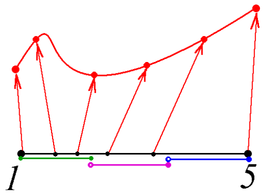
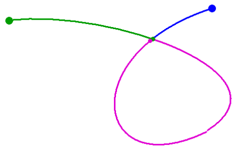
Křivky



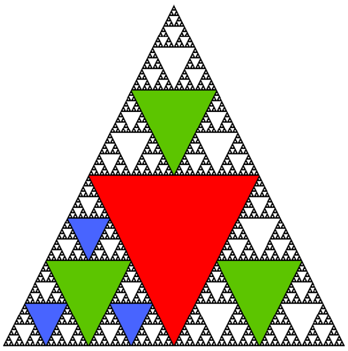


Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922):

Křivka je množina bodů, která je surjektivním obrazem nějakého intervalu

Giuseppe Peano (1858 – 1932): *Zobrazení intervalu na čtverec*

Wacław Franciszek Sierpiński (1882 — 1969) – Sierpińského trojúhelník



$$S_1 = \frac{1}{4} S_0$$

$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_1 = 3 \cdot \frac{1}{4^2} S_0$$

$$S_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_2 = 3^2 \cdot \frac{1}{4^3} S_0$$

……………………………………..

$$S_n = \frac{3^n}{4^{n+1}} S_0$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}} S_0 = \frac{1}{4} S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{1}{4} S_0 \cdot 4 = S_0$$

Nulový obsah a nekonečná délka $\Rightarrow$ nutnost precizace pojmu křivka

Základní topologické pojmy:

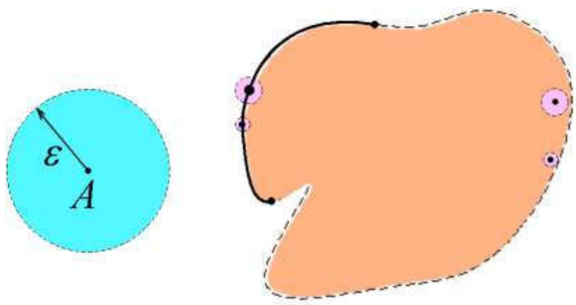
Okolí bodu – *kruh (v E^2), koule (v E^3) bez „hraničních“ bodů, tedy:*

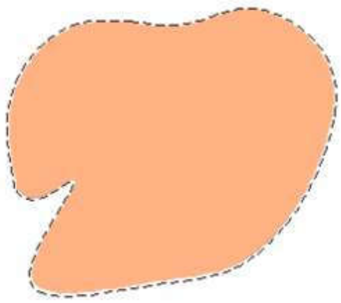
$$O_\varepsilon(A) = \{X \in E^2 \| AX| < \varepsilon\};$$

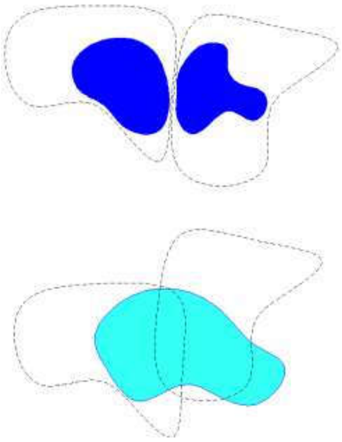
$$O_\varepsilon(A) = \{X \in E^3 \| AX| < \varepsilon\}$$

*Otevřená množina **M** –*

pro každý bod $A \in \boldsymbol{M}$ existuje $O_\varepsilon(A)$ tak, že $O_\varepsilon(A) \subset \boldsymbol{M}$.

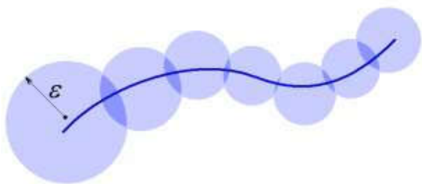


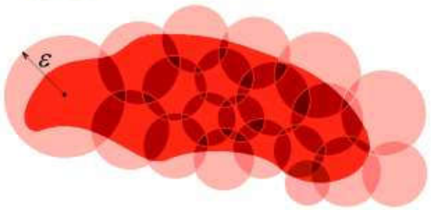




Základní topologické pojmy:

Souvislá množina $\boldsymbol{M}$ *–*
Pro každé dvě neprázdné otevřené množiny $\boldsymbol{A}$*;* $\boldsymbol{B}$*, pro které je* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$*, platí* $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \neq \emptyset$





ε-pokrytí množiny $\boldsymbol{M}$ *- je systém ε okolí* $O_{\varepsilon_i}(A_i)$ *kde* $\boldsymbol{M} \subset \bigcup_i O_{\varepsilon_i}(A_i)$ *a pro každé i je* $\varepsilon_i \leq \varepsilon$*.*

Dimenze množiny $\boldsymbol{M}$ *je nejmenší číslo n, pro které platí:*
Pro každé $\varepsilon > 0$ *existuje* ε *pokrytí množiny* $\boldsymbol{M}$ *tak, že každý bod* $X \in \boldsymbol{M}$ *je prvkem sjednocení nejvýše* $n+1$ *množin tohoto pokrytí.*

Křivka – topologicky jednorozměrná souvislá množina
Plocha – topologicky dvojrozměrná souvislá množina
Těleso – topologicky trojrozměrná ohraničená množina

❖ **Elementární křivky:**
- **přímka** a její části (především **polopřímka** a **úsečka**.
- **kružnice a její části (kruhový oblouk)**.

❖ **Elementární plochy:**
- **rovina** a její části – (především **polorovina**)
- základní rovinné geometrické útvary známé ze středoškolské geometrie
- prostorové plochy – **hranolovou**, **jehlanovou**, **kruhovou válcovou**, **kruhovou kuželovou** a dále **plochu kulovou**.

❖ **Elementární tělesa:**
- **hranol** a jeho speciální případy (především **kvádr** a **krychli)**,
- **jehlan (kosý, kolmý, pravidelný** n**-boký,**
- **kruhový válec a kužel (kosý a kolmý - rotační)**
- **koule**.

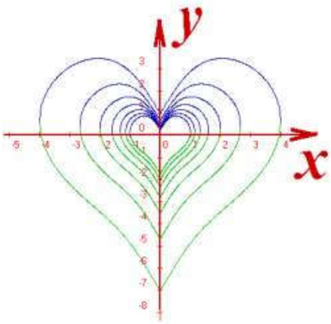
Nutná znalost související terminologie – **vrchol, strana hrana, plášť** atd.

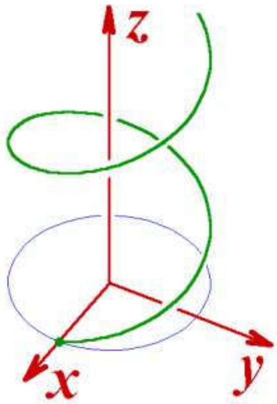
Rozdělení křivek

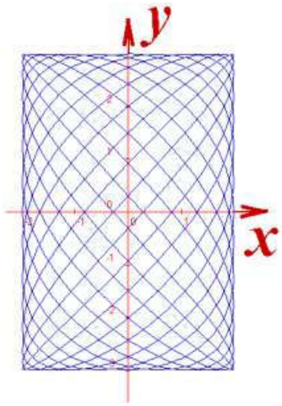
podle

dimenze prostoru, ve kterém jsou definovány: ***možnosti analytického popisu***

rovinné: *prostorové* *analytické* *grafické*







$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$z = t$$

$$x = 2\sin 15t$$
$$y = 3\cos 11t$$

Analytické křivky (rovinné)

Typy a možnosti vyjádření:

a) graf funkce jedné reálné proměnné

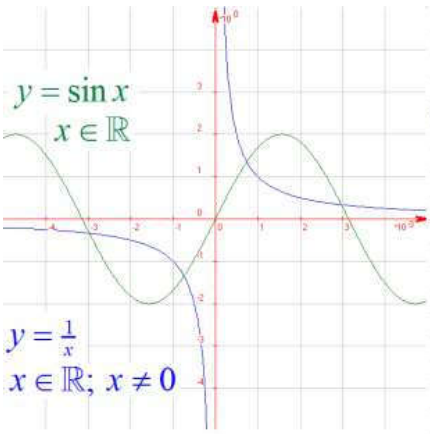
b) křivky zadané parametricky

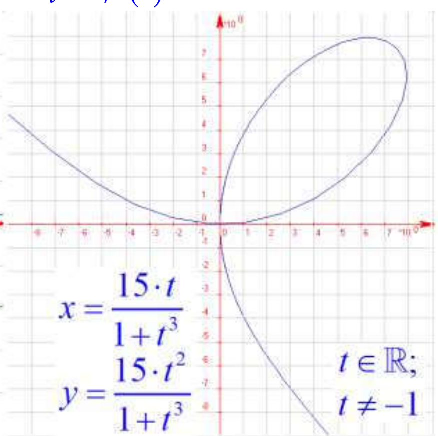
c) křivky zadané implicitně

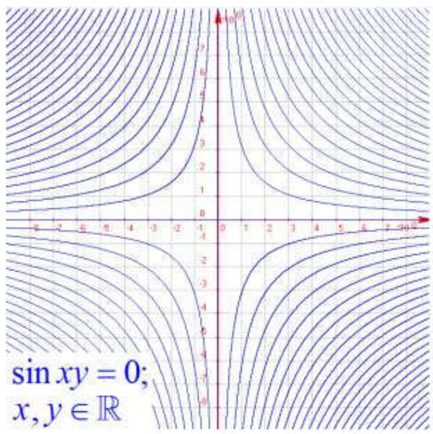
$$G(f) = \{[x;y] \in E^2 \,|\, y = f(x)\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\};\ t \in I$$

$$f(x;y) = 0$$







Analytické křivky (rovinné)

Parametrické vyjádření:

Příklad:

$\begin{matrix} x = 5\cdot\cos t \\ y = 5\cdot\sin t \end{matrix}; t\in\langle 0;2\pi)$ $\quad \begin{matrix} x = 5\cdot\cos 2t \\ y = 5\cdot\sin 2t \end{matrix}; t\in\langle 0;\pi)$ $\quad \begin{matrix} x = 5\cdot\cos 2t \\ y = 5\cdot\sin 2t \end{matrix}; t\in\langle 0;2\pi)$ $\quad \begin{matrix} x = 5\cdot\cos 2t \\ y = 5\cdot\sin 2t \end{matrix}; t\in\langle 0;\tfrac{\pi}{2})$

Převody:

Parametrické vyjádření → obecná rovnice (vyloučení parametru):

Příklad:

$$x = 2\cos t$$
$$y = 2\sin t$$

$$x^2 = 4\cos^2 t$$
$$y^2 = 4\sin^2 t$$

$$x^2 + y^2 = 4\cdot\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

obecná rovnice → parametrické vyjádření (parametrizace):

Příklad:

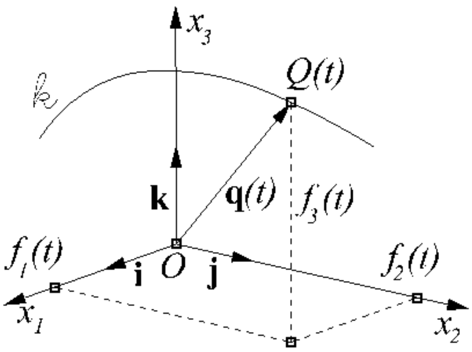
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

subst. $\begin{matrix} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{matrix}$ *parametrické rovnice*

$$\frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = 1$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Analytické křivky



Bodová funkce: Bodová funkce v euklidovské rovině resp. prostoru

$$Q(t) = \left[f_1(t); f_2(t)\right] \in E^2 \qquad t\in\langle t_1;t_2\rangle$$
$$Q(t) = \left[f_1(t); f_2(t); f_3(t)\right] \in E^3 \qquad t\in\langle t_1;t_2\rangle$$

Bodová funkce v projektivní rovině resp. prostoru

$$Q(t) = \left(k\cdot f_1(t); k\cdot f_2(t); k\cdot\omega(t)\right) \in {}_\infty E^2$$
$$Q(t) = \left(k\cdot f_1(t); k\cdot f_2(t); k\cdot f_3(t); k\cdot\omega(t)\right) \in {}_\infty E^3$$

$f_1(t); f_2(t); f_3(t); \omega(t)$ - souřadnicové funkce

Vektorová funkce v euklidovské rovině resp. prostoru

$\mathbf{q}(t) = \left(f_1(t); f_2(t)\right)$
rovinná křivka

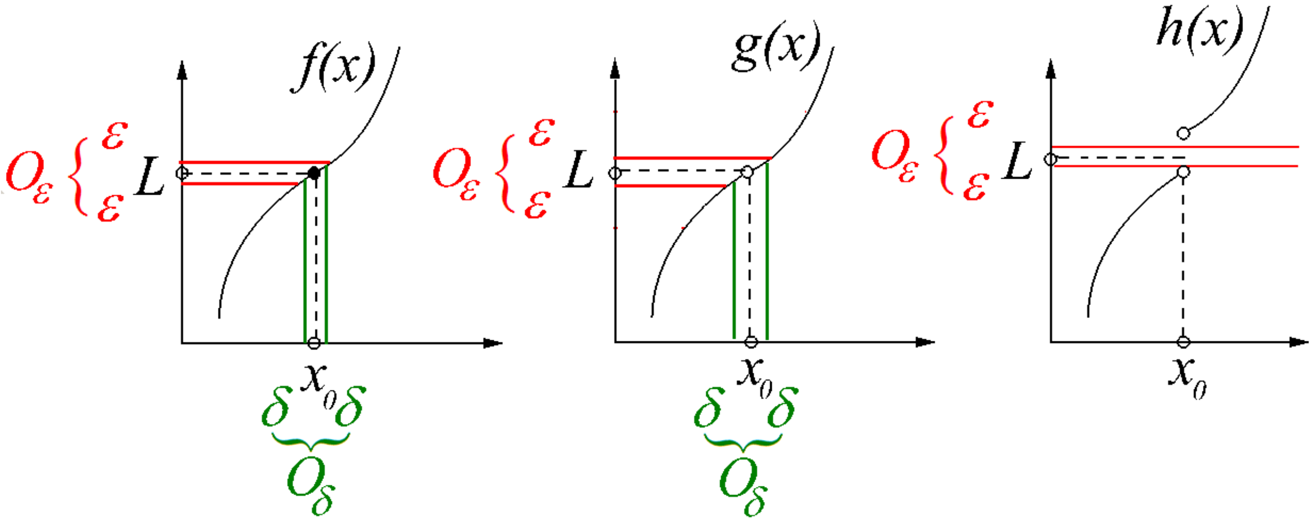
$\mathbf{q}(t) = \left(f_1(t); f_2(t); f_3(t)\right)$
prostorová křivka

v projektivní rovině resp. prostoru – reprezentanti:

$\boldsymbol{Q}(t) = \left(f_1(t); f_2(t); \omega\right) \in {}_\infty E^2$ $\qquad \boldsymbol{Q}(t) = \left(f_1(t); f_2(t); f_3(t); \omega\right) \in {}_\infty E^3$

Regulární křivky

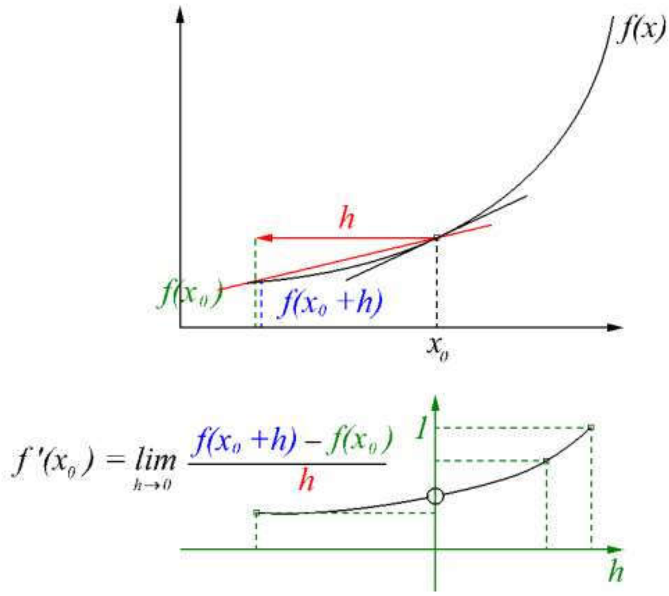
Limita funkce



Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $L \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když **ke každému** $O_\varepsilon(L) \rightarrow$ **existuje** $O_\delta(x_0)$ takové, že pro každé $x \in O_\delta(x_0) - \{x_0\}$ je $f(x) \in O_\varepsilon(L)$.

Regulární křivky

Derivace funkce



Derivace funkce: v bodě x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Na intervalu I:

pro každé $x_0 \in I$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$x - x_0 = h;\ x = x_0 + h$

V bodě x_0**:**

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Na intervalu I:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Regulární křivky

Derivace funkce

$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}; (n \neq 0)$	$(t^n)' = n\cdot x^{n-1}; (n \neq 0)$
$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$	$(c\cdot f(t))' = c\cdot f'(t)$
$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$	$(f(t)+g(t))' = f'(t)+g'(t)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin t)' = \cos t$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos t)' = -\sin t$

Tečna t grafu funkce $f(x)$ ***v bodě*** $T_0 \equiv [x_0; f(x_0)]$ *je přímka, která prochází bodem* $T_0 \equiv [x_0; f(x_0)]$ *a má směrnici* $f'(x_0)$.

Příklad: $f(x) = x^2 + 2x; x_0 = 0$

Řešení: $T_0 \equiv [x_0; f(x_0)] = [0;0]$

$$f'(x) = (x^2+2x)' = 2x+2$$

$$f'(x_0) = 2x_0 + 2 = 0+2 = 2$$

$$\boldsymbol{t} \equiv y = f'(x_0)\cdot x + q = 2x + q \qquad T_0 \in \boldsymbol{t} \Rightarrow \boldsymbol{t} \equiv y = 2x$$

Regulární křivky

Bodová funkce $\boldsymbol{Q}(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega) \in {}_\infty E^2$ bod $\boldsymbol{T}_0 = (f_1(t_0); f_2(t_0); \omega)$

Hodnota v bodě $\boldsymbol{Q}(t_0)$; $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{T}_0)$

Derivace bodové funkce – derivujeme souřadnicové funkce:

$$\boldsymbol{Q}(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{Q'}(t) = (f'_1(t); f'_2(t); 0)$$

Regulární bod: bod $\boldsymbol{T}_0 = (f_1(t_0); f_2(t_0); \omega)$ je regulární bod křivky $\boldsymbol{Q}(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega)$ n řádu $\Leftrightarrow$ existují $\boldsymbol{Q}^{(k)}(\boldsymbol{T}_0) = (f_1^{(k)}(t); f_2^{(k)}(t); \omega^{(k)})$ až do řádu n a $\boldsymbol{Q}^{(k)}(\boldsymbol{T}_0) \neq (0;0;0)$.

Regulární křivka = křivka, jejíž každý bod je regulární

Tečna v regulárním bodě: přímka $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}_0 + \boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{T}_0)\cdot t$

je tečna křivky určené bodovou funkcí $\boldsymbol{Q}(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega)$:

v regulárním bodě $\boldsymbol{T}_0 = (f_1(t_0); f_2(t_0); \omega)$

Normála v regulárním bodě každá kolmice na tečnu křivky v regulárním bodě

$$\boldsymbol{T}_0 = (f_1(t_0); f_2(t_0); \omega):$$

Regulární křivky

Příklad: Určit tečnu ke křivkám:

a) $\boldsymbol{K}(t) = (\cos t; \sin t; 1)$

b) $\boldsymbol{S}(t) = (\cos t; \sin t; t; 1)$

Regulární křivky

Je-li $\boldsymbol{Q}(t)$, která je v bodě $\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{Q}(t_0)$ regulární 2. řádu, pak

Oskulační rovina: $\alpha = \boldsymbol{T}_0 + \boldsymbol{Q}'(t_0) \cdot u + \boldsymbol{Q}''(t_0) \cdot v$

Křivost: $$\kappa(t_0) = \frac{\left|\boldsymbol{Q}'(t_0) \times \boldsymbol{Q}''(t_0)\right|}{\left|\boldsymbol{Q}'(t_0)\right|^3}$$

Hlavní normála: Je normála, která leží v oskulační rovině

Oskulační kružnice:
- leží v oskulační rovině
- poloměr $r = \dfrac{1}{\kappa(t_0)}$
- s polopřímkou $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}_0 + \boldsymbol{Q}''(t_0) \cdot t$; $t \geq 0$ má dva společné body

Vrcholy regulární křivky – body ve kterých má křivka extrémální křivost.

Příklad: Oskulační kružnice elipsy v hlavním vrcholu

Plochy

Plocha jako graf funkce

$f(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

obecná rovnice plochy

$x^2+y^2+z^2-1=0$

Parametrické rovnice

$x=\cos u\cos v$

$y=\sin u\cos v$

$z=\sin v$

Bodová funkce dvou proměných:

obecně: $\boldsymbol{Q}(u;v)=\left(f(u;v);\ g(u;v);h(u;v);\ 1\right)$

např. $\boldsymbol{Q}(u;v)=\left(\cos u\cos v;\ \sin u\cos v;\ \sin v;\ 1\right)$

Izokřivky: plocha $\boldsymbol{Q}(u;v)=\left(f(u;v);\ g(u;v);h(u;v);\ 1\right)$

a $v=v_0=konst\Rightarrow$ $\boldsymbol{Q}(u)=\left(f(u);\ g(u);h(u);\ 1\right)$ **u-křivka**

$u=u_0=konst\Rightarrow$ $\boldsymbol{Q}(v)=\left(f(v);\ g(v);h(v);\ 1\right)$ **v-křivka**

Každá u-křivka protíná každou v-křivku a naopak.

Regulární plochy

Derivace funkce dvou proměnných:

Příklad: $f(u;v)=3u^4v^2$

Derivace podle u: $f'_u(u;v)=12u^3v^2$ Derivace podle v $f'_v(u;v)=6u^4v$

Derivace bodové funkce – po složkách: $\boldsymbol{Q}(u;v)=\left(f(u;v);\ g(u;v);h(u;v);\ 0\right)$

$\boldsymbol{Q}'_u(u;v)=\left(f'_u(u;v);\ g'_u(u;v);h'_u(u;v);\ 0\right)$ $\boldsymbol{Q}'_v(u;v)=\left(f'_v(u;v);\ g'_v(u;v);h'_v(u;v);\ 0\right)$

Geometrický význam: *směrový vektor tečny u-křivky resp. v-křivky*

Regulární bod: bod $\boldsymbol{T}_0=\left(f(u_0;v_0);g(u_0;v_0);h(u_0;v_0);\omega\right)$ je regulární bod plochy $\boldsymbol{Q}(u;v)=\left(f(u;v);\ g(u;v);h(u;v);\ 0\right)$ n řádu $\Leftrightarrow$ existují

$$\boldsymbol{Q}_u^{(k)}(u_0;v)=\left(f_u^{(k)}(u_0;v_0);\ g_u^{(k)}(u_0;v_0);h_u^{(k)}(u_0;v_0);\ 0\right)$$

$$\boldsymbol{Q}_v^{(k)}(u_0;v_0)=\left(f_v^{(k)}(u_0;v_0);\ g_v^{(k)}(u_0;v_0);h_v^{(k)}(u_0;v_0);\ 0\right)$$

až do řádu n, přičemž $\boldsymbol{Q}_u^{(k)}(u_0;v_0);\boldsymbol{Q}_v^{(k)}(u_0;v_0)\neq(0;0;0;0)$

Regulární plocha = plocha, jejíž každý bod je regulární

Tečná rovina v bodě $\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{X}(u;v)=\boldsymbol{T}(u_0;v_0)+\boldsymbol{Q}'_u(u_0;v_0)\cdot u+\boldsymbol{Q}'_v(u_0;v_0)\cdot v$

Normálový vektor plochy: $\boldsymbol{N}(u_0;v_0)=\boldsymbol{Q}'_u(u_0;v_0)\times\boldsymbol{Q}'_v(u_0;v_0)$