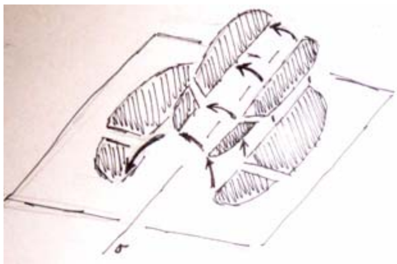
Shodná zobrazení v rovině

Vypočtěme determinanty matic:

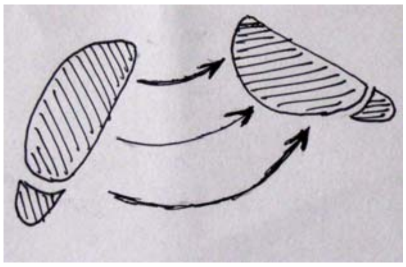
nepřímá shodnost



$$\det(\mathbf{O}_x)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-1 \qquad \det(\mathbf{O}_y)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-1$$

$$\det(\mathbf{R}_\alpha)=\begin{vmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

$$\det(\mathbf{T}_\mathbf{v})=\begin{vmatrix}1&0&v_1\\0&1&v_2\\0&0&1\end{vmatrix}=1$$



<u>Determinant matice shodného zobrazení je roven ± 1</u>

přímá shodnost

Shodná zobrazení

Příklad: Vypočtěme matici $\mathbf{Z}$ zobrazení $\mathcal{F}$, které vznikne složením

a) otočení kolem počátku o úhly α; $-\alpha$, tj $\quad \mathcal{F}=\mathcal{R}_{-\alpha}\circ\mathcal{R}_\alpha$

b) posunutí o vektory $\mathbf{v}$; $-\mathbf{v}$, tj. $\quad \mathcal{F}=\mathcal{T}_{-\mathbf{v}}\circ\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$

c) osové souměrnosti $\mathcal{O}_y$ s osovou souměrností $\mathcal{O}_y$. $\quad \mathcal{F}=\mathcal{O}_y\circ\mathcal{O}_y$

a) $$\mathbf{Z}_a=\mathbf{R}_{-\alpha}\cdot\mathbf{R}_\alpha=\begin{pmatrix}\cos(-\alpha)&-\sin(-\alpha)&0\\\sin(-\alpha)&\cos(-\alpha)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha&0\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha&0&0\\0&\sin^2\alpha+\cos^2\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{E}$$

Shodná zobrazení

Příklad: Vypočtěme matici $\mathbf{Z}$ zobrazení $\mathcal{F}$, které vznikne složením

a) otočení kolem počátku o úhly α; $-\alpha$, tj $\qquad \mathcal{F} = \mathcal{R}_{-\alpha} \circ \mathcal{R}_{\alpha}$

b) posunutí o vektory $\mathbf{v}$; $-\mathbf{v}$, tj. $\qquad \mathcal{F} = \mathcal{T}_{-\mathbf{v}} \circ \mathcal{T}_{\mathbf{v}}$

c) osové souměrnosti $\mathcal{O}_y$ s osovou souměrností $\mathcal{O}_y$. $\qquad \mathcal{F} = \mathcal{O}_y \circ \mathcal{O}_y$

b) $$\mathbf{Z}_b = \mathbf{T}_{-\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 - v_1 \\ 0 & 1 & v_2 - v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

c) $$\mathbf{Z}_c = \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{O}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Pohyb

Pohyb

Pohybem $\mathcal{P}$ bodu $\mathbf{X} = (x_1; x_2; 1)$ je množina zobrazení

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{33}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \mathbf{X'}^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}^T$$

kde prvky matice $\mathbf{M}$ jsou spojité funkce a pro každé $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$ je $\det \mathbf{M} = 1$. Tuto matici nazýváme maticí pohybu.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

Neproměnná rovinná soustava – libovolný geometrický rovinný útvar.

Pohyb – množina přímých shodností, obecně

$$\Sigma'^T = \mathbf{M} \cdot \Sigma^T$$

Pohyb

Příklad:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

Neproměnná rovinná soustava – libovolný geometrický rovinný útvar.

Pohyb – množina přímých shodností, obecně

$$\Sigma'^T = \mathbf{M} \cdot \Sigma^T$$

Dráha bodu – bod $\mathbf{X} \in \Sigma$ je tedy zobrazován na body křivky – dráhy bodu.

Příklad: Vypočtěme dráhu bodu $\mathbf{X} = (r;0;1)$ v pohybu :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 1 \end{pmatrix}; \; t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

$$x'_1 = r\cos t \qquad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$
$$x'_2 = r\sin t$$

Pohyb

Bodová funkce:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 1 \end{pmatrix}; \; t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}'^T = \mathbf{X}^T(t) \qquad \mathbf{X}' = \mathbf{X}(t) \qquad \cancel{(x'_1;x'_2;1)} = (r\cos t; r\sin t; 1)$$

$\boldsymbol{k}(t) = (r\cos t; r\sin t; 1)$ - *bodová funkce*

Bodová funkce: $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega_f(t))$

Kružnice se středem v počátku – *křivka určená bodovou funkcí* $\boldsymbol{k}(t) = (r\cos t; r\sin t; 1)$

Pohyb

nepromĕnná rovinná soustava Σ

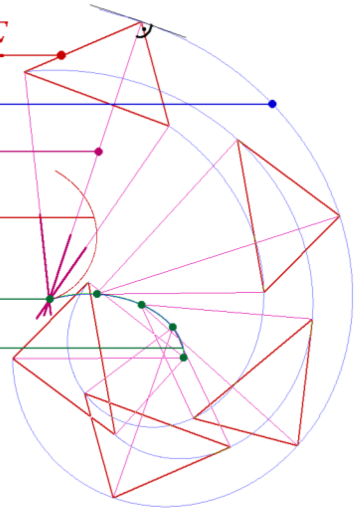
trajektorie bodu

normála k trajektorii

hybná polodie

okamžitý střed otáčení

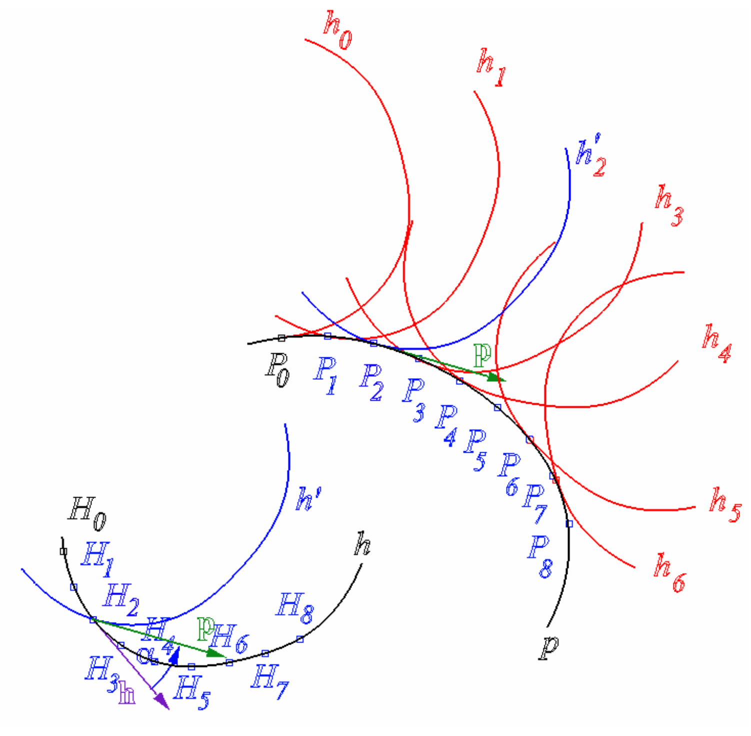
pevná polodie



Normály všech trajektorií soustavy Σ v dané poloze procházejí jediným bodem - okamžitým středem otáčení.

Přemístíme-li nepromĕnnou rovinnou soustavu v rovinĕ z polohy Σ_1 do polohy Σ_2, pak vždy existuje otočení nebo posunutí, které převádí Σ_1 na Σ_2.

Pohyb

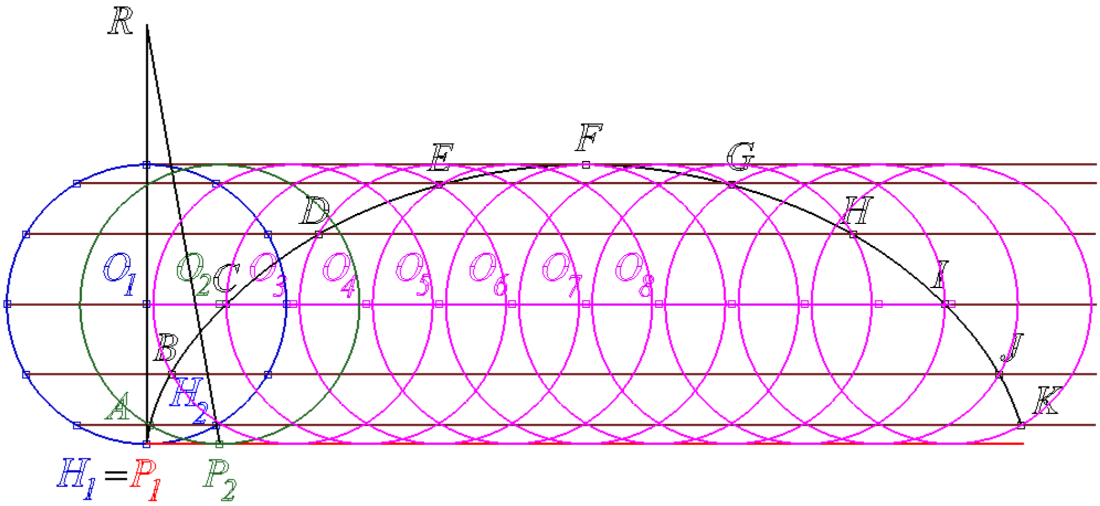


Cykloidální pohyb

***Pevná polodie:* přímka p, *hybná polodie:* kružnice $h=(S;r)$,**

***dráha bodu* A*:* cykloida - $|SA|=r$ prostá; $|SA|<r$ zkrácená; $|SA|>r$ prodloužená;**

Syntetická konstrukce (prostá cykloida):

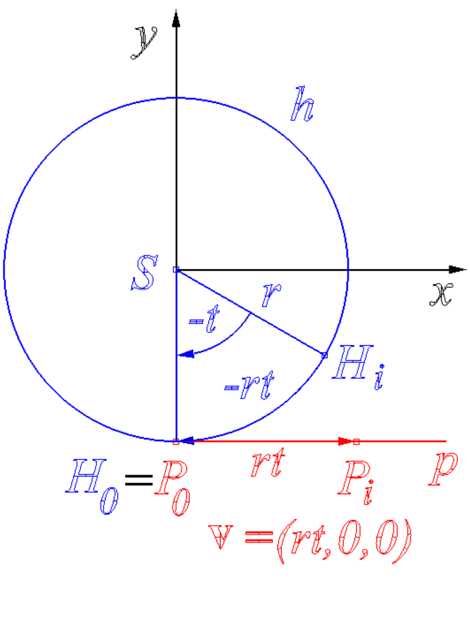


Cykloidální pohyb

***Pevná polodie:* přímka p, *hybná polodie:* kružnice $h=(S;r)$,**

***dráha bodu* A*:* cykloida - $|SA|=r$ prostá; $|SA|<r$ zkrácená; $|SA|>r$ prodloužená;**

Analytická konstrukce (zkrácená a prodloužená cykloida):



$$\mathbf{h} \equiv x^2+y^2=r^2 \equiv (r\cos t; r\sin t; 1)$$

$$\boldsymbol{p} \equiv y=-r$$

$$\mathcal{R}_{-t};\ \mathcal{T}_{\mathbf{v}};\ \mathbf{v}=(rt;0;0)$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{T}_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{R}_{-t}=\begin{pmatrix}1&0&rt\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(-t)&-\sin(-t)&0\\\sin(-t)&\cos(-t)&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

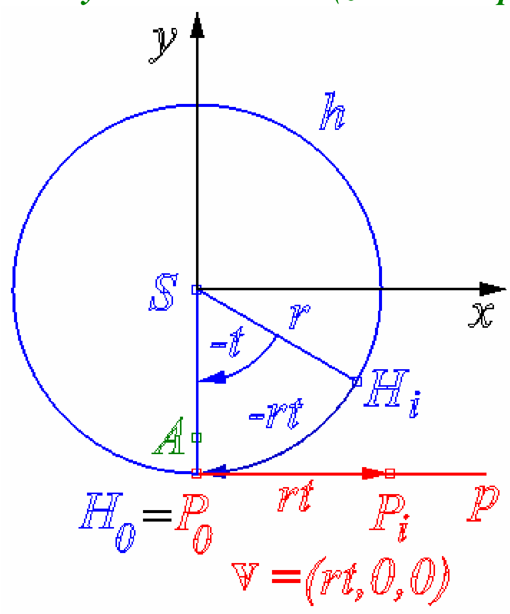
$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t&rt\\-\sin t&\cos t&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Cykloidální pohyb

Pevná polodie: **přímka** p, ***hybná polodie:*** **kružnice** $h=(S;r)$,

dráha bodu A: **cykloida -** $|SA|=r$ ***prostá;*** $|SA|<r$ ***zkrácená;*** $|SA|>r$ ***prodloužená;***

Analytická konstrukce (zkrácená a prodloužená cykloida):



Dráha bodu $A=(0;a;1)$

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t & rt\\ -\sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t & rt\\ -\sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -a\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\sin t+rt\\ -a\cos t\\ 1\end{pmatrix}$$

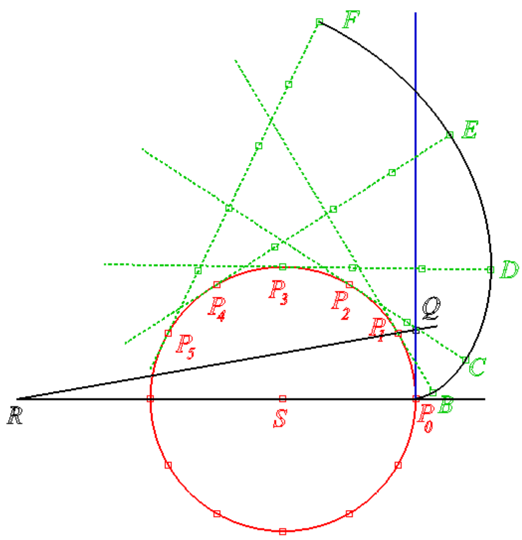
$$\begin{aligned}x_1&=-a\sin t+rt\\ x_2&=-a\cos t\end{aligned};a>0$$

Evolventní pohyb

Vratný k cykloidálnímu: Pevná polodie: **kružnice** $h=(S;r)$, ***hybná polodie:*** **přímka** p

dráha bodu A: **evolventa -** $|SA|=r$ ***prostá;*** $|SA|<r$ ***prodloužená;*** $|SA|>r$ ***zkrácená;***

Syntetická konstrukce

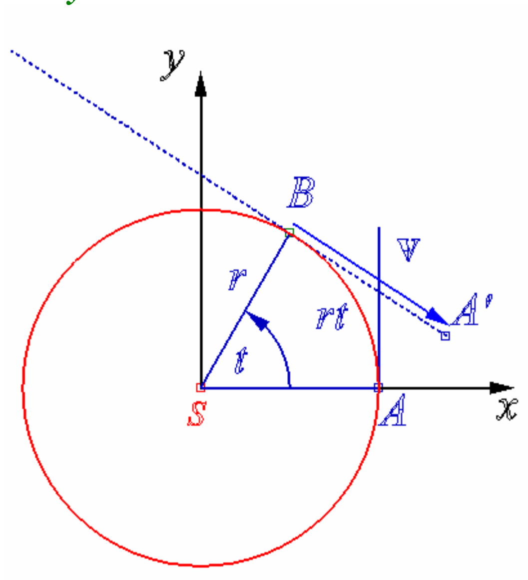


Evolventní pohyb

***Vratný k cykloidálnímu: Pevná polodie:* kružnice $h=(S;r)$, *hybná polodie:* přímka p**

***dráha bodu A:* evolventa - $|SA|=r$ prostá; $|SA|<r$ prodloužená; $|SA|>r$ zkrácená;**

Analytická konstrukce:



$$\overrightarrow{SB}=(r\cos t; r\sin t; 0)$$

$$\mathbf{v}=(rt\sin t; -rt\cos t; 0)$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{T}_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{R}_t=\begin{pmatrix}1 & 0 & rt\sin t\\ 0 & 1 & -rt\cos t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

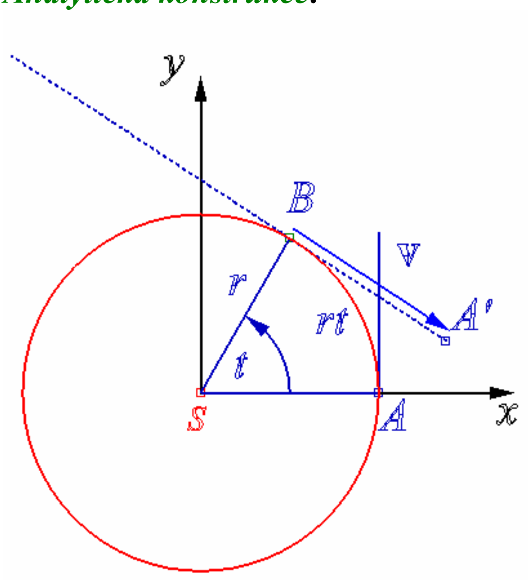
$$\mathbf{M}=\mathbf{T}_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{R}_t=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & rt\sin t\\ \sin t & \cos t & -rt\cos t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Evolventní pohyb

***Vratný k cykloidálnímu: Pevná polodie:* kružnice $h=(S;r)$, *hybná polodie:* přímka p**

***dráha bodu A:* evolventa - $|SA|=r$ prostá; $|SA|<r$ prodloužená; $|SA|>r$ zkrácená;**

Analytická konstrukce:



$$\mathbf{M}=\mathbf{T}_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{R}_t=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & rt\sin 2t\\ \sin t & \cos t & -rt\cos 2t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=(a;0;1)$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & rt\sin t\\ \sin t & \cos t & -rt\cos t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

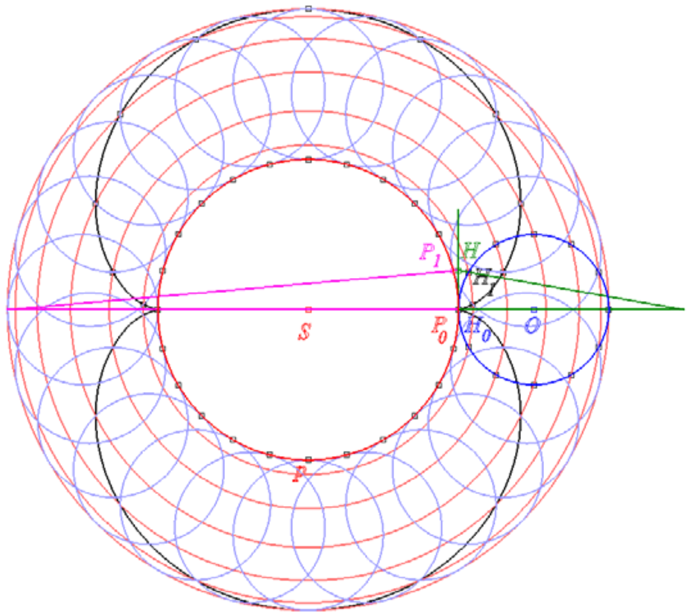
$$x_1=a\cos t+rt\sin t$$

$$x_2=a\sin t-rt\cos t$$

Epicykloidy a hypocykloidy

Pevná polodie: **kružnice** $p=(S;r_1)$, ***hybná polodie:*** **kružnice** $h=(O;r_2)$ ***Epi -: vnější dotyk***

Syntetická konstrukce:

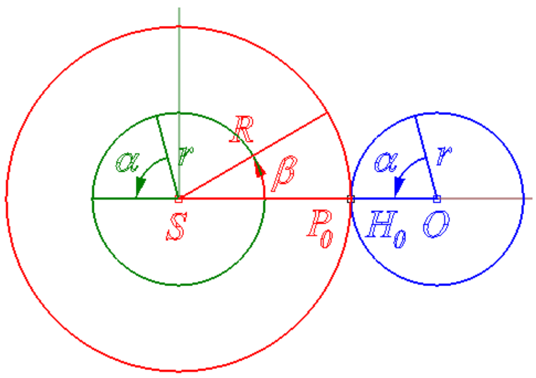


Epicykloidy a hypocykloidy

Pevná polodie: **kružnice** $p=(S;r_1)$, ***hybná polodie:*** **kružnice** $h=(O;r_2)$ ***Epi -: vnější dotyk***

Analytická konstrukce:

$$R\cdot\beta=r\cdot\alpha$$



$$\mathcal{R}_\alpha;\ \mathcal{T}_\mathbf{v};\ \mathbf{v}=(R+r;0;0);\ \mathcal{R}_\beta$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{R}_\beta\cdot\mathbf{T}_\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_\alpha$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & R+r\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) & (R+r)\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & (R+r)\sin\beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

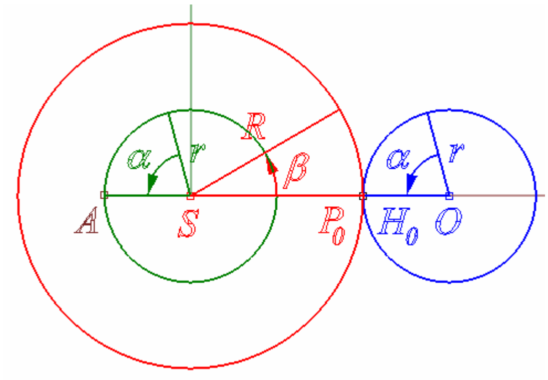
$$\beta=t;\alpha=rR^{-1}t \quad\Rightarrow\quad \mathbf{M}=\begin{pmatrix}\cos(Rr^{-1}t+t) & -\sin(Rr^{-1}t+t) & (R+r)\cos t\\ \sin(Rr^{-1}t+t) & \cos(Rr^{-1}t+t) & (R+r)\sin t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Epicykloidy a hypocykloidy

Pevná polodie: kružnice $p=(S;r_1)$**, hybná polodie: kružnice** $h=(O;r_2)$ **Epi -: vnější dotyk**

Analytická konstrukce:

$$R\cdot\beta=r\cdot\alpha$$



$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\cos\left(Rr^{-1}t+t\right) & -\sin\left(Rr^{-1}t+t\right) & (R+r)\cos t\\ \sin\left(Rr^{-1}t+t\right) & \cos\left(Rr^{-1}t+t\right) & (R+r)\sin t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=(a;0;1)$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(Rr^{-1}t+t\right) & -\sin\left(Rr^{-1}t+t\right) & (R+r)\cos t\\ \sin\left(Rr^{-1}t+t\right) & \cos\left(Rr^{-1}t+t\right) & (R+r)\sin t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$x_1=a\cos\left(Rr^{-1}t+t\right)+(R+r)\cdot\cos t$$

$$x_2=a\sin\left(Rr^{-1}t+t\right)+(R+r)\cdot\sin t$$

hypocykloida – vnitřní dotyk