Typy příkladů na písemnou část zkoušky 2NU a vzorová řešení (doc. Martišek – 2017)

1. Vhodnou iterační metodou (tj. metodou se zaručenou konvergencí) řešte soustavu:

$$\begin{array}{llll} -2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 13.5 \\ x_1 & -3x_2 & +x_3 & = -2.5 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 12.5 \end{array}$$

Proveďte alespoň dvě iterace a odhadněte chybu.

<u>**Řešení**</u>

Méně přemýšliví a pilní využijí pozitivně definitní matici:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13.5 \\ -2.5 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13.5 \\ -2.5 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -3 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4.5 \\ 33.5 \\ 49.5 \end{pmatrix}$$

Matice soustavy je pozitivně definitní $\Longrightarrow$ Gauss-Seidelova metoda bude konvergovat. V tomto případě je matice i ostře diagonálně dominantní $\Longrightarrow$ konvergovat bude i Jacobiho metoda.

$$\begin{array}{lllll} x_1 = & & \frac{1}{3}x_2 & -\frac{1}{9}x_3 & -\frac{1}{2} \\ x_2 = & \frac{3}{11}x_1 & & -\frac{1}{11}x_3 & \frac{33.5}{11} \\ x_3 = & -\frac{1}{9}x_1 & -\frac{1}{9}x_2 & & \frac{49.5}{9} \end{array}$$

Jacobiho m.: Gauss-Seidel. m.:

$\mathbf{x^{(0)}} = (-0.5; 3; 5.5)$ $\mathbf{x^{(0)}} = (0; 0; 0)$

$\mathbf{x^{(1)}} = (-0.11; 2.41; 5.22)$ $\mathbf{x^{(1)}} = (-0.5; 2.91; 5.23)$

$\mathbf{x^{(2)}} = (-0.28; 2.54; 5.24)$ $\mathbf{x^{(2)}} = (-0.11; 2.45; 5.24)$

Chyba: $E = \max\left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = 0.16$: $E = \max\left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = 0.46$

Pro přemýšlivější a línější

$$\begin{array}{rrrcll rrrcl}
-2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 13.5 & I & & 4x_1 & & -2x_3 & = -1 & III - I \\
x_1 & -3x_2 & +x_3 & = -2.5 & II & \Rightarrow & x_1 & -3x_2 & +x_3 & = -2.5 & II \\
2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 12.5 & III & & -2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 13.5 & I
\end{array}$$

Matice je ostře diagonálně dominantní $\Longrightarrow$ Jacobiho i Gauss-Seidlova metoda budou konvergovat.

$$\begin{array}{llllll}
x_1 = & & & \frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{4} \\
x_2 = & \frac{1}{3}x_1 & & +\frac{1}{3}x_3 & +\frac{2.5}{3} \\
x_3 = & \frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{4}x_2 & & \frac{13.5}{4}
\end{array}$$

Jacobiho m.: Gauss-Seidel. m.:

$\mathbf{x^{(0)}} = (-0.25; 0.8; 3.4)$ $\mathbf{x^{(0)}} = (0; 0; 0)$

$\mathbf{x^{(1)}} = (1.45; 1.88; 3.05)$ $\mathbf{x^{(1)}} = (-0.25; 0.75; 3.06)$

$\mathbf{x^{(2)}} = (1.27; 2.33; 3.63)$ $\mathbf{x^{(2)}} = (1.28; 2.28; 3.45)$

Chyba: $E = \max\left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = 0.58$: $E = \max\left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = 1.53$

2 Pomocí vhodného interpolačního polynomu se třemi uzly určete přibližnou hodnotu $\sqrt{0.4}$ a odhadněte chybu interpolace (Pozor! Přesnou hodnotu nemáte k dispozici!)

<u>**Řešení:**</u>

Můžeme interpolovat například hodnoty funkce $\sqrt{x}$

$\sqrt{x}$: 0.25 0.36 0.49 Pozor! Tabulka 0 1 4

0.5 0.6 0.7 0 1 2 není vhodná (proč?)

Např. Lagrangeova metoda:

$$L_2(x) = 0.5 \cdot \frac{(x-0.36)(x-0.49)}{(0.25-0.36)(0.25-0.49)} + 0.6 \cdot \frac{(x-0.25)(x-0.49)}{(0.36-0.25)(0.36-0.49)} + 0.6 \cdot \frac{(x-0.25)(x-0.36)}{(0.49-0.25)(0.49-0.36)}$$

$$\sqrt{0.4} \approx L_2(0.4) = 0.5 \cdot \frac{(0.4-0.36)(0.4-0.49)}{(0.25-0.36)(0.25-0.49)} + 0.6 \cdot \frac{(0.4-0.25)(0.4-0.49)}{(0.36-0.25)(0.36-0.49)} \approx 0.6136$$

$$E \le \max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{f'''(x)}{3!}(x-0.25)(x-0.36)(x-0.49) \right|$$

$$\le \max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{f'''(x)}{3!} \right| \max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} |(x-0.25)(x-0.36)(x-0.49)|$$

$$\max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{f'''(x)}{3!} \right| = \max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{(\sqrt{x})'''}{3!} \right| = \max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)''}{3!} \right| =$$

$$\max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)'}{3!} \right| = \max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}}{3!} \right| = \max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{1}{16x^{\frac{5}{2}}} \right|$$

Funkce je klesající $\Rightarrow$

$$\max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} \left| \frac{1}{16x^{\frac{5}{2}}} \right| = \frac{1}{16 \cdot 0.25^{2.5}} = 2$$

$$\max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} |(x-0.25)(x-0.36)(x-0.49)| = \max_{x\in\langle 0.25;0.49\rangle} g(x)$$

$$g\left(\frac{0.25+0.36}{2}\right) = g(0.305) =$$

$$= |(0.305 - 0.25)(0.305 - 0.36)(0.305 - 049)| \approx 0.15$$

$$g\left(\frac{0.36 + 0.49}{2}\right) = g(0.425) =$$

$$= |(0.425 - 0.25)(0.425 - 0.36)(0.425 - 049)| \approx 0.55$$

$$\max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} g(x) \approx 0.55; \; E \leq 2 \cdot 0.55 = 1.1$$

Další možností je interpolace hodnot funkce 0.4^x:

-1	0	1
2.5	1	0.4

Např. Newtonova metoda:

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2.5 & & \\ 0 & 1 & -1.5 & \\ 1 & 0.4 & -0.6 & 0.45 \end{array}$$

$$N_2(x) = 2.5 - 1.5 \cdot (x + 1) + 0.45 \cdot x \cdot (x + 1)$$

$$\sqrt{0.4} \approx N_2(0.4) = 2.5 - 1.5 \cdot (0.4 + 1) + 0.45 \cdot 0.4 \cdot (0.4 + 1) = 0.652$$

$$E \leq \max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} \left| \frac{f'''(x)}{3!} (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) \right|$$

$$\leq \max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} \left| \frac{f'''(x)}{3!} \right| \cdot \max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} |(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1)|$$

$$\max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} \left| \frac{f'''(x)}{3!} \right| \cdot \max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} |(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1)|$$

$$\max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} \left| \frac{f'''(x)}{3!} \right| = \max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} \left| \frac{(0.4^x)'''}{3!} \right| = \max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} \left| \frac{0.4^x \ln^3 0.4}{3!} \right|$$

Funkce je klesající $\Rightarrow$

$$\max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} \left| \frac{0.4^x \ln^3 0.4}{3!} \right| = \frac{0.4^{0,25} \ln^3 0.4}{3!} \approx 0.1$$

$$\max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} |(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1)| = \max_{x \in \langle 0.25; 0.49 \rangle} g(x)$$

$$g(-0.5) = g(0.5) = |(-0.5 - 1)(-0.5)(-0.5 + 1)| = 0.375$$

$$E \leq 0.1 \cdot 0.375 = 0.0375$$

2 (Alternativa): Kotel s horkou vodou chladne při stálé venkovní teplotě. Byly změřeny následující hodnoty:

τ (min)	**0**	**15**	**30**	**45**	**60**	**75**
t (^{o}C)	**96**	**73**	**58**	**45**	**37**	**30**

Určete, při jaké teplotě kotel chladne a čas, kdy se ochladí na 18^{o}C. Závislost teploty na čase předpokládejte ve tvaru $\boldsymbol{t(\tau) = t_0 + k \cdot e^{-0.02\tau}}$

<u>Řešení:</u>

Použijeme metodu nejmenších čtverců. Funkci předpokládáme ve tvaru

$$t(\tau) = t_0\varphi_0(\tau) + k \cdot \varphi_1(\tau)$$

kde $\varphi_0(\tau) = 1; \varphi_1(\tau) = e^{-0.02\tau}$.

$(\boldsymbol{\varphi_0}; \boldsymbol{\varphi_0}) = (1; 1; 1; 1; 1; 1) \cdot (1; 1; 1; 1; 1; 1) = 6$

$(\boldsymbol{\varphi_0}; \boldsymbol{\varphi_1}) = (\boldsymbol{\varphi_1}; \boldsymbol{\varphi_0}) \approx$

$\approx (1.000; 0.741; 0.549; 0.407; 0.301; 0.223) \cdot (1; 1; 1; 1; 1; 1) \approx 3.221$

$(\boldsymbol{\varphi_1}; \boldsymbol{\varphi_1}) \approx (1.000; 0.741; 0.549; 0.407; 0.301; 0.223) \cdot$

$\cdot (1.000; 0.741; 0.549; 0.407; 0.301; 0.223) \approx 0.223$

$(\boldsymbol{\varphi_0}; \boldsymbol{t}) \approx (1; 1; 1; 1; 1; 1) \cdot (96; 73; 58; 45; 37; 30) = 339$

$(\boldsymbol{\varphi_1}; \boldsymbol{t}) \approx (1.000; 0.741; 0.549; 0.407; 0.301; 0.223) \cdot (96; 73; 58; 45; 37; 30)$

≈ 218

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi_0}; \boldsymbol{\varphi_0}) & (\boldsymbol{\varphi_0}; \boldsymbol{\varphi_1}) \\ (\boldsymbol{\varphi_1}; \boldsymbol{\varphi_0}) & (\boldsymbol{\varphi_1}; \boldsymbol{\varphi_1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi_0}; \boldsymbol{t}) \\ (\boldsymbol{\varphi_1}; \boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3.221 \\ 3.221 & 0.223 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_0 \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 339 \\ 218 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_0 \approx 11 \\ k \approx 84.5 \end{matrix}$$

Kotel chladne asi při 11^{o}C.

$$t(\tau) = t_0\varphi_0(\tau) + k \cdot \varphi_1(\tau) \approx 11 + 84.5 \cdot e^{-0.02\tau}$$

$$18 = 11 + 84.5 \cdot e^{-0.02\tau}$$

$$\frac{7}{84.5} = e^{-0.02\tau}$$

$$e^{0.02\tau} = \frac{84.5}{7} \approx 12$$

$$0.02\tau \approx \ln 12$$

$$\tau \approx 50 \cdot \ln 12 \approx 124$$

Na 18^{o}C se ochladí asi za 124 minut.

3 Určete hodnotu integrálu

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathbf{d}x$$

s chybou menší než 5.10^{-3}.

<u>Řešení:</u>

Chyba integrace složené obdélníkové resp. lichoběžníkové metody:

$$E \le \frac{1}{C}\max_{x\in\langle 0;1\rangle}\left|e^{-x^2}\right|'' \cdot (1-0)\cdot h^2 \le 5\cdot 10^{-3}$$

$$E \le \frac{1}{C}\max_{x\in\langle 0;1\rangle}\left|-2xe^{-x^2}\right|' \cdot h^2 \le 5\cdot 10^{-3}$$

$$E \le \frac{1}{C}\max_{x\in\langle 0;1\rangle}\left|-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}\right|' \cdot h^2 \le 5\cdot 10^{-3}$$

$$E \le \frac{1}{C}\max_{x\in\langle 0;1\rangle}\left|(4x^2-2)e^{-x^2}\right| \cdot h^2 = \frac{1}{C}\max_{x\in\langle 0;1\rangle} g(x)\cdot h^2 \le 5\cdot 10^{-3}$$

Maximum funkce $g(x)$ odhadneme pomocí tří funkčních hodnot:

$$g(0) = 2;\quad g(0.5) = e^{-0.25} \approx 0.77;\; g(1) = 2e^{-1} \approx 0.74;$$

Tedy

$$\frac{1}{C}\cdot g(0)\cdot h^2 = \frac{1}{C}\cdot 2\cdot h^2 \le 5\cdot 10^{-3}$$

Pro složenou obdélníkovou metodu je $C = 24$, tedy

$$\frac{1}{24}\cdot 2\cdot h^2 \le 5\cdot 10^{-3} \Rightarrow h < 0.245$$

Volíme tedy $h = 0.2$ (n=5):

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \approx 0.2\cdot\big(f(0.1)+f(0.3)+f(0.5)+f(0.7)+f(0.9)\big) \approx$$

$$\approx 0.2\cdot(0.990+0.913+0.779+0.613+0.445) \approx 0.748$$

Pro složenou lichoběžníkovou metodu je $C = 12$, tedy

$$\frac{1}{12}\cdot 2\cdot h^2 \leq 5\cdot 10^{-3} \Rightarrow h < 0.17$$

Volíme tedy $h = 0.1\overline{6}$: (n=6):

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \approx$$

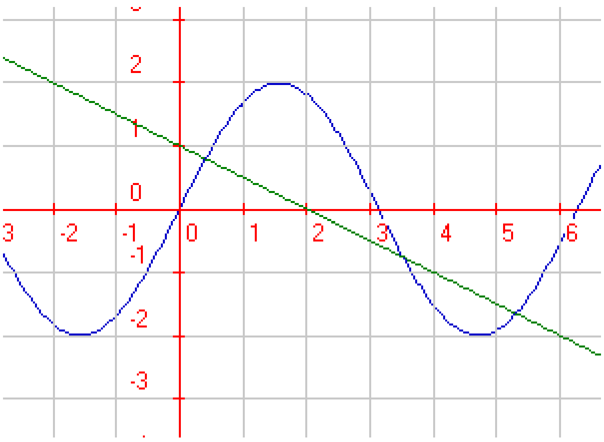
$$\frac{0.1\overline{6}}{2}\cdot\left(f(0) + 2f(0.1\overline{6}) + 2f(0.\overline{3}) + 2f(0.5) + 2f(0.\overline{6}) + 2f(0.8\overline{3}) + f(1)\right)$$
$$\approx 0.08\overline{3}\cdot(1 + 2\cdot 0.973 + 2\cdot 0.895 + 2\cdot 0.779 + 2\cdot 0.641 + 2\cdot 0.499$$
$$+0.368) \approx 0.745$$

3. Separujte kořeny rovnice

$$\boldsymbol{\frac{x}{2} - 1 + 2\sin x = 0}$$

Jeden z nich (kterýkoliv) určete na dvě desetinná místa

<u>**Řešení**</u>**:**



Separace

$x_1 \in \langle 0; 1\rangle$

$x_2 \in \langle 3; 4\rangle$

$x_1 \in \langle 5; 6\rangle$

Zpřesňování:

$x_1 \in \langle 0; 1\rangle$ – např. regula falsi

i	x_{i-1}	x_{i+1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_{i+1})$	$f(x_i)$	$k = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$
1	0	0.458	1	-	+	+	2.183
2	0	0.411	0.458	-	+	+	2.430
3	0	0.409	0.411	-	+	+	2.444
4	0	0.409	0.409				

$x_2 \in \langle 3; 4 \rangle$ – např. bisekce

i	x_{i-1}	x_{i+1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_{i+1})$	$f(x_i)$
1	3	3.5	4	+	+	-
2	3.5	3.75	4	+	-	-
3	3.5	3.625	3.75	+	-	-
4	3.5	3.562	3.625	+	-	-
5	3.5	3.531	3.562	+	+	-
6	3.531	3.547	3.562	+	-	-
7	3.531	3.539	3.547	+	-	-
8	3.531	3.535	3.539			

$x_3 \in \langle 5; 6 \rangle$ – např. Newton

$$f(x) = \frac{x}{2} - 1 + 2\sin x\,; \quad f'(x) = \frac{1}{2} + 2\cos x\,; \quad f''(x) = -2\sin x$$

Start. bod $x_0 = 5.5$; $f(5.5) \approx 0.34 > 0; f''(5.5) \approx 0.71$

Fourierova podm. je splněna

i	x_i	$f(x_i)$	$k = f'(x_i)$
0	5.5	0.339	1.917
1	5.323	0.023	1.647
2	5.309	0.000	

Písemná práce se skládá ze tří příkladů (max. 3×20 bodů). Čas na vypracování cca 60 minut. Povolena kalkulačka (nikoliv notebook či tablet), list papíru formátu A5 (čímkoliv) ručně popsaný po obou stranách

Okruhy teoretických otázek

1. Chyby a jejich šíření (chyby modelu a metody, chyby vstupních dat, zaokrouhlovací chyby, absolutní a relativní chyba, chyba součtu, rozdílu, součinu, podílu)

2. Numerické řešení soustav lineárních rovnic (GEM – výběr hlavního prvku, podmíněnost, číslo podmíněnosti, norma matice, pozitivně definitní matice, Jacobiho a Gauss-Seidelova metoda)

3. Aproximace funkcí (interpolace a aproximace, Lagrangeova a Newtonova interpolace a jejich chyba, Hermitův interpolační polynom, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců)

4. Numerická derivace a integrace (důvody numerické derivace a integrace, dopředná, zpětná a centrální diference, Richardsonova extrapolace, obdélníková, lichoběžníková a Simpsonova formule – základní a složené formy a jejich chyby, metoda polovičního kroku, Rombergrova integrace)

5. Numerické řešení nelineárních rovnic a jejich soustav (separace kořenů, půlení intervalu, Newtonova metoda, metoda sečen, regula falsi, obecná iterační metoda, stop-kriteria, řešení soustav nelineárních rovnic – Newtonova metoda, obecná iterační metoda)

6. Úvod do optimalizace (formulace optimalizační úlohy, účelová funkce. Jednorozměrná minimalizace – „půlení“ intervalu, trisekce, zlatý řez, metoda kvadratické minimalizace. Vícerozměrná minimalizace – princip simplexové metody, metody souřadnicových směrů a gradientní metody).

Odpověď na jednu ústně položenou teoretickou otázku hodnocena max 10. body.