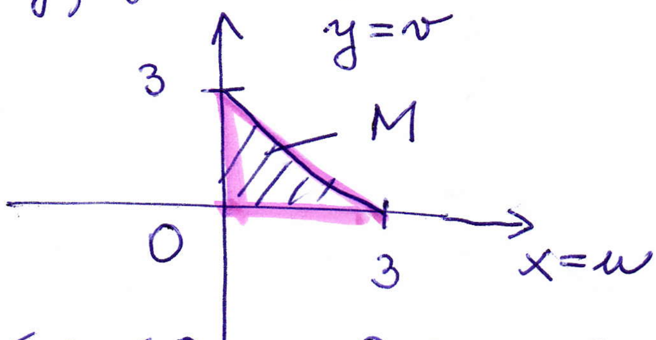
$$\alpha: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

V našem případě máme $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$, odkud $2x+2y+z=6$, a tedy $z=6-2x-2y$.

Hledaná parametrizace $\vec{S}$ může být tvaru:

$$x=u \qquad z'_u=-2,\ z'_v=-2 \Rightarrow \vec{n}(u,v)=(2,2,1).$$
$$y=v$$
$$z=6-2u-2v,$$

kde $[u,v]\in M$, kde M je obor parametrů. Obor M získáme průmětem $\vec{S}$ do roviny xy, tj. $z=0$:



Tedy $0\le u\le 3$ a $0\le v\le 3-u$. Odtud

$$M=\{[u,v]\in\mathbb{R}^2 : 0\le u\le 3,\ 0\le v\le 3-u\}.$$

Aplikujme nyní Stokesovu větu

$$\vec{F}(x,y,z)=(-y^2,z,x) \text{ a}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y^2 & z & x\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial y}\vec{i}+\frac{\partial(-y^2)}{\partial z}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial x}\vec{k}-\left(\frac{\partial(-y^2)}{\partial y}\vec{k}+\frac{\partial z}{\partial z}\vec{i}+\frac{\partial x}{\partial x}\vec{j}\right)=$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} - (-2y\vec{k} + \vec{i} + \vec{j}) =$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} + 2y\vec{k} = (-1, -1, 2y).$$

$$\int_{\vec{C}} -y^2 dx + z\,dy + x\,dz = \iint_{\vec{S}} (-1, -1, 2y) \circ d\vec{S} =$$

$$\iint_M (-1, -1, 2v) \circ (2, 2, 1)\, du\, dv = \iint_M -2-2+2v\, du\, dv =$$

$$\iint_M 2v - 4\, du\, dv \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^3 \left(\int_0^{3-u} 2v - 4\, dv \right) du =$$

$$\int_0^3 \left[2\frac{v^2}{2} - 4v \right]_0^{3-u} du = \int_0^3 (3-u)^2 - 4(3-u)\, du =$$

$$\int_0^3 9 - 6u + u^2 - 12 + 4u\, du = \int_0^3 u^2 - 2u - 3\, du =$$

$$\left[\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^2}{2} - 3u \right]_0^3 = \frac{27}{3} - 9 - 9 = 9 - 18 = \underline{\underline{-9}}$$

Poznámka: Rotaci vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$ je možné počítat přímo ze vztahu:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \left(h'_y - g'_z,\ f'_z - h'_x,\ g'_x - f'_y \right)$$

Není to těžké odvodit a celkem dobře se to pamatuje.

DRUHÁ ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA

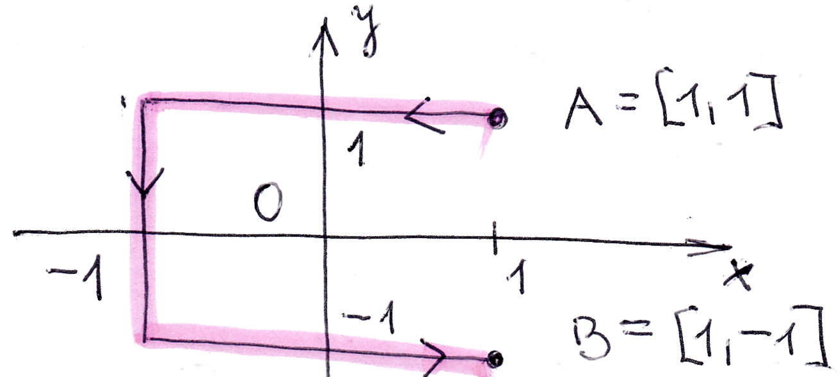
20. 4. 2020

PŘÍKLAD 1: Vypočtěte $\iint\limits_M x \, dx\, dy$, kde integrační obor M je ohraničen křivkami $x - y = 1$, $x^2 + y = 1$. (3b)

PŘÍKLAD 2: Pomocí transformace do válcových souřadnic vypočtěte integrál $\iiint\limits_M dx\, dy\, dz$, kde integrační obor M je ohraničen plochami $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = 1$. (3b)

PŘÍKLAD 3: Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu $\int\limits_C x^2 - y^2 \, ds$, kde křivka C je úsečka určená body $A = [1, 2]$, $B = [4, -1]$. (3b)

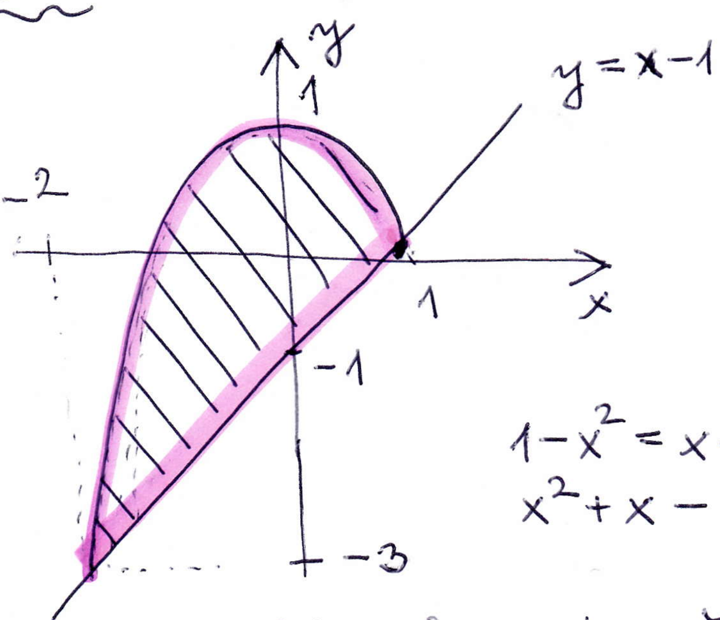
PŘÍKLAD 4: Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu $\int\limits_{\vec{C}} y^3 dx + 3xy^2 dy$, kde křivka $\vec{C}$ je po částech hladká křivka definovaná obrázkem: (3b)



PŘÍKLAD 1.

Vypočtěte $\iint\limits_M x\,dx\,dy$, kde integrační obor M je ohraničen křivkami $x-y=1$, $x^2+y=1$.

Řešení: a) Nakreslíme obrázek M.



spočítáme průsečíky přímky a paraboly. Musíme vyřešit kvadratickou rovnici:

$1-x^2=x-1 \Leftrightarrow$
$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$

b) Popíšeme M jako integrační obor typu (x,y):

$$M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ -2\le x\le 1,\ x-1\le y\le 1-x^2\}$$

c) Dosadíme do Fubiniho vzorce a dopočítáme:

$$\iint\limits_M x\,dx\,dy=\int_{-2}^{1}\left(\int_{x-1}^{1-x^2} x\,dy\right)dx \overset{d)}{=} \int_{-2}^{1}\left[x\,y\right]_{x-1}^{1-x^2}dx=$$

$$\int_{-2}^{1} x(1-x^2)-x(x-1)\,dx \overset{e)}{=} \int_{-2}^{1}-x^3-x^2+2x\,dx=$$

$$\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{1}=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-4+\frac{8}{3}+4\right)=$$

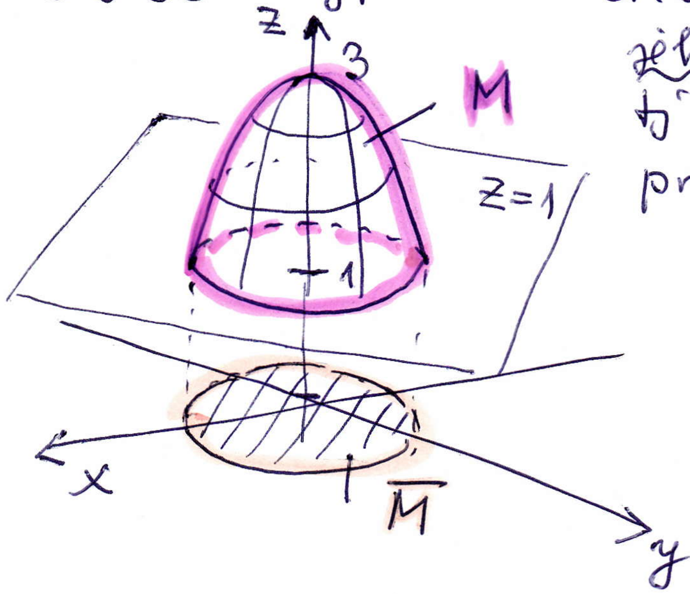
$$-\frac{1}{4}-\frac{9}{3}+1=-2-\frac{1}{4}=-\frac{9}{4}$$

$$=-\frac{9}{4}$$

PŘÍKLAD 2: Pomocí transformace do válcových souřadnic vypočtěte integrál:

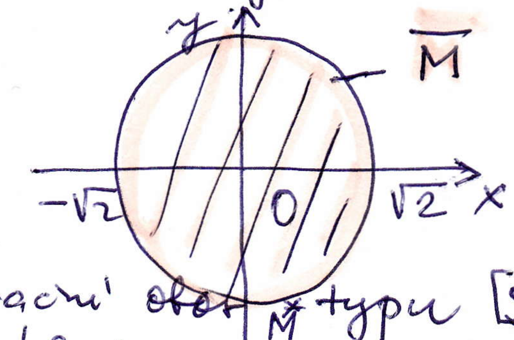
$$\iiint_M dx\,dy\,dz,$$ kde integrační obor M je ohraničen plochami $z = 3 - x^2 - y^2$ a $z = 1$.

Řešení: a) Nejprve si nakreslíme integrační obor M a jeho průmět $\overline{M}$ do roviny xy, tj. $z=0$. Hraniční křivka průmětu je kružnice:



$$3 - x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2$$



b) Popíšeme M jako integrační obor M^* typu $[\rho,\varphi,z]$ ve válcových souřadnicích:

$$M^* = \{[\rho,\varphi,z] \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 1 \le z \le 3-\rho^2\}$$

c) $$\iiint_M dx\,dy\,dz \overset{*}{=} \iiint_{M^*} \overset{|J|}{\rho}\, d\rho\, d\varphi\, dz \overset{**}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^{3-\rho^2} \rho\, dz \right) d\varphi \right) d\rho$$

* ... použití věty o transformaci, ** ... Fubiniho vzorec

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} [\rho z]_1^{3-\rho^2} d\varphi \right) d\rho = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho(3-\rho^2) - \rho\, d\varphi \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left[(2\rho - \rho^3)\varphi \right]_0^{2\pi} d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 2\rho - \rho^3\, d\rho = 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi\left(2 - \frac{4}{4}\right) = \underline{\underline{2\pi}}.$$

PŘÍKLAD 3:

Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu $\int_C x^2 - y^2 \, ds$, kde křivka C je úsečka určená body $A = [1,2]$, $B = [4,-1]$.

Řešení: a) Napíšeme parametrizaci křivky C:

$$C: [x,y] = \underbrace{[1,2]}_{A} + t\underbrace{(3,-3)}_{B-A}, \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

$$(*) \quad \begin{aligned} x &= 1+3t \\ y &= 2-3t, \quad t \in \langle 0,1 \rangle. \end{aligned} \quad \text{Odtud} \quad \begin{aligned} x' &= 3 \\ y' &= -3 \end{aligned}$$

b) Použijeme výpočetní vzorec

$$\int_C x^2 - y^2 \, ds = \int_0^1 \left[(1+3t)^2 - (2-3t)^2\right]\sqrt{3^2+(-3)^2}\, dt$$

c) Vypočítáme určitý integrál:

$$\int_0^1 \left[1 + 6t + 9t^2 - (4 - 12t + 9t^2)\right]\sqrt{18}\, dt =$$

$$= \sqrt{18}\int_0^1 18t - 3\, dt = 3\sqrt{2}\left[18\frac{t^2}{2} - 3t\right]_0^1 = 3\sqrt{2}\left[9t^2 - 3t\right]_0^1$$

$$= 3\sqrt{2}\,(\underbrace{9-3}_{6}) = \underline{\underline{18\sqrt{2}}}$$

Jiná možnost řešení: Rovnice $(*)$ sečteme: $x + y = 3$

Odtud $x = t$, $y = 3 - t$, $t \in \langle 1,4 \rangle$. Tedy $x' = 1$, $y' = -1$.

Použijeme výpočetní vzorec:

$$\int_C x^2 - y^2 \, ds = \int_1^4 \left[t^2 - (3-t)^2\right] \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2}\, dt =$$

$$\sqrt{2}\int_1^4 t^2 - 9 + 6t - t^2\, dt = \sqrt{2}\int_1^4 6t - 9\, dt =$$

$$\sqrt{2}\left[6\frac{t^2}{2} - 9t\right]_1^4 = \sqrt{2}\left(3\cdot 4^2 - 9\cdot 4 - (3-9)\right) =$$

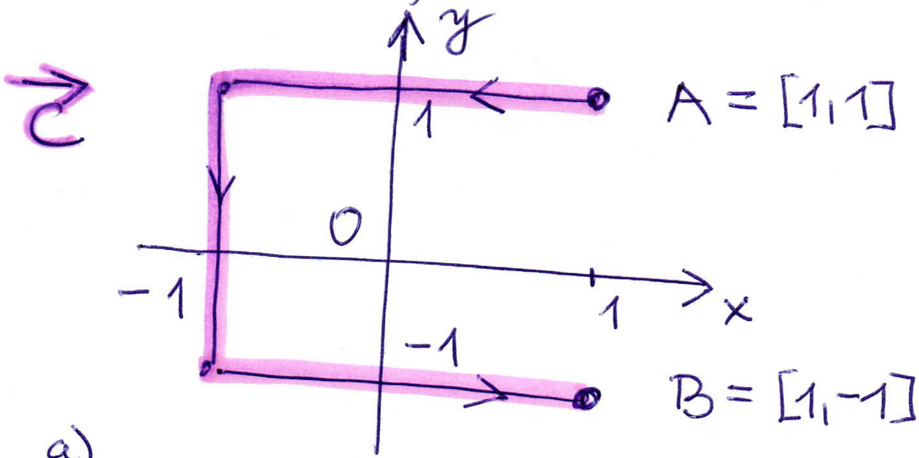
$$\sqrt{2}\,(48 - 36 + 6) = \underline{\underline{18\sqrt{2}}}$$

PŘÍKLAD 4:

Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\vec{C}} y^3\,dx + 3xy^2\,dy,$$

kde křivka $\vec{C}$ je po částech hladká, definovaná obrázkem:



Řešení:

a) Nejprve ověříme, že vektorové pole

$$\vec{F}(x,y) = (\underbrace{y^3}_{f}, \underbrace{3xy^2}_{g})$$

je potenciálové.

$$\begin{aligned} f'_y &= 3y^2 \\ & \quad \parallel \\ g'_x &= 3y^2 \end{aligned} \Rightarrow \vec{F} \text{ je potenciálové}$$

b) Vypočítáme potenciál $\varphi(x,y)$:

$$\varphi(x,y) = \int_0^x y^3\,dt + \int_0^y 3\cdot 0\cdot t^2\,dt =$$

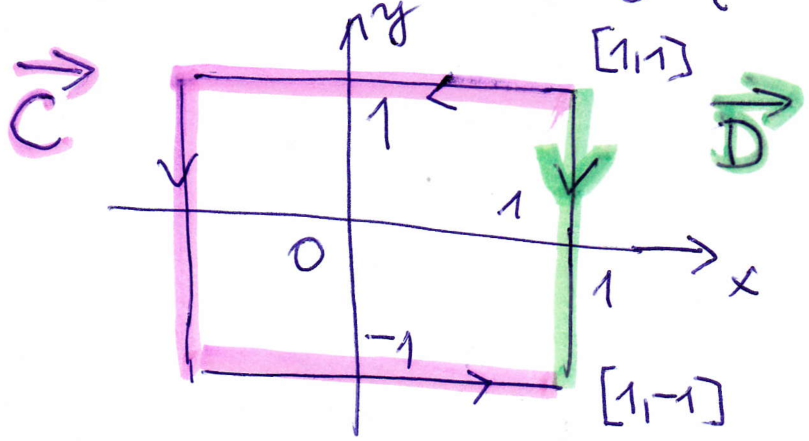
$$= \left[t y^3\right]_0^x + \left[c\right]_0^y = xy^3 + (c-c) = \underline{xy^3}$$

c)

$$I = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(1,-1) - \varphi(1,1) =$$

$$= 1\cdot(-1)^3 - 1\cdot 1^3 = -1 - 1 = \underline{\underline{-2}}$$

Druhá možnost řešení: Protože je pole $\vec{F}$ potenciálové, nezávisí integrál na křivce, přes kterou integrujeme. Křivku $\vec{C}$ nahradíme křivkou $\vec{D}$ (úsečkou AB orientovanou od A k B (zeleně).



Napíšeme parametrizaci $\vec{D}$:

$$x = 1, \quad y = t, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle \Rightarrow x' = 0, \quad y' = 1, \quad \varepsilon = -1.$$

Platí

$$\int_{\vec{C}} y^3 dx + 3xy^2 dy = \int_{\vec{D}} y^3 dx + 3xy^2 dy \overset{\varepsilon}{=}$$

$$(-1) \cdot \int_{-1}^{1} (t^3, 3 \cdot 1 \cdot t^2) \circ (0, 1) \, dt =$$

$$(-1) \int_{-1}^{1} 3t^2 dt = (-3) \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} = (-3)\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= (-3) \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{-2}}$$

OPRAVNÁ PÍSEMKA – ZADÁNÍ 27/4 2020

PŘÍKLAD 1: Vyšetřete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \frac{\arcsin(x-2)}{\sqrt{4x-x^2-y^2}}. \qquad (3b)$$

PŘÍKLAD 2: Metodou postupných limit vyšetřete limitu:

$$L = \lim_{[x,y]\to[4,1]} \frac{(y+1)^2-x}{1-\sqrt{x}+y}.$$

(3b)

PŘÍKLAD 3: Vypočtěte koeficient c v Taylorově polynomu $T_1(x,y) = ax + by + c$ prvního řádu fce $f(x,y) = \frac{x+\cos(\ln x)}{y^2}$ v bodě $A = [1,2]$.

(3b)

PŘÍKLAD 4: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = (y^2 - 7x)\cdot e^{-2x}$. (3b)

Hodnocení: $\geq 6b$ uspěl. (na každý příklad jsou 3 body)

Vyšetřete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \frac{\arcsin(x-2)}{\sqrt{4x-x^2-y^2}}.$$

a) $[x,y] \in Df \Leftrightarrow -1 \le x-2 \le 1 \wedge 4x-x^2-y^2 \ge 0$

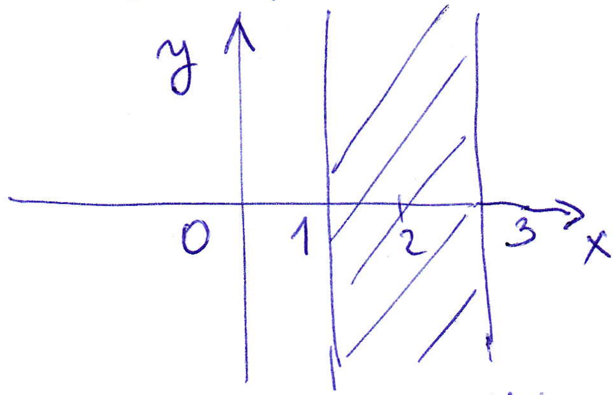
$\wedge \sqrt{4x-x^2-y^2} \ne 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3 \wedge x^2-4x+y^2 \le 0$

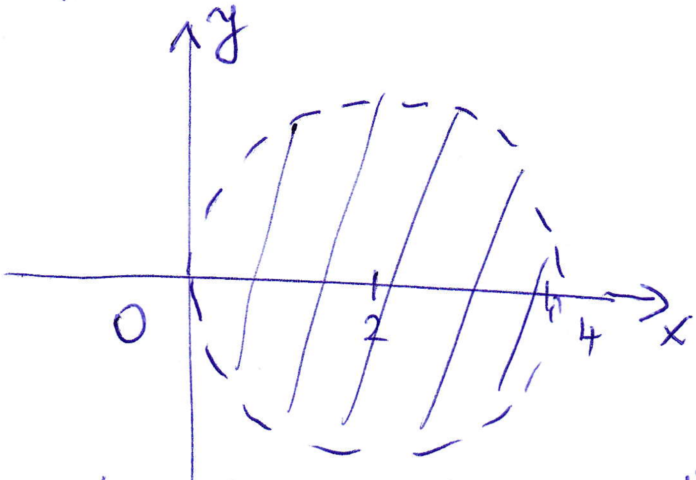
$\wedge 4x-x^2-y^2 \ne 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1,3\rangle \wedge x^2-4x+y^2 < 0$

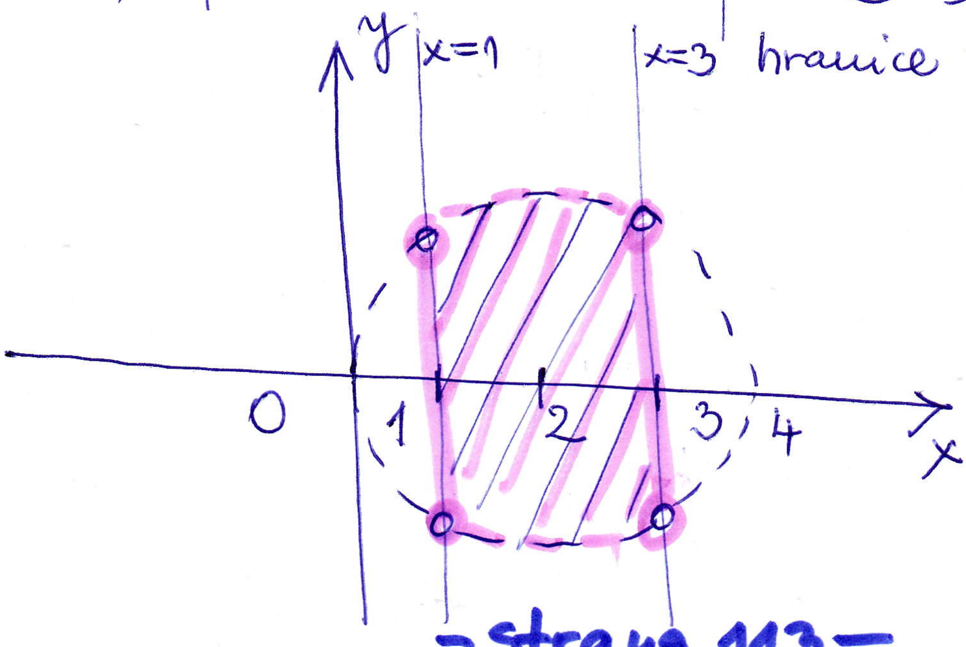
$\Leftrightarrow x \in \langle 1,3\rangle \wedge (x-2)^2+y^2 < 4$

b) Nakreslení obrázku podle konvence

$x \in \langle 1,3\rangle$







hranice tam nepatří!

$$L = \lim_{[x,y]\to[4,1]} \frac{(y+1)^2 - x}{1-\sqrt{x}+y}$$

$$L_1 = \lim_{x\to 4}\left(\lim_{y\to 1} \frac{(y+1)^2 - x}{1-\sqrt{x}+y}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 4} \frac{-1}{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{-1}{\frac{-1}{2\sqrt{4}}} = \underline{\underline{4}}$$

$$L_2 = \lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 4} \frac{(y+1)^2 - x}{1-\sqrt{x}+y}\right) = \lim_{y\to 1} \frac{(y+1)^2-4}{y-1}$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| \overset{L'H}{=} \lim_{y\to 1} \frac{2(y+1)}{1} = 2\cdot 2 = \underline{\underline{4}}$$

Protože $L_1 = L_2 = 4$, limita $\underline{L=4 \text{ nebo } L}$ $\underline{\text{neexistuje}}$

Pomocí algebraické úpravy je možno ověřit, že $L=4$:

$$L = \lim_{[x,y]\to[4,1]} \frac{(y+1-\sqrt{x})(y+1+\sqrt{x})}{y+1-\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{[x,y]\to[4,1]} y+1+\sqrt{x} = 1+1+\sqrt{4} = 2+2 = \underline{\underline{4}}$$

Vypočtete Tayl. pol. $T_1(x,y)$ fce f v A.

$$f(x,y) = \frac{x + \cos \ln x}{y^2} \qquad A = [1,2]$$

$$T_1(x,y) = f(A) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(A)(x-1) + f'_y(A)(y-2)\right)$$

$$f'_x = \frac{1 - \sin(\ln x)\cdot \frac{1}{x}}{y^2} \qquad f'_x(A) = \frac{1 - \sin 0 \cdot \frac{1}{1}}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$f'_y = \frac{-2(x + \cos \ln x)}{y^3} \qquad f'_y(A) = \frac{-2(1 + \overset{1}{\cos 0})}{8} = \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}$$

$$f(A) = \frac{1 + \cos 0}{4} = \frac{1+1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$T_1(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2}(y-2)$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y}}$$

$$T_1(x,y) = ax + by + c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}$$

$$a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{5}{4}$$

$$f(x,y) = (y^2 - 7x)\, e^{-2x}$$

$$f'_x = -7e^{-2x} + (y^2 - 7x)\, e^{-2x} \cdot (-2) =$$

$$(-2 \cdot y^2 + 14x - 7)\, e^{-2x} = 0 \quad \Rightarrow 14x - 7 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = 2y\, e^{-2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$S = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$$

$$f''_{xx} = 14e^{-2x} + (-2y^2 + 14x - 7)\, e^{-2x} \cdot (-2) =$$

$$= (14 + 4y^2 - 28x + 14)\, e^{-2x} = (28 - 28x + 4y^2)\, e^{-2x}$$

$$f''_{xy} = -4y\, e^{-2x}$$

$$f''_{yy} = 2e^{-2x}$$

$$f'' = \begin{bmatrix} (28 - 28x + 4y^2)\, e^{-2x} & -4y\, e^{-2x} \\ -4y\, e^{-2x} & 2e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$f''(S) = \begin{bmatrix} \frac{14}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix}$$

$d_1 = \frac{14}{e} > 0$ Funkce má v bodě

$d_2 = \frac{28}{e^2} > 0$ $S = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$ minimum