Příklady z Matematiky 2

1. Určete definiční obor funkce $f(x,y)$ a načrtněte ho v rovině

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4x} + \ln(2-x-y)$

b) $f(x,y) = \sqrt{(x+y-1)(1-x^2-y^2)}$

c) $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

d) $f(x,y) = \sqrt{\ln(5-x^2-4y^2)}$

Řešení: a) $Df = \{[x,y]\,|(x-2)^2+y^2 \geq 4 \wedge 2 > x+y\}$, **b)** $Df = \{[x,y]\,|(x^2+y^2 \leq 1 \wedge 1 \leq x+y) \vee (x^2+y^2 \geq 1 \wedge 1 \geq x+y)\}$, **c)** $Df = \{[x,y]\,|x \geq \frac{y^2}{4} \wedge 1 > x^2+y^2\} - [0,0]$, **d)** $Df = \{[x,y]|1 \geq \frac{x^2}{4} + y^2\}$

2. Limita a spojitost funkce

a) Vypočítejte limitu $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} \frac{z\cos(x+y)}{xz^2+2y}$

b) Vypočítejte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-3)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$

c) Ukažte, že následující limita neexistuje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

d) Určete množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$ na níž je funkce f spojitá, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}, & [x,y] \neq [0,0] \\ 4, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

Řešení: a) 1, **b)** $\frac{9}{2}$, **c)** subs. $y = kx$, **d)** $M = \{[x,y]|x^2+y^2 \leq 4\} - \{[0,0]\}$.

3. Parciální a směrové derivace, gradient

a) Určete všechny parciální derivace prvního řádu funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x}\cos(2x-y^2+3z)$

b) Dokažte, že pro funkci $f(x,y) = \ln\frac{x}{1+y}$ platí $f_{xy} = f_{yx}$.

c) Spočítejte směrovou derivaci funkce f ve směru vektoru $u = (1,1)$ v bodě $A = [0,\pi]$, $f(x,y) = \cos(x+y)\sqrt{x^2+y^2}$

d) Spočítejte velikost gradientu funkce $f(x,y) = e^{1-y}\sqrt{x+y}$ v bodě $A = [0,1]$

e) Určete jaký úhel spolu svírají gradienty funkcí f a g v bodě $A[0,1]$

$$f(x,y) = \sqrt{y-x}\,\sin x, \qquad g(x,y) = (y-2x)\,e^{y-1}.$$

Řešení: a) $f_x = \frac{\cos(2x-y^2+3z)}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\sin(2x-y^2+3z)$, $f_y = 2y\sqrt{x}\,\sin(2x-y^2+3z)$, $f_z = -3\sqrt{x}\,\sin(2x-y^2+3z)$, **b)** $f_{xy} = 0 = f_{yx}$, **c)** $f_{\overrightarrow{u}}(A) = -1$, **d)** $|f_{\overrightarrow{u}}(A)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, **e)** $\alpha = 45°$.

4. Diferenciál a tečná rovina

a) Určete první diferenciál funkce $f(x,y,z) = x\sin(x^2+2y-3z)$ v bodě $A[1,1,1]$.

b) Určete druhý diferenciál funkce $f(x,y) = \frac{y}{x}$ v bodě $A[1,1]$ pro $\overrightarrow{h} = (0.1,-0.3)$.

c) Pomocí 1. diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazu $\ln\frac{0.99}{1.02}$

d) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = x^2y - y^2\sqrt{x}$ v bodě $A[1,2,?]$.

Řešení: a) $2\,dx + 2\,dy - 3\,dz$, **b)** 0.08, **c)** -0.03, **d)** $2x-3y-z+2=0$

5. Taylorův polynom

a) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x,y,z) = \cos(x-y) + xyz^2$ v bodě $A[0,0,1]$.

b) Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x,y) = \frac{x}{y}$ v bodě $A[1,1]$

c) Pomocí příslušného Taylorova polynom 2. stupně určete přibližnou hodnotu výrazu $\arctan \frac{0.2}{0.99}$

Řešení: a) $T_2(x,y,z) = 1 - \frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{y^2}{2}$, **b)** $T_3(x,y) = 1 + x - y - (x-1)(y-1) + (y-1)^2 + (x-1)(y-1)^2 - (y-1)^3$, **c)** 0.202.

6. Extrémy funkce více proměnných

a) Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$

b) Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

c) Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y) = xyz$ splňující podmínku $x + y + z = 3$

d) Nalezněte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ na množině $\Omega = \triangle ABC$, kde $A = [-1,0]$, $B = [1,2]$, $C = [3,0]$

e) Nalezněte globální extrémy funkce $f(x,y) = 3xy$ na množině $\Omega = \{[x,y] |\, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Řešení: a) lok.minimum $= -1$ v bodě $[1,0]$, **b)**, lok.minimum $= -1$ v bodě $[1,1]$, sedlo v bodě $[0,0]$, **c)** vázané maximum $= 1$ v bodě $[1,1,1]$, **d)** glob. minimum $= -1$ v bodě $[1,1]$, glob. maximum $= 6$ v bodě $[3,0]$, **e)** glob. minimum $= -3$ v bodě $[-1,1]$, glob. minimum $= 3$ v bodě $[1,1]$.

7. Vícerozměrné integrály

a) $\iint\limits_{\Omega} (x-y)\, dx\, dy$ kde $\Omega = \{[x,y] \,|\, x \leq y,\ 2 \geq y,\ x \geq 0\}$

b) $\iint\limits_{\Omega} x\, dx\, dy$ kde hranice Ω je tvořena křivkami $x + y = 4$, $y = 6 - x^2$

c) $\iint\limits_{\Omega} y\, dx\, dy$ kde $\Omega = \{[x,y] \,|\, y \geq |x|,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ (trans. do polárních souř.)

d) $\iint\limits_{\Omega} (y-1)\, dx\, dy$ kde $\Omega = \{[x,y] \,|\, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \leq -x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ (trans. do polárních souř.)

e) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$, kde $\Omega = \{[x,y,z] \,|\, z \leq 1,\ z \geq x^2 + y^2\}$ (trans. do cylindr. souř.)

f) $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$, kde $\Omega = \{[x,y,z] \,|\, 0 \leq z \leq 3,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2x\}$ (trans. do cylindr. souř.)

g) $\iiint\limits_{\Omega} z\, dx\, dy\, dz$, kde $\Omega = \{[x,y,z] |\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0,\ x \geq 0\}$ (trans. do sfér. souř.)

h) Určete objem tělesa Ω (tj. $\iiint\limits_{\Omega} 1\, dx\, dy\, dz$,) kde $\Omega = \{[x,y,z] \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ (trans. do sfér. souř.)

Řešení: a) $-\frac{4}{3}$, **b)** $\frac{9}{4}$, **c)** $\frac{8}{3}\sqrt{2}$, **d)** $-\frac{7}{24}\pi - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$, **e)** $\frac{4}{15}\pi$, **f)** 8, **g)** $\frac{81}{8}\pi$, **h)** $\frac{7}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$

Příklady z Matematiky II (2.část)

1. Vypočítejte křivkové integrály I. druhu

a)

$$\int_\Gamma (x+y)\, ds,$$

kde Γ je lomená čára $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BC}$ se souřadnicemi $A=[1,1]$, $B=[2,2]$, $C=[3,2]$ $[3\sqrt{2}+\frac{9}{2}]$.

b)

$$\int_\Gamma (x+y)\, ds,$$

kde Γ je část kružnice $\Gamma = \{[x,y] \mid x^2+y^2=9,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ [18].

c)

$$\int_\Gamma (1+2y+2xy)\, ds,$$

kde Γ je tvořena půlkružnicí $\Gamma = \{[x,y] \mid x^2+y^2=2x,\ y \geq 0\}$ a úsečkou $\overrightarrow{AB}$ se souřadnicemi $A = [2,0]$, $B=[3,2]$ $[\frac{25}{3}\sqrt{5}+8+\pi]$.

2. Vypočítejte křivkové integrály II. druhu

a)

$$\int_\Gamma (x+xy^3)\, dx \ +\ (x^2+y^2)\, dy,$$

kde Γ je lomená čára orientovaná takto $A \to B \to C \to A$ se souřadnicemi
$A=[0,0]$, $B=[-2,1]$, $C=[1,1]$
Spočítejte dle definice a užitím Greenovy věty oba výsledky porovnejte. $[-\frac{1}{10}]$

b)

$$\int_\Gamma (3-xy-y^3,\ x^2-2xy)\, \overrightarrow{ds},$$

kde Γ je lomená čára orientovaná takto $A \to B \to C \to D \to A$ se souřadnicemi
$A=[1,1]$, $B=[2,1]$, $C=[2,3]$, $D=[1,3]$. Spočítejte libovolným způsobem. [27]

3. Ověřte, zda je vektorové pole $(\overrightarrow{F},\ \mathbb{R}^2)$ potenciální. Pokud ano, určete potenciál $\psi(x,y)$.

a) $\overrightarrow{F} = (x^2-y^2, 5-2xy)$ $[\psi(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 5y)]$

b) $\overrightarrow{F} = (x^2-y, 5-2x)$ [**není potenciální**]

4. Vypočítejte plošný integrál I. druhu

a)

$$\iint_S xyz\, dS,$$

kde $S = \{[x,y,z] \mid z = \sqrt{x^2+y^2},\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 2\}$. $[\frac{16}{5}\sqrt{2}]$

b)

$$\iint_S (x-z)\, dS,$$

kde $S = \{[x,y,z] \mid x^2+y^2=4,\ x \leq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}$. $[8-\pi]$

5. Vypočítejte plošný integrál II. druhu

a)

$$\iint_{\overrightarrow{S}} (0,0,\frac{x}{z})\, d\overrightarrow{S},$$

kde $\overrightarrow{S} = \{[x,y,z] \mid z = \sqrt{x^2+y^2},\ x \geq 0,\ z \leq 2\}$ je orientována "dovnitř". [4]

b)

$$\iint_{\overrightarrow{S}} (0,y,0)\, d\overrightarrow{S},$$

kde $\overrightarrow{S} = \{[x,y,z] \mid x^2+y^2=1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ je orientována "ven". $[\pi]$