



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC
NECELOČÍSELNÉHO ŘÁDU METODOU ADOMIANOVA
ROZKLADU**

SOLVING FRACTIONAL-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA ADOMIAN DECOMPOSITION
METHOD

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Apolena Šustková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.

BRNO 2021

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Bc. Apolena Šustková**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Řešení obyčejných diferenciálních rovnic neceločíselného řádu metodou Adomianova rozkladu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diferenciální rovnice neceločíselného řádu (často nazývané zlomkové) se v průběhu posledních desetiletí staly populárním nástrojem při modelování mnohých úloh technické praxe. Ukazuje se totiž, že díky "paměťovému" efektu diferenciálního operátoru může být výsledný matematický model věrohodnější. Metoda Adomianova rozkladu (ADM) je obecnou metodou, kterou je možné řešit operátorové rovnice, ty zahrnují např. ODR, PDR, integrální rovnice, atd. Lze ji adaptovat také pro případ zlomkových rovnic. Podstatou metody je vyjádření řešení ve tvaru speciální mocninné řady.

Cíle diplomové práce:

Diplomová práce se v teoretické části zaměří na implementaci metody Adomianova rozkladu pro případ systému ODR neceločíselného řádu včetně diskuze otázek jako je konvergence řady a její rychlost. V praktické části se pak bude věnovat simulaci metody na vybraném zlomkovém systému a porovnání s klasickými numerickými algoritmy. Vhodným systémem je např. zlomkový Chenův chaotický systém, u něhož je v literatuře známa určitá disproporce, kdy experimenty založené na ADM naznačují chaotické chování systému (pro určitou sadu vstupních parametrů), kdežto experimenty založené na numerických metodách (např. zlomková PECE metoda) nikoliv. Lze očekávat, že výsledky práce pomohou tuto otázku objasnit.

Seznam doporučené literatury:

ADOMIAN, G. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations, Math. Comput. Modelling 13 (1990), 17–43.

ČERMÁK, J., NECHVÁTAL, L. Stability and chaos in the fractional Chen system, Chaos Soliton Fract. 125 (2019), 24–33.

DIETHELM, K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Springer, 2010.

SHAWAGFEH, N. T. Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations, Appl. Math. Comput. 131 (2002), 517–529.

CAFAGNA, D., GRASSI, G. Bifurcation and chaos in the fractional-order Chen system via a time-domain approach, Int. J. Bifurcation Chaos 18 (2008), 1845–1863.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá řešením obyčejných diferenciálních rovnic neceločíselného řádu metodou Adomianova rozkladu. Část práce se proto věnuje teorii rovnic obsahující neceločíselné diferenciální operátory, zejména operátor Caputův. Další část je věnována samotné metodě Adomianova rozkladu, jejím vlastnostem a implementaci na Chenův systém. Práce se rovněž zabývá bifurkační analýzou tohoto systému, a to jak pro celočíselný, tak pro neceločíselný případ. Jedním z cílů práce je objasnění rozporu v literatuře, který se týká neceločíselného Chenova systému, kdy experimenty založené na použití Adomianova rozkladu dávají pro jisté vstupní parametry zcela odlišné výsledky v porovnání s numerickými metodami. Objasnění tohoto rozporu se opírá o novější teoretické poznatky z oblasti neceločíselných diferenciálních rovnic a jejich soustav. Závěry jsou podpořeny numerickými experimenty, při jejich tvorbě bylo využito vlastního kódu implementujícího Adomianův rozklad na Chenův systém.

Abstract

This master's thesis deals with solving fractional-order ordinary differential equations by the Adomian decomposition method. A part of the work is therefore devoted to the theory of equations containing differential operators of non-integer order, especially the Caputo operator. The next part is devoted to the Adomian decomposition method itself, its properties and implementation in the case of Chen system. The work also deals with bifurcation analysis of this system, both for integer and non-integer case. One of the objectives is to clarify the discrepancy in the literature concerning the fractional-order Chen system, where experiments based on the use of the Adomian decomposition method give different results for certain input parameters compared with numerical methods. The clarification of this discrepancy is based on recent theoretical knowledge in the field of fractional-order differential equations and their systems. The conclusions are supported by numerical experiments, own code implementing the Adomian decomposition method on the Chen system was used.

Klíčová slova

Adomianova dekompoziční metoda, chaos, Chenův systém, diferenciální rovnice neceločíselného řádu, Caputův přístup, bifurkace, stabilita

Keywords

Adomian decomposition method, chaos, Chen system, fractional-order ordinary differential equations, Caputo's approach, bifurcation, stability

ŠUSTKOVÁ, Apolena. *Řešení obyčejných diferenciálních rovnic neceločíselného řádu metodou Adomianova rozkladu*. Brno, 2021. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/129704>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. 60s. Vedoucí práce Luděk Nechvátal.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Řešení obyčejných diferenciálních rovnic neceločíselného řádu metodou Adomianova rozkladu* vypracovala samostatně pod vedením doc. Ing. Ludka Nechvátala, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Brno

.....
Bc. Apolena Šustková

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu diplomové práce panu doc. Ing. Luděkovi Nechvátalovi, Ph.D. za cenné rady, poskytnuté konzultace, trpělivost, čas a ochotu při psaní této práce. Dále bych chtěla poděkovat své rodině, která mi byla během celého studia velkou oporou.

Apolena Šustková

Obsah

1	Úvod	12
2	Adomianův rozklad pro případ autonomních soustav	14
2.1	Celočíselný řád	14
2.2	Neceločíselný řád	17
2.3	Otázka konvergence ADM	19
2.4	Další příklady použití Adomianova rozkladu	22
3	Numerické řešení neceločíselných obyčejných diferenciálních rovnic	24
4	Chenův systém	27
4.1	Základní bifurkační analýza celočíselného Chenova systému	29
4.2	Základní bifurkační analýza neceločíselného Chenova systému	37
4.3	Implementace ADM	42
4.4	Porovnání řešení metodou PECE a ADM pro neceločíselný případ	45
5	Závěr	50
	Literatura	52
	Apendix	58

1 Úvod

Řešení reálných problémů často vede na matematické modely využívající diferenciální rovnice (obyčejné i parciální, bez zpoždění i se zpožděním, celočíselného i neceločíselného řádu), které však mohou být silně nelineární. Takové rovnice obvykle nejsme schopni řešit analyticky. Jednou z možností je model dále zjednodušit tak, abychom jej analyticky mohli řešit (k tomu se využívají různé linearizační či perturbační metody), druhou možností je řešit původní nelineární model přibližně vhodnou numerickou či jinou aproximační metodou. V obou případech pak vyvstává přirozená otázka, jak dobře získané řešení vystihuje realitu.

Jako jedno z možných řešení nelineárních úloh se nabízí tzv. metoda Adomianova rozkladu neboli Adomianova dekompoziční metoda (ADM), která byla poprvé představena v článku [4] G. Adomianem v 80. letech 20. století. Tato metoda je aplikovatelná na rovnice tvaru $Fx(t) = g(t)$, kde F značí obecně nelineární operátor (např. diferenciální či integrální), který lze rozložit jako $F = L - R - N$. Symbol L zde představuje invertibilní lineární část operátoru, R je zbytek lineárního operátoru a N je nelineární část operátoru F . V případě diferenciálních rovnic se v roli L obvykle uvažuje diferenciální operátor nejvyššího řádu. Hlavní myšlenka Adomianova rozkladu spočívá v nahrazení nelineárního členu Nx zobecněnou Taylorovou řadou a v nalezení řešení ve formě nekonečné řady. Každý člen této řady lze přesně určit a pokud řada konverguje, praxe ukazuje, že její konvergence je poměrně rychlá.

Na základě výše zmíněného je metoda aplikovatelná také v případě neceločíselných obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav, které, jak se ukázalo v posledních několika desetiletích, mají velké uplatnění při modelování reálných jevů. Jsou totiž schopny jistým způsobem zachytit minulost a tím se někdy realitě přiblížit více, než je tomu při použití jejich celočíselného protějšku. Právě z tohoto důvodu se v této práci budeme zabývat především ODR a SODR neceločíselného řádu.

Další rychle se rozvíjející disciplínou jsou nelineární dynamické systémy, s čímž souvisí pojmy jako chaos, bifurkace, podivný atraktor a další. Dynamika takových systémů se jeví jako náhodná a lze ji předvídat jen velmi těžko, což nastává vlivem velké citlivosti na vstupní data (poruchy v počátečních podmínkách či v parametrech systému). Za prototyp chaotického systému se dá považovat Lorenzův systém, který je (z historických důvodů) poměrně dobře analyzován. V dnešní době je známo mnoho dalších chaotických systémů, o kterých se toho zdaleka neví tolik. Mezi ně patří Chenův systém, na první pohled vypadající velmi podobně jako Lorenzův. Jak ale později uvidíme, systémy vykazují vzájemně odlišnou dynamiku. Jednou ze specifických otázek neceločíselného Chenova systému je otázka minimálního řádu neceločíselné derivace, za kterého ještě systém vykazuje chaotické chování. Touto otázkou se zabývají například autoři D. Cafagna a G. Grassi, kteří ve svém článku [14] tvrdí, že za pomoci Adomianova rozkladu našli dosud nejmenší řád odpovídající hodnotě 0.08. Chaos se zde však nachází v oblasti stabilního bodu rovnováhy (viz [22]), což sice existenci chaosu nevylučuje, ale zároveň to není příliš typický jev. Autorům článku [22], kteří ilustrovali dynamiku Chenova systému numericky, se však nepodařilo nalézt takové počáteční podmínky, aby systém v této oblasti vykazoval chaotické chování, a to ani pro řád mnohem vyšší než 0.08. V této práci se proto pokusíme tento rozpor, spočívající v rozdílných řešeních obdržených různými metodami, vyjasnit.

Práce je strukturována následovně. Druhá kapitola začíná představením metody Adomianova rozkladu, zejména jeho použitím v případě autonomních soustav. Následně jsou položeny základy neceločíselného kalkulu, důraz se klade především na Caputovu derivaci. Kapitola pokračuje výčtem základních vlastností Caputova diferenciálního operátoru, na nějž navazuje část, ve které se diskutuje otázka konvergence řady a její rychlost. Závěr kapitoly obsahuje několik dalších příkladů použití Adomianova rozkladu. Třetí kapitola se zaměřuje na numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic neceločíselného řádu. Vzhledem k tomu, že mnohé

fázové portréty objevující se v této práci byly vytvořeny na základě použití neceločíselné verze prediktor-korektor metody ($PECE\alpha$), věnuje se třetí kapitola právě jí. Za stěžejní kapitolu této práce lze považovat kapitolu čtyři. V ní je po úvodu do problematiky chaotických dynamických systémů představen Chenův systém. Následuje bifurkační analýza tohoto systému, doplněná nejen o pojmy a poznatky k této analýze potřebné, ale také o bifurkační křivky a bifurkační diagramy. Po vysvětlení implementace Adomianovy metody na Chenův systém se dostáváme k samotnému jádru práce. Tím je část věnující se porovnání řešení neceločíselného Chenova systému obdrženého metodou $PECE\alpha$ a metodou Adomianova rozkladu. V této části právě dochází k objasnění zmiňovaného rozporu v literatuře. Celou čtvrtou kapitolou se prolínají fázové portréty řešení Chenova systému (celočíselného i neceločíselného) ilustrující teoretické závěry. Závěr práce mimo jiné uvádí výčet několika modifikací Adomianovy metody a předkládá možnosti, jak by se dalo na výsledky zde uvedené navázat. Poznamenejme, že s výjimkou bifurkačních křivek vykreslených v prostředí Maple, byly všechny obrázky v této diplomové práci vytvořeny v prostředí MATLAB. Kód pro vykreslení bifurkačních diagramů a fázových portrétů $PECE\alpha$ metodou lze spolu s kódem implementujícím Adomianův rozklad na Chenův systém nalézt v appendixu.

2 Adomianův rozklad pro případ autonomních soustav

V této kapitole uvedeme nejprve základní pojmy a tvrzení týkající se autonomních soustav, seznámíme čtenáře s neceločíselnými operátory, které budou pro tuto práci klíčové, a představíme metodu Adomianova rozkladu. Diskutována bude rovněž otázka konvergence Adomianovy metody a její rychlost. V závěru kapitoly pak zmíníme několik příkladů použití metody v různých oblastech.

2.1 Celočíselný řád

Připomeňme, že autonomní soustavou rovnic rozumíme soustavu ve tvaru

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

kde $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ je dané vektorové pole a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je oblast. Základním tvrzením o řešitelnosti takové soustavy je známá Picardova–Lindelöfova věta:

Věta 2.1 (Věta o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť Ω je oblast v \mathbb{R}^d obsahující bod ξ_0 a předpokládejme, že $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ ¹. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že počáteční problém*

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{x}(0) = \xi_0 \tag{2.2}$$

má jediné řešení \mathbf{x} na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Poznámka 2.2. Všimněme si, že počáteční podmínka je předepsána v bodě $t_0 = 0$. Tato volba neujímá na obecnosti, protože v případě autonomních soustav vždy platí, že je-li vektorová funkce $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ řešením soustavy (2.1) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \xi_0$, pak vektorová funkce $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t - t_0)$ je řešením soustavy (2.1) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \xi_0$. Poznamenejme ještě, že předpoklad spojitě diferencovatelnosti vektorového pole \mathbf{f} lze oslabit (lokální) lipschitzovskostí vektorového pole \mathbf{f} na Ω . Věta 2.1 hovoří pouze o lokální řešitelnosti. Často je vhodné (například v otázkách stability) mít k dispozici podmínky zaručující řešitelnost globální (vzhledem k předem stanovenému intervalu). Příkladem může být třeba požadavek lipschitzovskosti vektorového pole \mathbf{f} na celém \mathbb{R}^d , která zaručí řešitelnost na celé reálné ose, tato podmínka je však příliš restriktivní. Více podrobností lze nalézt např. v [55].

Princip Adomianovy metody si nejprve představíme na autonomní rovnici

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{2.3}$$

kde předpokládáme, že f je analytická funkce na \mathbb{R} . Pak lze rovnici přepsat na tvar

$$Lx = Rx + Nx,$$

kde $L = \frac{d}{dt}$, R a N představují lineární a nelineární část funkce f . Např. pro funkci $f(x) = 2x + \sin x$ je $Rx = 2x$ a $Nx = \sin x$. Řešme nyní rovnici vzhledem k x . Aplikujeme-li na obě strany inverzi L^{-1} , dostaneme

$$L^{-1}Lx = L^{-1}Rx + L^{-1}Nx.$$

¹Zápisem $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ zde rozumíme to, že každá složka \mathbf{f} je v $C^1(\Omega)$, tedy je spojitě diferencovatelná na Ω .

Pokud k rovnici přidáme počáteční podmínku $x(0) = \xi_0 \in \mathbb{R}$, pak inverzním operátorem L^{-1} je určitý integrál od 0 do t , a tedy $L^{-1}Lx = x - \xi_0$. Dosazením do předchozí rovnosti tak máme

$$x = \xi_0 + L^{-1}Rx + L^{-1}Nx, \quad (2.4)$$

což není nic jiného než Volterrova integrální rovnice příslušná rovnici (2.3) spolu s počáteční podmínkou $x(0) = \xi_0$. Nelineární člen Nx vyjádříme jako nekonečnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou tzv. Adomianovy polynomy. Řešení x nyní hledejme ve tvaru funkční řady $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Rovnice (2.4) tak přejde do tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \xi_0 + L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} x_n + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

a můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} x_1 &= L^{-1}Rx_0 + L^{-1}A_0, \\ x_2 &= L^{-1}Rx_1 + L^{-1}A_1, \\ &\vdots \\ x_n &= L^{-1}Rx_{n-1} + L^{-1}A_n, \end{aligned}$$

kde $x_0 = \xi_0$. Polynomy A_n jsou pro každou nelinearitu generovány tak, aby A_0 závisel pouze na x_0 , A_1 na x_0 a x_1 , atd. Můžeme vidět, že všechny členy řady x_n je možné vypočítat z členů předchozích. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ pro Nx je zobecněnou Taylorovou řadou se středem ve funkci x_0 , viz [5]. Skutečně, označíme-li nelineární část funkce f jako f_N , pak

$$Nx = f_N(x) = f_N(x_0) + f'_N(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''_N(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''_N(x_0)(x - x_0)^3 + \dots,$$

a protože $x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$,

$$\begin{aligned} f_N(x) &= f_N(x_0) + f'_N(x_0)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots) + \frac{1}{2!}f''_N(x_0)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''_N(x_0)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)^3 + \dots. \end{aligned}$$

Umocněním a roznásobením všech členů dostáváme

$$\begin{aligned} f_N(x) &= f_N(x_0) + x_1 f'_N(x_0) + x_2 f'_N(x_0) + x_3 f'_N(x_0) + \dots + \frac{1}{2!}x_1^2 f''_N(x_0) + \frac{2}{2!}x_1 x_2 f''_N(x_0) \\ &\quad + \frac{2}{2!}x_1 x_3 f''_N(x_0) + \dots + \frac{1}{3!}x_1^3 f'''_N(x_0) + \frac{3}{3!}x_1^2 x_2 f'''_N(x_0) + \frac{3}{3!}x_1 x_2^2 f'''_N(x_0) + \dots. \end{aligned}$$

Nyní přeskládáme členy do skupin tak, že každá skupina bude obsahovat pouze členy se stejným řádem (řádem x_i^j , resp. $x_i^j x_k^l$ rozumíme hodnotu ij , resp. $ij + kl$):

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n = (f_N(x_0)) + (x_1 f'_N(x_0)) + (x_2 f'_N(x_0) + \frac{1}{2!}x_1^2 f''_N(x_0)) + (x_3 f'_N(x_0) \\ &\quad + \frac{2}{2!}x_1 x_2 f''_N(x_0) + \frac{1}{3!}x_1^3 f'''_N(x_0)) + \dots. \end{aligned}$$

Jinými slovy, jejich součet indexů dává dohromady stejné číslo. Z formule výše již můžeme vidět, že jednotlivé členy odpovídají Adomianovým polynomům, tedy

$$A_0 = f_N(x_0),$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= x_1 f'_N(x_0), \\
A_2 &= x_2 f'_N(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 f''_N(x_0), \\
A_3 &= x_3 f'_N(x_0) + \frac{2}{2!} x_1 x_2 f''_N(x_0) + \frac{1}{3!} x_1^3 f'''_N(x_0), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tyto polynomy lze určit také pomocí vzorce

$$A_n = \sum_{\nu=1}^n c(\nu, n) f_N^\nu(x_0),$$

kde $c(\nu, n)$ je součin (nebo suma součinů) ν takových členů x_i , jejichž součet dolních indexů je roven n , přičemž tento součin je navíc podělen faktoriálem čísla, které je rovno počtu opakovaných indexů v daném součinu. Tedy například $c(1, 3) = x_3$, $c(2, 3) = x_1 x_2$ a $c(3, 3) = x_1^3/3!$. Takový výpočet se však zdá být poměrně složitý a s rostoucím n vyžaduje derivace vysokých řádů. George Adomian přišel i s další formou vzorce, konkrétně

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(f_N \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i \lambda^i \right) \right) \Big|_{\lambda=0},$$

která je poněkud srozumitelnější, nicméně stále vyžaduje derivace vysokých řádů pro vysoká n . Autoři J. Biazar a S. M. Shafiof ve svém článku [13] představili následující jednoduchý algoritmus, velmi užitečný pro praktické výpočty:

1. Položme $A_0 := f_N(x_0)$.
2. Pro $k = 0, \dots, n-1$:

$$A_k(x_0, x_1, \dots, x_k) := A_k(x_0 + x_1 \lambda, x_1 + 2x_2 \lambda, \dots, x_k + (k+1)x_{k+1} \lambda).$$

3. $A_{k+1} = \frac{1}{k+1} \frac{d}{d\lambda} A_k \Big|_{\lambda=0}$.

Můžeme vidět, že jeho jednoduchost spočívá především v tom, že v každém kroku je potřeba pouze první derivace. Algoritmus se navíc dá snadno rozšířit na vícedimenzionální případ. Uvažujme proto nyní d -dimenzionální soustavu ve tvaru

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

kterou opět můžeme rozepsat jako

$$L\mathbf{x} = R\mathbf{x} + N\mathbf{x}.$$

Označme nyní

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}^i \lambda^i = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_d^i \end{pmatrix} \lambda^i, \quad N\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \lambda^i = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_1^i \\ A_2^i \\ \vdots \\ A_d^i \end{pmatrix} \lambda^i.$$

Poznamenejme, že u \mathbf{x} a \mathbf{A} pro větší přehlednost horním indexem označujeme i -tý člen nekonečné řady a dolním indexem složku vektoru \mathbf{x} , resp. \mathbf{A} . Postupem analogickým k jednodimenzionálnímu případě dostáváme řešení ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}^i = \boldsymbol{\xi}_0 + L^{-1} R \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}^i + L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i. \quad (2.5)$$

Adomianovy polynomy nyní získáme z následujícího algoritmu:

Pro $j = 1, \dots, d$:

1. Položme $A_j^0 := f_j(x_1^0, x_2^0, \dots, x_d^0)$.

2. Pro $k = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} & A_j^k(x_1^0, \dots, x_1^k, \dots, x_d^0, \dots, x_d^k) \\ & := A_j^k(x_1^0 + x_1^1\lambda, \dots, x_1^k + (k+1)x_1^{k+1}\lambda, \dots, x_d^0 + x_d^1\lambda, \dots, x_d^k + (k+1)x_d^{k+1}\lambda). \end{aligned}$$

3. $A_j^{k+1} = \frac{1}{k+1} \frac{d}{d\lambda} A_j^k \Big|_{\lambda=0}$,

kde $x^0 = \xi_0$. Uvedme ještě prvních několik Adomianových polynomů pro třídímní případ. Tedy $d = 3$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} A_j^0 &= N_j(x_1^0, x_2^0, x_3^0), \\ A_j^1 &= \frac{d}{d\lambda} \left(N_j(x_1^0 + x_1^1\lambda, x_2^0 + x_2^1\lambda, x_3^0 + x_3^1\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0} = x_1^1 \frac{\partial N_j}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ &\quad + x_2^1 \frac{\partial N_j}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + x_3^1 \frac{\partial N_j}{\partial x_3}(x_1^0, x_2^0, x_3^0), \\ A_j^2 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left((x_1^1 + 2x_1^2\lambda) \frac{\partial N_j}{\partial x_1}(x_1^0 + x_1^1\lambda, x_2^0 + x_2^1\lambda, x_3^0 + x_3^1\lambda) + (x_2^1 + 2x_2^2\lambda) \right. \\ &\quad \times \frac{\partial N_j}{\partial x_2}(x_1^0 + x_1^1\lambda, x_2^0 + x_2^1\lambda, x_3^0 + x_3^1\lambda) + (x_3^1 + 2x_3^2\lambda) \\ &\quad \times \left. \frac{\partial N_j}{\partial x_3}(x_1^0 + x_1^1\lambda, x_2^0 + x_2^1\lambda, x_3^0 + x_3^1\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0} \\ &= x_1^2 \frac{\partial N_j}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + x_2^2 \frac{\partial N_j}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + x_3^2 \frac{\partial N_j}{\partial x_3}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (x_1^1)^2 \frac{\partial^2 N_j}{\partial (x_1)^2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{1}{2!} (x_2^1)^2 \frac{\partial^2 N_j}{\partial (x_2)^2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{1}{2!} (x_3^1)^2 \frac{\partial^2 N_j}{\partial (x_3)^2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} x_1^1 x_2^1 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{1}{2!} x_1^1 x_3^1 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{1}{2!} x_2^1 x_3^1 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1^0, x_2^0, x_3^0), \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Poznamenejme, že výpočet Adomianových polynomů je technicky náročnou částí celé Adomianovy metody, proto se v literatuře věnuje značná pozornost tomu, jak tyto Adomianovy polynomy počítat co nejefektivněji. Další algoritmy pro výpočet lze nalézt například v [9, 12, 66, 68].

2.2 Neceločíselný řád

Uvedme nejprve několik základních pojmů a vlastností týkajících se neceločíselného kalkulu. Níže uvedené definice a vlastnosti lze najít v monografiích věnovaných dané problematice, viz např. [26, 56, 57]. Ucelený historický přehled, jak se neceločíselný kalkulus vyvíjel, pak lze nalézt v monografii [53].

Definice 2.3 (Riemannův–Liouvilleův integrál). Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a f je funkce integrovatelná na $\langle t_0, T \rangle$. Operátor $I_{t_0}^\alpha$, definovaný jako

$$I_{t_0}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t_0 < t \leq T,$$

se nazývá Riemannův–Liouvilleův neceločíselný integrální operátor řádu α (Γ zde značí Gama funkci). Pro $\alpha = 0$ položíme $I_{t_0}^\alpha f := f$. Tedy $I_{t_0}^0$ je operátor identity.

V moderní literatuře se uvedený integrál obvykle uvažuje v Lebesgueově smyslu a je známo, že $I_{t_0}^\alpha$ zobrazuje funkce z $L^1(\langle t_0, T \rangle)$ na funkce z $L^1(\langle t_0, T \rangle)$. Dále má operátor $I_{t_0}^\alpha$ pro funkci $f \in L^1(\langle t_0, T \rangle)$ následující vlastnosti:

- a) $I_{t_0}^q I_{t_0}^r f(t) = I_{t_0}^{q+r} f(t)$, $q, r \geq 0$ (tzn. operátor $I_{t_0}^\alpha$ je aditivní),
- b) $I_{t_0}^q I_{t_0}^r f(t) = I_{t_0}^r I_{t_0}^q f(t)$, $q, r \geq 0$ (tzn. operátor $I_{t_0}^\alpha$ je komutativní),
- c) $I_{t_0}^q (t - t_0)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+q)} (t - t_0)^{\gamma+q}$, $q \geq 0$, $\gamma > -1$,
- d) $I_{t_0}^q C = C \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(q+1)} (t - t_0)^q = \frac{C}{\Gamma(q+1)} (t - t_0)^q$, $q \geq 0$, $\gamma > -1$, $C \in \mathbb{R}$.

Definice 2.4 (Riemannova–Liouvilleova derivace). Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a $m \in \mathbb{N} : m - 1 < \alpha \leq m$. Pak operátor $D_{t_0}^\alpha$, definovaný jako

$$D_{t_0}^\alpha f(t) := D^m I_{t_0}^{m-\alpha} f(t),$$

se nazývá Riemannův–Liouvilleův neceločíselný diferenciální operátor řádu α . Pro $\alpha = 0$ položíme $D_{t_0}^\alpha f(t) := f(t)$. Tedy $D_{t_0}^0$ je operátor identity.

Je známo, že pro funkce $f \in AC^m(\langle t_0, T \rangle)$ ² derivace $D_{t_0}^\alpha f$ existuje skoro všude na $\langle t_0, T \rangle$. Pro $f \in L^1(\langle t_0, T \rangle)$, $\alpha \geq 0$ platí následující:

- a) $D_{t_0}^\alpha (t - t_0)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (t - t_0)^{\gamma-\alpha}$, $\gamma > -1$,
- b) $D_{t_0}^\alpha I_{t_0}^\alpha f(t) = f(t)$ pro skoro všechna $t \in \langle t_0, T \rangle$.

Vlastnost b) říká, že operátor $D_{t_0}^\alpha$ je levou inverzí operátoru $I_{t_0}^\alpha$, což lze vnímat jako analogii základní věty integrálního počtu.

Užití Riemannova–Liouvilleova diferenciálního operátoru v počátečních problémech je problematické, neboť vede na počáteční podmínky neceločíselného řádu (derivace, které se v nich mohou objevit, jsou neceločíselné). V aplikacích se proto tento operátor příliš nepoužívá (například interpretace neceločíselné derivace rychlosti je nám neznáma). Přirozenou snahou bylo tento nedostatek odstranit, což na počátku 60. let 20. století vyústilo v zavedení tzv. Caputovy derivace, která je v současnosti nejpoužívanější definicí neceločíselné derivace.

Definice 2.5 (Caputova derivace). Nechť $\alpha \geq 0$ a $m \in \mathbb{N} : m - 1 < \alpha \leq m$. Pak operátor ${}^C D_{t_0}^\alpha$, definovaný jako

$${}^C D_{t_0}^\alpha f(t) := I_{t_0}^{m-\alpha} D^m f(t),$$

se nazývá Caputův neceločíselný diferenciální operátor řádu α . Pro $\alpha = 0$ položíme ${}^C D_{t_0}^\alpha f := f$. Tedy ${}^C D_{t_0}^0$ je operátor identity.

Pro funkci $f \in AC^m(\langle t_0, T \rangle)$ lze Caputovu derivaci psát pomocí Riemannovy–Liouvilleovy derivace jako

$${}^C D_{t_0}^\alpha f(t) = D_{t_0}^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(t_0) \frac{(t - t_0)^k}{k!} \right)$$

pro skoro všechna $t \in \langle t_0, T \rangle$. Pravá strana této rovnosti se v modernější literatuře obvykle bere za definici Caputovy derivace. Uvedme ještě dvě důležité vlastnosti. Pro $f \in AC^m(\langle t_0, T \rangle)$, kde $m \in \mathbb{N} : m - 1 < \alpha \leq m$ platí

$$I_{t_0}^\alpha {}^C D_{t_0}^\alpha f(t) = I_{t_0}^\alpha I_{t_0}^{m-\alpha} D^m f(t) = I_{t_0}^m D^m f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(t_0) \frac{(t - t_0)^k}{k!}, \quad \forall t \in (t_0, T). \quad (2.6)$$

² $AC^m(\langle t_0, T \rangle)$ představuje množinu funkcí majících derivace až do řádu $m - 1$ na intervalu $\langle t_0, T \rangle$, přičemž derivace $f^{(m-1)}$ je absolutně spojitá funkce na $\langle t_0, T \rangle$.

Pro $f \in C(\langle t_0, T \rangle)$ a $\alpha \in \mathbb{R}^+$ platí

$${}^C D_{t_0}^\alpha I_{t_0}^\alpha f(t) = f(t),$$

a tedy i Caputův operátor je levou inverzí operátoru $I_{t_0}^\alpha$.

Můžeme si všimnout, že pro $n \in \mathbb{N}$ integrální operátor $I_{t_0}^n$ představuje vzorec pro n -tou opakovanou integraci od t_0 do t (tzv. Cauchyho vzorec pro opakovanou integraci) a oba diferenciální operátory $D_{t_0}^\alpha$ a ${}^C D_{t_0}^\alpha$ splývají s klasickým diferenciálním operátorem D^n . Poznamenejme ještě, že v této práci se budeme zabývat výhradně případy, kdy počáteční čas $t_0 = 0$ a tedy vypustíme dolní indexy u všech právě zavedených operátorů, tj. I^α , D^α a ${}^C D^\alpha$. Navíc budeme řád derivace α uvažovat pouze v intervalu $(0, 1)$.

Autonomní soustava s Caputovou derivací má nyní tvar

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x(t)).$$

Bezprostřední analogií Picardovy–Lindelöfovy věty je:

Věta 2.6 (Věta o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $\alpha \in (0, 1)$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$ a $h^* > 0$. Definujme množinu $K := \langle \xi_1^0 - \delta, \xi_1^0 + \delta \rangle \times \dots \times \langle \xi_d^0 - \delta, \xi_d^0 + \delta \rangle$, a nechť vektorové pole $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$ je spojitě a splňuje Lipschitzovu podmínku, tedy*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

pro všechna $x_1, x_2 \in K$ s konstantou $L > 0$. Dále definujme $M := \max_{\xi \in K} \|f(\xi)\|$ a

$$h := \begin{cases} h^* & \text{pokud } M = 0, \\ \min\{h^*, (\delta\Gamma(\alpha + 1)/M)^{1/\alpha}\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak počáteční problém

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x(t) &= f(x(t)), \\ x(0) &= \xi_0 \end{aligned}$$

má jediné řešení $x \in C(\langle 0, h \rangle)$. Symbolem $\|\cdot\|$ rozumíme libovolnou normu v \mathbb{R}^d .

Poznámka 2.7. Podobně jako v celočíselném případě, jednoduchou postačující podmínkou pro globální řešitelnost na \mathbb{R}^+ je lipschitzovskost na celém \mathbb{R}^d , což je poměrně restriktivní předpoklad.

Podívejme se nyní na to, jak se Adomianův rozklad modifikuje v případě výše uvedené neceločíselné soustavy. Aplikací inverze s využitím vlastnosti (2.6) dostáváme opět vztah

$$x = \xi_0 + L^{-1}Rx + L^{-1}Nx,$$

přičemž platí $L^{-1}Lx = x - \xi_0$, kde L^{-1} je nyní I^α . Vzhledem k vlastnostem neceločíselných operátorů lze však očekávat o něco složitější výpočet, stejně jako výsledný tvar řešení. Jeho formální zápis však zůstává stejný jako pro celočíselný případ, viz (2.5).

2.3 Otázka konvergence ADM

Důležitou otázkou týkající se Adomianova rozkladu je otázka konvergence této metody. Většina publikací, ve kterých je tato metoda aplikována, však obsahuje pouze vágní tvrzení, že ADM konverguje velmi rychle, aniž by toto bylo jakkoli specifikováno, a obecně výsledky v tomto směru jsou spíše sporadické. První, kdo poskytl důkaz konvergence metody, byl Y. Cherruault

v [38], který uvažoval obecnou funkcionální rovnici ve tvaru $y - Ny = f$, kde N je nějaký (obecně nelineární) operátor z Hilbertova prostoru H do H , $f \in H$ je daná funkce a $y \in H$ je hledané řešení. Cherruault si všiml, že pokud S_n představuje n -tý částečný součet řady $y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k$, pak Adomianova metoda vede na vyjádření členů posloupnosti $\{S_n\}$ vzorcem $S_{n+1} = N_n(f + S_n)$, $S_0 = y_0 = f$, kde $N_n(f + S_n) = \sum_{k=0}^n A_k$. K této posloupnosti lze přiřadit „limitní“ úlohu $S = N(f + S)$, která má podle Banachovy věty jediné řešení S , je-li N kontraktivní. Posloupnost S_n pak bude v H konvergovat k S , pokud posloupnost operátorů N_n (v jistém smyslu) konverguje k operátoru N . Tato jednoduchá myšlenka byla později využita k formulaci trochu jiných podmínek zaručujících konvergenci Adomianovy metody, viz například [34]. Problémem je, že uvedené dvě podmínky jsou poměrně restriktivní, nelze tedy očekávat, že v konkrétních situacích budou obě splněny. To vedlo k tomu, že obecnou snahou bylo formulovat postačující podmínky spíše pro konkrétní typ úloh, přičemž nejčastěji jsou diskutovány podmínky Taylorova typu pracující s ohraničeností derivací funkce, která je rozvíjena do řady Adomianových polynomů, viz např. [1, 39]. Z tohoto rámce se vymyká práce A. Abdelrazeca [2], která konvergenci metody ukazuje pouze za předpokladu analytičnosti funkce, která je rozvíjena do řady Adomianových polynomů (důkaz je založen na Cauchyho–Kovalevské větě). Přesněji, v případě rovnice

$$x'(t) = f(x(t)),$$

kde nyní předpokládáme, že f je čistě nelineární analytická funkce, vede Adomianova metoda na rekurzivní vyjádření pro x_{n+1} ve tvaru:

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t A_n(x_0(\tau), x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Konvergence Adomianovy metody je pak zaručena následující větou.

Věta 2.8. *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je analytická funkce definovaná na $(\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta)$, $\delta > 0$ a nechť x_n je definováno vzorcem (2.7). Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že n -tý částečný součet řady $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$ konverguje na intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ stejnoměrně k řešení $x = x(t, \xi_0)$ Volterrový integrální rovnice*

$$x(t) = \xi_0 + \int_0^t f(x(\tau)) d\tau.$$

O řádu konvergence hovoří následující věta, která je v práci [2] rovněž dokázána.

Věta 2.9. *Za předpokladů věty 2.8 je řád konvergence exponenciální ve smyslu, že existuje C_0 takové, že*

$$E_n \leq C_0 \left(\frac{2C\varepsilon}{a} \right)^{n+1}, \quad n \geq 1$$

pro $\forall \varepsilon < \frac{a}{2C}$, kde

$$E_n = \left| x - \sum_{m=0}^n x_m \right|$$

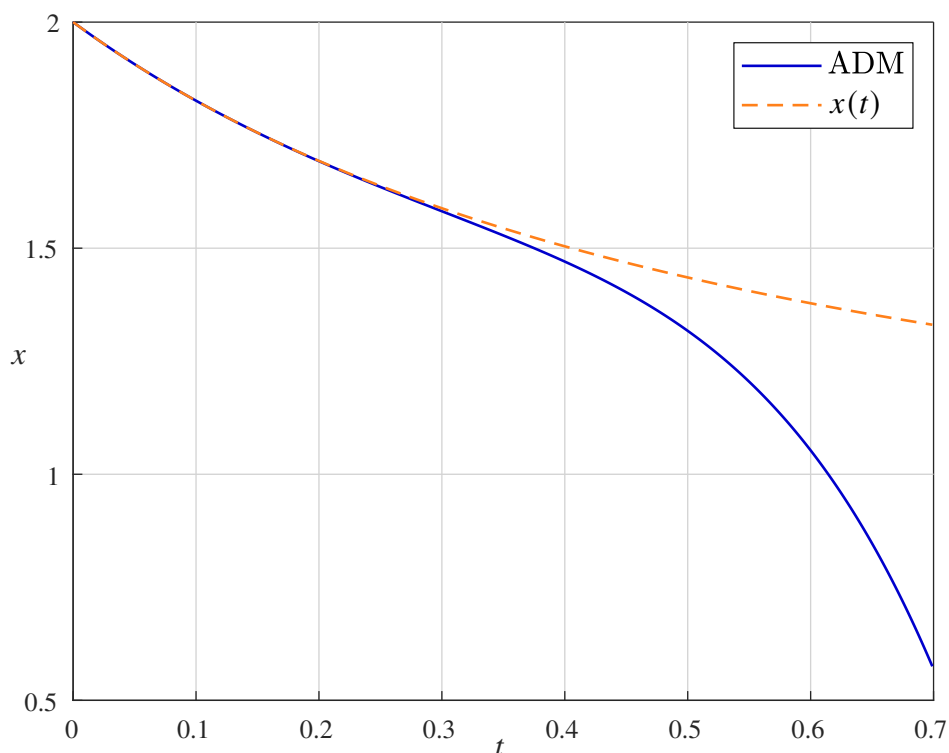
a $a, C > 0$ splňují

$$1 + |f(\xi_0)| \leq C,$$

$$\frac{1}{k!} |f^{(k)}(x)| \Big|_{x=\xi_0} \leq \frac{C}{a^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Poznámka 2.10. Zobecnění pro dimenzi $d \geq 2$ je možné, nicméně technicky zdlouhavé. Práce [2] mimo jiné nabízí zajímavé porovnání metody Adomianova rozkladu s Picardovou metodou. Jedním z hledisek je kontraktivní operátor – zatímco Picardova metoda je s takovým operátorem spjata, Adomianova metoda nikoli. Co se týče výše zmíněné konvergence, tak vzhledem k faktu, že ADM vyžaduje, aby f byla analytická, což je restriktivnější než Lipschitzova podmínka, kterou vyžaduje metoda Picardova, můžeme očekávat, že metoda ADM bude konvergovat rychleji. Toto tvrzení je pak v práci demonstrováno několika příklady.

Poznamenejme ještě, že na práci [2] částečně navazuje a jistým způsobem ji rozšiřuje článek [3].



Obrázek 2.1: Porovnání řešení rovnice $x' = x - x^2$ s počáteční podmínkou $x(0) = 2$ získané metodou Adomianova rozkladu (ozn. „ADM“, použito 6 členů) s přesným řešením $\frac{2e^t}{2e^t - 1}$ tohoto počátečního problému

V neceločíselném případě jsou výsledky týkající se konvergence ADM ještě sporaditější. Pro lineární rovnice je otázka zodpovězena v článku [23], nicméně pro nelineární případ se situace zdá být komplikovanější. Nabízí se otázka, zda by šel postup, který byl použit v Abdelrazecově práci [2], nějakým způsobem snadno modifikovat pro případ neceločíselného řádu. Nezdá se však, že by odpověď byla pozitivní. Za zmínku ještě stojí článek [28], který řeší konvergenci a odhad ADM v případě Volterrových rovnic. Pracuje však s předpokladem ohraničenosti integrálního jádra $k(t, \tau)$, a díky tomu je aplikovatelný pouze pro rovnice s řádem derivace $\alpha \geq 1$. V případě $\alpha \in (0, 1)$ jádro integrální rovnice ohraničené není.

Obecně platí, že hlavní překážkou aplikování metody je výpočet Adomianových polynomů, neboť počet členů v jednotlivých polynomech roste exponenciálně. Jak již bylo zmíněno, existuje sice několik modifikací a vylepšení způsobu výpočtu, nicméně stále se jedná o náročný krok. Z tohoto důvodu se obvykle bere 6–7 členů řady, což dává dostatečně dobrou aproximaci řešení, ale pouze lokálně. Pokud provádíme výpočet řešení ODR na dlouhých intervalech, aproximace řešení získaná ADM tak může být dosti odlišná od řešení přesného, což je demonstrováno na obrázku 2.1, kde je znázorněno přesné řešení logistické rovnice $x' = x - x^2$, které je porov-

náno s přibližným řešením získaným metodou ADM. Jak můžeme vidět, v blízkosti počáteční podmínky je ADM řešení velmi blízké tomu přesnému, ale zhruba od času $t = 0.3$ se začíná odchýlovat a na konci znázorněného intervalu, tj. v čase $t = 0.7$, už se s přesným řešením zcela rozchází. Z tohoto důvodu nezbyvá nic jiného, než na sebe řešení „navazovat“, tedy výpočet vždy provádět pouze na velmi malém intervalu a hodnotu na konci jednoho výpočtu použít jako počáteční podmínku v dalším úseku.

2.4 Další příklady použití Adomianova rozkladu

Adomianova dekompoziční metoda je, jak již bylo zmíněno v úvodu, aplikovatelná na širokou skupinu problémů. V této podkapitole si proto pro představu ukážeme alespoň některé z nich.

V podkapitole 2.1 jsme si ukázali, jak lze pomocí ADM řešit počáteční problém. Nyní naznačíme, jak postupovat v případě okrajového problému. V roli L uvažujme diferenciální operátor druhého řádu, proto L^{-1} bude dvakrát opakovaný neurčitý integrál. Protože $L^{-1}Lx = x - A - Bt$, kde A a B jsou konstanty vypočítané z daných podmínek, dostáváme

$$x = A + Bt + L^{-1}g + L^{-1}Rx + L^{-1}Nx$$

(při stejném značení jako v úvodní kapitole). Dále již postupujeme analogicky, tedy $Nx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ a $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, přičemž $x_0 = A + Bt + L^{-1}g$. Řešení okrajového problému tedy můžeme získat z rovnosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} x_n + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Další skupinou problémů, které pomocí ADM lze řešit, jsou parciální diferenciální rovnice. Na nějakém obdélníku uvažujme rovnici ve tvaru

$$\nabla^2 u(x, y) + k(x, y)u = 0 \quad (2.8)$$

s danými okrajovými podmínkami. Rovnici (2.8) přepíšeme operátorově

$$L_x u + L_y u - Ru = 0,$$

kde $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ a $R = -k$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} L_x u &= -L_y u + Ru, \\ L_y u &= -L_x u + Ru, \end{aligned}$$

Inverzní operací k L_x , resp. L_y je nyní dvojí integrace vzhledem k x , resp. k y , což vede na

$$\begin{aligned} u &= c_1 k_1(y) + c_2 k_2(y)x - L_x^{-1} L_y u + L_x^{-1} Ru, \\ u &= c_3 k_3(x) + c_4 k_4(x)y - L_y^{-1} L_x u + L_y^{-1} Ru. \end{aligned}$$

Konstanty c_1, \dots, c_4 a funkce k_1, \dots, k_4 získáme dosazením okrajových podmínek.

Závěrem této kapitoly ještě poznamenejme, že v případě diferenciálních rovnic v roli L nemusí být vždy uvažován operátor nejvyššího řádu. Demonstrujme to na případě Van der Polovy rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru

$$x'' + \alpha x' + \beta x + \gamma(x^3)' = g(t).$$

Lineární operátor je dán jako $d^2/dt + \alpha d/dt + \beta$. Způsobů, jak s tímto operátorem nyní naložit, je několik. První možností je v roli L uvažovat celý lineární operátor, v takovém případě však nemusí

být úplně přímočaré nalézt jeho inverzi. Další možností je použít pouze část lineárního operátoru, a to buď $L = d^2/dt^2$, $L = d^2/dt^2 + \alpha d/dt$ nebo $L = d^2/dt^2 + \beta$. Volba $L = d^2/dt^2$ je používána nejčastěji, a to zejména kvůli jednoduchým integracím. Pokud zvolíme $L = d^2/dt^2 + \alpha d/dt$ nebo $L = d^2/dt^2 + \beta$, lze očekávat o něco rychlejší konvergenci, avšak za cenu složitějších výpočtů. Konkrétní volba L tedy vždy záleží na dané situaci.

3 Numerické řešení neceločíselných obyčejných diferenciálních rovnic

Řešit ODR $_{\alpha}$ numericky je komplikovanějším úkolem, než je tomu pro jejich celočíselný protějšek a neceločíselné verze klasických metod nejsou zdaleka tak dobře prozkoumány. Historicky byly zaznamenány spíše naivnější pokusy, které například využívaly náhradu neceločíselné derivace diferencí, případně byla snaha aplikovat standardní celočíselné metody na jejich neceločíselné protějšky. Vzhledem k některým specifickým rysům neceločíselných problémů je však rozumnější numerické metody navrhnout „na míru“.

Nejčastěji používanou metodou pro řešení ORD $_{\alpha}$ je v současnosti prediktor-korektor metoda kombinující neceločíselnou verzi lichoběžníkové a explicitní Eulerovy metody, viz např. [27]. Ta vychází z Volterrovy integrální (vektorové) rovnice

$$x(t) = \xi_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(x(\tau)) d\tau. \quad (3.1)$$

Je známo, že spojitá vektorová funkce x je řešením této rovnice právě tehdy, když je řešením počátečního problému

$$\begin{aligned} {}^C D^{\alpha} x(t) &= f(x(t)), \\ x(0) &= \xi_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mezi celočíselnými a neceločíselnými diferenciálními operátory existuje jeden velmi významný rozdíl – zatímco první zmíněné jsou vždy lokální, což znamená, že k výpočtu příslušné derivace funkce v daném bodě stačí znát hodnotu této funkce na libovolně malém okolí tohoto bodu, v případě neceločíselném je hodnota derivace v bodě t závislá na všech předchozích hodnotách funkce na intervalu $\langle 0, t \rangle$ (jinými slovy, potřebujeme mít informaci o celé „historii“ funkce). S tím souvisí způsob, jakým se odvozují vztahy udávající numerické řešení. Zatímco v celočíselném případě se postupuje tak, že se integruje soustava $x'(t) = f(x(t))$ přes interval $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$ a vzniklý integrál se pak nahradí lichoběžníkovou formulí, v případě neceločíselném se integrál na pravé straně (3.1) nahradí složenou lichoběžníkovou formulí. Nahradíme-li nyní přesnou hodnotu řešení $x(t_j)$ její aproximací x_j a provedou-li se následně vhodné úpravy, obdržíme neceločíselnou analogii lichoběžníkové metody tvaru

$$x_{k+1} = \xi_0 + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1}) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j) \quad (3.3)$$

s koeficienty

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k - \alpha)(k + 1)^{\alpha}, & \text{když } j = 0, \\ (k - j + 2)^{\alpha+1} + (k - j)^{\alpha+1} - 2(k - j + 1)^{\alpha+1}, & \text{když } 1 \leq j \leq k, \\ 1, & \text{když } j = k + 1. \end{cases}$$

Podobně jako u klasické lichoběžníkové metody je nevýhodou implicitní povaha soustavy (3.3), což vybízí ke spojení s vhodnou explicitní metodou, abychom dostali analogii prediktor-korektor schématu. Soustavu (3.3) tedy použijeme jako korektor, tj. do pravé strany dosadíme předběžnou aproximaci hodnoty x_{k+1} , kterou označíme x_{k+1}^P . Z (3.3) se pak stane explicitní vzorec, který hodnotu x_{k+1}^P „koriguje“, tj. máme:

$$x_{k+1} = \xi_0 + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1}^P) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j). \quad (3.4)$$

Prediktor, jak se metoda pro získání předběžné aproximace x_{k+1}^P nazývá, se odvodí obdobným způsobem jako soustava (3.3) pouze s jediným rozdílem, totiž že složená lichoběžníková formule je nahrazena složenou obdélníkovou formulí s levým uzlovým bodem. Tímto dostáváme analogii explicitní Eulerovy metody ve tvaru

$$x_{k+1}^P = \xi_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(x_j), \quad (3.5)$$

kde koeficienty $b_{j,k+1}$ jsou tvaru

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha).$$

Obdrželi jsme tak (základní) neceločíselnou prediktor-korektor metodu (PECE), v dalším ji budeme značit $PECE_\alpha$ pro zdůraznění závislosti na zvoleném řádu. Výpočet probíhá tím způsobem, že nejprve se podle (3.5) vypočítá hodnota prediktoru x_{k+1}^P , poté se vyhodnotí výraz $f(x_{k+1}^P)$, který se následně použije pro určení korektoru x_{k+1} dle (3.4) a pak už jen zbývá vyčíslit $f(x_{k+1})$ (přičemž hodnota je dále použita v následujícím kroku).

S numerickým řešením je úzce spjata otázka konvergence dané metody, o které hovoří například následující věta.

Věta 3.1. *Nechť $x \in C^2(\langle 0, T \rangle)$ je řešením počátečního problému (3.2). Potom pro $h > 0$ dostatečně malé platí*

$$\max_{0 \leq j \leq N} \|x(t_j) - x_j\| = \begin{cases} O(h^{2\alpha}) & \text{když } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ O(h) & \text{když } \alpha \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Věta je důsledkem věty 3.4 uvedené včetně důkazu ve [27]. Tento výsledek je nicméně problematický v tom, že nemáme jak ověřit hladkost řešení x . Ve stejném článku autoři předkládají hypotézu (založenou na numerických experimentech a dalších výpočtech), která je vzhledem k tomu, že pracuje s předpokladem na vektorové pole f , pro praktické použití užitečnější.

Hypotéza 3.2. *Nechť $\alpha \in (0, 1)$ a $f \in C^2(K)$, kde $K = \langle \xi_1^0 - \delta, \xi_1^0 + \delta \rangle \times \cdots \times \langle \xi_d^0 - \delta, \xi_d^0 + \delta \rangle$ s $\delta > 0$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ a $h > 0$ dostatečně malé je*

$$\max_{t_j \in \langle \varepsilon, T \rangle} \|x(t_j) - x_j\| = O(h^{1+\alpha}).$$

Existuje ještě poněkud „slabší“ tvrzení, nicméně stále pracující s požadavkem na f místo x , které se na rozdíl od hypotézy 3.2 podařilo dokázat:

Věta 3.3. *Nechť $\alpha \in (0, 1)$ a $f \in C^2(K)$, kde K má stejný význam jako v hypotéze 3.2. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ a $h > 0$ dostatečně malé platí*

$$\max_{t_j \in \langle \varepsilon, T \rangle} \|x(t_j) - x_j\| = O(h^{1-\alpha}).$$

Důkaz této věty lze najít ve [46]. Problematika konvergence je dále rozvedena v [60], kde se rovněž diskutuje téma stability této metody.

Zdařilou implementací $PECE_\alpha$ metody v MATLABu je kód `fde12` R. Garrappy (viz [30]), ve kterém se při výpočtu diskrétní konvoluce, ta se vyskytuje v rovnostech (3.4) a (3.5), využívá rychlé Fourierovy transformace (FFT). To umožňuje udržovat výpočetní náklady úměrné $N \log^2 N$ (kde N je počet časových bodů, ve kterých je řešení počítáno) místo N^2 , jako je tomu

v klasické implementaci. Poznamenejme ještě, že výše uvedený postup by bylo možné zobecnit ve smyslu různých řádů v jednotlivých rovnicích soustavy (3.1). Toto rozšíření algoritmus `fde12` sice neumožňuje, pro potřeby této práce je však dostačující, neboť v našich úvahách bude řád α ve všech rovnicích vždy stejný.

Do dnešních dnů je známo více numerických metod, za zmínku stojí neceločíselné verze více krokových metod (FLMM), které jsou vhodné pro řešení tuhých problémů. O těchto metodách se lze dočíst více například v [31, 50]. Na závěr této kapitoly ještě podotkneme, že výše uvedené úvahy lze rozšířit i na případ neautonomních rovnic.

Poznámka 3.4. Nebude-li řečeno jinak, veškeré obrázky v následující kapitole budou generovány právě popsanou $\text{PECE}\alpha$ metodou.

4 Chenův systém

Jak bylo zmíněno v úvodu, snahou této práce je mimo jiné objasnit rozpor týkající se rozdílného řešení Chenova systému, který se v literatuře objevuje. Než se k tomu dostaneme, uvedeme nejprve několik potřebných pojmů týkajících se dynamických systémů, chaosu, bifurkace a představíme samotný Chenův systém. Další část této kapitoly se bude věnovat analýze tohoto systému, a to jak celočíselného, tak i neceločíselného. Zmíněná analýza bude podpořena numerickými experimenty. Poté bude uvedena implementace metody Adomianova rozkladu na Chenův systém. V poslední části této kapitoly se budeme nejprve zabývat porovnáním řešení neceločíselného Chenova systému metodou Adomianova rozkladu a PECE metodou popsanou v kapitole 3 a poté již zmíněným objasněním rozporu. Na závěr uvedeme výčet několika rozdílů mezi celočíselnými a neceločíselnými diferenciálními rovnicemi a jejich soustavami.

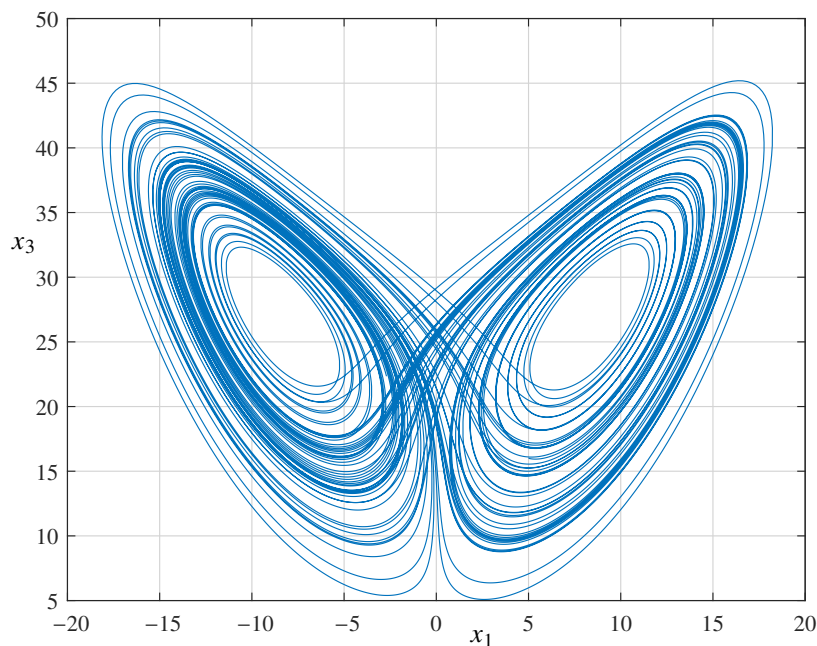
Některé nelineární systémy i přes svou zdánlivou jednoduchost a skutečnost, že jsou odvozeny na základě dobře pochopených fyzikálních zákonů, vykazují komplikované chování (trajektorie nekonvergují ani k bodu rovnováhy, ani k periodické orbitě, přitom zůstávají v ohraničené podmnožině \mathbb{R}^d). Pro takové chování se vžil termín deterministický chaos. Toto označení naznačuje paradox, neboť spojuje dva pojmy běžně považované za neslučitelné – náhodnost (nebo nepředvídatelnost) a deterministický pohyb. Jedním ze společných rysů takových systémů je velmi vysoký stupeň citlivosti na změny v datech systému, což znamená, že malá změna např. v počátečních podmínkách vede na velké rozdíly stavů systému v pozdějším čase (tzv. efekt motýlích křídel). Prototyp takových systémů byl představen v roce 1963 v článku [49] meteorologem E. Lorenzem. Jednalo se o zjednodušený model tepelné konvekce, nyní znám pod pojmem Lorenzův systém:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= \sigma(x_2(t) - x_1(t)), \\x'_2(t) &= rx_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t), \\x'_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

kde σ je Prandtlovo číslo, r je proporcionální k Rayleighovu číslu a β je konstanta související s geometrií úlohy. Tyto tři konstanty jsou kladné, přičemž obvykle se uvažuje $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ a r se mění. Pro $r < 1$ má systém pouze jeden bod rovnováhy, pro $r > 1$ se objevují další dva (tzn. při $r = 1$ nastává bifurkace). Rovnice Lorenzova systému vypadají opravdu jednoduše, ve skutečnosti však vedou na velmi komplikovaný dynamický systém. Na obrázku 4.1 můžeme vidět fázovou trajektorii řešení pro $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ a $r = 28$ (původní Lorenzovy hodnoty). Obrázek naznačuje, jak vypadá limitní množina, ke které je tato trajektorie přitahována. Takové limitní množině se říká podivný atraktor. Ten se obvykle vyznačuje fraktální strukturou a další jeho charakteristikou je to, že dva body na atraktoru, které jsou v jednu chvíli „těsně vedle sebe“, mohou být v pozdějším čase poměrně daleko od sebe. Jedinečnost podivných atraktorů spočívá také v tom, že se (ve fázovém prostoru) nikdy neuzavřou – pohyb systému se nikdy neopakuje, je neperiodický. Pohyb, který popisujeme na těchto podivných atraktorech, je to, čemu říkáme chaotické chování. Poznamenejme, že v literatuře není jednotná definice ani deterministického chaosu, ani podivného atraktoru, někteří autoři zdůrazňují zmíněnou vysokou citlivost na poruchy v datech, jiní zase topologické vlastnosti, atd. Více podrobností týkající se této problematiky lze nalézt například ve [25, 59].

V dnešní době je známo poměrně mnoho systémů vykazujících chaos. Jedním z nich je tzv. Chenův systém, poprvé představen G. Chenem a T. Uetou v článku [37]:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= a(x_2(t) - x_1(t)), \\x'_2(t) &= (c - a)x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + cx_2(t), \\x'_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - bx_3(t),\end{aligned}\tag{4.2}$$



Obrázek 4.1: Numericky (PECE metodou) spočítaná trajektorie řešení celočíselného Lorenzova systému s parametry $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $r = 28$ a počáteční podmínkou $x(0) = (5, 7, 16)$ v (x_1, x_3) -rovině

kde a , b , c jsou reálné parametry, které se obvykle uvažují kladné a splňující podmínku

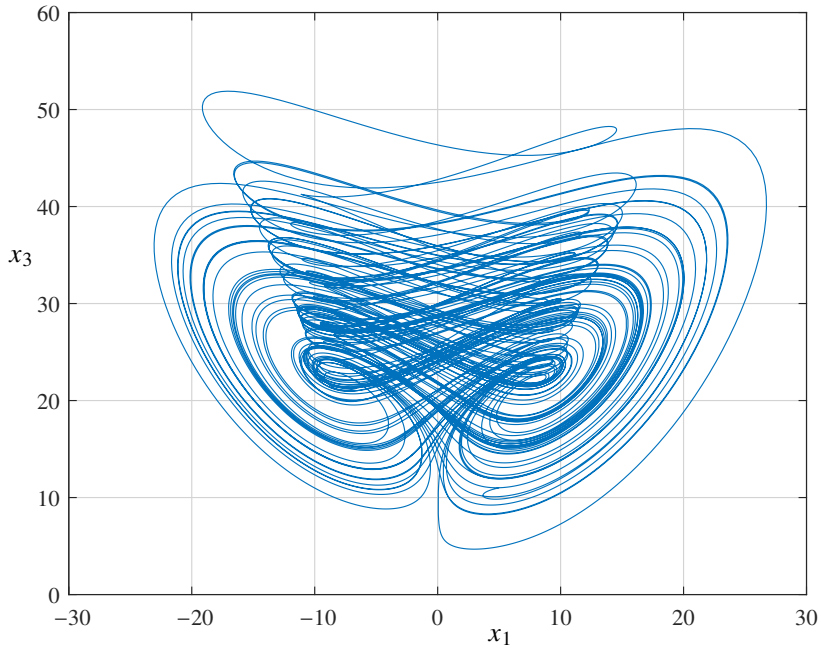
$$-a - b + c < 0,$$

což zaručí disipativitu³ systému. Chenův systém byl objeven tak, že k nechaotickému Lorenzově systému se přidal řídicí člen za účelem destabilizace. Tomuto postupu se někdy v literatuře říká „anti-control approach“ nebo „chaotifikace“. Tvar řídicího členu může napovědět Routhovo–Hurwitzovo kritérium, obvykle totiž chaos ve třídímní systém nastane, jsou-li všechny body rovnováhy nestabilní (není to ale nutnost).

Vidíme, že rovnice Chenova systému vypadají velmi podobně jako rovnice Lorenzova systému. V minulosti se dokonce vedla polemika, že samostatné studium Chenova systému není zajímavé, neboť na něj lze (v jistém smyslu) přenést veškeré vlastnosti systému Lorenzova (viz články [7, 36]). Dnes víme, že to není tak jednoduché a dynamika obou systémů je rozdílná. Přesněji, existuje spojitá transformace stavových proměnných (viz [44]), která Chenův systém (4.2) převede na Lorenzův systém (4.1). Nelze to však udělat při zachování znaménka všech tří parametrů Lorenzova systému (připomeňme, že ty mají konkrétní fyzikální význam), aniž bychom zároveň nezměnili tok času. Tento fakt je hlavním důvodem pro rozdílné dynamické vlastnosti. Více podrobností o rozdílech (a podobnostech) obou systémů lze nalézt v přehledovém článku [45].

Poznamenejme ještě, že s tím, jak se v průběhu let objevovaly další chaotické systémy, se přirozeně objevila snaha o jisté rozčlenění (klasifikaci) těchto systémů (viz např. [19, 20]). V rámci třídímní systémů s kvadratickými nelinearitami lze Chenův (i Lorenzův) systém zařadit do rodiny tzv. zobecněného Lorenzova systému (tato rodina je charakterizována určitou podmínkou na matici lineární části systému).

³Disipativní systém mimo jiné znamená, že objem jakéhokoliv atraktoru musí být nulový. Tuto podmínku splňují body rovnováhy, periodické orbity (limitní cykly) a podivné atraktory.



Obrázek 4.2: Numericky (PECE metodou) spočítaná trajektorie řešení celočíselného Chenova systému s parametry $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ a počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = (5, 3, 11)$ v (x_1, x_3) -rovině

4.1 Základní bifurkační analýza celočíselného Chenova systému

Než přejdeme k samotné bifurkační analýze Chenova systému, připomeňme nejprve několik základních pojmů z teorie nelineárních soustav.

Bod $\mathbf{x}^e \in \mathbb{R}^d$ se nazývá bod rovnováhy (stacionární bod, bod ekvilibria) soustavy

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (4.3)$$

pokud $\mathbf{f}(\mathbf{x}^e) = \mathbf{0}$. Bod rovnováhy soustavy (4.3) se nazývá hyperbolický, pokud všechna vlastní čísla Jacobiovy matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^e)$ mají nenulovou reálnou část.

Důležitým pojmem je tzv. Ljapunovovská stabilita:

Definice 4.1 (Stabilita řešení). Řekneme, že řešení \mathbf{x} je stabilní (v Ljapunovově smyslu), pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{\eta}_0$ splňující $\|\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\xi}_0\| < \delta$ a $t \geq 0$ platí

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon,$$

kde \mathbf{x} , resp. \mathbf{y} je řešení soustavy (4.3) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{\xi}_0$, resp. $\boldsymbol{\eta}_0$.

Pokud navíc platí

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty,$$

pak řešení \mathbf{x} nazveme asymptoticky stabilní.

Řekneme, že řešení \mathbf{x} je nestabilní, pokud není stabilní.

Jestliže soustava (4.3) má spojitě diferencovatelné vektorové pole \mathbf{f} , linearizační věta říká, že stabilita bodu rovnováhy této nelineární soustavy je určena stabilitou nulového bodu rovnováhy lineární soustavy

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (4.4)$$

s $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^e)$, a to za předpokladu, že je bod rovnováhy \mathbf{x}^e hyperbolický.

V případě lineární soustavy (4.4) s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ matice \mathbf{A} platí, že bod rovnováhy \mathbf{x}^e je

1. asymptoticky stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla λ_i mají zápornou reálnou část,
2. stabilní (nikoli asymptoticky), jestliže všechna vlastní čísla mají nekladnou reálnou část, existuje alespoň jedno vlastní číslo s nulovou reálnou částí a všechna tato vlastní čísla mají stejnou geometrickou a algebraickou násobnost,
3. nestabilní, jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice A má kladnou reálnou část.

Více podrobností lze najít například v [60]. Podle toho, jak se chovají trajektorie řešení v okolí bodu rovnováhy, vžila se pro tento bod určitá terminologie. V případě třídimenzionálních soustav má příslušná Jacobiova matice tři vlastní čísla, přičemž jedno z nich je vždy reálné a zbylá dvě mohou být buď rovněž reálná, nebo komplexně sdružená. Hyperbolický bod rovnováhy pak nazveme

- a) uzel, jestliže všechna vlastní čísla jsou reálná a mají stejná znaménka; uzel je stabilní (nestabilní), pokud všechna vlastní čísla jsou záporná (kladná);
- b) sedlo, jestliže všechna vlastní čísla jsou reálná a alespoň jedno z nich je kladné a jedno záporné; sedlo je vždy nestabilní;
- c) ohnisko-uzel, jestliže má jedno reálné vlastní číslo a pár komplexně sdružených vlastních čísel, přičemž reálné části všech vlastních čísel mají stejné znaménko; takový bod rovnováhy je stabilní (nestabilní), pokud je znaménko záporné (kladné);
- d) sedlo-ohnisko, jestliže má jedno reálné vlastní číslo, jehož znaménko je opačné ke znaménkům reálných částí páru komplexně sdružených vlastních čísel; sedlo-ohnisko je vždy nestabilní.

Poznámka 4.2. Asymptoticky stabilní body rovnováhy se někdy také nazývají výlevky (ty tedy obsahují stabilní uzly a ohniska-uzly). Body rovnováhy, pro které má příslušná Jacobiova matice všechna vlastní čísla s kladnou reálnou částí, se nazývají zdroje (mezi ně patří nestabilní uzly a ohniska-uzly) a sedlem pak označujeme takové hyperbolické body rovnováhy, které mají alespoň jedno vlastní číslo s kladnou a jedno se zápornou reálnou částí. Bodům rovnováhy je věnována značná pozornost například v knize [43].

Přistupme nyní k otázce bifurkací. Bifurkace nastává, když malá změna parametru, případně parametrů, které se nazývají bifurkační, vede k náhlé kvalitativní nebo topologické změně v chování systému. Bifurkace lze rozdělit na lokální a globální. Lokální bifurkace se objevuje, když změna parametru způsobí změnu stability bodu rovnováhy. Globální bifurkace nastane, pokud některá z „větších“ invariantních⁴ množin, například cyklus, koliduje s bodem rovnováhy, což způsobuje změny v topologii trajektorií ve fázovém prostoru, které nelze omezit na malé okolí, jako je tomu v případě lokálních bifurkací. Oba tyto typy bifurkací lze pak dále členit. Z hlediska následující analýzy Chenova systému nás bude zajímat hlavně tzv. vidličková a Hopfova bifurkace (v obou případech se jedná o bifurkaci lokální). První zmíněná se obvykle vyskytuje v systémech se symetrií⁵ a nastává, pokud systém přechází z jednoho bodu rovnováhy na tři nebo naopak. Hopfova bifurkace představuje změnu stability bodu rovnováhy systému a je doprovázena vznikem, respektive zánikem periodického řešení. Obě tyto lokální bifurkace lze dále specifikovat. Zhruba řečeno, pokud se jedná o jistou „destabilizaci“ („stabilizaci“), jedná se o subkritický (superkritický) případ. Při vidličkové bifurkaci to odpovídá tomu, že v situaci, kdy existuje pouze jediný bod rovnováhy, je tento bod nestabilní (stabilní). Při Hopfově to znamená, že bod rovnováhy generuje nestabilní (stabilní) limitní cyklus (více viz [55]). Limitním cyklem nazýváme izolovanou uzavřenou trajektorii představující periodické řešení. Označením

⁴Množina $S \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá invariantní množinou počátečního problému (2.1)–(2.2), jestliže pro všechna $\xi_0 \in S$ a pro všechna $t \geq 0$ řešení splňuje $x(t) \in S$.

⁵Symetrickým systémem rozumíme takový systém, který je invariantní vzhledem k transformaci (např. v případě Chenova i Lorenzova systému se jedná o symetrii danou transformací $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, x_3)$).

izolovaná zde rozumíme to, že „blízké“ trajektorie nejsou uzavřeny a spirálovitě směřují od nebo k limitnímu cyklu. Jestliže se všechny blízké trajektorie k tomuto limitnímu cyklu blíží, pak jde o cyklus stabilní neboli přitahující. V opačném případě se jedná o cyklus nestabilní nebo také odpuzující, viz [59].

Nyní již můžeme obrátit pozornost k systému (4.2). Není těžké spočítat, že za podmínky $c < a/2$ má Chenův systém jediný bod rovnováhy $S_0 = (0, 0, 0)$. Dosadíme-li tento bod do Jacobiho matice

$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - x_3 & c & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix},$$

zjistíme, že za splnění podmínek $a > 0$, $b > 0$, $a - 2c > 0$ mají všechna příslušná vlastní čísla záporné reálné části, a tedy tento bod rovnováhy je asymptoticky stabilní. Jestliže $a > a^*$, pak počátek S_0 je ohnisko-uzel, kde $a^* = \frac{(3+2\sqrt{3})c}{3}$ je hodnota, při které se mění typ bodu rovnováhy z uzlu na ohnisko-uzel. Při hodnotě $a_v = 2c$ nastává vidličková bifurkace⁶ – v případě, že platí nerovnost $c > a/2$, dostáváme kromě triviálního bodu rovnováhy S_0 ještě další dva netriviální body rovnováhy

$$S_- = (-\sqrt{b(2c-a)}, -\sqrt{b(2c-a)}, 2c-a) \quad \text{a} \quad S_+ = (\sqrt{b(2c-a)}, \sqrt{b(2c-a)}, 2c-a).$$

Bod S_0 je sedlovým bodem, tedy je nestabilní. Body S_- a S_+ jsou za splnění nerovnosti

$$(a+b-c)c - 2a(2c-a) > 0$$

asymptoticky stabilní, konkrétně se jedná o typ ohnisko-uzel.

Skutečně, dosazením bodů S_- a S_+ do Jacobiho matice dostaneme charakteristickou rovnici $\det(\lambda I - Df(S_{\pm})) = 0$ ve tvaru

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a+b-c)\lambda^2 + bc\lambda + 2ab(2c-a) = 0. \quad (4.5)$$

Zřejmě, oba body rovnováhy S_{\pm} mají stejnou stabilitu. Dle Routhova–Hurwitzova kritéria stability jsou reálné části všech kořenů λ záporné právě tehdy, když

$$a+b-c > 0, \quad 2ab(2c-a) > 0 \quad \text{a} \quad (a+b-c)c - 2a(2c-a) > 0.$$

Vzhledem k tomu, že bod S_0 nemá komplexně sdružený pár ryze imaginárních vlastních čísel, Hopfova bifurkace se může objevit pouze v bodech S_{\pm} . Díky symetrii bodů stačí vyšetřit pouze stabilitu bodu S_+ . Předpokládejme nyní, že charakteristická rovnice (4.5) má ryze imaginární kořen $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}^+$. Jeho dosazením do rovnice obdržíme

$$-\omega^3 i - (a+b-c)\omega^2 + bc\omega i + 2ab(2c-a) = 0.$$

Dostáváme tedy

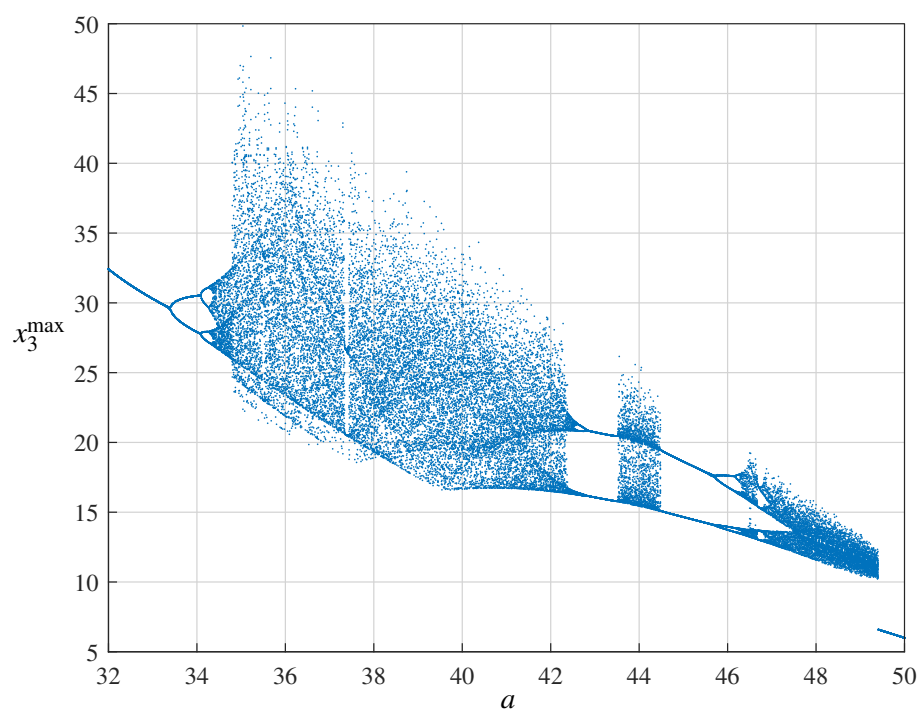
$$2ab(2c-a) - (a+b-c)\omega^2 = 0, \quad bc - \omega^2 = 0, \quad (4.6)$$

a dosadíme-li druhou z rovnic ve (4.6) do první, získáváme vztah

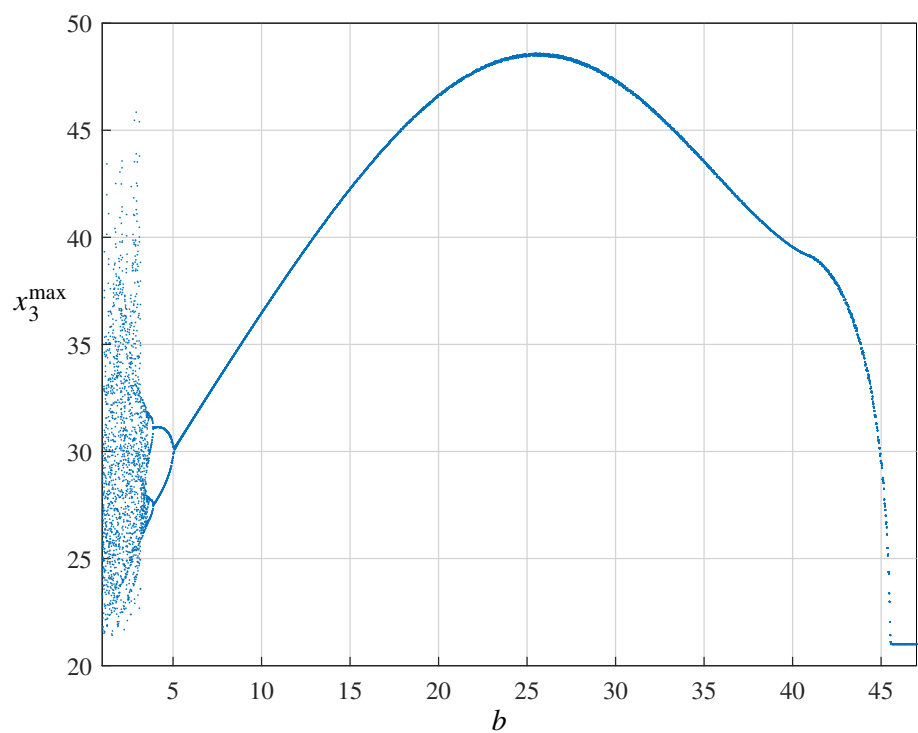
$$2a^2 - 3ca + bc - c^2 = 0.$$

Uvažujeme-li parametr a jako bifurkační, pak Hopfova bifurkace nastává pro hodnotu

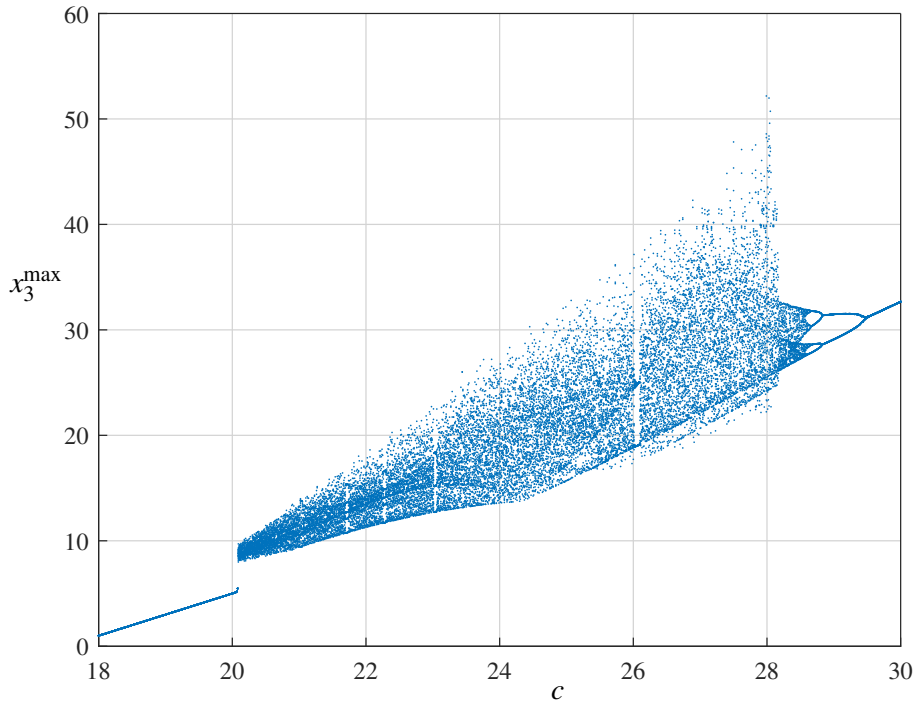
$$a_h = \frac{3c \pm \sqrt{17c^2 - 8bc}}{4},$$



Obrázek 4.3: Bifurkační diagram vzhledem k a v (a, x_3^{\max}) -rovině pro celočíselný Chenův systém (4.2) s parametry $b = 3, c = 28$



Obrázek 4.4: Bifurkační diagram vzhledem k b v (b, x_3^{\max}) -rovině pro celočíselný Chenův systém (4.2) s parametry $a = 35, c = 28$



Obrázek 4.5: Bifurkační diagram vzhledem k c v (c, x_3^{\max}) -rovině pro celočíselný Chenův systém (4.2) s parametry $a = 35$, $b = 3$

je-li splněna podmínka $0 < b \leq \frac{17}{8}c$.

V případě, že bifurkačním parametrem je parametr b , pak Hopfova bifurkace nastává při hodnotě

$$b_h = \frac{c^2 + 3ac - 2a^2}{c}$$

za předpokladu splnění podmínky $c > \frac{(\sqrt{17}-3)a}{2}$ (pro $\frac{a}{2} < c < \frac{(\sqrt{17}-3)a}{2}$ je $b < 0$).

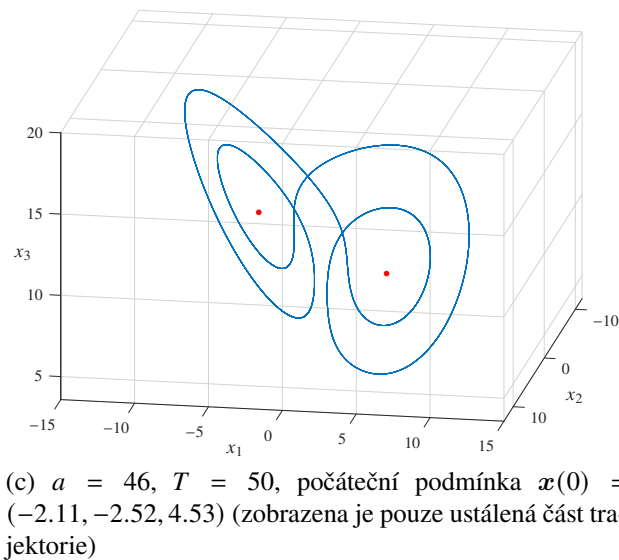
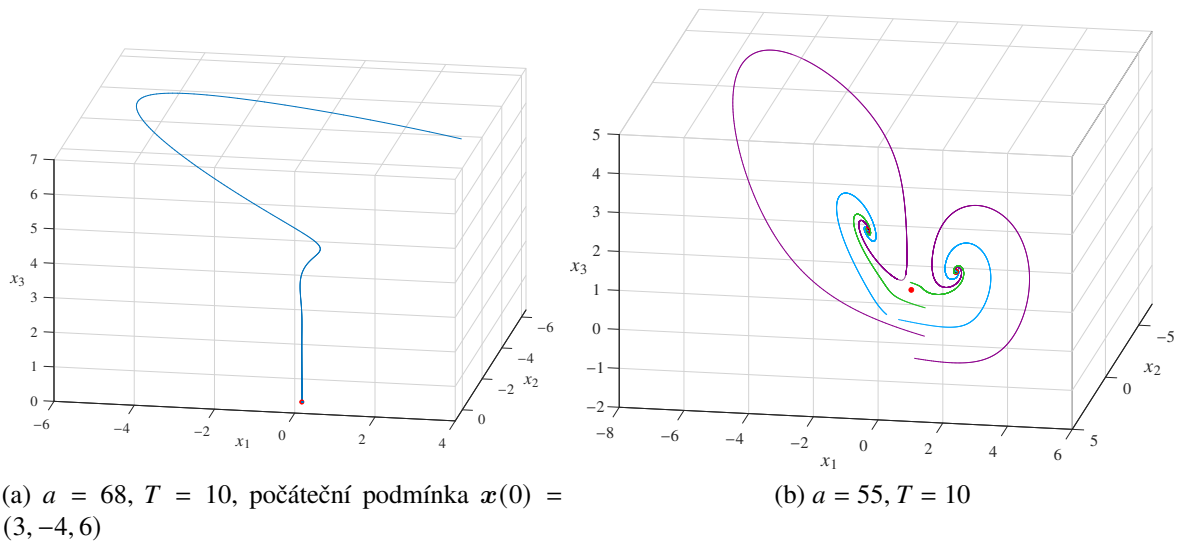
Jako poslední zbývá uvažovat za bifurkační parametr c , v tom případě pak získáváme vztah

$$c_h = \frac{(b - 3a) + \sqrt{17a^2 - 6ab + b^2}}{2}. \quad (4.7)$$

Pokud hodnota parametru a , resp. b klesne pod a_h , resp. b_h , pak se stabilní body S_- , S_+ mění na nestabilní sedla (konkrétněji sedla-ohniska), kolem kterých se vytvoří dva nestabilní limitní cykly. Pro parametr c je tomu opačně, tedy body rovnováhy se „destabilizují“, jestliže c vzroste nad hodnotu c_h .

Podrobnější analýzu celočíselného Chenova systému lze nalézt například v článcích [35, 48, 52, 63]. Pro ilustraci uvedme ještě několik bifurkačních diagramů podporujících teoretické poznatky uvedené výše. Bifurkační diagram je užitečným grafickým nástrojem, který umožňuje poodkrýt dynamické chování systému v závislosti na zvoleném bifurkačním parametru (parametrech) systému. Postupuje se tak, že zvolíme rozsah uvažovaného parametru a provedeme nějaké (zpravidla rovnoměrné) dělení tohoto intervalu s dostatečně malým krokem. Následně v každém kroku řešíme systém (v dostatečně dlouhém časovém intervalu) a vykreslíme nějakou jeho charakteristickou vlastnost oproti aktuální hodnotě bifurkačního parametru, např. vykreslíme několik posledních lokálních maxim (nebo minim) některé stavové proměnné. Tyto extrémy se projeví jinak pro stabilní bod rovnováhy, jinak pro chaos a jinak pro stabilní periodická řešení.

⁶Můžeme si povšimnout, že v tomto případě vidličková bifurkace nezáleží na hodnotě parametru b .

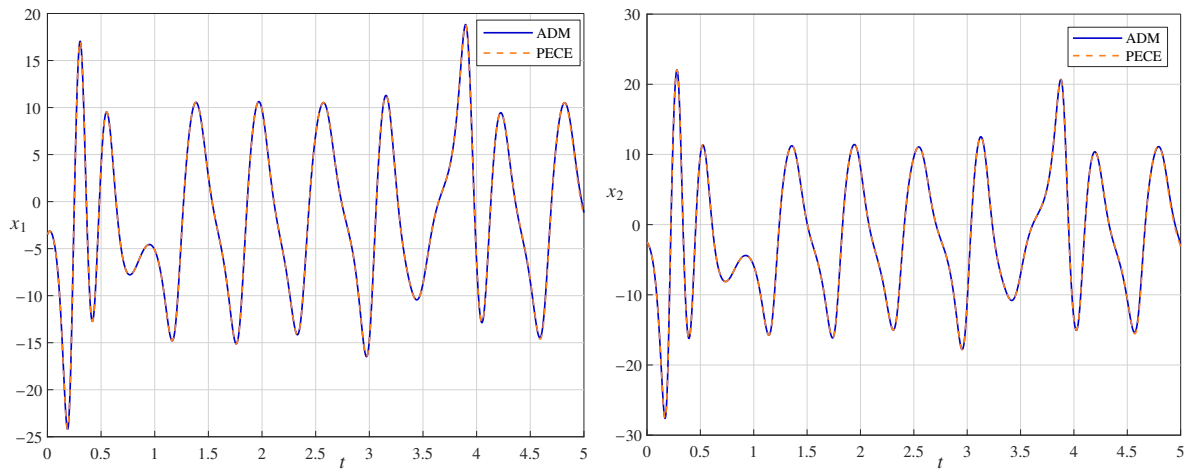


Obrázek 4.6: Fázové portréty celočíselného Chenova systému (4.2) s parametry $b = 3, c = 28$ a různými hodnotami parametru a

Z diagramu tedy pak lze (alespoň přibližně) vyčíst body, ve kterých nastávají bifurkace. Zdůrazněme však, že k interpretaci výsledků bychom měli přistupovat opatrně, protože řešení je zpravidla získáno nějakou přibližnou metodou a nelze vyloučit, že v některých (kritických) situacích nedochází k falešné predikci, tj. když přibližná metoda nereflektuje kvalitativní chování skutečného řešení.

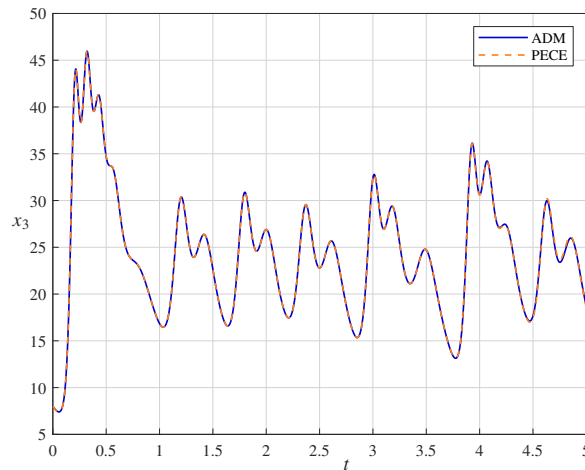
Na obrázku 4.3 vidíme bifurkační diagram vůči parametru a Chenova systému (4.2), kde vykreslujeme několik posledních lokálních maxim stavové proměnné x_3 (řešení je počítáno numericky PECE metodou) oproti tomuto bifurkačnímu parametru. Budeme-li se na diagram dívat zleva, první pásmo (přibližně do hodnoty $a = 35$) odpovídá stabilnímu limitnímu cyklu, přičemž lze pozorovat postupné zdvojování period (tzv. period-doubling bifurcation), které vede až ke vzniku chaosu. Ten pak pokračuje přes většinu diagramu, přičemž občas je „proložen“ stabilním cyklem (například pro a přibližně mezi hodnotou 42.5 a 43.5), podivný atraktor se také postupně zmenšuje. Poslední pásmo (začínající za hodnotou $a_h \approx 49.1247$) odpovídá stabilnímu bodu rovnováhy S_+ , resp. S_- . Podobné scénáře lze vyčíst i z bifurkačních diagramů vzhledem ke zbylým parametrům b a c , viz obrázky 4.4 a 4.5. Výpis rutiny pro vykreslení bifurkačního

diagramu vzhledem k parametru c (pro zbylé parametry vypadá skript obdobně) lze nalézt v apendixu.



(a) První složka řešení, tj. vykreslení v (t, x_1) -rovině

(b) Druhá složka řešení, tj. vykreslení v (t, x_2) -rovině

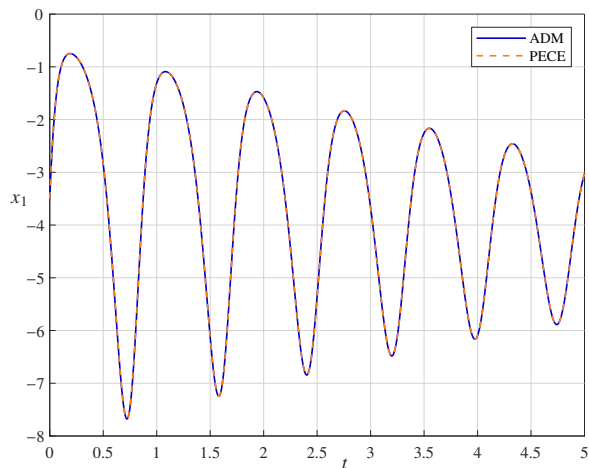


(c) Třetí složka řešení, tj. vykreslení v (t, x_3) -rovině

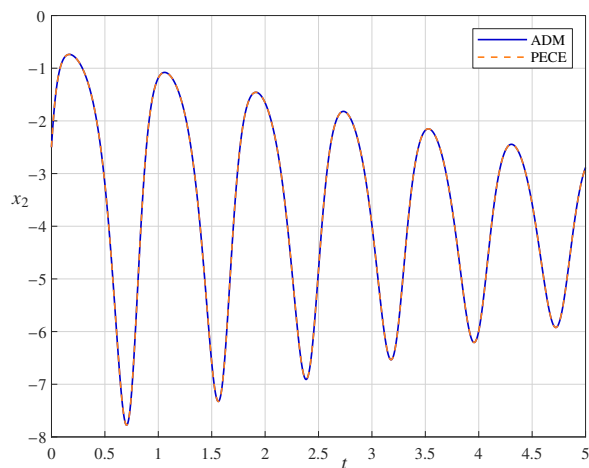
Obrázek 4.7: Porovnání jednotlivých složek řešení celočíselného Chenova systému (4.2) s parametry $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ a počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = (-3.5, -2.5, 8)$ získané metodou Adomianova rozkladu (ozn. „ADM“, použito 6 členů) a pomocí PECE

Na obrázku 4.6 můžeme vidět fázové portréty systému (4.2) pro $b = 3$, $c = 28$ a různé hodnoty parametru a . Výpis rutiny pro vykreslení fázových portrétů (s jednou počáteční podmínkou) lze nalézt také v apendixu. Situace, kdy existuje pouze jediný bod rovnováhy, je vykreslena na obrázku (a). Vidličková bifurkace nastává pro dané hodnoty b a c při $a^* = 56$. Pro menší hodnoty parametru a má Chenův systém tři body rovnováhy a Hopfovu bifurkaci získáme pro $a < a_h \approx 49.12$. Pro $a = 55$ tedy již nastala vidličková bifurkace, ale ještě nenastala bifurkace Hopfova, což potvrzuje obrázek (b), kde si lze povšimnout dvou stabilních ohnisek a nestabilního počátku (přestože počáteční podmínky jsou brány v blízkosti tohoto bodu rovnováhy, vidíme, že trajektorie od něj směřují pryč). Na obrázku (c) můžeme pozorovat trajektorii, která je přitahována stabilním limitním cyklem. Pro větší přehlednost je vykreslena pouze její ustálená část. Poznamenejme ještě, že když se zabýváme bifurkačními parametry b a c , fázové portréty vypadají obdobně.

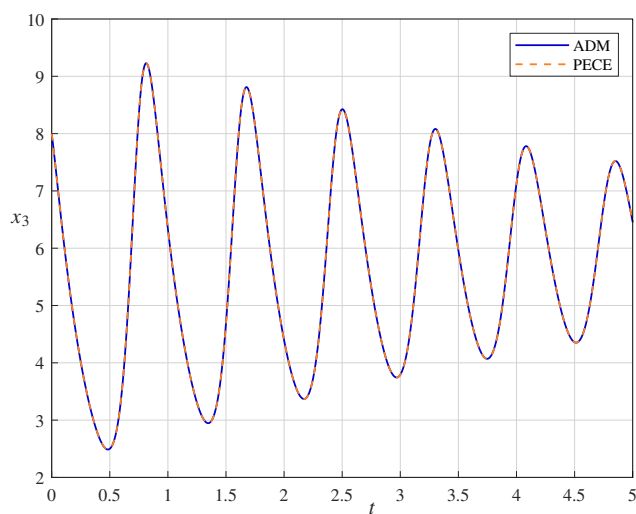
Na obrázcích 4.7 a 4.8 můžeme vidět srovnání řešení získaných dvěma různými metodami. První z nich je metoda Adomianova rozkladu s využitím „navazování“ řešení, což, jak bylo



(a) První složka řešení, tj. vykreslení v (t, x_1) -rovině



(b) Druhá složka řešení, tj. vykreslení v (t, x_2) -rovině

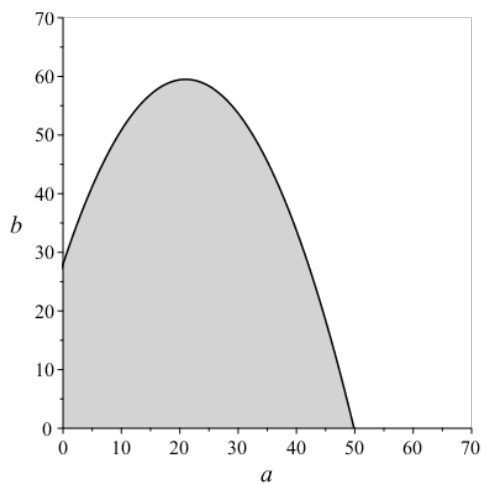


(c) Třetí složka řešení, tj. vykreslení v (t, x_3) -rovině

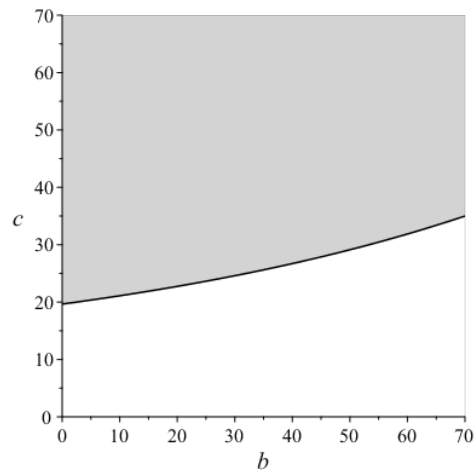
Obrázek 4.8: Porovnání jednotlivých složek řešení celočíselného Chenova systému (4.2) s parametry $a = 50$, $b = 3$, $c = 28$ a počáteční podmínkou $x(0) = (-3.5, -2.5, 8)$ získané metodou Adomianova rozkladu (ozn. „ADM“, použito 6 členů) a pomocí PECE

zmíněno v podkapitole 2.3, znamená, že výpočet probíhá vždy pouze na velmi malém intervalu a koncová hodnota se použije jako počáteční podmínka v dalším časovém úseku. Pro každý takový výpočet je v obou vyobrazených případech použito 6 členů Adomianova rozvoje – tento počet členů se obvykle pokládá za dostačující. Druhou z použitých metod je PECE metoda, která byla podrobněji rozebrána v kapitole 3. Můžeme tedy vidět, že při zvolení dostatečné přesnosti (zde $h = 10^{-4}$) jsou řešení (alespoň opticky) identická. Poznamenejme ještě, že první ze zmíněných obrázků odpovídá situaci, kdy nastal chaos, druhý odpovídá situaci mezi jednotlivými bifurkacemi (tedy dva stabilní a jeden nestabilní bod rovnováhy).

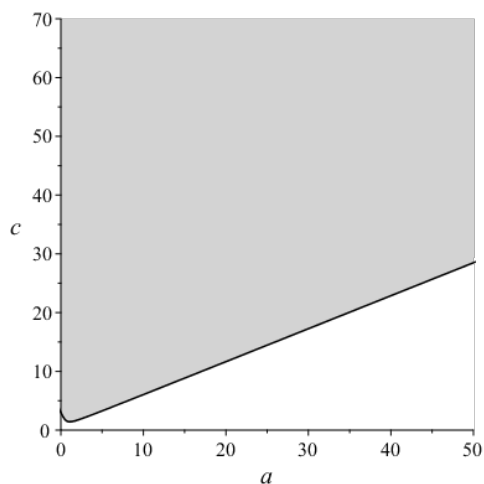
Při fixaci pouze jednoho parametru lze také obdržet bifurkační křivky, tedy například při fixaci parametru c dostáváme bifurkační křivku v (a, b) -rovině, analogicky pro zbylé parametry. Tyto křivky jsou znázorněny na obrázku 4.9. Tmavší oblast vždy odpovídá situaci, kdy jsou body rovnováhy S_+ a S_- nestabilní. V případě, že nezafixujeme žádný z parametrů, obdržíme bifurkační plochu, kterou můžeme pozorovat na obrázku 4.10.



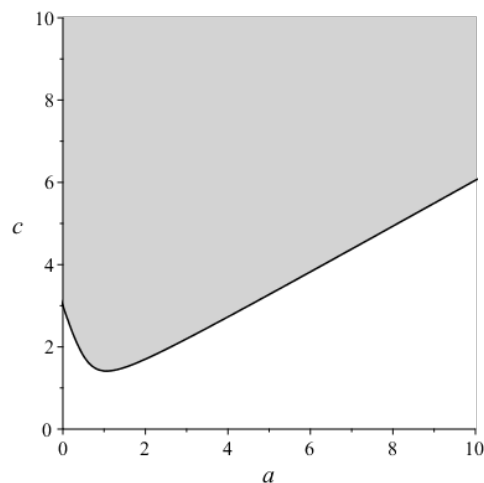
(a) Bifurkační křivka v (a, b) -rovině pro $c = 28$



(b) Bifurkační křivka v (b, c) -rovině pro $a = 35$



(c) Bifurkační křivka v (a, c) -rovině pro $b = 3$



(d) Výřez 4.9(c), tj. bifurkační křivka v (a, c) -rovině pro $b = 3$

Obrázek 4.9: Bifurkační křivky celočíselného Chenova systému (4.2) při fixaci jednotlivých parametrů

4.2 Základní bifurkační analýza neceločíselného Chenova systému

Podívejme se nyní na to, jaká je situace v neceločíselném případě. Pro $\alpha \in (0, 1)$ jsou zachovány souřadnice všech bodů rovnováhy a stejně tak i podmínky pro jejich výskyt. Liší se však podmínky stability – obecně platí, že oblast stability bodu rovnováhy neceločíselné soustavy ODR se zvětšuje s tím, jak se řád derivace α blíží k nule.

Podobně jako v celočíselném případě lze ukázat, že stabilita bodu rovnováhy soustavy

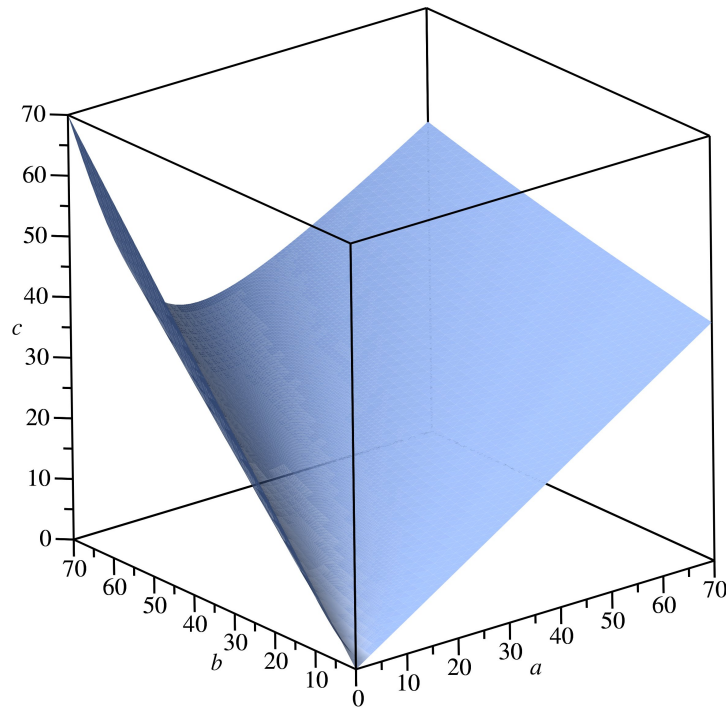
$${}^C D^\alpha x(t) = f(x(t)) \quad (4.8)$$

je určena stabilitou nulového řešení lineární soustavy

$${}^C D^\alpha x(t) = Ax(t), \quad (4.9)$$

kde $A = Df(x^e)$. Hovoří o tom tzv. linearizační věta, která je uvedena níže.

V případě lineární soustavy lze opět stabilitu bodu rovnováhy posuzovat za pomoci vlastních čísel matice A :



Obrázek 4.10: Bifurkační plocha pro celočíselný Chenův systém (4.2)

Věta 4.3. Uvažujme lineární soustavu (4.9), kde A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Pak počátek je

1. asymptoticky stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla λ_i , kde $i = 1, 2, \dots, d$, splňují $|\arg(\lambda_i)| > \alpha\pi/2$,
2. stabilní (nikoli asymptoticky) právě tehdy, když vlastní čísla splňují $|\arg(\lambda_i)| \geq \alpha\pi/2$, existuje λ_i takové, že $|\arg(\lambda_i)| = \alpha\pi/2$, a pro všechna taková vlastní čísla s s $|\arg(\lambda_i)| = \alpha\pi/2$ platí, že jejich algebraická násobnost je rovna geometrické.

Důkaz je uveden například v knize [26] a je založen na znalosti asymptotiky Mittag-Lefflerových funkcí. Ty hrají důležitou roli při řešení neceločíselných rovnic.

Poznámka 4.4. Množina vymezená podmínkou předchozí věty (4.3) se nazývá Matignonův sektor, viz obrázek 4.11 (stabilní oblast odpovídá tmavší části). První část věty 4.3 tedy říká, že počátek je asymptoticky stabilním bodem rovnováhy právě tehdy, když všechna vlastní čísla leží uvnitř tohoto sektoru.

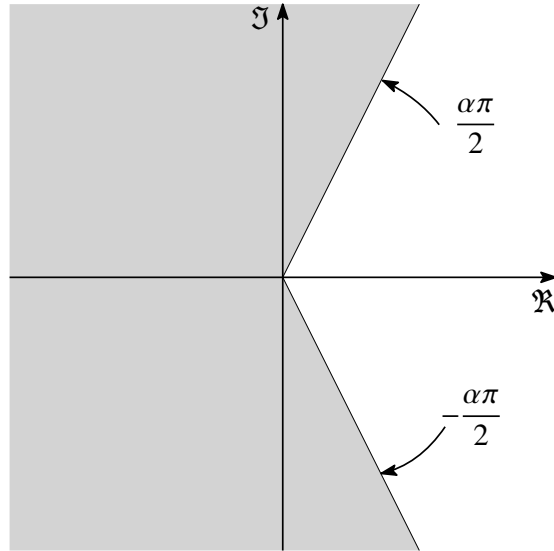
Linearizační věta pro bod rovnováhy soustavy (4.8) pak zní následovně:

Věta 4.5 (Linearizační věta pro soustavu diferenciálních rovnic neceločíselného řádu s Caputoovou derivací). *Nechť x^e je bodem rovnováhy soustavy (4.8) a f je spojitě diferencovatelné vektorové pole. Pak*

- a) x^e je asymptoticky stabilní, jestliže všechna vlastní čísla λ_i Jacobiovy matice $Df(x^e)$ splňují $|\arg(\lambda_i)| > \alpha\pi/2$ (tj. leží v Matignonově sektoru);
- b) x^e je nestabilní, jestliže existuje vlastní číslo λ_i takové, že $|\arg(\lambda_i)| < \alpha\pi/2$.

Důkaz této věty může čtenář najít například v [16, 17]. Věta je v uvedených člancích uvedena v trochu jiném tvaru a za nepatrně slabších předpokladů. Všimněme si také, že věta nepostihuje případ $|\arg(\lambda_i)| = \alpha\pi/2$. Jedná se o analogii nehyperbolického bodu z celočíselného případu.

Co se týče bodů rovnováhy, tak jejich specifikace není v neceločíselném případě nijak zvlášť ustálena. Za prvotní pokus lze považovat článek [11]. V dalším budeme body rovnováhy nazývat intuitivně (podle chování trajektorie v okolí tohoto bodu). Rovněž pojem Hopfovy bifurkace je zaveden mírně odlišně, viz následující odstavce.



Obrázek 4.11: Oblast stability bodu rovnováhy ODR_α v komplexní rovině, tzv. Matignonův sektor

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$${}^C D^\alpha x(t) = f_\mu(x(t)), \quad (4.10)$$

společně s bifurkačním parametrem $\mu \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in (0, 1)$. Nechť x_μ^e je bodem rovnováhy (4.10) a nechť

$${}^C D^\alpha x(t) = A_\mu x(t),$$

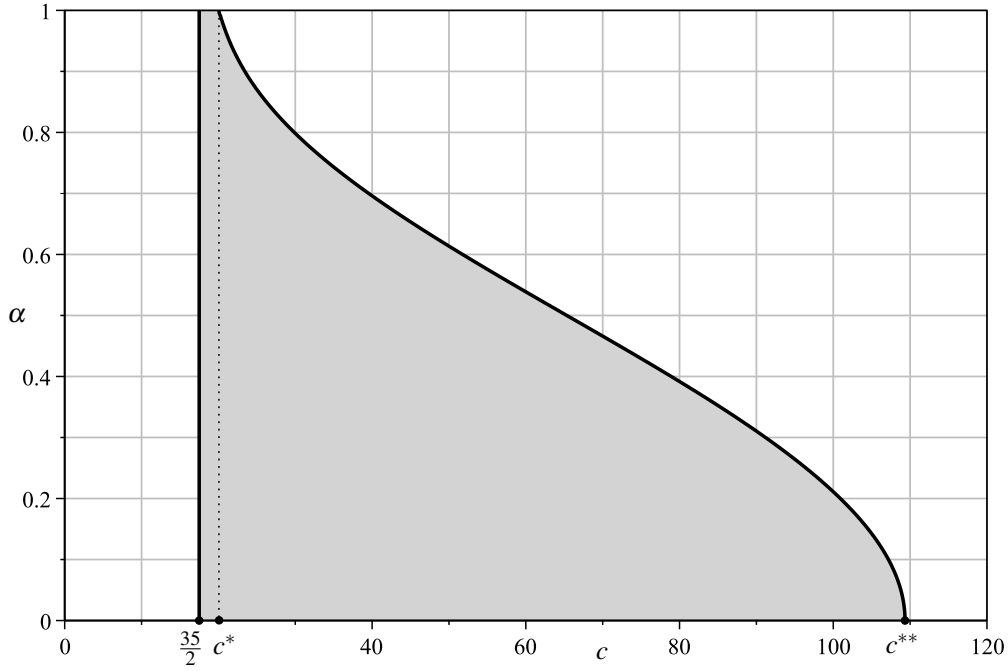
kde $A_\mu = Df(x_\mu^e)$. Předpokládejme, že matice A_μ má taková vlastní čísla $\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu), \dots, \lambda_d(\mu)$, že existuje alespoň jeden pár komplexně sdružených vlastních čísel – označme je například $\lambda_{1,2}(\mu)$. Řekneme, že pro soustavu (4.10) nastává neceločíselná Hopfova bifurkace, jestliže existuje hodnota $\mu = \mu_h$ taková, že jsou splněny následující podmínky:

1. $|\arg(\lambda_{1,2}(\mu_h))| = \alpha\pi/2$,
2. platí buď $|\arg(\lambda_i(\mu_h))| < \alpha\pi/2$, nebo $|\arg(\lambda_i(\mu_h))| > \alpha\pi/2$ ($i = 3, 4, \dots, d$),
3. $\frac{d}{d\mu} |\arg(\lambda_j(\mu))|_{\mu=\mu_h} \neq 0$ ($j = 1, 2$).

První dvě podmínky se někdy označují jako podmínky singularity, třetí jako podmínka transversality (více viz článek [24]). Stručně řečeno tedy Hopfova bifurkace v neceločíselném případě nastává, když pár komplexně sdružených čísel přechází nenulovou rychlostí hranici Matignonova sektoru, a tedy bod rovnováhy ztrácí (nebo nabývá) stabilitu. Podmínka transversality zaručuje, že vlastní číslo hranici Matignonova sektoru skutečně přejde, nemůže se tedy stát, že by se po dosažení této hranice „vrátilo zpět“. Na rozdíl od celočíselného případu taková bifurkace není doprovázena vznikem limitního cyklu, což je důsledkem faktu, že neceločíselné soustavy s Caputovou derivací (pokud v definici Caputovy derivace nepřipustíme $t_0 = -\infty$) nemohou mít periodická řešení, tj. trajektorií nemůže být uzavřená křivka (více o tomto tématu lze nalézt např. v článcích [41, 61]). Více podrobností o neceločíselné Hopfově bifurkaci pro $\alpha \in (0, 1)$ lze nalézt například v článku [24].

Věnujme se nyní neceločíselnému Chenovu systému:

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x_1(t) &= a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^C D^\alpha x_2(t) &= (c - a)x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + cx_2(t), \\ {}^C D^\alpha x_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - bx_3(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$



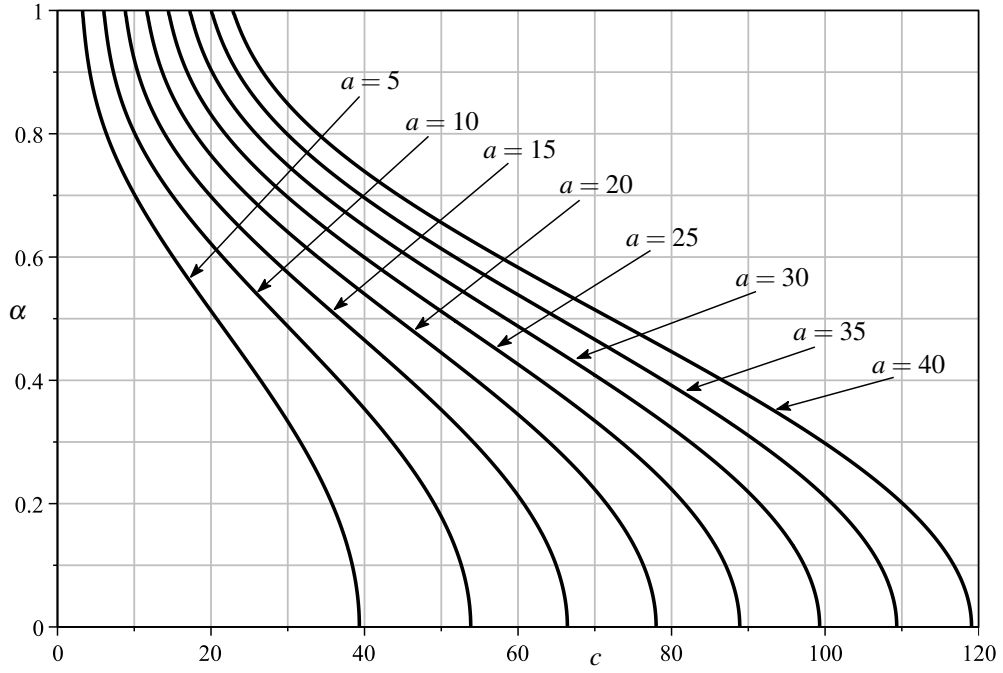
Obrázek 4.12: Stabilní a nestabilní oblast bodů rovnováhy S_{\pm} neceločíselného Chenova systému (4.11) rozdělena bifurkační křivkou v (c, α) -rovině

Jeho chování budeme v tomto případě zkoumat s ohledem na bifurkační parametr c a řád neceločíselné derivace α . Jestliže $a/2 < c < c_h$, kde c_h je dáno vztahem (4.7), pak body rovnováhy S_+ a S_- jsou (lokálně) asymptoticky stabilní pro libovolné $0 < \alpha \leq 1$ (viz [22]). Stabilita v tomto případě pokračuje i za touto hodnotou, S_+ a S_- však budou na rozdíl od celočíselného případu asymptoticky stabilní i po překročení hodnoty c_h , dokud se vlastní čísla příslušné Jacobiho matice nedostanou na hranici Matignonova sektoru, což nastane pro hodnotu c_α , která je popsána níže. Pro jednoduchost se v dalším omezíme na případ, kdy $a = 35$, $b = 3$ (tedy nejobvyklejší parametry používané v Chenově systému), pro něž c_h odpovídá hodnotě $c_h = -51 + \sqrt{5051} \approx 20.0704$. Bifurkační analýza opět spočívá ve zkoumání polynomu (4.5). Situace je zde však o něco obtížnější, jelikož nás nyní zajímá lokalizace kořenů tohoto polynomu vůči hranici Matignonova sektoru a nikoliv vůči imaginární ose. Jinak řečeno, klasické Routhovo–Hurwitzovo kritérium je pouze postačující podmínkou pro asymptotickou stabilitu bodu rovnováhy, nikoliv nutnou. Podmínky Routhova–Hurwitzova typu pro třídimenzionální neceločíselný případ byly odvozeny v článku [21]. Na základě těchto podmínek lze problém Hopfovy bifurkace převést na zkoumání polynomu

$$P_H(c; a, b, k_\alpha) = p_4(a, b; k_\alpha)c^4 + p_3(a, b; k_\alpha)c^3 + p_2(a, b; k_\alpha)c^2 + p_1(a, b; k_\alpha)c + p_0(a, b; k_\alpha), \quad (4.12)$$

kde $k_\alpha = \cos^2(\alpha\pi/2)$ a

$$\begin{aligned} p_4(a, b; k_\alpha) &= 16k_\alpha a + b, \\ p_3(a, b; k_\alpha) &= -56k_\alpha a^2 - (64k_\alpha^2 + 64k_\alpha - 6)ab - (4k_\alpha + 2)b^2, \\ p_2(a, b; k_\alpha) &= 72k_\alpha a^3 - (1024k_\alpha^3 - 864k_\alpha^2 + 48k_\alpha - 5)a^2b + (64k_\alpha^2 + 64k_\alpha - 6)ab^2 + b^3, \\ p_1(a, b; k_\alpha) &= -40k_\alpha a^4 + (1024k_\alpha^3 - 800k_\alpha^2 + 88k_\alpha - 12)a^3b - (32k_\alpha^2 + 80k_\alpha - 4)a^2b^2 \\ &\quad - 16k_\alpha ab^3, \end{aligned}$$



Obrázek 4.13: Bifurkační křivky Chenova neceločíselného systému (4.11) v (c, α) -rovině pro $b = 3$ a $a \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$

$$p_0(a, b; k_\alpha) = 8k_\alpha a^5 - (256k_\alpha^3 - 192k_\alpha^2 + 24k_\alpha - 4)a^4 b + 24k_\alpha a^3 b^2 + 8k_\alpha a^2 b^3.$$

Ještě než uvedeme samotnou větu hovořící o tom, pro jaké hodnoty parametru c jsou body rovnováhy S_\pm asymptoticky stabilní, poznamenejme dvě užitečné vlastnosti týkající se polynomu (4.12):

- Polynom $P_H(\cdot; 35, 3, k_\alpha)$ má jediný reálný kořen na množině $(a/2, \infty) - \{c_h\}$.
- Nechť $\alpha \in (0, 1)$, $c > 35/2$. Pak charakteristický polynom

$$\lambda^3 + (38 - c)\lambda^2 + 3c\lambda + 420c - 7350,$$

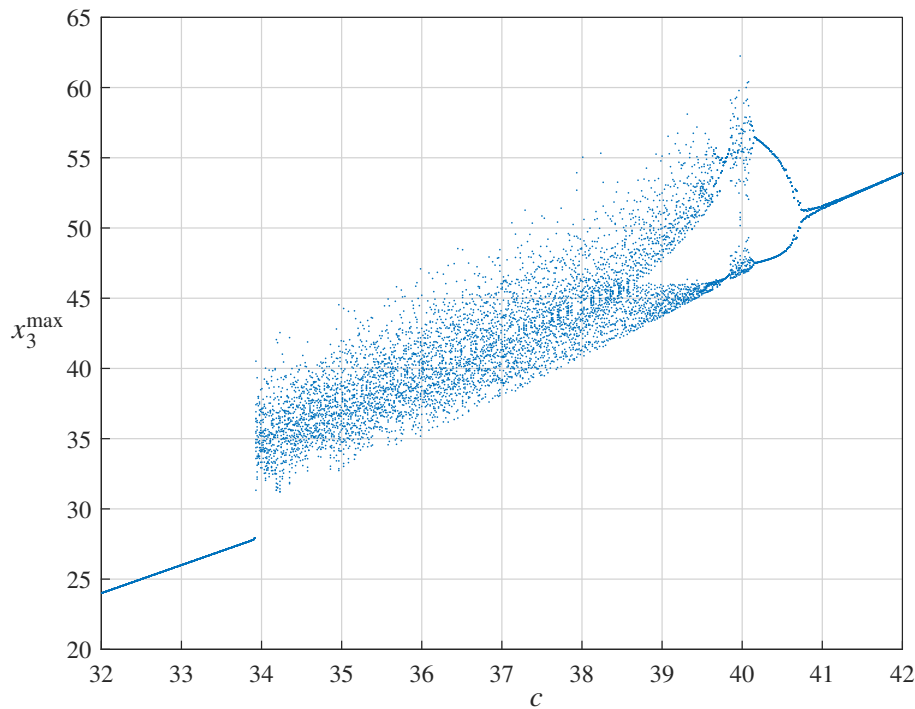
který je spjat s netriviálními body rovnováhy S_\pm systému (4.11), má pár komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2}$ splňující rovnost $|\arg(\lambda_{1,2})| = \alpha\pi/2$ právě tehdy, když $c = c_\alpha$, kde $c_\alpha \in (c_h, \infty)$ je jediný kořen polynomu $P_H(\cdot; 35, 3, k_\alpha)$.

Vzhledem ke spojitě závislosti polynomiálních kořenů na svých koeficientech určuje kořen c_α Hopfovu bifurkační křivku v pásu $(35/2, \infty) \times (0, 1)$ nacházejícím se v (c, α) -rovině. Tato bifurkační křivka rozděluje tento pás na dvě oblasti, stabilní a nestabilní, s ohledem na konkrétní hodnoty c a α . Není těžké ověřit, že stabilní část je situována pod touto křivkou, viz obrázek 4.12. Nyní tedy již můžeme uvést větu, jejíž důkaz je uveden ve [22]:

Věta 4.6. *Nechť $\alpha \in (0, 1)$, $a = 35$, $b = 3$, $c > 35/2$ a necht' $c_\alpha \in (c_h, \infty)$ je kořenem $P_H(\cdot; 35, 3, k_\alpha)$ (z předchozího již víme, že tento kořen je jediný).*

1. *Jestliže $c < c_\alpha$, pak body rovnováhy S_\pm jsou asymptoticky stabilní.*
2. *Jestliže $c > c_\alpha$, pak body rovnováhy S_\pm jsou nestabilní.*

Poznámka 4.7. Obdobný popis neceločíselné Hopfovy bifurkace v (c, α) -rovině lze získat i pro další hodnoty a , b . Vezmeme-li v úvahu $b = 3$ a a postupně rovno hodnotám 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, dostaneme analogický výsledek k větě 4.6. Odpovídající bifurkační křivky jsou znázorněny na obrázku 4.13. Autoři článku [22] navíc uvádějí hypotézu, že toto rozšíření je možné pro všechny kladné reálné hodnoty a , b (hlavní obtíž spočívá v ověření, že polynom $P_H(\cdot; a, b, k_\alpha)$ má skutečně jediný reálný kořen v (c_h, ∞) pro libovolné hodnoty a , b a α).



Obrázek 4.14: Bifurkační diagram vzhledem k c v (c, x_3^{\max}) -rovině pro neceločíselný Chenův systém (4.11) s parametry $a = 40$, $b = 3$ a $\alpha = 0.8$

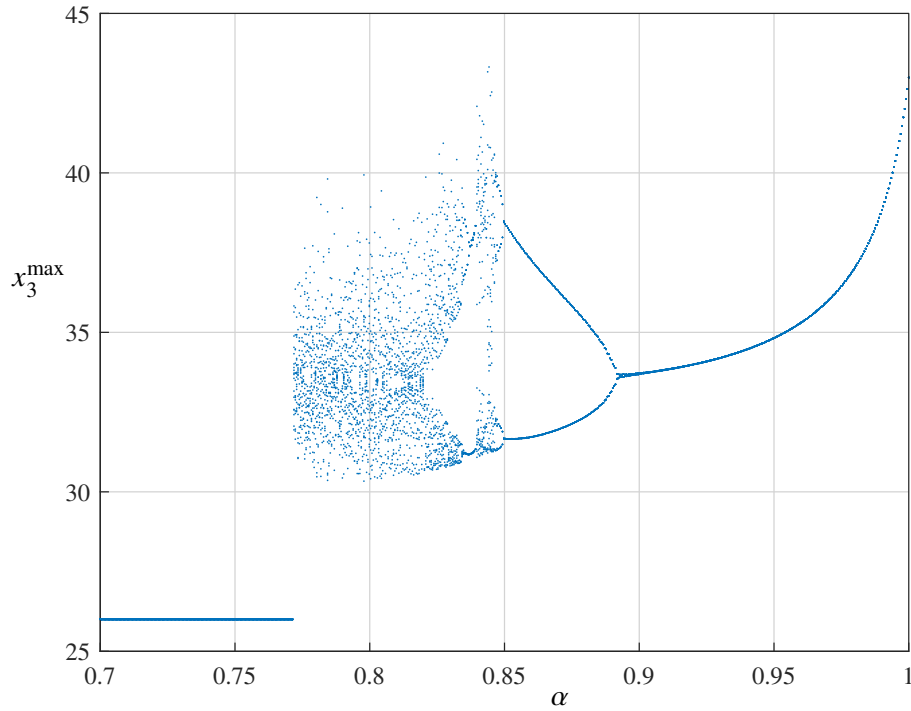
Neceločíselné bifurkační diagramy, které jsou vzhledem k parametrům c a α vykresleny na obrázcích 4.14 a 4.15, lze interpretovat podobně jako ty celočíselné, je však potřeba si uvědomit, že pásmo naznačující limitní cykly ve skutečnosti limitní cykly nepředstavuje, jak bude vysvětleno později.

Na obrázku 4.16 jsou vyobrazeny fázové portréty pro pevné hodnoty $a = 35$, $b = 3$ a různá c a α . Na prvním obrázku (a) je znázorněna situace, kdy $c < a/2$ a tedy pro libovolné $\alpha \in (0, 1)$ má Chenův neceločíselný systém pouze jeden bod rovnováhy, který je asymptoticky stabilní. Kvalitativní chování trajektorie je podobné jako v celočíselném případě 4.6(a) (přiblížit se dostatečně blízko bodu rovnováhy nyní vyžaduje delší čas). Pro vykreslení zbylých dvou obrázků byla zvolena hodnota $c = 28$. Stabilní bod rovnováhy S_+ (ten se chová jako ohnisko-uzel) můžeme pozorovat na obrázku (b), kde hodnota $\alpha = 0.78$. Naopak nestabilní body rovnováhy a vzniklý chaos můžeme vidět na obrázku (c), pro který $\alpha = 0.85$. Jak si můžeme všimnout, stabilita bodů rovnováhy je v souladu s obrázkem 4.12. Další zajímavá situace je vyobrazena na obrázku 4.17, který zachycuje trajektorie pro parametry $a = 30$, $b = 3$, $c = 28$ a $\alpha = 0.87$ – při pohledu na obrázek (a) se může zdát, že se jedná o „úzký“ atraktor, nicméně pokud vykreslíme pouze „konec“ trajektorie, viz obrázek (b), je patrné, že limitní množinou je uzavřená křivka. Ta však není řešením. Ve skutečnosti jde o tzv. S -asymptoticky T -periodické řešení, o kterém se více zmíníme později. Obrázek 4.18 pak ilustruje situaci, kdy jsou všechny tři body rovnováhy nestabilní, přičemž systém přestává být ohraničený (trajektorie „utíkají“ do nekonečna).

4.3 Implementace ADM

Podívejme se nyní na to, jak se metoda Adomianova rozkladu aplikuje konkrétně na Chenův neceločíselný systém (4.11). V souladu se značením uvedeným v podkapitole 2.1 lze Chenův systém zapsat následujícím způsobem:

$$Lx = Rx + Nx, \quad (4.13)$$



Obrázek 4.15: Bifurkační diagram vzhledem k α v (α, x_3^{\max}) -rovině pro neceločíselný Chenův systém (4.11) s parametry $a = 35$, $b = 3$ a $c = 28$

kde

$$\begin{pmatrix} Lx_1 \\ Lx_2 \\ Lx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^C D^\alpha x_1 \\ {}^C D^\alpha x_2 \\ {}^C D^\alpha x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Rx_1 \\ Rx_2 \\ Rx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2 - ax_1 \\ (c - a)x_1 + cx_2 \\ -bx_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Nx_1 \\ Nx_2 \\ Nx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Tedy vidíme, že roli lineárního invertibilního operátoru zde hraje Caputův diferenciální operátor řádu α . Aplikujeme-li na (4.13) Riemannův–Liouvilleův neceločíselný integrální operátor I^α představující inverzi L^{-1} , dostáváme

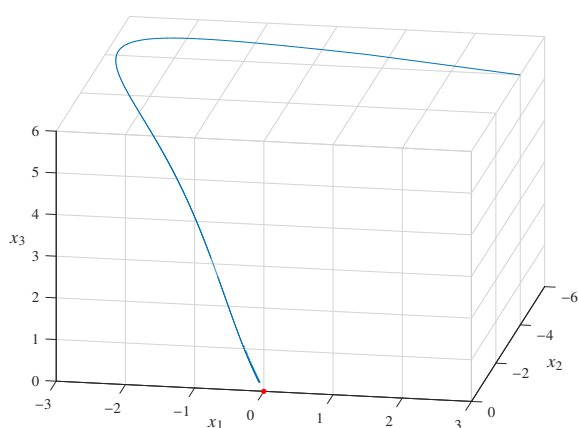
$$x = \xi_0 + I^\alpha Rx + I^\alpha Nx.$$

Jak bylo uvedeno ve druhé kapitole, členy x a Nx vyjádříme ve formě nekonečných řad. V případě kvadratických nelinearit, které se v případě Chenova systému objevují, není potřeba počítat složité Adomianovy polynomy. Stačí dosadit řady pro jednotlivé složky a roznásobit. Tímto způsobem dostáváme následující vztah pro složky řešení:

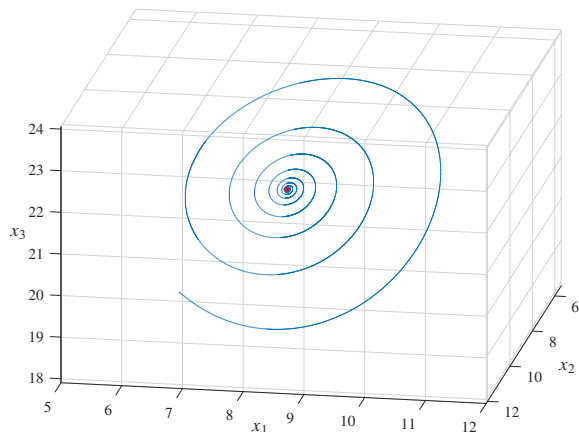
$$x_j(t) = c_j^0 + c_j^1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + c_j^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots + c_j^i \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} + \dots, \quad j = 1, 2, 3,$$

kde koeficienty c_j^0 jsou určeny jako

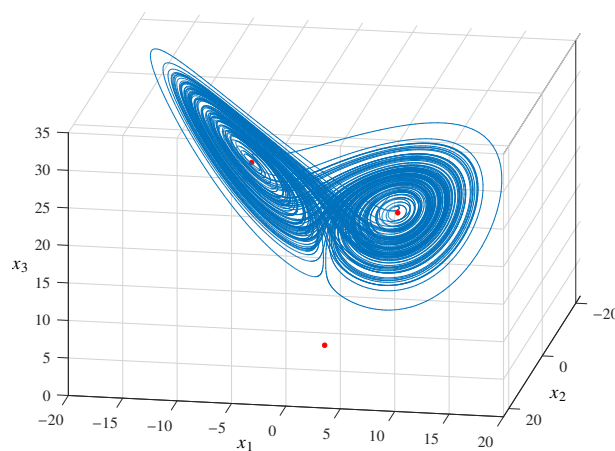
$$\begin{aligned} c_1^0 &= x_1(0) = \xi_1^0, \\ c_2^0 &= x_2(0) = \xi_2^0, \\ c_3^0 &= x_3(0) = \xi_3^0, \end{aligned}$$



(a) $c = 15$, $\alpha = 0.5$, $T = 50$, počáteční podmínka $\mathbf{x}(0) = (3, -4, 6)$



(b) $c = 28$, $\alpha = 0.78$, $T = 50$, počáteční podmínka $\mathbf{x}(0) = (6, 7, 18)$, bod rovnováhy S_+



(c) $c = 28$, $\alpha = 0.85$, $T = 50$, počáteční podmínka $\mathbf{x}(0) = (7, 7, 23)$

Obrázek 4.16: Fázové portréty neceločíselného Chenova systému (4.11) s parametry $a = 35$, $b = 3$ a různými hodnotami parametrů c a α

a c_j^i pro $i = 1, 2, \dots$ jsou dány vztahy

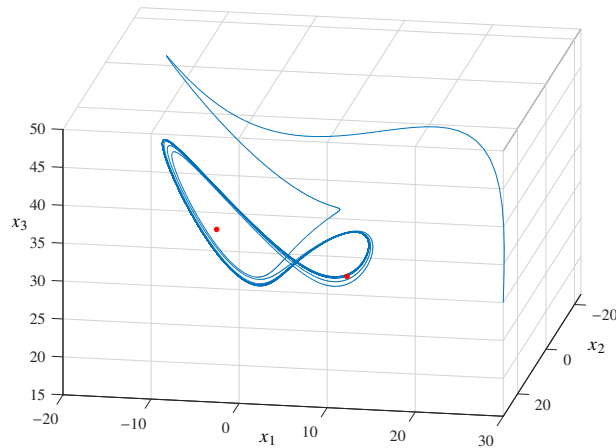
$$c_1^i = a(c_2^{i-1} - c_1^{i-1}),$$

$$c_2^i = (c - a)c_1^{i-1} + cc_2^{i-1} - \sum_{m=0}^{i-1} c_1^m c_3^{i-1-m} \frac{\Gamma((i-1)\alpha + 1)}{\Gamma(m\alpha + 1)\Gamma((i-1-m)\alpha + 1)},$$

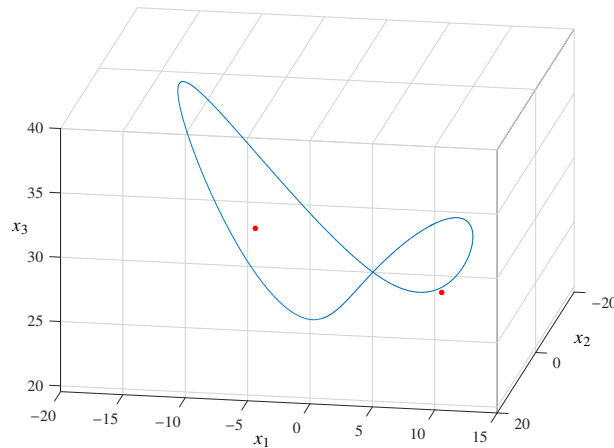
$$c_3^i = -bc_3^{i-1} + \sum_{m=0}^{i-1} c_1^m c_2^{i-1-m} \frac{\Gamma((i-1)\alpha + 1)}{\Gamma(m\alpha + 1)\Gamma((i-1-m)\alpha + 1)}.$$

Poznámka 4.8. Volbou $\alpha = 1$ dostáváme celočíselnou verzi Chenova systému (4.2), hodnoty Gama funkcí přejdou na faktoriály.

V souladu se sekci o konvergenci ADM nelze vzhledem k polynomiální povaze přibližného řešení očekávat konvergenci na delším časovém intervalu. Nabízí se tedy opět myšlenka navázání řešení, zda je však tato úvaha správná, bude zodpovězeno v následující podkapitole. Výpis rutiny, která slouží k výpočtu Chenova systému Adomianovým rozkladem „navazováním“ a je založena na výše zmíněných vztazích, lze nalézt v appendixu.



(a) Vykreslení celé trajektorie od $t = 0$ do $T = 50$



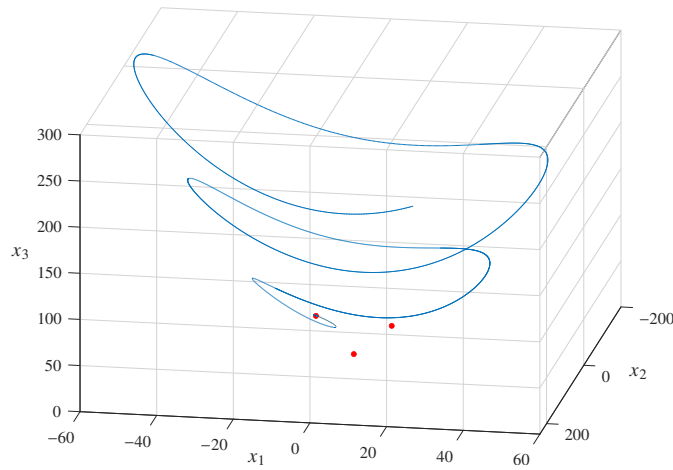
(b) Vykreslení pouze „ustáleného konce“ trajektorie

Obrázek 4.17: Fázové portréty neceločíselného Chenova systému (4.11) s parametry $a = 30$, $b = 3$, $c = 28$ a $\alpha = 0.87$, počáteční podmínka $x(0) = (30, 30, 30)$

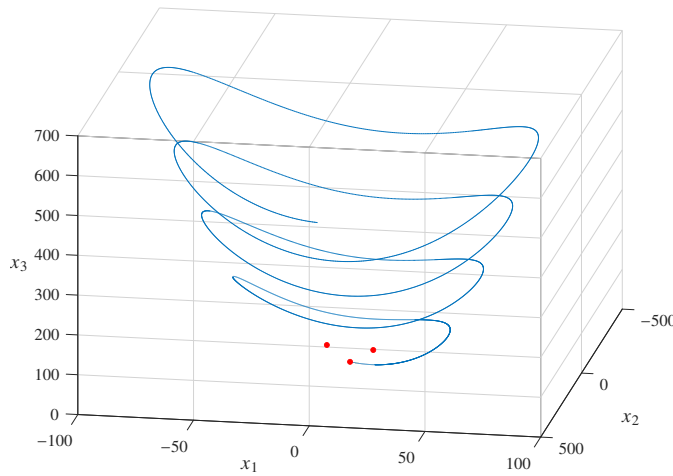
4.4 Porovnání řešení metodou PECE a ADM pro neceločíselný případ

V podkapitole 4.1 jsme mohli vidět, že ať už provedeme výpočet řešení celočíselného Chenova systému metodou Adomianova rozkladu nebo metodou PECE, výsledek je vizuálně stejný (viz obrázky 4.7 a 4.8). Přirozeně se proto nabízí otázka, zda to dopadne stejně i v neceločíselném případě. Odpověď lze nalézt při pohledu na obrázek 4.19, kde jsou vykresleny fázové portréty řešení získané jednotlivými metodami pro neceločíselný Chenův systém s parametry $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ a $\alpha = 0.8$ (zvolená přesnost zůstává stejná jako v předchozím, tedy $h = 10^{-4}$). V takovém případě se dle obrázku 4.12 nacházíme ve stabilní oblasti, čemuž odpovídá řešení dané metodou $PECE_\alpha$ (můžeme pozorovat přitahující ohnisko-uzel). Adomianovou metodou (při výpočtu bylo opět použito 6 členů Adomianova rozvoje) však dostáváme chaotické, tedy zcela odlišné řešení.

Vidíme tedy, že řešení získaná metodou $PECE_\alpha$ a metodou ADM si příliš neodpovídají. Pokusme se tento rozpor objasnit. Zhruba řečeno, problém je v tom, že pro rovnice neceločíselného řádu se řešení nedají napojovat tak, jako to lze v případě celočíselném. Když se totiž časový interval, na kterém se výpočet provádí, rozdělí na menší části, tak pokaždé, když se začne provádět výpočet na dalším podintervalu s použitím počáteční podmínky odpovídající koncové hodnotě na podintervalu předchozím, dojde k „zahození“ historie – výpočet probíhá nanovo, aniž by zohlednil, co se dělo v předchozím čase. Výsledek pak více připomíná situaci,



(a) $T = 1$, počáteční podmínka $\mathbf{x}(0) = (-10.29, -10.29, 36.10)$ (blízko netriviálního bodu rovnováhy S_-)



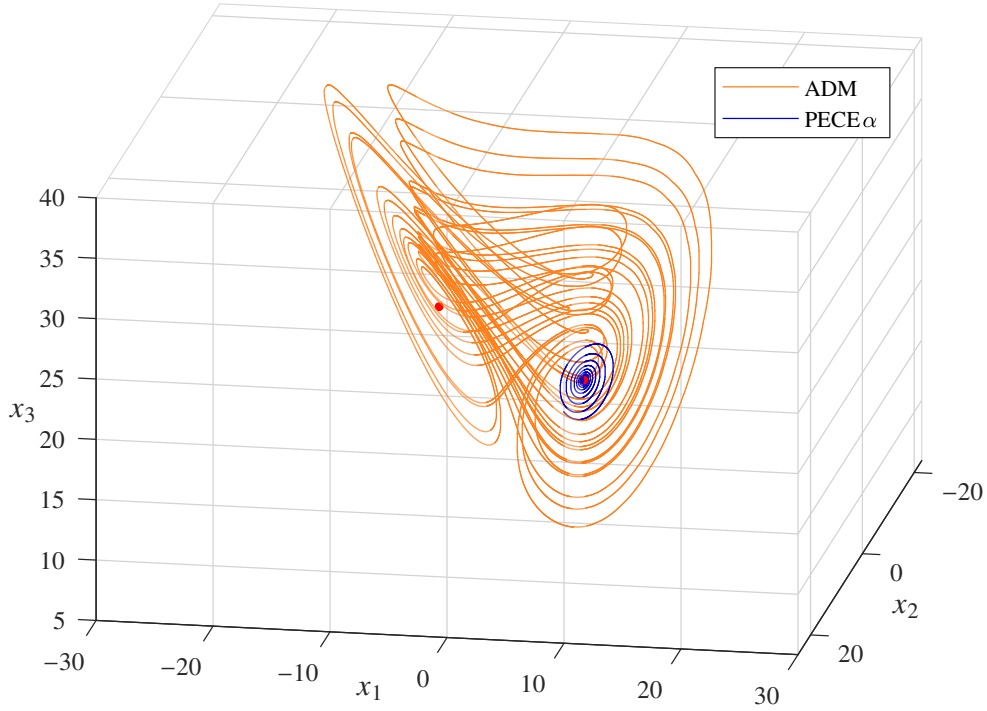
(b) $T = 0.55$, počáteční podmínka $\mathbf{x}(0) = (-0.1, 0.1, 0.1)$ (blízko triviálního bodu rovnováhy S_0)

Obrázek 4.18: Fázové portréty neceločíselného Chenova systému (4.11) s parametry $a = 20$, $b = 3$, $c = 28$ a $\alpha = 0.99$

jako bychom řešili soustavu prvního řádu. S klesajícím řádem derivace se tak trajektorie řešení dle ADM a PECE α víc a víc rozcházejí, což je patrné na obrázku 4.20 – pro řád $\alpha = 0.95$ si trajektorie odpovídají podstatně více než je tomu pro řád $\alpha = 0.75$.

Zdá se, že D. Cafagna a G. Grassi, kteří ve svém článku [14] tvrdí, že se jim metodou Adomianova rozkladu podařilo nalézt Chenův systém vykazující chaos pro řád derivace $\alpha = 0.08$, si nebyli vědomi toho, že řešení na sebe takto nelze navazovat. Přitom stačilo vykreslit si například obrázek podobný 4.21 s „dostatečně velkým“ krokem (v případě použití malého kroku se může zdát, že na sebe trajektorie hladce navazují). Na tomto obrázku je totiž jasné vidět, že řešení se nenapojuje hladce (stačilo by srovnat ho s jakýmkoliv numerickým řešením). Otázka nejmenšího řádu derivace α , pro nějž Chenův neceločíselný systém (4.11) vykazuje chaos, jakožto hlavní motivace tohoto a některých jejích dalších článků, je však tím pádem irelevantní. Jak jsme totiž viděli v podkapitole 4.2, pro malé hodnoty α se pohybujeme v oblasti stability bodů rovnováhy, kde se sice může stát, že se chaos objeví, pravděpodobnost je nicméně velmi malá.

Numerické experimenty naznačují, že dynamika Chenova systému se s klesajícím řádem α „zrychluje“. Z numerického hlediska to znamená, že abychom toto chování zachytili, je potřeba



Obrázek 4.19: Porovnání fázových portrétů řešení neceločíselného Chenova systému (4.11) s parametry $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$, $\alpha = 0.8$, $T = 5$ a počáteční podmínkou $x(0) = (6, 7, 18)$ získané metodou Adomianova rozkladu (ozn. „ADM“, použito 6 členů) a pomocí $PECE_\alpha$

volit stále menší krok. Pod hodnotou $\alpha \approx 0.3$ již algoritmus `fde12` havaruje.

Je známo, že některé vlastnosti diferenciálních rovnic a jejich soustav jsou pro celočíselný i neceločíselný řád derivace analogické. Jak jsme však mohli vidět v předchozím, existují mezi těmito dvěma případy i některé poměrně zásadní rozdíly, přičemž obecně platí, že v neceločíselném případě je situace komplikovanější a nemůžeme si dovolit vše co v případě celočíselném. Uvedme proto na tomto místě shrnutí některých vlastností a odlišností neceločíselných rovnic.

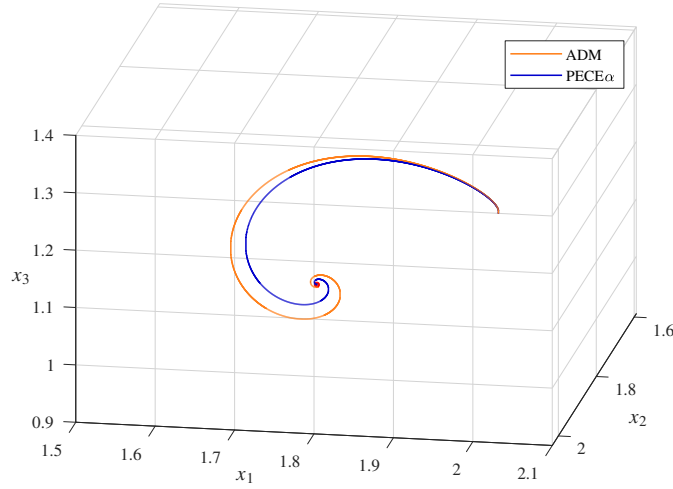
Zatímco pro obyčejné diferenciální rovnice (ODR n) platí, že dvě trajektorie se buď shodují, nebo se (ve stejném čase t) neprotínají, pro ODR α , kde $\alpha \in (0, 1)$, to platí pouze ve speciálních případech. Způsobeno je to především nelokální povahou (závislostí na historii) řešení. Přesněji, dvě různé trajektorie se nemohou protnout v případě dimenze 1 (za určitého předpokladu na funkci f) a v případě d -dimenzionální soustavy, jestliže se jedná o tzv. triangulární soustavu, tj. soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x_1(t) &= f_1(x_1(t)), \\ {}^C D^\alpha x_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)), \\ &\dots \\ {}^C D^\alpha x_d(t) &= f_d(x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)). \end{aligned} \tag{4.14}$$

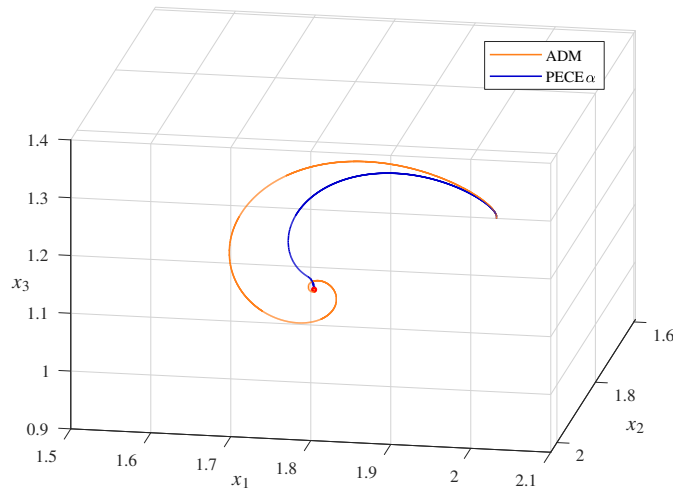
Více podrobností je uvedeno v článku [18]. Další zajímavé vlastnosti, týkající se především trajektorií řešení planárních diferenciálních soustav neceločíselného řádu, jsou uvedeny v [11].

S poznatky předchozího odstavce úzce souvisí fakt, že ODR α negeneruje dynamický systém v klasickém smyslu, tj. řešení $x(t) = \phi_t(\xi_0)$ soustavy ${}^C D^\alpha x(t) = f(x(t))$ startující z bodu $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ nesplňuje vlastnost toku $\phi_t \circ \phi_s(\xi_0) = \phi_{t+s}(\xi_0)$. Lze však ukázat, že v případě dimenze jedna (za předpokladu lipschitzovskosti funkce f) je $\phi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijekcí pro každé $t > 0$ a tedy existuje inverzní funkce ϕ_t^{-1} . Zavedeme-li nyní dvouparametrickou funkci $\psi_{s,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$\psi_{s,t}(x) = \phi_t \circ \phi_s^{-1}(x), \quad \forall s, t > 0,$$



(a) $\alpha = 0.95$



(b) $\alpha = 0.75$

Obrázek 4.20: Porovnání fázových portrétů řešení neceločíselného Chenova systému (4.11) s parametry $a = 55$, $b = 3$, $c = 28$, $T = 10$ a počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = (2.03, 2.03, 1.30)$ získané metodou Adomianova rozkladu (ozn. „ADM“, použito 6 členů) a pomocí PECE_α

pak tato funkce splňuje:

- (i) $\psi_{0,0}(x) = x$,
- (ii) $\psi_{s,t} \circ \psi_{u,s}(x) = \psi_{u,t}(x)$, $\forall s, t, u > 0$.

Tyto dvě vlastnosti opravňují nazývat funkci $\psi_{s,t}$ (dvouparametrickým) tokem rovnice ${}^C D^\alpha x(t) = f(x(t))$ a lze ji použít k definování neceločíselného dynamického systému. Více podrobností k tomuto tématu lze nalézt v článku [18]. Vlastnosti (i) a (ii) platí i v případě trojúhelníkové soustavy (4.14), obecně ale pro soustavu dimenze 2 a výše neplatí, a to ani v případě lineární soustavy. Jednoduchý protipříklad je v článku [18] také uveden.

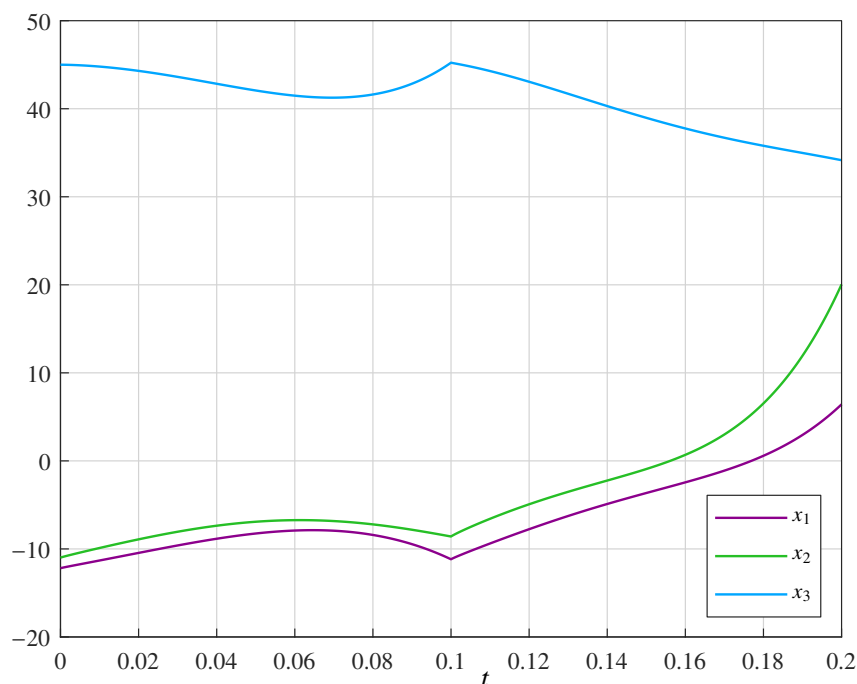
Vraťme se nyní k otázce periodických řešení. V podkapitole 4.2 bylo uvedeno, že pro ODR s Caputovou derivací mající konečnou dolní mez neexistují periodická řešení. Mohou však existovat tzv. S -asymptoticky T -periodická řešení, viz následující definice.

Definice 4.9 (S -asymptoticky T -periodická funkce). Vektorová funkce $\mathbf{f} : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}^d$ se nazývá S -asymptoticky T -periodická, pokud existuje $T > 0$ takové, že $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{f}(t+T) - \mathbf{f}(t)) = \mathbf{0}$. V takovém případě říkáme, že T je asymptotická perioda vektorové funkce \mathbf{f} . Obvykle se ještě požaduje spojitost \mathbf{f} .

Jednoduchý výsledek zaručující existenci S -asymptoticky T -periodického řešení je uveden v [64]; ten v případě soustavy

$${}^C D^\alpha x(t) = f(t) \quad (4.15)$$

říká, že (4.15) má S -asymptoticky T -periodické řešení x , je-li f S -asymptoticky T -periodická vektorová funkce. Na závěr ještě poznamenejme, že problematice těchto řešení se věnují například články [29, 54].



Obrázek 4.21: Jednotlivé složky „řešení“ neceločíselného Chenova systému (4.11) s parametry $a = 40$, $b = 3$, $c = 42$, $\alpha = 0.9$, $T = 0.2$ a počáteční podmínkou $x(0) = (-12.19, -10.99, 45)$ získané metodou Adomianova rozkladu (ozn. „ADM“, použito 6 členů) s jedním „navázáním“

5 Závěr

Cílem práce bylo prozkoumat lépe metodu Adomianova rozkladu v případě řešení neceločíselných chaotických systémů, motivací byl jistý rozpor dohledatelný v literatuře. Ten se v této diplomové práci podařilo vysvětlit. Autorce není známo, že by na uvedený problém bylo v literatuře poukázáno. Závěry práce tedy v tomto směru mohou být užitečné do budoucna. Adomianova metoda, tak jak je navržena v článku D. Cafagny a G. Grassiho, je nepoužitelná, neboť nelokální povaha neceločíselné operace derivování nedovoluje na sebe řešení navazovat, čehož si patrně autoři nebyli vědomi. Poznamenejme, že tento nekorektní postup je použit i v několika dalších článcích studujících dynamiku neceločíselných chaotických systémů. Jako jisté řešení se nabízí zkombinovat vhodnou numerickou metodu s metodou Adomianova rozkladu. Například, pokud iteraci x_{n+1} v neceločíselné lichoběžníkové metodě z kapitoly 3 budeme hledat přibližně metodou ADM, obejdeme tak potřebu korektoru pro tuto (obecně nelineární) rovnici. Tento postup se objevil například v článku [47].

Jak bylo v práci zmíněno, nevýhodou Adomianova rozkladu je fakt, že konverguje pouze lokálně, tedy v případě ODR na „malém“ okolí počátečního bodu. Tento nedostatek se zpravidla řeší zmiňovaným navazováním řešení, tedy rekurzivní aplikací Adomianova rozkladu. Řešíme tak vlastně posloupnost počátečních problémů na jednotlivých časových intervalech. Tato technika byla vylepšena v článku [32] pro případ neautonomních rovnic, modifikace spočívá ve vhodné manipulaci s pravou stranou g rovnice $Fx(t) = g(t)$ (funkce g se rozvíjí do Taylorovy řady).

Poznamenejme, že byla představena řada dalších modifikací klasické ADM, ať už ve snaze zlepšit přesnost či rozšířit použití původní metody. V první řadě to byl samotný G. Adomian spolu s R. Rachem, kteří v článku [6] představili modifikované Adomianovy polynomy, definované pomocí diferenční metody. Takové polynomy jsou vhodnější při programování a konvergují o něco rychleji než polynomy původní. Kromě klasických a modifikovaných Adomianových polynomů dále Adomian představil zrychlené Adomianovy polynomy (viz [6, 58]), které jsou sice z výpočetního hlediska méně vhodné, na druhou stranu poskytují rychlejší konvergenci. Wazwaz pak ve svém článku [65] uvedl další úpravu Adomianova rozkladu, která opět pracuje se silovým členem g (tato metoda byla dále vylepšena v [67]). Podrobnosti ke zmíněným modifikacím lze najít také v práci [62]. Z dalších modifikací lze zmínit například dvoukrokovou metodu Adomianova rozkladu prezentovanou v [51] nebo restartovanou Adomianovu metodu (viz článek [8]), která spočívá v tom, že po výpočtu m členů řady je suma těchto m členů použita jako první člen řešení ADM a metoda pak začíná nanovo. Jako zajímavá se také jeví technika následného zpracování Adomianova rozkladu (viz [40]), tzv. aftertreatment technique, poskytující přibližné řešení, které v praxi vykazuje vysoký řád konvergence a přesnost díky aplikaci Padého aproximace (ta aproximuje funkci podílem dvou polynomů, viz např. [10]). Také kombinace Laplaceovy transformace s Adomianovou dekompoziční metodou se ukázala být vhodnou pro urychlení konvergence, což je demonstrováno například v článku [42] na nelineárních počátečních problémech druhého řádu. Metoda spočívá nejprve v aplikování Laplaceovy transformace na původní rovnici, přičemž po aplikaci vzorců Laplaceovy transformace a použití počátečních podmínek se postupuje „klasicky“, tj. řešení se uvažuje ve formě nekonečné řady, jejíž členy se vypočítají pomocí Adomianových polynomů. Nakonec se už jen na členy řady použije inverzní Laplaceova transformace. Někdy se také používá kombinace s Padého aproximacemi, které nahrazují řešení obdržené právě zmíněnou Laplaceovou dekompoziční metodou.

Na výsledky práce by šlo navázat i v několika dalších směrech, například problematikou konvergence řady – otázka konvergence a její rychlosti (odhadu chyby) v neceločíselném případě zůstává stále otevřená. Další oblastí, kterou by stálo za to více prozkoumat, je Hopfova bifurkace. Je sice známo, že Hopfova bifurkace v neceločíselném případě není doprovázena zrozením či

zánikem limitního cyklu, ale určitou analogii na základě numerických experimentů vysledovat lze (v případě superkritické bifurkace se zjevně jedná o S -asymptoticky T -periodická řešení). Nabízí se tedy, podobně jako v případě stability bodů rovnováhy, prozkoumat tuto problematiku blíže, což patrně nebude jednoduchý úkol. Poznamenejme, že v případě ODR1 se při studiu periodických řešení obvykle začíná s Floquetovou teorií. Dále pak vlastnosti chaotických systémů v neceločíselném případě nejsou nijak zvlášť prozkoumány.

Zajímavá je také otázka samotné indikace chaosu dynamických systémů. V literatuře se často pracuje se spektrem Ljapunovových exponentů. Ljapunovovy exponenty vyjadřují exponenciální rychlost růstu či poklesu „malých“ poruch trajektorií ve stavovém prostoru podél trajektorie. Výskyt alespoň jednoho kladného exponentu znamená chaotické chování. V případě neceločíselných ODR vyvstává otázka, jak vůbec Ljapunovovy exponenty korektně zavést, pionýrskou prací v tomto ohledu je článek [15]. V článku [33] byl dále představen tzv. 0-1 test, jehož výhodou oproti metodě Ljapunovových exponentů je snazší implementace. Jedná se o spíše heuristickou metodu, nicméně praxe ukázala, že jako detekce chaotického chování systému funguje poměrně dobře.

Literatura

- [1] ABBAOUI, Karim a Yves CHERRUAULT. New ideas for proving convergence of decomposition methods. *Computers & Mathematics with Applications* [online]. 1995, **29**(7), 103-108 [cit. 2021-4-25]. ISSN 08981221. Dostupné z: doi:10.1016/0898-1221(95)00022-Q
- [2] ABDELRAZEC, Ahmed. *Adomian Decomposition Method: Convergence Analysis and Numerical Approximations* [online]. Hamilton, Canada, 2009 [cit. 2021-03-12]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/265377924_Adomian-Decomposition-Method-Convergence-Analysis-and-Numerical-Approximations. Master's Thesis. McMaster University.
- [3] ABDELRAZEC, Ahmed a Dmitry PELINOVSKY. Convergence of the Adomian decomposition method for initial-value problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* [online]. 2011, **27**(4), 749-766 [cit. 2021-03-16]. ISSN 0749159X. Dostupné z: doi:10.1002/num.20549
- [4] ADOMIAN, George. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations. *Mathematical and Computer Modelling* [online]. 1990, **13**(7), 17-43 [cit. 2020-11-01]. ISSN 08957177. Dostupné z: doi:10.1016/0895-7177(90)90125-7
- [5] ADOMIAN, George. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method* [online]. Springer Netherlands, 1994 [cit. 2020-11-29]. ISBN 978-94-015-8289-6. Dostupné z: doi:10.1007/978-94-015-8289-6
- [6] ADOMIAN, George a Randolph C. RACH. Modified Adomian Polynomials. *Mathematical and Computer Modelling* [online]. 1996, **24**(11), 39-46 [cit. 2021-03-24]. ISSN 08957177. Dostupné z: doi:10.1016/S0895-7177(96)00171-9
- [7] ALGABA, Antonio, Fernando FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ, Manuel MERINO a Alejandro J. RODRÍGUEZ-LUIS. Chen's attractor exists if Lorenz repulsor exists: The Chen system is a special case of the Lorenz system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* [online]. 2013, **23**(3), 033108 [cit. 2020-11-29]. ISSN 1054-1500. Dostupné z: doi:10.1063/1.4813227
- [8] BABOLIAN, Esmail a Shahnam JAVADI. Restarted Adomian method for algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2003, **146**(2-3), 533-541 [cit. 2021-03-24]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/S0096-3003(02)00603-3
- [9] BABOLIAN, Esmail a Shahnam JAVADI. New method for calculating Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2004, **153**(1), 253-259 [cit. 2021-03-31]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/S0096-3003(03)00629-5
- [10] BAKER, George A. *Essentials of Padé Approximants*. New York: Academic Press, 1975. ISBN 9780120748556.
- [11] BHALEKAR, Sachin a Madhuri PATIL. Singular points in the solution trajectories of fractional order dynamical systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* [online]. 2018, **28**(11) [cit. 2021-02-15]. ISSN 1054-1500. Dostupné z: doi:10.1063/1.5054630

- [12] BIAZAR, J., E. BABOLIAN, G. KEMBER, A. NOURI a R. ISLAM. An alternate algorithm for computing Adomian polynomials in special cases. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2003, **138**(2-3), 523-529 [cit. 2021-03-31]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/S0096-3003(02)00174-1
- [13] BIAZAR, J. a S. M. SHAFIOF. A simple algorithm for calculating Adomian polynomials. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences* [online]. 2007, **2**(20), 975-982 [cit. 2020-11-01]. ISSN 13147544. Dostupné z: doi:10.12988/ijcms.2007.07099
- [14] CAFAGNA, Donato a Giuseppe GRASSI. Bifurcation and chaos in the fractional-order Chen system via a time domain approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos* [online]. 2008, **18**(7), 1845-1863 [cit. 2011-11-01]. ISSN 0218-1274. Dostupné z: doi:10.1142/S0218127408021415
- [15] CONG, Nguyen D., Doan T. SON, Stefan SIEGMUND a Hoang T. TUAN. Structure of the Fractional Lyapunov Spectrum for Linear Fractional Differential Equations. *Advances in Dynamical Systems and Applications* [online]. 2014, **9**(2), 149-159 [cit. 2021-04-12]. ISSN 0974-021X. Dostupné z: <https://campus.mst.edu/adsa/contents/v9n2p2.pdf>
- [16] CONG, Nguyen D., Doan T. SON, Stefan SIEGMUND a Hoang T. TUAN. Linearized Asymptotic Stability for Fractional Differential Equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* [online]. 2016, (39), 1-13 [cit. 2021-02-23]. ISSN 14173875. Dostupné z: doi:10.14232/ejqtde.2016.1.39
- [17] CONG, Nguyen D., Doan T. SON, Stefan SIEGMUND a Hoang T. TUAN. An instability theorem for nonlinear fractional differential systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* [online]. 2017, **22**(8), 3079-3090 [cit. 2021-02-23]. ISSN 1553-524X. Dostupné z: doi:10.3934/dcdsb.2017164
- [18] CONG, Nguyen. D. a Hoang T. TUAN. Generation of nonlocal fractional dynamical systems by fractional differential equations. *Journal of Integral Equations and Applications* [online]. 2017, **29**(4), 585-608 [cit. 2021-02-26]. ISSN 0897-3962. Dostupné z: doi:10.1216/JIE-2017-29-4-585
- [19] ČELIKOVSKÝ, Sergej a Antonín VANĚČEK. Bilinear systems and chaos. *Kybernetika*. 1994, **30**(4), 403-424. Dostupné také z: <http://dml.cz/dmlcz/124162>
- [20] ČELIKOVSKÝ, Sergej a Guanrong CHEN. On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos* [online]. 2011, **12**(8), 1789-1812 [cit. 2020-11-29]. ISSN 0218-1274. Dostupné z: doi:10.1142/S0218127402005467
- [21] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. The Routh–Hurwitz conditions of fractional type in stability analysis of the Lorenz dynamical system. *Nonlinear Dynamics* [online]. 2017, **87**(2), 939-954 [cit. 2021-02-15]. ISSN 0924-090X. Dostupné z: doi:10.1007/s11071-016-3090-9
- [22] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. Stability and chaos in the fractional Chen system. *Chaos, Solitons & Fractals* [online]. 2019, **125**, 24-33 [cit. 2020-03-09]. ISSN 09600779. Dostupné z: doi:10.1016/j.chaos.2019.05.007
- [23] DAFTARDAR-GEJJI, Varsha a Hossein JAFARI. Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and*

- Applications* [online]. 2005, **301**(2), 508-518 [cit. 2021-03-16]. ISSN 0022247X. Dostupné z: doi:10.1016/j.jmaa.2004.07.039
- [24] DESHPANDE, Amey S., Varsha DAFTARDAR-GEJJI a Yogita V. SUKALE. On Hopf bifurcation in fractional dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals* [online]. 2017, **98**, 189-198 [cit. 2021-02-15]. ISSN 09600779. Dostupné z: doi:10.1016/j.chaos.2017.03.034
- [25] DEVANEY, Robert L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2nd ed. Boulder: Westview, c2003. Studies in nonlinearity. ISBN 978-0-8133-4085-2.
- [26] DIETHELM, Kai. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. 2004. Berlin: Springer-Verlag, c2010. ISBN 978-3-642-14573-5.
- [27] DIETHELM, Kai, Neville J. FORD a Alan D. FREED. Detailed Error Analysis for a Fractional Adams Method. *Numerical Algorithms* [online]. 2004, **36**(1), 31-52 [cit. 2021-03-05]. ISSN 1017-1398. Dostupné z: doi:10.1023/B:NUMA.0000027736.85078.be
- [28] EL-KALLA, I.L. Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations. *Applied Mathematics Letters* [online]. 2008, **21**(4), 372-376 [cit. 2021-04-06]. ISSN 08939659. Dostupné z: doi:10.1016/j.aml.2007.05.008
- [29] FEČKAN, Michal. Note on Periodic and Asymptotically Periodic Solutions of Fractional Differential Equations. DUTTA, Hemen a James F. PETERS. *Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications*. Cham: Springer International Publishing, (2020), s. 153-185. ISBN 978-3-319-99917-3.
- [30] GARRAPA, Roberto. Predictor-corrector PECE method for fractional differential equations. In: *MATLAB Central File Exchange* [online]. United States: The MathWorks, (2013) [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32918-predictor-corrector-pece-method-for-fractional-differential-equations>
- [31] GARRAPPA, Roberto. Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects. *Mathematics and Computers in Simulation* [online]. 2015, **110**, 96-112 [cit. 2021-03-05]. ISSN 03784754. Dostupné z: doi:10.1016/j.matcom.2013.09.012
- [32] GHOSH, Susanta, Anubhab ROY a Debasish ROY. An adaptation of adomian decomposition for numeric–analytic integration of strongly nonlinear and chaotic oscillators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* [online]. 2007, **196**(4-6), 1133-1153 [cit. 2021-03-23]. ISSN 00457825. Dostupné z: doi:10.1016/j.cma.2006.08.010
- [33] GOTTWALD, Georg A. a Ian MELBOURNE. A new test for chaos in deterministic systems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* [online]. 2004, **460**(2042), 603-611 [cit. 2021-03-25]. ISSN 1364-5021. Dostupné z: doi:10.1098/rspa.2003.1183
- [34] HOSSEINI, Mohammad Mehdi a Hamideh NASABZADEH. On the convergence of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2006, **182**(1), 536-543 [cit. 2021-4-25]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/j.amc.2006.04.015

- [35] CHANG, Yu a Guanrong CHEN. Complex dynamics in Chen's system. *Chaos, Solitons & Fractals* [online]. 2006, **27**(1), 75-86 [cit. 2021-02-08]. ISSN 09600779. Dostupné z: doi:10.1016/j.chaos.2004.12.011
- [36] CHEN, Guanrong. The Chen system revisited. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems: Series B: Applications & Algorithms* [online]. 2013, **20**(6b), 691-696 [cit. 2020-11-29]. ISSN 14928760. Dostupné z: https://www.ee.cityu.edu.hk/~gchen/pdf/Chen_Sys_Revited_2013.pdf
- [37] CHEN, Guanrong a Tetsushi UETA. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos* [online]. 2011, **9**(7), 1465-1466 [cit. 2020-11-29]. ISSN 0218-1274. Dostupné z: doi:10.1142/S0218127499001024
- [38] CHERRUAULT, Yves. Convergence of Adomian's method. *Mathematical and Computer Modelling* [online]. 1990, **14**, 83-86 [cit. 2021-03-09]. ISSN 08957177. Dostupné z: doi:10.1016/0895-7177(90)90152-D
- [39] CHERRUAULT, Yves a George ADOMIAN. Decomposition methods: A new proof of convergence. *Mathematical and Computer Modelling* [online]. 1993, **18**(12), 103-106 [cit. 2021-4-25]. ISSN 08957177. Dostupné z: doi:10.1016/0895-7177(93)90233-O
- [40] JIAO, Yongchang, Yoshitsugu YAMAMOTO, Chuangyin Yin DANG a Yue HAO. An aftertreatment technique for improving the accuracy of Adomian's decomposition method. *Computers & Mathematics with Applications* [online]. 2002, **43**(6-7), 783-798 [cit. 2021-03-26]. ISSN 08981221. Dostupné z: doi:10.1016/S0898-1221(01)00321-2
- [41] KASLIK, Eva a Seenith SIVASUNDARAM. Non-existence of periodic solutions in fractional-order dynamical systems and a remarkable difference between integer and fractional-order derivatives of periodic functions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* [online]. 2012, **13**(3), 1489-1497 [cit. 2021-02-19]. ISSN 14681218. Dostupné z: doi:10.1016/j.nonrwa.2011.11.013
- [42] KHURI, Suheil A. A Laplace decomposition algorithm applied to a class of nonlinear differential equations. *Journal of Applied Mathematics* [online]. 2001, **1**(4), 141-155 [cit. 2021-03-26]. ISSN 1110-757X. Dostupné z: doi:10.1155/S1110757X01000183
- [43] KUZNETSOV, Yuri. *Elements of Applied Bifurcation Theory* [online]. 2nd ed. New York: Springer, 1998 [cit. 2021-04-12]. ISBN 978-0-387-22710-8. Dostupné z: doi:10.1007/b98848
- [44] LEONOV, Gennady A. Criteria for the existence of homoclinic orbits of systems Lu and Chen. *Doklady Mathematics* [online]. 2013, **87**(2), 220-223 [cit. 2021-02-06]. ISSN 1064-5624. Dostupné z: doi:10.1134/S1064562413020300
- [45] LEONOV, Gennady A. a Nikolay V. KUZNETSOV. On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lu systems. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2015, **256**, 334-343 [cit. 2021-02-06]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/j.amc.2014.12.132
- [46] LI, Changpin a Chunxing TAO. On the fractional Adams method. *Computers & Mathematics with Applications* [online]. 2009, **58**(8), 1573-1588 [cit. 2021-03-08]. ISSN 08981221. Dostupné z: doi:10.1016/j.camwa.2009.07.050

- [47] LI, Changpin a Yihong WANG. Numerical algorithm based on Adomian decomposition for fractional differential equations. *Computers and Mathematics with Applications* [online]. 2009, **57**(10), 1672-1681 [cit. 2021-04-06]. ISSN 08981221. Dostupné z: doi:10.1016/j.camwa.2009.03.079
- [48] LI, Changpin a Guanrong CHEN. A Note on Hopf Bifurcation in Chen's System. *International Journal of Bifurcation and Chaos* [online]. 2011, **13**(6), 1609-1615 [cit. 2021-02-08]. ISSN 0218-1274. Dostupné z: doi:10.1142/S0218127403007394
- [49] LORENZ, Edward N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences*. 1963, **20**(2), 130-141. Dostupné z: doi:10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2
- [50] LUBICH, Christian. Discretized Fractional Calculus. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* [online]. 1986, **17**(3), 704-719 [cit. 2021-03-05]. ISSN 0036-1410. Dostupné z: doi:10.1137/0517050
- [51] LUO, Xing-Guo. A two-step Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2005, **170**(1), 570-583 [cit. 2021-03-24]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/j.amc.2004.12.010
- [52] LÜ, Jinhu, Tianshou ZHOU, Guanrong CHEN a Suochun ZHANG. Local Bifurcations of the Chen system. *International Journal of Bifurcation and Chaos* [online]. 2011, **12**(10), 2257-2270 [cit. 2021-02-03]. ISSN 0218-1274. Dostupné z: doi:10.1142/S0218127402005819
- [53] MILLER, Kenneth S. a Bertram ROSS. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: Wiley-Interscience, 1993. ISBN 978-0471588849.
- [54] MU, Jia, Yong ZHOU a Li PENG. Periodic Solutions and S-Asymptotically Periodic Solutions to Fractional Evolution Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society* [online]. 2017, **2017**, 1-12 [cit. 2021-03-01]. ISSN 1026-0226. Dostupné z: doi:10.1155/2017/1364532
- [55] PERKO, Lawrence. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd ed. New York: Springer, c2001. ISBN 0-387-95116-4.
- [56] PETRÁŠ, Ivo. *Fractional Order Systems*. Switzerland: MDPI, 2019. ISBN 978-3-03921-608-6.
- [57] PODLUBNÝ, Igor. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1999. ISBN 9780125588409.
- [58] RUDALL, Brian H. a Randolph C. RACH. A new definition of the Adomian polynomials. *Kybernetes* [online]. 2008, **37**(7), 910-955 [cit. 2021-03-24]. ISSN 0368-492X. Dostupné z: doi:10.1108/03684920810884342
- [59] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Cambridge: Westview Press, 2000. Studies in nonlinearity. ISBN 07-382-0453-6.

- [60] ŠUSTKOVÁ, Apolena. *Analýza dvoudimenzionálních modelů neceločíselného řádu*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116108>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. 51s. Vedoucí práce Luděk Nechvátal.
- [61] TAVAZOEI, Mohammad Saleh a Mohammad HAERI. A proof for non existence of periodic solutions in time invariant fractional order systems. *Automatica* [online]. 2009, **45**(8), 1886-1890 [cit. 2021-02-19]. ISSN 00051098. Dostupné z: doi:10.1016/j.automatica.2009.04.001
- [62] TOMAIZEH, Hamzah. *Modified Adomian Decomposition Method For Differential Equations* [online]. Hebron, Palestine, 2017 [cit. 2021-03-28]. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212540X18300270>. Master's Thesis. Hebron University.
- [63] UETA, Tetsushi a Guanrong CHEN. Bifurcation Analysis of Chen's Equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos* [online]. 2012, **10**(8), 1917-1931 [cit. 2021-02-08]. ISSN 0218-1274. Dostupné z: doi:10.1142/S0218127400001183
- [64] WANG, JinRong, Michal FEČKAN a Yong ZHOU. Nonexistence of periodic solutions and asymptotically periodic solutions for fractional differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* [online]. 2013, **18**(2), 246-256 [cit. 2021-02-26]. ISSN 10075704. Dostupné z: doi:10.1016/j.cnsns.2012.07.004
- [65] WAZWAZ, Abdul-Majid. A reliable modification of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 1999, **102**(1), 77-86 [cit. 2021-03-24]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/S0096-3003(98)10024-3
- [66] WAZWAZ, Abdul-Majid. A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2000, **111**(1), 33-51 [cit. 2021-03-31]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/S0096-3003(99)00063-6
- [67] WAZWAZ, Abdul-Majid a Salah M. EL-SAYED. A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2001, **122**(3), 393-405 [cit. 2021-03-24]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/S0096-3003(00)00060-6
- [68] ZHU, Yonggui, Qianshun CHANG a Shengchang WU. A new algorithm for calculating Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2005, **169**(1), 402-416 [cit. 2021-03-31]. ISSN 00963003. Dostupné z: doi:10.1016/j.amc.2004.09.082

Appendix

Skript na vykreslení fázového portrétu Chenova systému

```
%---Vykreslení fázového portrétu Chenova systému---
% Vstupy: a, b, c... koeficienty Chenova systému
%         alpha... neceločíselný řád derivace z intervalu (0,1)
%         t0... počáteční čas
%         T... koncový čas
%         x0...počáteční podmínka
%         h... délka časového kroku
% Výstupy: t... vektor uzlů časového intervalu
%         x... řešení v uzlech
% Vzorové volání
% [x,t]=chensysFDE(35,3,28,0.85,0,50,[7;7;23],1e-4);
function[x,t]=chensysFDE(a,b,c,alpha,t0,T,x0,h)

% rovnice Chenova systému
fdefun=@(t,x)[a*(x(2)-x(1)); (c-a)*x(1)-x(1)*x(3)+c*x(2);...
    x(1)*x(2)-b*x(3)];
% netriviální body rovnováhy S_{+-}
Sp=[sqrt(b*(2*c-a)),sqrt(b*(2*c-a)),2*c-a];
Sm=[-sqrt(b*(2*c-a)),-sqrt(b*(2*c-a)),2*c-a];
[t,x]=fde12(alpha,fdefun,t0,T,x0,h);
% vykreslení fázového portrétu
plot3(x(1,:),x(2,:),x(3,:))
hold on
realne=isreal(Sm);
% vykreslení S_{+-} (za předpokladu, že existují)
if realne==1
    plot3(Sp(1),Sp(2),Sp(3),'o','Color','r','MarkerSize',3,...
        'MarkerFaceColor','r');
    plot3(Sm(1),Sm(2),Sm(3),'o','Color','r','MarkerSize',3,...
        'MarkerFaceColor','r');
end
%vykreslení triviálního bodu rovnováhy
plot3(0,0,0,'o','Color','r','MarkerSize',3,...
    'MarkerFaceColor','r');
xlabel('x_1','fontSize',12,'FontAngle','italic')
ylabel('x_2','fontSize',12,'FontAngle','italic')
zlabel('x_3','fontSize',12,'FontAngle','italic')
view(-10,-25)
grid on
set(gca,'FontName','Times New Roman')
set(get(gca,'zlabel'),'rotation',0)
hold off
end
```

Skript na řešení Chenova systému metodou Adomianova rozkladu

```
%---Řešení Chenova systému metodou Adomianova rozkladu---
%         ("navazované")
% skript volá kód fde12
% Vstupy: a, b, c... koeficienty Chenova systému
%         alpha... neceločíselný řád derivace z intervalu (0,1)
```

```

%      t0... počáteční čas
%      T... časová délka jednoho cyklu
%      Tfin... koncový čas
%      x0...počáteční podmínka
%      h... délka časového kroku
%      M...počet členů Adomianova rozvoje
%      (fi_M=x0+x1+...+xM-1)
% Výstupy: timsol... vektor uzlů časového intervalu
%      sol... řešení v uzlech
% Vzorové volání
% [sol,timsol]=chensysADM(35,3,28,0.82,0,0.005,25,[7;10;20],1e-3,6);
function[sol,timsol]=chensysADM(a,b,c,alpha,t0,T,Tfin,x0,h,M)

N=floor((T-t0)/h);
t=t0:h:N*h;          % vektor uzlů časového intervalu 1 cyklu
D=0;E=0;              % koeficienty pro výpočet Adomianových koeficientů C
x(:,1)=x0;
sol=zeros(3,0);
timsol=[];
for k=1:(Tfin/T)
    for i=1:length(t)
        x(:,i)=x0;
    end
    C(:,1)=x0;
    for i=2:M
        for j=1:(i-1)
            D=D+C(1,j)*C(3,i-j);
            E=E+C(1,j)*C(2,i-j);
        end
        C(1,i)=(a*(C(2,i-1)-C(1,i-1)))*gamma((i-2)*alpha+1)/...
            gamma((i-1)*alpha+1);
        C(2,i)=(c-a)*C(1,i-1)+c*C(2,i-1)-D)*gamma((i-2)*alpha+1)/...
            gamma((i-1)*alpha+1);
        C(3,i)=(-b*C(3,i-1)+E)*gamma((i-2)*alpha+1)/gamma((i-1)*alpha+1);
        D=0;E=0;
        x=x+C(:,i).*t.^((i-1)*alpha);
    end
    x0=x(:,end);
    sol=[sol, x];
    timsol=[timsol, t+(k-1)*T];
end
end

```

Skript na vykreslení bifurkačního diagramu (vzhledem k parametru c)

```

%---Funkce na vykreslení bifurkačního diagramu Chenova systému
% vzhledem k parametru c---
% Vstupy: alpha... neceločíselná derivace z intervalu (0,1)
%      a, b... koeficienty Chenova systému
%      t0... počáteční čas
%      tfin... koncový čas
%      IC... počáteční podmínka
%      h... délka časového kroku
%      [cmin,cmax]... rozsah parametru c
%      stepc... krok parametru c
% Vzorové volání

```

```

% chen_bifur_c(0.8,40,3,0,185,[9;9;21],0.001,30,60,0.015);
function chen_bifur_c(alpha,a,b,t0,tfin,IC,h,cmin,cmax,stepc)

nc=ceil((cmax-cmin)/stepc);
cv=linspace(cmin,cmax,nc+1); % vektor parametru c
np=ceil((tfin-t0)/h); % vektor uzlů časového intervalu

hold on
for n=1:nc+1
    c=cv(n);
    fdefun = @(t,x)[a*(x(2)-x(1)); (c-a)*x(1)-x(1)*x(3)+c*x(2);...
        x(1)*x(2)-b*x(3)];
    [~,x]=fde12(alpha,fdefun,t0,tfin,IC,h);
    IC=x(:,np)+[0;0;0.1];
    lm=locmax(y(3,:),-1);
    nit=size(lm,2);
    if nit>25
        lm=lm(nit-24:nit);
    end
    if isempty(lm)==1
        lm=y(1,end);
    end
    plot(c,lm,'LineStyle','none','Marker','.', 'MarkerSize',2,'color',...
        [0 0.4470 0.7410])
    drawnow
end
grid on
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman')
xlabel('c','fontsize',12,'FontAngle', 'italic');
ylabel('z_{max}','fontsize',12,'FontAngle', 'italic')
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0)
hold off

%---Pomocná funkce pro nalezení lokálních extrémů---
%Vstup: v... vektor
%      threshold... hladina, pod kterou jsou lokální maxima ignorována
%Vstup: le... vektor indexů, ve kterých vektor v nabývá lokálního maxima
function[le]=locmax(v,threshold)

en=size(v,2);
dv=[1,diff(v),-1];
peak_indices=find(dv(1:en-1)>=0 & dv(2:en)<=0);
lepm=v(peak_indices);
le_ind=find(lepm(:)>threshold);
le=lepm(le_ind);

```