# Poznámky k úvodu do funkcionální analýzy

Doplňkový text k předmětu Funkcionální analýza 1 pro obor Matematické inženýrství na FSI VUT

Pavel Řehák

(verze 6. března 2020)

# Několik slov na úvod

Tento text je doplňkovým studijním materiálem k předmětu Funkcionální analýza 1 pro obor Matematické inženýrství na FSI VUT. V kombinaci s poznámkami z přednášek a cvičení (kde zejména podrobněji komentujeme vybrané pasáže, doplňujeme látku, uvádíme ilustrativní a motivační příklady, řešíme některá cvičení a diskutujeme) a s případnými explicitními odkazy na další literaturu by měl tvořit postačující zdroj k přípravě na zkoušku. Samostatné aktivitě studentů se pochopitelně meze nekladou: můžete použít další vhodné zdroje, je jich dost. Symbol „✏“ na okrajích upozorňuje na různá cvičení a vybízí k samostatné práci. Některá z témat či jednotlivých výsledků uvedených v tomto textu budou do přednášky (resp. předmětu) zařazena pouze okrajově. Jsou zde však uvedena pro lepší pochopení souvislostí.

Je prakticky jisté, že tento doplňkový text bude opakovaně upravován a patrně nebude nikdy prohlášen za definitivně dokončený. Budu vděčný každému, kdo mne upozorní na nepřesnosti či chyby v textu, a napomůže tak k jeho vylepšení; vítány jsou rovněž další komentáře k jeho obsahu. Některé nepřesnosti — jde vlastně spíš o zjednodušení — jsou ovšem záměrné, vzhledem k úvodnímu charakteru celého kurzu.

Brno, 6. března 2020, Pavel Řehák

# Obsah


**1 Motivační úvahy a historické poznámky** **7**

**2 Metrické prostory** **13**

2.1 Základní pojmy . . . . . 13
2.2 Klasifikace bodů a některé význačné množiny v metrických prostorech . . . 21
2.3 Konvergence v metrickém prostoru . . . . . 27
2.4 Zobrazení metrických prostorů . . . . . 30
2.5 Úplné metrické prostory . . . . . 33
2.6 Banachův princip pevného bodu a jeho aplikace . . . . . 41
2.7 Kompaktní prostory . . . . . 44
2.8 Kritéria (relativní) kompaktnosti a aplikace . . . . . 55

**3 Lebesgueův integrál** **59**

3.1 Motivační úvahy . . . . . 59
3.2 Lebesgueova míra . . . . . 61
3.3 Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$ . . . . . 65
3.4 Některé vlastnosti Lebesgueova integrálu . . . . . 69
3.5 Věty o limitním přechodu . . . . . 71
3.6 Prostory integrovatelných funkcí, Lebesgueovy prostory . . . . . 74

**4 Normované lineární prostory** **79**

4.1 Základní pojmy a vlastnosti . . . . . 79
4.2 Ekvivalence norem . . . . . 84
4.3 Izometrie a homeomorfismus . . . . . 87
4.4 Normované prostory konečné dimenze . . . . . 88
4.5 Nekonečné řady v Banachových prostorech . . . . . 91
4.6 Báze v normovaném prostoru . . . . . 92
4.7 Schauderova věta o pevném bodu a aplikace . . . . . 93

**5 Unitární prostory** **99**
5.1 Základní pojmy a vlastnosti . . . 99
5.2 Ortogonalita a ortonormalita . . . 106
5.3 Fourierovy řady . . . 112
5.4 Rieszova-Fischerova věta . . . 115
5.5 Zpět ke klasické Fourierově analýze . . . 120
5.6 Separabilní Hilbertův prostor, Rieszova-Fischerova věta ještě jednou . . . 124
5.7 Projekce do uzavřeného podprostoru . . . 126

**6 Lineární funkcionály** **129**
6.1 Pojem lineárního funkcionálu . . . 129
6.2 Konvexní množiny a konvexní funkcionály . . . 130
6.3 Hahnova–Banachova věta . . . 133
6.4 Lineární funkcionály v normovaném prostoru, spojité funkcionály . . . 136
6.5 Norma lineárního funkcionálu . . . 139
6.6 Hahnova–Banachova věta v normovaných lineárních prostorech . . . 143
6.7 Duální prostor a jeho základní vlastnosti . . . 147
6.8 Duální prostor Hilbertova prostoru . . . 150
6.9 Několik dalších příkladů duálních prostorů, reprezentace funkcionálů . . . 152
6.10 Druhý duální prostor . . . 156
6.11 Banachova–Steinhausova věta . . . 161
6.12 Slabá konvergence . . . 165
6.13 O řešitelnosti jedné okrajové úlohy . . . 173

**7 Apendix: Dodatky k lineárním funkcionálům** **177**
7.1 Geometrický význam lineárního funkcionálu . . . 177
7.2 $*$-slabá konvergence . . . 180
7.3 Další poznámky o slabé a $*$-slabé konvergenci . . . 185

**8 Apendix: Některé další prostory** **191**
8.1 Pseudometrické a ultrametrické prostory . . . 191
8.2 Lineární prostory . . . 191
8.3 Topologické prostory . . . 194
8.4 Lokálně konvexní prostory a Fréchetovy prostory . . . 195

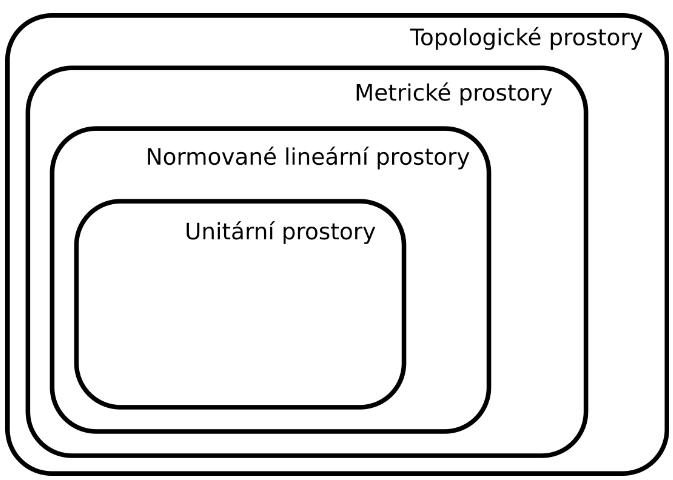
**9 Apendix: Nerovnosti** **197**

**Literatura** **201**

Kapitola 1

# Motivační úvahy a historické poznámky

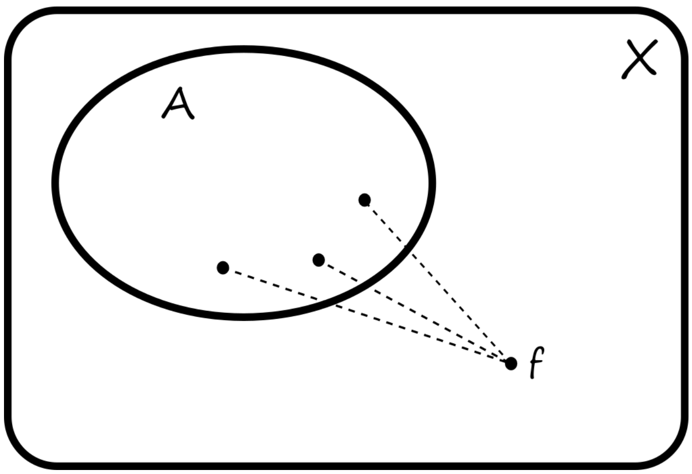
Co vlastně je funkcionální analýza a k čemu je dobrá? Funkcionální analýza je velmi široká oblast matematiky, která se prolíná s mnoha jinými partiemi. Je nutné zdůraznit, že my se této disciplíny v podstatě jen dotkneme. Mezi předměty jejího zájmu patří např. — zhruba řečeno — lineární prostory, které jsou vybaveny dodatečnou strukturou (skalárním součinem, normou, topologií, atd.), tedy třeba normované lineární prostory (zejména nekonečněrozměrné) a lineární zobrazení mezi těmito prostory (operátory, funkcionály), normované lineární prostory s další dodatečnou strukturou (např. algebraickou, tedy např. Banachovy algebry, Banachovy svazy atp.), prostory abstraktnější než normované prostory (metrické prostory, lineární topologické prostory atp.) a ještě mnoho jiného. K čemu to je dobré? Můžeme říci, že je to pěkné a zajímavé, ostatně jako celá matematika. Podstatné ovšem je, že tato teorie dává nové pohledy na matematické problémy různého druhu, umožňuje problémy jinak formulovat a je zdrojem účinných metod řešení.




Obrázek 1.1: Kam byste v tomto diagramu umístili lineární prostory? Viz též diagram na straně 10.

Výhodou funkcionální analýzy je skutečnost, že i s dost složitými objekty (jako jsou posloupnosti, funkce i jiná rozličná zobrazení) umožňuje pracovat třeba jako s body v prostoru s geometrickou či jinou strukturou (či „kombinací“ struktur). Toho pak lze využít například v následujících situacích:

- Hledání řešení nějaké diferenciální rovnice (či rovnice jiného typu) lze pojmout jako hledání vhodného bodu ve vhodném prostoru.
- Problém aproximace složité funkce jednodušší funkcí lze interpretovat jako hledání v jistém smyslu nejbližšího bodu ve vhodné množině.




Získané poznatky se uplatní i v dalších disciplínách a tím zdaleka nemáme na mysli jen Funkcionální analýzu II, ale též např. oblast (parciálních) diferenciálních rovnic či numerických metod.

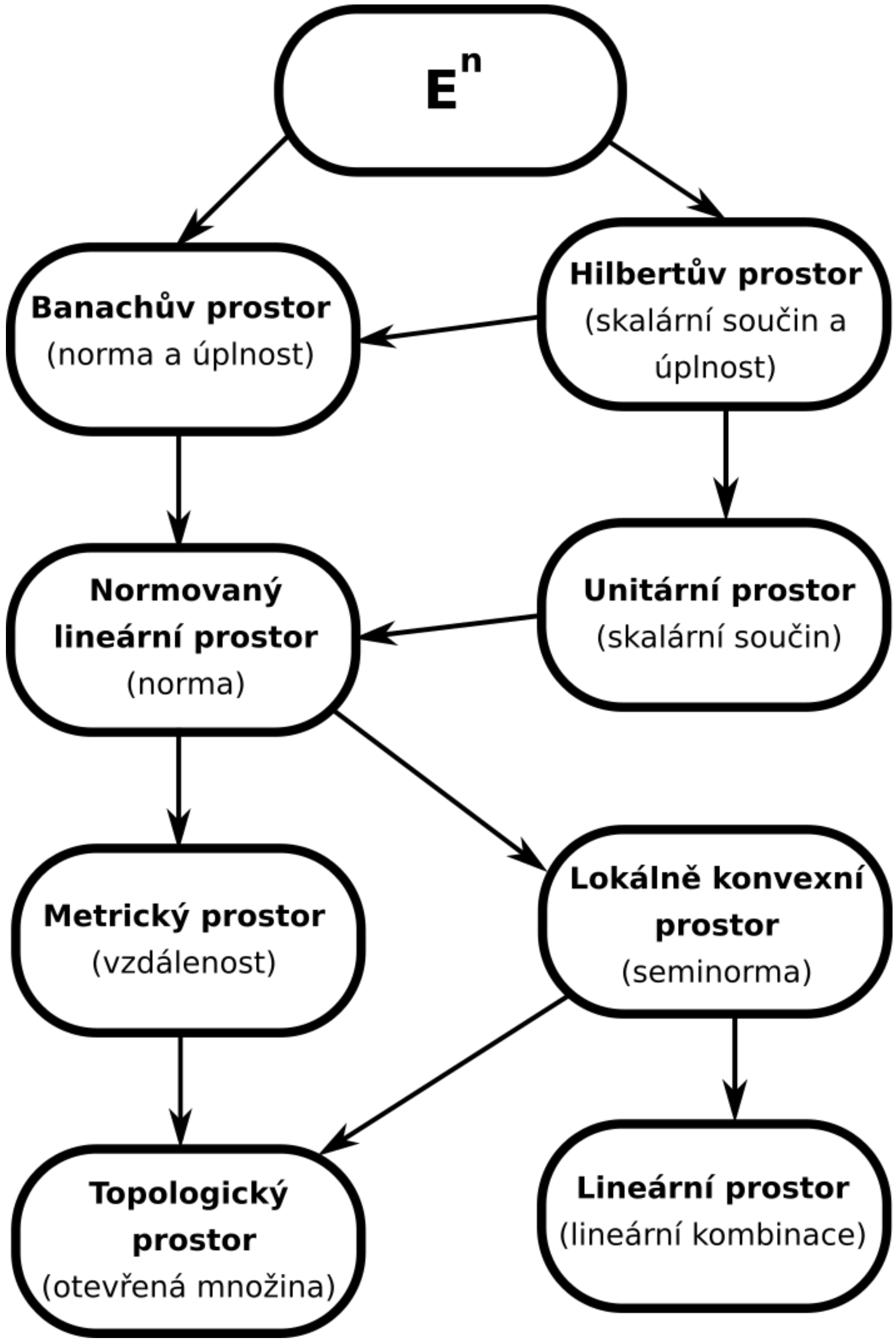
Zhruba řečeno, v našem kurzu budeme zkoumat tyto objekty:

- prostory (především funkcí a posloupností),
- operátory (v našem případě zejména funkcionály), tedy zobrazení mezi prostory.

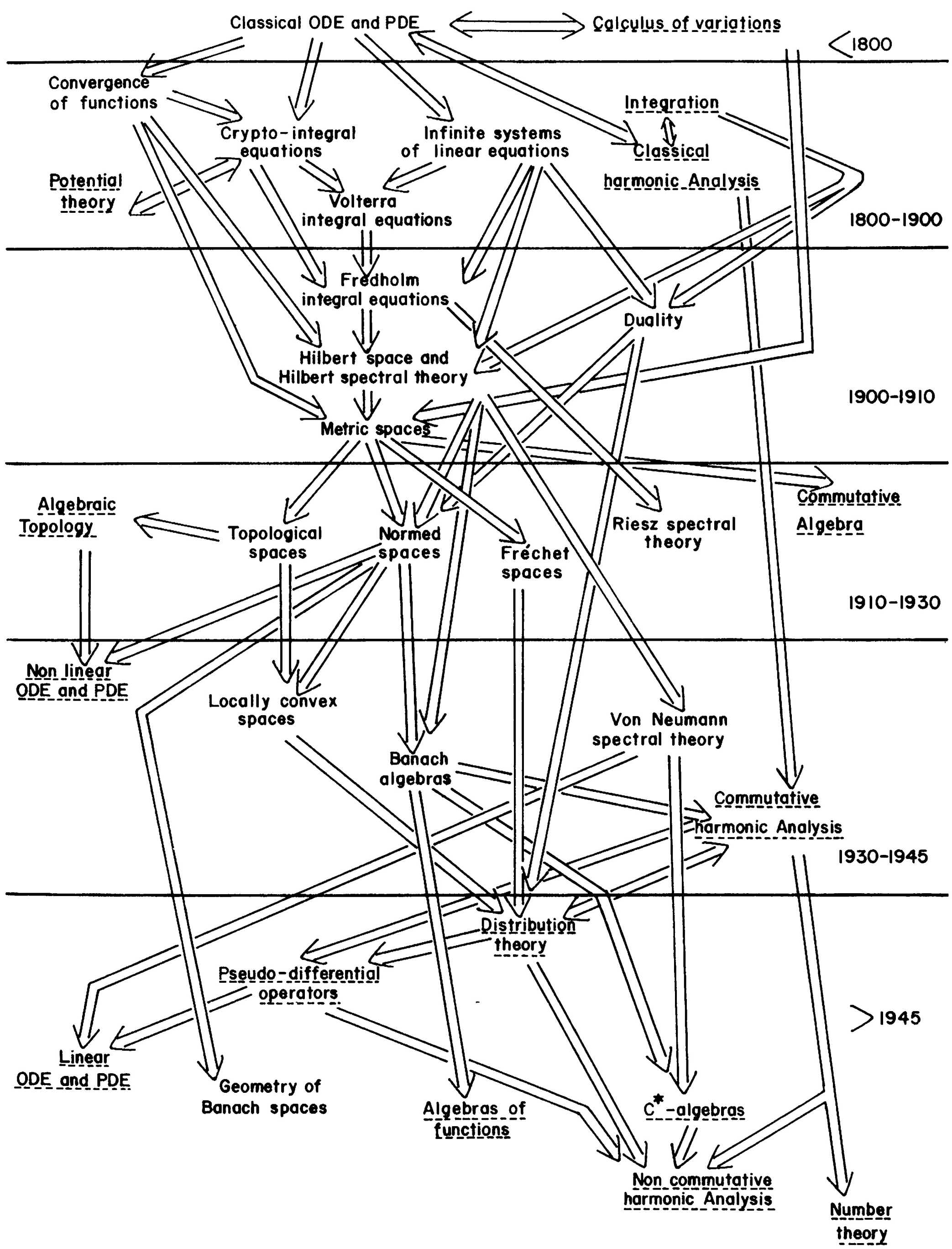
Znovu zdůrazněme, že kurz je skutečně spíš úvodem do funkcionální analýzy, než hlubším studiem předmětů zájmu této disciplíny, což lze ostatně rychle zjistit pohledem do běžných učebnic funkcionální analýzy. Tam navíc zjistíme, že přístupy k výběru základních témat při výkladu funkcionální analýzy se mohou značně lišit (v závislosti na potřebách dalšího využití, ale pochopitelně třeba i v závislosti na vkusu autora).

Budeme mj. využívat znalost diferenciálního počtu, integrálního počtu, teorie diferenciálních rovnic a lineární algebry.

Termín „funkcionální“ analýza je historicky spojen s pojmem „funkcionál“, což je v našem pojetí zobrazení z normovaného (resp. topologického) lineárního prostoru do prostoru skalárů. Typickým příkladem jsou funkcionály ve variačním počtu, s čímž souvisí Hadamardova publikace z r. 1910 věnována této disciplíně, kde se právě slovo funkcionál poprvé objevuje. Avšak obecný pojem funkcionálu byl zaveden již dříve, v r. 1887, italským matematikem Volterrou. Teorie nelineárních funkcionálů pak byla dále studována Hadamardovými studenty, zejména Fréchetem a Lévym. Hadamard také v jistém smyslu stál u zrodu nové disciplíny, lineární funkcionální analýzy, která byla dále rozvíjena Rieszem a skupinou polských matematiků soustředěnou kolem Banacha. Pár dalších historických poznámek je rozptýleno v textu. Zájemce o hlubší poznání historie funkcionální analýzy můžeme odkázat na monografii [8]. Původ, vývoj a význam některých základních pojmů a tvrzení je diskutován např. i v [46].




Obrázek 1.2: Přehled některých základních typů abstraktních prostorů. Topologické a lokálně konvexní prostory zmíníme v kurzu jen velmi okrajově. Ostatním se budeme věnovat podrobněji. Šipka z prostoru A do prostoru B znamená, že prostor A je také prostorem B; například normovaný lineární prostor je také metrický prostor.




Obrázek 1.3: Převzato z J. Dieudonné, History of functional analysis, North-Holland 1981.

Kapitola 2

# Metrické prostory

Pojem metriky lze chápat jako zobecnění či abstrakci pojmu vzdálenosti. Tento pojem byl zaveden M. Fréchetem (1878-1973). Dále jej rozvinul F. Hausdorff v monografii z r. 1914. Za touto teorií je však pochopitelně daleko bohatší historie. Jednou z prvních českých monografií, které byly věnovány metrickým prostorům, jsou *Bodové množiny* z r. 1936 od E. Čecha.

## 2.1 Základní pojmy

### Metrika a metrický prostor

Je několik důvodů, proč se o výše zmíněné zobecnění pojmu vzdálenosti pokoušet. Umíme měřit vzdálenosti dvou reálných či komplexních čísel, dvou bodů v rovině či v prostoru. Ovšem chtěli bychom umět měřit vzdálenosti i mezi jinými (matematickými) objekty (maticemi, funkcemi, posloupnostmi atd., ale třeba i slovy). Je však nutno zmínit, že i vzdálenosti dvou bodů v rovině či v prostoru lze z různých důvodů chápat (měřit) více než jedním způsobem a my pak můžeme studovat vztahy mezi různě definovanými vzdálenostmi. Dále si uvědomme, že např. se samotným pojmem (obecného) lineárního prostoru v aplikacích nevystačíme. Tam totiž často pracujeme s přibližnými metodami, ale operace sčítání a násobení číslem nám ještě nic neříkají o vzájemné poloze dvou prvků, o tom, zda leží „blízko“ či „daleko“ od sebe. Tento vztah můžeme popsat pomocí tzv. *metriky*, umožňující definovat „vzdálenost“ dvou prvků.

Lineární strukturu při zavádění metriky ovšem nepotřebujeme a vycházíme z obecné množiny.

**Definice 2.1** (Metrický prostor)**.** Nechť $M$ je neprázdná množina. Tzv. *metrika* na $M$ se definuje jako zobrazení $\varrho : M \times M \to [0, \infty)$, které splňuje pro každé $x, y, z \in M$ následující tři axiomy:

(M1) $\varrho(x, y) = 0$, právě když $x = y$ (axiom totožnosti; metrika rozlišuje body);

(M2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (axiom symetrie);

(M3) $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$ (trojúhelníková nerovnost).

Dvojici $(M, \varrho)$ nazýváme *metrickým prostorem.*

**Poznámka 2.2.** (i) Metriku lze ekvivalentně definovat „úspornějším“ systémem axiomů — jako libovolnou reálnou funkci splňující pro každé $x, y, z \in M$ podmínku (M1) a podmínku $\varrho(y, x) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$. Jako cvičení můžete ukázat, že tyto definice jsou opravdu ekvivalentní. My však budeme používat axiomatiku z první definice, neboť je názornější a více vyniká analogie se vzdáleností v eukleidovském prostoru.

(ii) Jak uvidíme, tak lineární prostory opatřené *normou* jsou zároveň metrické prostory, jejichž metrika je definována pomocí této normy. Jde o strukturu méně obecnou, než je metrický prostor. Naproti tomu systém všech otevřených množin metrického prostoru tvoří tzv. *topologii* v tomto prostoru, a tak jsou metrické prostory speciálním případem *topologických prostorů.* U této struktury se však seznamíme prakticky jen s její definicí.

(iii) Mnohé z definic (a argumentů v důkazech) v této kapitole je možné formulovat jak pomoci okolí, tak pomocí limit posloupností. Zobecnění těchto známých pojmů na metrické prostory uvedeme dále v textu.

(iii) Jak uvidíme, lze mít různé metriky na stejné nosné množině či stejné metriky na různých nosných množinách.

(iv) Obsahuje-li množina $M$ aspoň dva prvky, lze na ní sestrojit nekonečně mnoho různých metrik. Totiž, např. je-li $\varrho$ metrika na $M$, je $\widetilde{\varrho}(x, y) = \dfrac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)}$ též metrika (a je různá od $\varrho$). Trojúhelníková nerovnost plyne z faktu, že pro nezáporná čísla $a, b, c$ s vlastností $a \leq b + c$ platí

$$\frac{a}{1 + a} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c}; \tag{2.1}$$

toto lze ověřit (proveďte) vynásobením součinem jmenovatelů a následným roznásobením.

Jako cvičení ukažte, že množiny (se zavedenou konkrétní strukturou) uvažované v následujících příkladech jsou skutečně metrické prostory. Ukažte toto především pro uvedené prostory konečných i nekonečných posloupností a prostory funkcí. Ty totiž budou hrát v našem kurzu velmi důležitou úlohu.

**Příklad 2.3** (Diskrétní metrický prostor)**.** Na každé množině $M \neq \emptyset$ je možné zavést tzv. *diskrétní metriku* $\varrho_D$ předpisem

$$\varrho_D(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \tag{2.2}$$

Dvojice $(M, \varrho_D)$ se potom nazývá *diskrétní* (či *triviální*) metrický prostor.

**Příklad 2.4** (Metriky na $\mathbb{R}^n$, eukleidovský prostor)**.** Pro dané $n \in \mathbb{N}$ nechť $M := \mathbb{R}^n$ a nechť $p \in [1, \infty)$ je pevné reálné číslo. Funkce

$$\varrho_p(x,y) := \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x := (x_1, \ldots, x_n),\ y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

je potom metrikou na množině $M$ a dvojice $(M, \varrho_p)$ je metrický prostor. Trojúhelníková nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti (viz Věta 9.3). Speciálně, pro $p = 1$ obdržíme tzv. *součtovou metriku*

$$\varrho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad x := (x_1, \ldots, x_n),\ y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

V případě $p = 2$ dostáváme tzv. *eukleidovskou metriku* $\varrho_2$, tj.

$$\varrho_2(x,y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}, \quad x := (x_1, \ldots, x_n),\ y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

Metrický prostor $(M, \varrho_2)$ nazýváme *eukleidovský prostor* a označujeme jej jako $\mathbb{E}^n$. Další důležitou metrikou na množině $M$ je tzv. *maximální metrika* (či *maximová metrika*) $\varrho_\infty$ definovaná předpisem

$$\varrho_\infty(x,y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|, \quad x := (x_1, \ldots, x_n),\ y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Poznamenejme, že v případě $n = 1$ všechny metriky $\varrho_p(x,y)$, $p \in [1, \infty)$, a $\varrho_\infty$ splývají, přičemž pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\varrho_p(x,y) = \varrho_\infty(x,y) = |x - y|. \tag{2.7}$$

Pro $n = 2$ se součtové metrice $\varrho_1$ v (2.4) říká též *taxikářská* (proč asi?) či *manhattanská.* Na množině $M = \mathbb{R}^2$ lze zavést i tzv. *pampeliškovou* či *hvězdicovou metriku* $\varrho^\star$ předpisem

$$\varrho^\star(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \text{jestliže body } x = [x_1, x_2],\ y = [y_1, y_2] \\ & \text{leží na různých polopřímkách} \\ & \text{vycházejících z bodu } [0,0] \\ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

Tato metrika nás může zajímat např. ve městě, kde ulice vycházejí paprskovitě z jednoho místa a nejsou navzájem pospojovány.

**Cvičení 2.5.** Inspirujte se předchozím příkladem a sestrojte nějakou „rozumnou“ metriku na množině všech matic typu $m \times n$.

**Příklad 2.6** (Metriky na množině posloupností)**.** Pro dané reálné číslo $p \in [1, \infty)$ uvažujme následující množinu

$$M := \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}, \tag{2.8}$$

tj. množinu reálných posloupností $\{x_k\}$, pro které je řada $\sum |x_k|^p$ konvergentní. Zobrazení $\varrho_p : M \times M \to [0, \infty)$ definované předpisem

$$\varrho_p(x, y) := \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = \{x_k\},\ y = \{y_k\} \in M, \tag{2.9}$$

je potom metrikou na množině $M$. Trojúhelníková nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti (viz Věta 9.3). Metrický prostor $(M, \varrho_p)$ se standardně označuje symbolem $\ell^p$. Kromě $M$ v (2.8) mají významné postavení i množiny

$$N := \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R},\ \{x_k\} \text{ je ohraničená}\}, \tag{2.10}$$

$$\widetilde{N} := \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R},\ \{x_k\} \text{ konverguje}\}, \tag{2.11}$$

$$\widetilde{N}_0 := \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R},\ \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \right\}, \tag{2.12}$$

na kterých lze zavést metriku $\varrho$ ve tvaru

$$\varrho(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|, \quad x = \{x_k\},\ y = \{y_k\}. \tag{2.13}$$

Pro odpovídající metrické prostory $(N, \varrho)$, resp. $(\widetilde{N}, \varrho)$, resp. $(\widetilde{N}_0, \varrho)$ se v literatuře používá označení $\ell^\infty$, resp. $c$, resp. $c_0$.

**Příklad 2.7** (Ještě jedna metrika na množině posloupností)**.** Nechť $s$ je množina posloupností reálných čísel. Pro každé dva její elementy $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\}$ položme

$$\varrho(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Potom $\varrho$ je metrika na $s$. Poznamenejme, že řada vpravo konverguje (najděte její konvergentní majorantu) a trojúhelníkovou nerovnost lze ověřit pomocí (2.1). Jak uvidíme v kapitole o normovaných lineárních prostorech, zajímavou vlastností této metriky je, že není generována žádnou normou.

**Příklad 2.8** (Metriky na množině ohraničených resp. spojitých funkcí)**.** Nechť $I$ je nedegenerovaný reálný interval. Symbolem $B(I)$ budeme označovat množinu všech reálných (příp. komplexních) funkcí, které jsou ohraničené na $I$; používá se též označení $B(I, \mathbb{R})$, resp. $B(I, \mathbb{C})$. Zobrazení $\varrho_B$ definované předpisem

$$\varrho_B(f, g) := \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in B(I), \tag{2.14}$$

je metrika na množině $B(I)$, tuto metriku označujeme též jako $\varrho_\infty$; někdy hovoříme o tzv. *suprémové metrice*. V případě uzavřeného intervalu $I$, tj. $I = [a, b]$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, označme výrazem $C[a, b]$ (příp. $C([a, b])$) množinu všech reálných (příp. komplexních) funkcí, které jsou spojité na $[a, b]$. Na této množině je možné uvažovat např. metriky $\varrho_C$ a $\varrho_I$ s předpisy

$$\varrho_C(f, g) := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|, \tag{2.15}$$

$$\varrho_I(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x, \tag{2.16}$$

pro každé $f, g \in C[a, b]$. Metrika $\varrho_C$ (ozn. též jako $\varrho_\infty$) se standardně označuje pojmem *metrika stejnoměrné konvergence* (později uvidíme proč), kdežto pro metriku $\varrho_I$ se používá přívlastek *integrální* (používá se též označení $\varrho_1$). Na $C[a, b]$ lze též obecněji uvažovat metriku

$$\varrho_p(f, g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

pro $p \in [1, \infty)$; označujeme ji jako $L^p$-metriku (později uvidíme proč). Trojúhelníková nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti (viz Věta 9.3).

**Cvičení 2.9.** Nechť $R[a, b]$ (ozn. též $R([a, b])$) je množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$. Zdůvodněte, proč $(R[a, b], \varrho_I)$ není metrický prostor. Ve skutečnosti jde o tzv. pseudometrický prostor, viz Sekce 8.1.

**Poznámka 2.10.** (i) V příští kapitole (a to v kontextu normovaných lineárních prostorů) zavedeme tzv. Lebesgueovy prostory (prostory Lebesgueovsky integrovatelných funkcí), ozn. $L^p$, které jsou i metrickými prostory a to s výše zmíněnou $L^p$-metrikou. Zde se uvažuje nejen $p \in [1, \infty)$, ale i $p = \infty$, kde metrika je v jistém smyslu analogická metrice $\varrho_B$.

(ii) Čtenář možná zaznamenal, že jak $L^p$-metrika, tak i metrika (2.9) na množině posloupností (či na $\mathbb{R}^n$) jsou označovány stejně, totiž $\varrho_p$. Tato shoda v označení dává dobrý smysl, neboť – jak později uvidíme – diskrétní případ (tj. $\ell^p$) má v jistých ohledech velmi blízko $L^p$-prostoru, přesněji, je v jistém smyslu jeho speciálním případem.

(iii) Označení $\varrho_\infty$, resp. $\ell^\infty$, resp. $L^\infty$ mají svůj důvod. Lze je totiž chápat jako limitní případy (pro $p \to \infty$) objektů $\varrho_p$, resp. $\ell^p$, resp. $L^p$, viz Poznámka 3.27, kde je tento fakt diskutován v kontextu normovaných lineárních prostorů a Lebesgueových prostorů. V tento moment ukažte, že $\lim_{p\to\infty} \varrho_p(x, y) = \varrho_\infty(x, y)$ platí alespoň ve speciálním případě prostoru $\mathbb{R}^2$; mělo by k tomu stačit L'Hospitalovo pravidlo.

**Příklad 2.11** (Metrika na množině slov)**.** Nechť $M$ je množina všech slov skládajících se z $n$ písmen; nepřihlížíme nyní k tomu, zda dané slovo má nebo nemá význam v českém jazyce. Vzdáleností dvou slov $A, B$ je počet pozic, na kteých mají tato slova různá písmena. Např. pro $n = 5$ je $\varrho\,$(mladý, slabý) $= 2$. Tato funkce je pak metrikou. Prostory tohoto typu mají široké použití v chemii a biologii.

**Příklad 2.12** (Baireův metrický prostor)**.** Nechť $M$ je množina posloupností, $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\}$ její dva elementy. Definujme

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 1/\xi & \text{kde } \xi \text{ je nejmenší index takový, že } x_\xi \neq y_\xi \text{ pro } x \neq y, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

Potom $(M, \varrho)$ je metrický prostor.

**Příklad 2.13** (Jaccardova metrika)**.** Nechť $S$ je libovolná konečná neprázdná množina. Nechť $M := \mathcal{P}(S)$, kde $\mathcal{P}(S)$ je množina všech podmnožin množiny $S$ (potenční množina množiny $S$). Zobrazení $\varrho : M \times M \to \mathbb{N}_0$ definované předpisem

$$\varrho(A,B) := |A \,\Delta\, B|, \quad A, B \in M, \tag{2.17}$$

potom dává metriku na množině $M$. Připomeňme, že symbol $\Delta$ označuje *symetrický rozdíl množin*, tj.

$$A \,\Delta\, B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \tag{2.18}$$

a $|\cdot|$ označuje mohutnost dané množiny. Platnost axiomu (M3) v definici metrického prostoru vyplývá z inkluze

$$A \,\Delta\, B \subseteq (A \,\Delta\, C) \cup (C \,\Delta\, B), \quad A, B, C \in M. \tag{2.19}$$

Poznamenejme, že místo metriky $\varrho$ zavedené v (2.17) se častěji používá tzv. *Jaccardova metrika* $\delta$ daná vztahem

$$\delta(A,B) := \frac{|A \,\Delta\, B|}{|A \cup B|}, \quad A, B \in M. \tag{2.20}$$

Metrika $\delta$ nachází, kromě jiných aplikací, uplatnění ve statistice a botanice. Zájemci jistě uspějí, pokud budou hledat např. podle klíčového sousloví ‘Jaccard index’ či např. ‘diverzita společenstev’.

## Další základní pojmy

**Definice 2.14** (Vnoření metrických prostorů)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $N \subseteq M$. Definujeme-li na $N$ metriku $\sigma$ jako $\sigma(x,y) = \varrho(x,y)$ pro každé $x, y \in N$, pak říkáme, že metrický prostor $(N, \sigma)$ je *vnořen* do prostoru $(M, \varrho)$ a metrika $\sigma$ je *indukovaná* metrikou $\varrho$. Metrický prostor $(N, \sigma)$ s výše uvedenými vlastnostmi se nazývá podprostor metrického prostoru $(M, \varrho)$.

**Příklad 2.15.** Metrický prostor $(C[a,b], \varrho_C)$ je vnořený do metrického prostoru $(B[a,b], \varrho_B)$. Skutečně, díky první Weierstrassově větě máme $C[a,b] \subseteq B[a,b]$, zatímco druhá Weierstrassova věta zaručuje $\varrho_B(f,g) = \varrho_C(f,g)$ pro každé $f, g \in C[a,b]$. Promyslete si detaily.

**Příklad 2.16.** Metrika $\varrho_2$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{E}^3$ zavedeném v Příkladu 2.4 indukuje na jednotkové kulové ploše $M := \mathcal{S}([0,0,0],1) \subseteq \mathbb{R}^3$ (viz Definice 2.26) metriku $\sigma$, tj.

$$\sigma(x,y) = \varrho_2(x,y) \overset{(2.5)}{=} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

pro každé dva body $x=[x_1,x_2,x_3]$ a $y=[y_1,y_2,y_3]$ množiny $M$. Metrický prostor $(M,\sigma)$ je tedy vnořený do eukleidovského prostoru $\mathbb{E}^3$. Poznamenejme, že indukovaná metrika $\sigma$ prakticky odpovídá prokopání nejkratšího tunelu mezi body na kulové ploše $M$.

Intuitivně celkem zřejmé pojmy vzdálenosti mezi množinami, průměru množiny a omezenosti množiny v metrickém prostoru zavedeme takto:

**Definice 2.17** (Vzdálenost a průměr množin)**.** Nechť $(M,\varrho)$ je metrický prostor a $A,B \subseteq M$ jsou neprázdné množiny. Definujme

$$\varrho(A,B) := \inf\{\varrho(x,y),\ x\in A,\ y\in B\}, \tag{2.21}$$

$$d(A) := \sup\{\varrho(x,y),\ x,y\in A\}. \tag{2.22}$$

Číslo $\varrho(A,B)$ (ozn. se též jako $\operatorname{dist}(A,B)$) se nazývá *vzdálenost množin* $A$ a $B$ v metrickém prostoru $(M,\varrho)$, zatímco $d(A)$ (ozn. též $\operatorname{diam}(A)$) je tzv. *průměr* množiny $A$ v $(M,\varrho)$. Jestliže $d(A)<\infty$, pak říkáme, že množina $A$ je *omezená* v metrickém prostoru $(M,\varrho)$. Je-li alespoň jedna z množin prázdná, je jejich vzdálenost $\infty$. Za průměr prázdné množiny bereme nulu. Je-li jedna z množin jednobodová, např. $A=\{x\}$, pak místo $\varrho(\{x\},B)$ často píšeme krátce $\varrho(x,B)$.

**Příklad 2.18.** Najděme průměr množiny $A := \{f_n(x)=x^n,\ x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}\} \subseteq C[0,1]$ vzhledem k metrice stejnoměrné konvergence $\varrho_C$. Ukážeme, že $d(A)=1$. S pomocí vhodného obrázku lehce zjistíme, že pro libovolné dvě funkce $f_n, f_m \in A$ je $|f_n(x)-f_m(x)| \le 1$ pro každé $x\in[0,1]$. Podle (2.15) potom $\varrho_C(f_n,f_m)\le 1$, což následně v souladu s (2.22) implikuje nerovnost $d(A)\le 1$. Pro $n\ge 2$ nyní stanovíme vzdálenost funkcí $f_1$ a $f_n$ v metrickém prostoru $(C[0,1],\varrho_C)$, tj.

$$\varrho_C(f_1,f_n) \overset{(2.15)}{=} \max_{x\in[0,1]} |f_1(x)-f_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} |x-x^n|. \tag{2.23}$$

Poněvadž $x-x^n\ge 0$ pro každé $x\in[0,1]$, hledáme globální maximum výrazu $x-x^n$ na intervalu $[0,1]$. Standardními metodami matematické analýzy zjistíme, že toto maximum je nabyto pro $x=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ a tedy podle (2.23) dostáváme

$$\rho_C(f_1,f_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{pro každé } n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{2.24}$$

Podle (2.22) v Definici 2.17 je však hledaný průměr $d(A)\ge \rho_C(f_1,f_n)$ pro každé $n\ge 2$. Limitním přechodem v této nerovnosti pro $n\to\infty$ dostáváme

$$d(A) \ge \lim_{n\to\infty} \rho_C(f_1,f_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right] = 1, \quad \text{a tedy } d(A)=1.$$

**Cvičení 2.19.** (i) Nechť $A = \{[0,1]\}$ a $B$ je přímka $y = -x$ v $M = \mathbb{R}^2$. Určete vzdálenost množin $A, B$ vzhledem k metrikám $\varrho_2, \varrho_\infty, \varrho_1$.

(ii) Stanovte průměr reálné osy $\mathbb{R}$ v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \varrho)$ s metrikou $\varrho$ tvaru

$$\varrho(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

## Izometrie

Jednoduchým příkladem zobrazení, se kterým se setkáváme už ve středoškolské matematice, je zobrazení mezi eukleidovskými prostory zachovávající vzdálenost bodů. Zde je jeho zobecnění pro libovolné metrické prostory.

**Definice 2.20** (Izometrické zobrazení)**.** Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : N \to M$ splňující

$$\sigma(x,y) = \varrho(f(x), f(y)) \quad \text{pro každé } x, y \in N$$

se nazývá *izometrické zobrazení*. V případě, že $f$ je surjektivní zobrazení, označujeme jej pojmem *izometrie* a o metrických prostorech $(N, \sigma)$ a $(M, \varrho)$ pak říkáme, že jsou *izometrické*.

**Poznámka 2.21.** (i) Přímo z Definice 2.20 vyplývá, že každé izometrické zobrazení $f$ mezi metrickými prostory $(N, \sigma)$ a $(M, \varrho)$ je nutně injektivní; dokažte tento fakt. Pokud $f$ je navíc i surjektivní, existuje k němu inverzní zobrazení $f^{-1} : M \to N$, které je též izometrické. Proto pomocí izometrických zobrazení lze objekty zkonstruované v jedné metrice přenášet do druhé metriky; viz i Poznámku 2.25. Poznamenejme též, že skutečnost, že izometrické zobrazení $f$ je vždy injektivní, umožňuje zobecnit pojem vnoření metrických prostorů zavedený v Definici 2.14. Přesněji, říkáme, že metrický prostor $(N, \sigma)$ v Definici 2.20 je *(izometricky) vnořený* do metrického prostoru $(M, \varrho)$. Je zřejmé, že v tomto pojetí je v Definici 2.14 metrický prostor $(N, \sigma)$ vnořený do prostoru $(M, \varrho)$ prostřednictvím identického zobrazení $f(x) = x$ pro každé $x \in N$.

(ii) Někde v literatuře se přímo v definici izometrického zobrazení předpokládá, že je surjekcí.

**Příklad 2.22.** Eukleidovský prostor $\mathbb{E} := \mathbb{E}^1$ je možné izometricky vnořit do každého z metrických prostorů $(\mathbb{R}^2, \varrho_1)$, $\mathbb{E}^2$ a $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definovaná jako

$$f(x) := (x, 0), \quad x \in \mathbb{R},$$

je totiž izometrické zobrazení vzhledem ke všem třem metrikám $\varrho_1$, $\varrho_2$ a $\varrho_\infty$ na $\mathbb{R}^2$, jak se lze snadno přesvědčit.

**Cvičení 2.23.** (i) Nechť $M = C[-1,1]$ a definujme zobrazení $F : M \to M$ předpisem $F(f)(x) := f(-x)$ pro každé $f \in M$ a $x \in [-1,1]$. Dokažte, že $F$ je izometrie každého z prostorů $(M, \varrho_C)$, $(M, \varrho_I)$ do sebe.

(ii) Ukažte, že Gaussova rovina $\mathbb{C}$ je izometrická s $\mathbb{R}^2$.

**Poznámka 2.24.** Je-li $f$ prosté zobrazení množiny $M$ do metrického prostoru $(N, \sigma)$, lze jednoduše z $M$ vytvořit metrický prostor tak, aby $f$ byla izometrie mezi $(M, \varrho)$ a $(f(M), \sigma)$; stačí definovat na $M$ metriku $\varrho$ předpisem

$$\varrho(x, y) := \sigma(f(x), f(y)), \quad x, y \in M.$$

Toto je jedna z cest, pomocí níž lze definovat další metrické prostory.

**Poznámka 2.25** (Metrické pojmy, resp. vlastnosti)**.** Pojmy invariantní vůči izometrickým zobrazením se nazývají metrické. Jsou-li $(M, \varrho)$, $(N, \sigma)$ izometrické prostory, mají metrické pojmy v obou prostorech v podstatě zcela analogické vlastnosti. Každému výroku (definici, větě) v $M$ odpovídá analogický výrok (definice, věta) v $N$. Znamená to například, že některá tvrzení stačí dokázat v jednom prostoru a do ostatních, s ním izometrických, se izometrií „přenesou". Vzhledem k tak velké podobnosti izometrických prostorů se někdy říká, že jde o *tentýž prostor s jiným označením bodů* (srv. $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$). Viz také Poznámka 2.90.

## 2.2 Klasifikace bodů a některé význačné množiny v metrických prostorech

### Klasifikace bodů vzhledem k množině, otevřené a uzavřené množiny

Důležitou roli v teorii hrají mj. otevřené a uzavřené množiny, které lze chápat jako zobecnění otevřených a uzavřených intervalů v $\mathbb{E}^1$. Začněme však se speciálnějším pojmem, totiž s otevřenými a uzavřenými koulemi. Později pak zavedeme tzv. husté množiny a separabilní prostory a uvidíme jejich důležitost.

**Definice 2.26** (Otevřené a uzavřené koule, okolí, sféra)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a nechť $x_0 \in M$ a $r \in \mathbb{R}^+$ jsou dané. *Otevřenou*, resp. *uzavřenou koulí* se středem v bodě $x_0$ a poloměrem $r$ rozumíme množinu

$$\mathcal{B}(x_0, r) := \{x \in M,\ \varrho(x, x_0) < r\}, \text{ resp. } \mathcal{B}[x_0, r] := \{x \in M,\ \varrho(x, x_0) \le r\}.$$

Někdy se uzavřená koule označuje jako $K(x_0, r)$. Bude-li nutno vyjádřit závislost na metrice, budeme psát $\mathcal{B}_\varrho(x_0, r)$ apod. Přirozeným způsobem zavádíme i pojem *sféry* se středem v bodě $x_0$ a poloměrem $r$, totiž jako množinu

$$\mathcal{S}(x_0, r) := \{x \in M,\ \varrho(x, x_0) = r\}.$$

Pro $\mathcal{B}(x_0, \varepsilon)$ se používá i označení $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$ a pojmenování *$\varepsilon$-okolí* bodu $x_0$. V literatuře bývá (v souladu s topologickou definicí) pojem okolí bodu zaveden jako libovolná otevřená množina obsahující tento bod; pojem otevřené množiny vyjasníme zanedlouho. Okolím bodu $x_0$ lze též nazvat podmnožinu $O \subseteq M$ (obvykle otevřenou) takovou, že nějaká koule $\mathcal{B}(x_0, r)$ je podmnožinou $O$. Tyto přístupy k zavedení okolí však dávají v jistém smyslu ekvivalentní pojmy.

**Cvičení 2.27.** Jak vypadají otevřené a uzavřené koule v diskrétním metrickém prostoru? Jaký tvar má koule v $(\mathbb{R}^2, \varrho_\infty)$?

Následující definici lze chápat jako jistou klasifikaci bodů metrického prostoru vzhledem k množině. V literatuře lze nalézt i alternativní definice některých pojmů, což je celkem přirozené vzhledem k existenci ekvivalentních charakteristik, viz též níže.

**Definice 2.28.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor, $N \subseteq M$ podmnožina a $x_0 \in M$ bod.

(i) Bod $x_0$ se nazývá *bodem uzávěru* množiny $N$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \cap N \neq \emptyset$. Množina všech bodů uzávěru množiny $N$ se nazývá *uzávěr* množiny $N$ a značí se $\overline{N}$ (někdy též $\operatorname{cl} N$).

(ii) Bod $x_0$ se nazývá *hraničním bodem* množiny $N$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \cap N \neq \emptyset$ i $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \cap (M \setminus N) \neq \emptyset$. Množina všech hraničních bodů množiny $N$ se nazývá *hranice* množiny $N$ a značí se $h(N)$ (někdy též $\partial N$, či $\operatorname{fr} N$ – frontier).

(iii) Bod $x_0$ se nazývá *hromadným bodem* množiny $N$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ množina $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů z $N$. Množina všech hromadných bodů množiny $N$ se nazývá *derivace* množiny $N$ a značí se $N'$.

(iv) Bod $x_0$ se nazývá *vnitřním bodem* množiny $N$, pokud existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \subseteq N$. Množina všech vnitřních bodů množiny $N$ se nazývá *vnitřek* množiny $N$ a značí se $N^o$ (někdy též $\operatorname{int} N$ – interior).

(v) Bod $x_0$ se nazývá *izolovaným bodem* množiny $N$, pokud existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \cap N = \{x_0\}$. Množina všech izolovaných bodů množiny $N$ se nazývá *adherence* množiny $N$.

Zde jsou některé vybrané vlastnosti právě zavedených pojmů.

**Věta 2.29.** *Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $A, B \subseteq M$ podmnožiny.*

*(i)* $\overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \emptyset^o = \emptyset, \quad \overline{M} = M, \quad M^o = M.$

*(ii)* $A \subseteq \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad A^o \subseteq A, \quad (A^o)^o = A^o.$

*(iii) Jestliže $A \subseteq B$, potom $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

*(iv)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad (A \cap B)^o = A^o \cap B^o.$

*(v)* $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{M \setminus A}, \quad \partial(A) = \overline{A} \setminus A^o.$

*(vi)* $\partial(\partial A(\partial A)) = \partial A(\partial A) \subseteq \partial A.$

**Cvičení 2.30.** (i) Dokažte vlastnost (iii) z předchozí věty s využitím (2.26).

(ii) Ukažte, že $\overline{A} = A \cup A'$.

(iii) Platí $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$? Platí $(A \cup B)^o = A^o \cup B^o$?

(iv) Nechť $A = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ v $\mathbb{E}^1$. Určete $A^o, h(A), \overline{A}, A'$.

**Poznámka 2.31.** (i) Všimněme si, že body metrického prostoru $(M, \varrho)$, kde $N \subseteq M$, jsou vzhledem k $N$ vlastně trojího druhu: body z $N^o$ (vnitřní body), body z $(M \setminus N)^o$ („vnější“ body) a ostatní (tj. hraniční body). Tyto tři množiny (jsou-li neprázdné) tvoří rozklad na $M$.

(ii) Každý bod uzávěru množiny $N$ je buď hromadným nebo izolovaným bodem této množiny. Z toho plyne, že se uzávěr $\overline{N}$ skládá z bodů tří typů. Jsou to: izolované body množiny $N$; hromadné body množiny $N$, které patří do množiny $N$; hromadné body množiny $N$, které nepatří do množiny $N$.

**Poznámka 2.32.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $N \subseteq M$ podmnožina. Přímo z Definice 2.28-(i) a rovnosti (2.21) vyplývá, že uzávěr $\overline{N}$ lze ekvivalentně charakterizovat ve tvaru

$$\overline{N} = \{x \in M, \ \varrho(x, N) = 0\}. \tag{2.26}$$

Zmiňme dále, že podle Definice 2.28 každý hraniční bod množiny $N$, jakož i každý hromadný bod $N$, je zároveň bodem uzávěru množiny $N$.

Nyní zavedeme pojem otevřené a uzavřené množiny v metrickém prostoru. Poznamenejme, že — podobně jako pro mnohé další případy — v literatuře lze narazit i na odlišné (avšak ekvivalentní) definice těchto pojmů, které však mohou být takto vysloveny díky jistým existujícím vztahům. Tyto vztahy zmíníme dále v textu.

**Definice 2.33** (Otevřená a uzavřená množina)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $N \subseteq M$ podmnožina. Množina $N$ se nazývá *otevřená* (v metrickém prostoru $(M, \rho)$), jestliže $N = N^o$, tj. každý bod množiny $N$ je jejím vnitřním bodem. Množina $N$ se nazývá *uzavřená* (v metrickém prostoru $(M, \varrho)$), jestliže $N = \overline{N}$, tj. každý bod uzávěru množiny $N$ patří do $N$. Množinám, které jsou současně otevřené i uzavřené, se někdy říká *obojetné*.

**Poznámka 2.34.** V obecném metrickém prostoru $(M, \varrho)$ je každá jeho konečná podmnožina $N$ uzavřená v $(M, \varrho)$. Navíc každé $x \in N$ je izolovaným bodem množiny $N$.

**Poznámka 2.35.** (i) Z vlastnosti (ii) Věty 2.29 zřejmě plyne, že $A^o$ je vždy otevřená a $\overline{A}$ je vždy uzavřená.

(ii) Lze ukázat, že množina $A^o$ je největší (ve smyslu inkluze) otevřenou podmnožinou množiny $A$. Množina $\overline{A}$ je nejmenší (ve smyslu inkluze) uzavřenou nadmnožinou množiny $A$.

(iii) V každém metrickém prostoru $(M, \varrho)$ jsou $M$ a $\emptyset$ zároveň otevřené i uzavřené, neboť každá z nich je uzavřená a jedna je komplementem druhé, viz Věta 2.37.

**Příklad 2.36.** (i) Jak lze očekávat, pro každé $x_0 \in M$ a $r > 0$ je otevřená koule $\mathcal{B}(x_0, r)$ otevřenou množinou v $(M, \varrho)$. Skutečně, nechť $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$ a položme $\varepsilon := r - \varrho(x_0, x)$. Potom podle Definice 2.26 platí $\varepsilon > 0$. Uvažujme okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$ bodu $x$. Potom pro $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(x)$ platí

$$\varrho(x_0, y) \le \varrho(x_0, x) + \varrho(x, y) < \varrho(x_0, x) + \varepsilon = r,$$

a tedy $y \in \mathcal{B}(x_0, r)$. Proto $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{B}(x_0, r)$, a tedy podle Definice 2.28-(iv) je $x$ vnitřním bodem množiny $\mathcal{B}(x_0, r)$. A poněvadž bod $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$ byl vybraný libovolně, v souladu s Definicí 2.33 to znamená, že $\mathcal{B}(x_0, r)$ je otevřená množina v $(M, \varrho)$. Později uvidíme, že důkaz uvedeného faktu lze provést i jinak, a to pomocí konvergentních posloupností.

Dále platí, že uzavřená koule $\mathcal{B}[x_0, r]$ je uzavřenou množinou v $(M, \varrho)$. Poznamenejme, že vždy platí inkluze $\overline{\mathcal{B}(x_0, r)} \subseteq \mathcal{B}[x_0, r]$. Avšak pozor: obecně neplatí(!) rovnost $\overline{\mathcal{B}(x_0, r)} = \mathcal{B}[x_0, r]$. Prozkoumejte v této souvislosti diskrétní metrický prostor obsahující aspoň dva prvky a vezměte $r = 1$.

(ii) Množina $\{f \in C[a, b] : \varrho_C(f, 0) < 1\}$ je otevřená v metrickém prostoru $(C[a, b], \varrho_C)$.

Následující věta nám dává možnost charakterizace otevřené množiny pomocí uzavřené a naopak; někdy se užívá přímo v definici.

**Věta 2.37.** *Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $N \subseteq M$. Potom množina $N$ je otevřená v $(M, \varrho)$ právě tehdy, když $M \setminus N$ je uzavřená v $(M, \varrho)$. Podobně, množina $N$ je uzavřená v $(M, \varrho)$ právě tehdy, když $M \setminus N$ je otevřená v $(M, \varrho)$.*

*Důkaz.* Přenecháváme jako cvičení. □

**Poznámka 2.38.** Struktura otevřených a uzavřených množin v nějakém metrickém prostoru může být velmi složitá. To platí i pro otevřené a uzavřené množiny eukleidovského prostoru o dvou nebo více dimenzích. Avšak u jednorozměrného eukleidovského prostoru (tj. u reálné osy) nečiní vyčerpávající popis obtíže. Platí totiž (viz např. [28]):

*Každá otevřená množina v reálné ose je disjunktní sjednocení konečného počtu nebo spočetně mnoha otevřených intervalů.*

Vzhledem k Větě 2.37 pak každou uzavřenou množinu v reálné ose dostaneme tak, že z reálné osy vypustíme konečný počet nebo spočetně mnoho otevřených intervalů.

**Příklad 2.39.** V diskrétním metrickém prostoru je každá množina současně uzavřená a otevřená. Proč? Které množiny v prostoru $\mathbb{E}^n$ jsou obojetné? Zajímavým příkladem uzavřené množiny v $\mathbb{E}^1$ je *Cantorovo diskontinuum.*

**Příklad 2.40.** V Příkladu 2.6 jsme zavedli metrické prostory $\ell^\infty$, $c$ a $c_0$. Platí, že $c$ a $c_0$ jsou uzavřené metrické podprostory v prostoru $\ell^\infty$.

**Věta 2.41.** *Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor.*

*(i) Průnik konečného počtu otevřených množin v $(M, \varrho)$ a sjednocení libovolného počtu otevřených množin v $(M, \varrho)$ je opět množina otevřená*

*(ii) Sjednocení konečného počtu uzavřených množin v $(M, \varrho)$ a průnik libovolného počtu uzavřených množin v $(M, \varrho)$ je opět množina uzavřená.*

*Důkaz.* Pokuste se o důkaz sami. Začněte např. částí (ii), využijte Větu 2.29. V důkazu části (i) se mohou hodit de Morganova pravidla a Věta 2.37. □

**Cvičení 2.42.** Na vhodných příkladech ukažte, že průnik nekonečného počtu otevřených množin nemusí být otevřená množina a sjednocení nekonečného počtu uzavřených množin nemusí být uzavřená množina.

## Husté a řídké množiny, separabilní prostory

Nyní zavedeme další důležité typy množin v metrickém prostoru.

**Definice 2.43** (Hustá množina)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $A, B \subseteq M$ podmnožiny. Říkáme, že množina $B$ je *hustá* v množině (metrickém podprostoru) $(A, \varrho)$, pokud platí $A \subseteq \overline{B}$. Speciálně množina $B$ se nazývá *hustá* v metrickém prostoru $(M, \varrho)$, pokud platí $\overline{B} = M$.

**Poznámka 2.44.** Hustotu množiny $B$ v prostoru $M$ lze ekvivalentně charakterizovat následovně: *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *a každé* $x \in M$ *existuje* $a \in B$ *takové, že* $\varrho(x, a) < \varepsilon$. Pokuste se dokázat tento jednoduchý a užitečný fakt.

**Cvičení 2.45.** Nalezněte dvě různé množiny, které jsou husté v $\mathbb{E}^1$, přičemž aspoň jedna z nich má mohutnost menší než mohutnost kontinua.

**Definice 2.46** (Řídká množina)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $N \subseteq M$ podmnožina. Množina $N$ se nazývá *řídká* v metrickém prostoru $(M, \varrho)$, pokud neexistuje otevřená koule v $M$, v níž by množina $N$ byla hustá.

**Poznámka 2.47.** (i) Řídkost množiny $N$ v prostoru $M$ lze ekvivalentně charakterizovat následovně: každá otevřená koule $B \subseteq M$ obsahuje otevřenou kouli $C \subseteq B$ tak, že $N \cap C = \emptyset$.

(ii) Jinou charakterizací řídkosti množiny $N$ v prostoru $M$ je, že vnitřek jejího uzávěru je prázdný. Konečně, ekvivalentně lze vyjádřit, že $N$ je řídká v prostoru $M$, právě když $M \setminus \overline{N}$ je (otevřená) hustá.

**Příklad 2.48.** Množina celých čísel je řídká v $\mathbb{E}^1$. Dalším příkladem řídké množiny může být například Cantorovo diskontinuum, které je navíc nespočetné. Naopak řídkou množinou není množina racionálních čísel na reálné přímce (neboť doplňkem jejího uzávěru je prázdná množina), ačkoliv uzávěr vnitřku racionálních čísel je také prázdná množina.

**Definice 2.49** (Separabilní metrický prostor)**.** Metrický prostor $(M, \varrho)$ se nazývá *separabilní*, jestliže existuje nejvýše spočetná podmnožina $N \subseteq M$, která je hustá v $(M, \varrho)$.

Důležitost separability a hustých podmnožin v metrických prostorech je demonstrována v následujícím příkladě. Oceníme ji zejména v teorii aproximace (potažmo v numerické analýze). Totiž např. z hustoty množiny racionálních čísel v prostoru reálných čísel plyne, že každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat racionálními čísly. Z hustoty množiny polynomů v prostoru spojitých funkcí plyne, že každou spojitou funkci můžeme na daném uzavřeném intervalu s libovolnou přesností aproximovat vhodným polynomem.

**Příklad 2.50** (Separabilita prostoru spojitých funkcí)**.** Pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je metrický prostor $(C[a, b], \varrho_C)$ separabilní. Tento významný výsledek vyplývá z Weierstrassovy věty o aproximaci spojitých funkcí, podle které je množina $P$ všech polynomů s reálnými koeficienty hustá v metrickém prostoru $(C[a, b], \varrho_C)$; přesněji platí, že jsou-li $f \in C[a, b]$ a

$\varepsilon > 0$ libovolné, existuje polynom $R(x)$ takový, že $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - R(x)| < \varepsilon$, pro důkaz viz např. [25]. Podle Definice 2.43 tedy platí $C[a, b] = \overline{P}$. Z vlastností množiny reálnych čísel $\mathbb{R}$ dále víme, že množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v metrickém prostoru $\mathbb{E}$. To znamená, že množina $Q$ všech polynomů s racionálními koeficienty je hustá v $P$, tj. platí $P \subseteq \overline{Q}$ opět podle Definice 2.43. Navíc, vzhledem k faktu, že zřejmě $Q \subseteq P$, v souladu s Větou 2.29-(ii),(iii) máme $\overline{P} = \overline{Q}$. V důsledku toho $C[a, b] = \overline{Q}$, což ukazuje, že množina $Q$ je hustá v metrickém prostoru $(C[a, b], \varrho_C)$. A poněvadž množina $Q$ je spočetná (díky spočetnosti množiny $\mathbb{Q}$), je $(C[a, b], \varrho_C)$ ve shodě s Definicí 2.49 separabilní metrický prostor. Jinou možností důkazu separability prostoru $(C[a, b], \varrho_C)$ je sestrojení množiny spojitých po částech lineárních funkcí, které nabývají v uzlových bodech racionálních hodnot. Tato množina je spočetná a díky stejnoměrné spojitosti funkcí z $C[a, b]$ lze ukázat, že je hustá v $C[a, b]$. Alternativně lze též využít spočetné $\varepsilon$-ové sítě (viz Cvičení 2.162) a stejnoměrné spojitosti (která je implikována spojitostí funkce na omezeném a uzavřeném intervalu). Nakonec poznamenejme, že prostor spojitých omezených funkcí na intervalu $I$ se supremovou metrikou je separabilní, právě když interval $I$ je omezený a uzavřený.

**Cvičení 2.51** (Separabilita diskrétního prostoru)**.** Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby byl separabilní diskrétní metrický prostor.

**Příklad 2.52** (Separabilita $\ell^p$ prostorů)**.** Pro každou reálnou hodnotu $p \geq 1$ je metrický prostor $\ell^p$ zavedený v Příkladu 2.6 separabilní, přičemž jeho příslušná spočetná hustá podmnožina je například

$$N = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}, \quad x_k \neq 0 \text{ pouze pro konečně mnoho indexů } k \in \mathbb{N}\}\,. \tag{2.27}$$

Podstatnou úlohu zde hraje skutečnost, že množina $\mathbb{Q}$ je spočetná a hustá v metrickém prostoru $\mathbb{E}$. Doplňte detaily např. pro případ $p = 2$. Mj. si uvědomte, že konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ implikuje $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x_k^2 = 0$.

Pro zjištění neseparability můžeme využít následující kritérium.

**Věta 2.53.** *Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor. Jestliže existuje $\delta > 0$ a nespočetná množina $N \subseteq M$ taková, že $\varrho(x, y) > \delta$ pro každé $x, y \in N$, $x \neq y$, pak $(M, \varrho)$ není separabilní.*

*Důkaz.* Nechť $A$ je libovolná hustá podmnožina v $M$. Podle Poznámky 2.44 to znamená, že ke každému $x \in M$ a každému $\varepsilon > 0$, zejména k $\varepsilon = \delta/2$, existuje $a \in A$ takové, že $\varrho(a, x) < \varepsilon$. Protože $N \subseteq M$, totéž tvrzení platí i pro $x \in N$, což je však vzhledem k nespočetnosti množiny $N$ možné jen tehdy, když $A$ je nespočetná, tedy metrický prostor $(M, \varrho)$ není separabilní. □

**Příklad 2.54** (Neseparabilita prostoru $\ell^\infty$)**.** Prostor $\ell^\infty$ všech ohraničených posloupností reálných čísel není separabilní. Skutečně, nechť $N$ je podmnožina $\ell^\infty$ sestávající z posloupností, v nichž se vyskytují pouze čísla 0 a 1. Tato množina je nespočetná. Navíc, pro každé $x, y \in N$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) = 1$. Tedy podle Věty 2.53 prostor $\ell^\infty$ není separabilní.

**Příklad 2.55** (Separabilita $L^p$ prostorů)**.** Lebesgueovy prostory $L^p(I)$ jsou separabilní pro $p \in [1, \infty)$. Prostor $L^\infty(I)$ separabilní není. Detailní důkazy těchto faktů zde podrobně uvádět nebudeme, čtenář je nalezne např. v [28] a mnoha dalších zdrojích. Separabilita prostoru $L^2$ je v našem textu trochu podrobněji diskutována později, a to v kontextu Fourierovy analýzy v Sekci 5.5, přesněji viz (5.38). K separabilitě $L^p(I)$ poznamenejme, že množina jednoduchých (po částech konstantních) funkcí nabývajících racionálních hodnot a definovaných pomocí intervalů s racionálními konečnými body je spočetná a hustá v $L^p(I)$.

**Příklad 2.56** (Separabilita Baireova prostoru)**.** Baireův metrický prostor zavedený v Příkladu 2.12 je separabilní, viz např. [11].

## 2.3 Konvergence v metrickém prostoru

### Konvergentní a cauchyovské posloupnosti

Z diferenciálního počtu známe pojem konvergentní posloupnosti. Obdobně můžeme tento pojem definovat v libovolném metrickém prostoru.

**Definice 2.57** (Konvergentní posloupnost)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq M$ posloupnost. Říkáme, že posloupnost $\{x_k\}$ *konverguje* v metrickém prostoru $(M, \varrho)$ k bodu $x \in M$, jestliže

$$\text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tak, že pro každé } k \geq k_\varepsilon \text{ platí } x_k \in \mathcal{O}_\varepsilon(x). \tag{2.28}$$

Jinak řečeno, platí relace $\lim_{k\to\infty} \varrho(x_k, x) = 0$ v obvyklém smyslu limity číselné posloupnosti. Bod $x \in M$ se nazývá *limita posloupnosti* $\{x_k\}$, přičemž píšeme $x_k \to x$ pro $k \to \infty$. Bude-li nutno vyjádřit závislost na metrice, budeme psát $x_k \xrightarrow{\varrho} x$ pro $k \to \infty$; někdy se píše i $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ v metrice $\varrho$.

**Definice 2.58** (Cauchyovská posloupnost)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq M$ posloupnost. Říkáme, že posloupnost $\{x_k\}$ je *cauchyovská* (též *fundamentální*) v $(M, \varrho)$, jestliže

$$\text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tak, že pro každé } m, n \geq k_\varepsilon \text{ platí } \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{2.29}$$

Jinak řečeno, platí relace $\varrho(x_m, x_n) \to 0$ pro $\min\{m, n\} \to \infty$.

Následuje několik základních vlastností nadefinovaných objektů.

**Věta 2.59.** *Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor. Potom platí následující tvrzení.*

*(i) Každá posloupnost konvergentní v $M$ i cauchyovská posloupnost v $M$ je omezená v $M$.*

*(ii) Každá posloupnost konvergentní v $M$ má právě jednu limitu.*

*(iii) Každá posloupnost konvergentní v $M$ je cauchyovská v $M$.*

*(iv) Jestliže posloupnost $\{x_k\} \subseteq M$ konverguje k bodu $x \in M$, potom každá podposloupnost vybraná z této posloupnosti konverguje k $x$.*

*(v) Jestliže posloupnost $\{x_k\} \subseteq M$ je cauchyovská a obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou $x \in M$, potom celá posloupnost je konvergentní s limitou $x$.*

*Důkaz.* Důkazy jsou analogické důkazům v diferenciálním počtu. Jako cvičení si dokažte (iii). Využijte nerovnost $\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x) + \varrho(x, x_n)$, která plyne z trojúhelníkové nerovnosti. □

**Cvičení 2.60.** Je každá posloupnost cauchyovská v $M$ je konvergentní v $M$, tj. platí opačná implikace k (iii) v obecném metrickém prostoru?

Následující věta charakterizuje uzavřené množiny pomocí konvergence a často se používá při důkazu uzavřenosti množin v konkrétních metrických prostorech. Zhruba řečeno, uzavřenost množiny znamená, že konvergentní posloupnosti „limitně nevypadnou“ z dané množiny.

**Věta 2.61.** *Nechť $A \subseteq M$, kde $(M, \varrho)$ je metrický prostor. Množina $A$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $\{x_k\} \subseteq A$ takovou, že $x_k \to x \in M$, platí $x \in A$.*

*Důkaz.* Důkaz přenecháváme zájemcům jako cvičení. □

**Poznámka 2.62.** Bod $x \in M$ je bodem uzávěru množiny $A \subseteq M$, právě když existuje konvergentní posloupnost $\{x_k\} \subseteq A$, která má za limitu bod $x$. Uzávěr množiny $A$ se někdy proto definuje jako množina limit všech posloupností bodů z $A$, které v $M$ konvergují.

**Příklad 2.63** (Konvergence v diskrétním metrickém prostoru)**.** V diskrétním metrickém prostoru je posloupnost konvergentní, resp. cauchyovská právě tehdy, když je *skorostacionární*, tj. od jistého indexu konstantní. Díky tomuto faktu a Větě 2.61 snadno vidíme, že každá množina v diskrétním metrickém prostoru je uzavřená.

**Cvičení 2.64.** (i) Uvažujte metrický prostor $(C[a,b], \varrho_C)$ a $\{f_n\} \subseteq C[a,b]$. Ukažte, že

$$f_n \xrightarrow{\varrho_C} f \quad \Leftrightarrow \quad f_n \rightrightarrows f$$

na $[a,b]$. Poznamenejme, že z tohoto důvodu se metrika $\varrho_C$ někdy nazývá *metrikou stejnoměrné konveregence.*

(ii) S přihlédnutím k charakterizaci uzavřené množiny pomocí konvergentních posloupností a otevřené množiny jako komplementu uzavřené množiny znovu (a jinak než v Příkladu 2.36) dokažte, že otevřená koule je otevřená množina.

(iii) Ukažte, že $C[a,b]$ je uzavřená v $B[a,b]$ v suprémové metrice. (Suprémová metrika zřejmě indukuje $\varrho_C$ v $C[a,b]$).

**Poznámka 2.65.** Fakt, že množina $B \subseteq M$ je hustá v metrickém prostoru $(M, \varrho)$, lze charakterizovat následujícím způsobem: pro každé $x \in M$ existuje posloupnost $\{x_n\} \subseteq B$ tak, že $x_n \to x$.

## Ekvivalentní metriky

**Definice 2.66** (Ekvivalentní metriky)**.** Nechť $(M, \varrho)$ a $(M, \sigma)$ jsou metrické prostory. Řekneme, že metriky $\varrho$ a $\sigma$ jsou *ekvivalentní*, jestliže pro každou posloupnost $\{x_k\} \subseteq M$ a bod $x \in M$ platí

$$x_k \xrightarrow{\varrho} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_k \xrightarrow{\sigma} x. \tag{2.30}$$

**Poznámka 2.67.** Upozorněme, že v literatuře lze nalézt různé definice ekvivalence metrik či velmi příbuzných pojmů (využívajících charakterizace okolí, zachování otevřenosti, či nerovnosti mezi násobky vzdálenosti s jemnými modifikacemi v kvantifikátorech). Ne všechny takové definice jsou navzájem stejně silné. Zmiňme zde alespoň pojem *stejnoměrně ekvivalentních* metrik $\varrho$ a $\sigma$ v $M$, který se zavádí takto: Existují konstanty $0 < c_1 < c_2$ tak, že pro všechna $x, y \in M$ platí

$$c_1 \varrho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq c_2 \varrho(x, y).$$

Stejnoměrně ekvivalentní metriky jsou ekvivalentní, obráceně to neplatí: Prozkoumejte $\varrho(x, y) = |x - y|$ a $\sigma(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$ na $\mathbb{R}$. Poznamenejme, že v metrice $\sigma$ jsou všechny množiny omezené.

Pojem ekvivalence budeme později diskutovat i v kontextu normovaných lineárních prostorů.

**Poznámka 2.68.** Ekvivalence metrik je relací ekvivalence, tedy je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Lze tedy všechny metriky na $M$ rozložit na třídy ekvivalence.

**Poznámka 2.69.** Ekvivalentní metriky určují stejné konvergentní i cauchyovské posloupnosti, otevřené a uzavřené množiny, hranice, úplné množiny, kompaktní množiny, separabilní množiny; pokud některé z uvedených pojmů nejsou definovány výše, lze je nalézt níže v textu. Neurčují však nutně stejné omezené množiny, na to je zapotřebí stejnoměrně ekvivalentní metriky.

**Příklad 2.70.** Metriky $\varrho_C$ a $\varrho_I$ na prostoru $C[a, b]$ nejsou ekvivalentní. Označme $c := (a + b)/2$ a pro dostatečně velké indexy $n \in \mathbb{N}$ uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\} \subseteq C[a, b]$ s předpisy

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in \left[a, c - \frac{1}{n}\right] \cup \left[c + \frac{1}{n}, b\right], \\ n\left(x - c + \frac{1}{n}\right), & x \in \left[c - \frac{1}{n}, c\right], \\ n\left(c - x + \frac{1}{n}\right), & x \in \left[c, c + \frac{1}{n}\right]. \end{cases} \tag{2.31}$$

V integrální metrice $\varrho_I$ tato posloupnost konverguje k funkci $f(x) \equiv 0$ na $[a, b]$. V metrice stejnoměrné konvergence $\varrho_C$ však posloupnost v (2.31) nemá limitu v $C[a, b]$, neboť bodová limita $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ je funkce nespojitá v $[a, b]$. Kromě toho platí $\lim_{n\to\infty} \varrho_C(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, a tedy podle Definic 2.57 a 2.66 dané metriky nejsou ekvivalentní na množině $C[a, b]$.

**Cvičení 2.71.** Dokažte, že metriky $\varrho(x, y) = |x - y|$ a $\sigma(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$ jsou ekvivalentní na $\mathbb{R}$.

## 2.4 Zobrazení metrických prostorů

### Spojité zobrazení

V této sekci zavedeme pojem spojitosti zobrazení mezi dvěma metrickými prostory a budeme diskutovat příbuzné (silnější) pojmy. Připomeňte si nejdříve definici spojitosti reálné funkce reálné proměnné. Totiž definice spojitosti mezi libovolnými metrickými prostory je v jistém smyslu analogická.

**Definice 2.72** (Spojité zobrazení)**.** Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f : M \to N$. Zobrazení $f$ se nazývá *spojité v bodě* $x_0 \in M$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in M$ takové, že $\varrho(x, x_0) < \delta$, platí $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Zobrazení $f$ je *spojité na množině* $M$, pokud je spojité v každém bodě množiny $M$.

Definici lze přirozeně naformulovat i v „řeči“ okolí. Existují další ekvivalentní vyjádření. Nejdříve uvedeme kritérium Heineova typu, které je velmi důležitým nástrojem při vyšetřování spojitosti různých zobrazení mezi metrickými prostory. V literatuře se často objevuje i jako definice spojitosti.

**Věta 2.73.** *Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f : M \to N$ zobrazení. Potom $f$ je spojité v bodě $x_0 \in M$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_k\} \subseteq M$ takovou, že $x_k \xrightarrow{\varrho} x_0$, platí $f(x_k) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$.*

*Důkaz.* Důkaz je nepříliš odlišný od klasického Heineova kritéria, viz např. [11]. □

**Příklad 2.74.** Uvažujme metrické prostory $(M, \varrho) := \mathbb{E}$ a $(N, \sigma) := (\mathbb{R}, \varrho_D)$, kde $\rho_D$ je diskrétní metrika. Potom zobrazení $f : M \to N$ je spojité na $M$ právě tehdy, když je konstantní na $M$.

Nyní uvedeme další ekvivalentní vyjádření spojitosti. Formulace (iii) je typická pro zavedení spojitosti v topologických prostorech, ovšem i formulace z předchozí definice (modifikovaná v řeči okolí) je v tomto kontextu možná.

**Věta 2.75.** *Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f : M \to N$ zobrazení. Nasledující výroky jsou ekvivalentní.*

*(i)* *Zobrazení $f$ je spojité na $M$.*

*(ii)* *Pro každou podmnožinu $A \subseteq M$ platí $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.*

*(iii)* *Pro každou otevřenou podmnožinu $B \subseteq N$ je její (úplný) vzor*

$$f^{-1}(B) := \{x \in M,\ f(x) \in B\} \tag{2.32}$$

*otevřenou podmnožinou v metrickém prostoru $(M, \varrho)$.*

*(iv)* *Pro každou uzavřenou podmnožinu $B \subseteq N$ je množina $f^{-1}(B)$ uzavřenou podmnožinou v metrickém prostoru $(M, \varrho)$.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt v mnoha textech, např. [17] nebo [28]. □

**Cvičení 2.76.** Dokažte, že každé zobrazení $f : M \to N$, kde $M$ je metrický prostor s diskrétní metrikou $\varrho_D$ a $(N, \sigma)$ je libovolný metrický prostor, je spojité. Najděte dva důkazy, a to jednak s využitím věty Heineova typu (uvědomte si, že v diskrétní metrice konvergují pouze skorostacionární posloupnosti) a dále použijte charakteristiku (iii) z předchozí věty.

**Poznámka 2.77.** Již dříve připomenuté tvrzení o spojité funkci na omezeném uzavřeném intervalu později rozšíříme na zobrazení kompaktního metrického prostoru (Věta 2.148).

Následující pojem zesiluje spojitost zobrazení. Na rozdíl od spojitosti, která je vlastností lokální, jde o vlastnost globální. Všimněme si, že $\delta$ v definici závisí pouze na $\varepsilon$, nikoliv na $x$.

**Definice 2.78** (Stejnoměrně spojité zobrazení)**.** Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f : M \to N$. Řekneme, že zobrazení $f$ je *stejnoměrně spojité* na $M$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in M$ splňující $\varrho(x, y) < \delta$ platí $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

**Příklad 2.79.** Uvažujme reálné funkce jedné reálné proměnné. Každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá. Každá spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu je stejnoměrně spojitá (později toto tvrzení rozšíříme pro spojitá zobrazení na kompaktních metrických prostorech). Funkce $f(x) = kx$ je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$. Funkce $e^x$ je spojitá na $\mathbb{R}$, ale není zde stejnoměrně spojitá. Funkce $\operatorname{tg} x$ je spojitá na $(-\pi/2, \pi/2)$, ale není zde stejnoměrně spojitá.

## Lipschitzovské zobrazení a kontrakce

**Definice 2.80** (Lipschitzovské zobrazení a kontrakce)**.** Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f : M \to N$. Zobrazení $f$ se nazývá *lipschitzovské*, jestliže existuje nezáporná reálná konstanta $L$ s vlastností

$$\sigma(f(x), f(y)) \le L\varrho(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in M. \tag{2.33}$$

Číslo $L$ je tzv. *Lipschitzova konstanta* zobrazení $f$. V případě, že $L \in [0, 1)$, zobrazení $f$ nazýváme *kontraktivní zobrazení*, resp. *kontrakce*.

**Poznámka 2.81.** (i) Lipschitzovské zobrazení $f : M \to N$ je na $M$ spojité. Dokažte tento fakt. Lze ukázat, že $f$ je dokonce stejnoměrně spojité na $M$. Lze však najít zobrazení, které je stejnoměrně spojité, avšak není lipschitzovské.

(ii) Každá izometrie je lipschitzovské zobrazení. Je tedy i stejnoměrně spojité, a proto i spojité.

**Příklad 2.82.** Zobrazení $F : C[a, b] \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$F(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad f \in C[a, b], \tag{2.34}$$

je lipschitzovské zobrazení mezi metrickými prostory $(C[a,b], \varrho_C)$ a $\mathbb{E}$, kde Lipschitzova konstanta $L = b - a$. Detaily si ukážeme na přednášce. Všimněme si, že tedy $F$ je i spojité a ukázali jsme vlastně, že stejnoměrná konvergence funkční posloupnosti umožňuje záměnu limity a integrálu.

**Cvičení 2.83.** Nechť $F$ je zobrazení metrického prostoru $(C[0,1], \varrho_C)$ do sebe definováno předpisem

$$F(f)(x) := \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f \in C[0,1], \quad x \in [0,1]. \tag{2.35}$$

Ukažte, že $F$ je kontrakce.

**Poznámka 2.84.** Lze ukázat následující užitečný vztah. Nechť $a < b$ jsou daná reálná čísla. Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se spojitou derivací na intervalu $[a,b]$ je kontrakcí z metrického prostoru $([a,b], \varrho_2)$ do $\mathbb{E}$ právě tehdy, když platí $|f'(x)| < 1$ pro každé $x \in [a,b]$. S využitím Lagrangeovy věty ukažte implikaci „$\Leftarrow$" v tomto vztahu.

## Homeomorfní zobrazení

**Definice 2.85** (Homeomorfní zobrazení)**.** Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f : M \to N$ je bijekce. Zobrazení $f$ se nazývá *homeomorfní*, resp. *homeomorfismus*, jestliže obě zobrazení $f$ a $f^{-1}$ jsou spojitá. V tomto případě říkáme, že metrické prostory $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou (vzájemně) *homeomorfní*.

**Poznámka 2.86.** Poznamenejme, že je-li zobrazení $f$ spojité, inverzní zobrazení $f$ nemusí být spojité. Např. identické zobrazení na $\mathbb{R}$, chápané jako $(\mathbb{R}, \varrho_D) \to \mathbb{E}^1$, je spojité, ale inverzní zobrazení $\mathbb{E}^1 \to (\mathbb{R}, \varrho_D)$ není spojité.

Důležitost homeomorfního zobrazení v teorii metrických prostorů popisuje následující věta.

**Věta 2.87.** *Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory a nechť $f : M \to N$ je homeomorfní zobrazení. Potom platí následující tvrzení:*

*(i) Množina $A \subseteq M$ je otevřená v $M$ právě tehdy, když $f(A)$ je otevřená v $N$.*

*(ii) Množina $A \subseteq M$ je uzavřená v $M$ právě tehdy, když $f(A)$ je uzavřená v $N$.*

*Důkaz.* Plyne z Věty 2.75. □

**Poznámka 2.88.** (i) Každá izometrie je homeomorfismus. Skutečně, buď $f : M \to N$ izometrie. Potom $f$ je injekcí a surjekcí, a tedy i bijekcí. Přitom zřejmě platí, že $x_k \to x$ v $M$ právě tehdy, když $f(x_k) \to f(x)$ v $N$, takže obě zobrazení $f$ a $f^{-1}$ jsou spojitá.

(ii) Nechť $\varrho, \sigma$ jsou metriky na množině $M$. Tyto metriky jsou ekvivalentní, právě když metrické prostory $(M, \varrho)$ a $(M, \sigma)$ jsou homeomorfní.

**Příklad 2.89.** Zobrazení $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definované předpisem $f(x) := \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, je homeomorfismus metrických prostorů $\mathbb{E}$ a $((-1, 1), \varrho_2)$. Tento příklad ukazuje, že homeomorfní obraz úplného prostoru nemusí být úplný. O úplných prostorech hovoříme v příští sekci.

**Poznámka 2.90** (Topologické a metrické vlastnosti)**.** Vlastnosti, resp. pojmy definované v metrických prostorech, které jsou invariantní vůči homeomorfismům, se nazývají *topologické*. Připomeňme, že vlastnosti a pojmy, které se zachovávají při izometrickém zobrazení, se nazývají *metrické*. Dá se ukázat, že pojmy okolí, uzavřená množina, otevřená množina, bod uzávěru, uzávěr, vnitřek, vnějšek, hustá podmnožina, hranice a spojité zobrazení jsou topologické pojmy. Zejména tedy metrické prostory $(M, \varrho)$ a $(M, \sigma)$ s ekvivalentními metrikami mají stejné otevřené množiny, stejné uzavřené množiny a stejné uzávěry.

## 2.5 Úplné metrické prostory

### Úplný prostor

Z předchozího výkladu víme, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Přirozenou otázkou je, kdy je cauchyovská posloupnost konvergentní. Prostory, v nichž toto platí, se nazývají *úplné* a — jak brzy uvidíme — hrají v naší teorii velmi důležitou roli.

Připomeňme, že podle Cauchyova-Bolzanova kritéria je „klasická“ číselná posloupnost konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská (v našem pojetí bychom řekli, že prostor $\mathbb{E}^1$ je úplný). Důkaz lze najít ve standardních učebnicích a lze jej provést např. pomocí tzv. principu vložených intervalů (někdy též nazývaný Cantorův-Dedekindův axiom), který říká, že množina intervalů $I_n = [a_n, b_n]$, pro něž platí $I_n \supseteq I_{n+1}$ a $\lim(b_n - a_n) = 0$, má neprázdný průnik.

Jak však uvidíme, ne každý metrický prostor je úplný (a obecně tedy neplatí analogie Cauchyova-Bolzanova kritéria).

Shrnutí informací o původu, vývoji a významu pojmu úplnosti lze nalézt v [46].

**Definice 2.91** (Úplný metrický prostor)**.** Metrický prostor $(M, \varrho)$ se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje, tj. má limitu (která do tohoto prostoru patří).

Někdy se zavádí i pojem *úplné množiny* $N \subseteq M$ v metrickém prostoru $(M, \varrho)$; vyžaduje se, aby $N$ s metrikou indukovanou metrikou $\varrho$ byl úplný metrický prostor.

V úplných metrických prostorech konvergentní a cauchyovské posloupnosti splývají. To přináší výhodu při určování, zda posloupnost má limitu, neboť stačí ukázat, že je cauchyovská bez nutnosti samotnou limitu zjišťovat. To je velmi důležité např. při důkazech existenčních vět.

**Příklad 2.92.** Každý diskrétní metrický prostor je úplný, neboť každá je cauchyovská posloupnost je skorostacionární, a tedy nutně konvergentní.

**Příklad 2.93.** Důsledkem Cauchyova-Bolzanova kritéria (potažmo Cantorova-Dedekindova principu) je úplnost prostoru $\mathbb{E}^n$. Obecněji, platí, že $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$, kde $p \in [1, \infty)$, je úplný.

**Příklad 2.94.** Prostory $(\mathbb{Q}, \varrho_1)$ a $((a, b), \varrho_1)$ nejsou úplné. Zdůvodněte.

**Příklad 2.95** (Úplnost $\ell^p$-prostorů)**.** Pro každé $p \in [1, \infty)$ je prostor $\ell^p$ zavedený v Příkladu 2.6 úplným metrickým prostorem. Dokážeme toto tvrzení. Nechť $p \geq 1$ je dané a nechť $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell^p$, kde $x^{[n]} = \{x_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$, je nějaká posloupnost cauchyovská v prostoru $\ell^p$. Tedy

$$\varrho_p\left(x^{[m]}, x^{[n]}\right) \overset{(2.9)}{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{[m]} - x_k^{[n]}\right|^p\right)^{1/p} \to 0 \quad \text{pro } \min\{m, n\} \to \infty, \tag{2.36}$$

podle Definice 2.58. Ze vztahu (2.36) zejména vyplývá, že pro každý pevný index $k \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{x_k^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ cauchyovská v eukleidovském prostoru $\mathbb{E}$, a tedy i konvergentní díky úplnosti prostoru $\mathbb{E}$, viz Příklad 2.93. Nechť $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ označuje příslušnou posloupnost limit, tj.

$$x_k := \lim_{n\to\infty} x_k^{[n]}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.37}$$

Ukážeme, že posloupnost $\{x^{[n]}\}$ konverguje k $x$ v metrice $\varrho_p$ a že $x \in \ell^p$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z toho, že $\{x^{[n]}\}$ je cauchyovská v $\ell^p$, máme v souladu s (2.29) zaručenu existenci $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastností $\varrho_p(x^{[m]}, x^{[n]}) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $m, n \geq n_\varepsilon$, a tedy

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \left|x_i^{[m]} - x_i^{[n]}\right|^p\right)^{1/p} \overset{(2.9)}{\leq} \varrho_p\left(x^{[m]}, x^{[n]}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}. \tag{2.38}$$

Limitním přechodem v (2.38) pro $m \to \infty$ s ohledem na (2.37) dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \left|x_i - x_i^{[n]}\right|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}, \tag{2.39}$$

z čehož následným limitním přechodem pro $k \to \infty$ získáme

$$\varrho_p\left(x, x^{[n]}\right) \overset{(2.9)}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i - x_i^{[n]}\right|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{pro každé } n \geq n_\varepsilon. \tag{2.40}$$

Nerovnost (2.40) podle Definice 2.57 znamená, že posloupnost $\{x^{[n]}\}$ konverguje k $x$ v metrice $\varrho_p$. Zejména, $\{x^{[n]}\}$ je ohraničená v $\ell^p$, tj. existuje $L > 0$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{k} \left|x_i^{[n]}\right|^p \leq L \quad \text{pro každé } k, n \in \mathbb{N}. \tag{2.41}$$

Limitním přechodem této nerovnosti nejprve pro $n \to \infty$, a následně pro $k \to \infty$, a využitím (2.37) odvodíme $\sum |x_i|^p \leq L$, a tedy $x \in \ell^p$, viz Příklad 2.6.

**Příklad 2.96** (Úplnost $\ell^\infty$-prostoru)**.** Prostor $\ell^\infty$ zavedený v Příkladu 2.6 je úplný. Jeho úplnost se ukáže obdobně jako úplnost metrického prostoru $(C[a,b], \varrho_C)$. Více detailů zmíníme na přednášce.

Užitečným nástrojem pro ověřování úplnosti může být následující věta.

**Věta 2.97.** *Nechť $(M, \varrho)$ je úplný metrický prostor a $N \subseteq M$ uzavřená neprázdná množina. Potom $(N, \varrho)$ je úplný metrický prostor.*

*Důkaz.* Buď $\{x_n\} \subseteq N$ cauchyovská posloupnost. Poněvadž $M$ je úplný, $x_n \to x_0 \in M$. Množina $N$ je však uzavřená, a tedy $x_0 \in N$, což implikuje úplnost $(N, \varrho)$. □

**Poznámka 2.98.** (i) V přechozí větě platí i opačná implikace. Přesněji, platí: Nechť $(M, \varrho)$ je úplný metrický prostor a $(N, \sigma)$ jeho podprostor. Potom $(N, \sigma)$ je úplný prostor, právě když $N$ je uzavřená množina v $(M, \varrho)$.

(ii) Uvedené úvahy by mohly svádět k domněnce, že úplnost a uzavřenost jsou v podstatě totéž. Raději tedy ještě uveďme upřesňující poznámku. V každém metrickém prostoru platí, že úplná množina je uzavřená. Obrácené tvrzení však obecně neplatí. Skutečně, např. množiny $M = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ či $M = (0, 1)$ jsou uzavřené v sobě, ale nejsou úplné. Na rozdíl od uzavřenosti množiny, kde vlastně záleží na tom, ve kterém prostoru ji uvažujeme, úplnost množiny $N$ na prostoru nezávisí. Např. $M = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ je uzavřená v $\mathbb{Q}$, není však uzavřená v $\mathbb{R}$. Úplná není ani v $\mathbb{Q}$ ani v $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou.

**Příklad 2.99.** Prostor $([a, b], \varrho_1)$ je úplný. Tento fakt je důsledkem předchozí věty a úplnosti $\mathbb{E}$.

**Příklad 2.100** (Úplnost prostoru spojitých funkcí)**.** Metrický prostor $(C[a, b], \varrho_C)$ je úplný. Je možno nalézt minimálně dva způsoby důkazu. V jednom se ukáže existence limity, která patří do uvažovaného prostoru a v druhém se využije Věta 2.97, Cvičení 2.64-(iii) a úplnost metrického prostoru $(B[a, b], \varrho_B)$.

**Příklad 2.101.** Metrický prostor $(C[a, b], \varrho_I)$, kde $\varrho_I$ je integrální metrika, není úplný! Pro $n > 2/(b - a)$ uvažujeme např. posloupnost funkcí tvaru

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, c], \\ n(x - c) & x \in [c, c + 1/n], \\ 1, & x \in [c + 1/n, b], \end{cases}$$

kde $c$ je střed intervalu $[a, b]$. Detaily doplníme, případně se o ně můžete pokusit sami.

**Poznámka 2.102** (Integrální metrika na dalších prostorech a úplnost)**.** S přihlédnutím k předchozímu příkladu můžeme konstatovat, že zatím nemáme rozumný prostor funkcí s integrální metrikou, který by byl úplný. Nabízí se přirozená volba, totiž uvažovat prostor $(R[a, b], \varrho_I)$, kde $\varrho_I(f, g) = (R) \int_a^b |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t$; $R[a, b]$ značí množinu všech Riemannovsky integrovatelných funkcí na $[a, b]$ a písmeno R u symbolu integrálu zdůrazňuje, že jde o

Riemannův integrál. Bohužel ani touto volbou si moc nepomůžeme. Předně poznamenejme, že $(R[a,b], \varrho_I)$ ve skutečnosti není metrický prostor. Skutečně, lze lehce nalézt $f, g \in R[a,b]$ takové, že $f \neq g$, avšak $(R)\int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t = 0$ (najděte takové funkce!); není tedy splněn axiom (M1) a máme pouze pseudometriku. Tento problém lze odstranit jistou faktorizací spočívající ve ztotožnění funkcí, které se liší pouze na „malých množinách“, jinde jsou si rovny. Přesněji, jsou si rovny skoro všude (viz Poznámku 3.7 pro tuto terminologii). Jde potom o relaci ekvivalence. Dostáváme tak prostor, jehož prvky jsou třídy navzájem ekvivalentních funkcí. Z praktických důvodů ovšem místo o třídách hovoříme o funkcích. Nedodržení formalismu je však v tomto případě celkem běžné; v rámci Lebesgueova integrálu o tom hovoříme podrobněji, viz str. 75. Bohužel ani takto upravený prostor stále nesplňuje naše požadavky. Lze totiž ukázat (viz Příklad 3.23), že

$$\text{prostor } \left(R[a,b], (R)\int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\right) \text{ není úplný.}$$

Problematičnost Riemannova integrálu zmiňujeme i na jiných místech; lze najít (cauchyovskou – ve smyslu metriky $\varrho_I$) posloupnost Riemannovsky integrovatelných funkcí, která na intervalu $[a,b]$ bodově konverguje k Dirichletově funkci, jež není Riemannovsky integrovatelná, viz Příklad 3.17. Kýženými prostory jsou až Lebesgueovy prostory $L^p$, které diskutujeme od str. 74. Mj. ve Větě 3.24 ukazujeme, že

$$\text{prostory } L^p,\ p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}, \text{ jsou úplné.}$$

To je ostatně jeden z důvodů, proč zavádíme Lebesgueův integrál. Ještě pro kompletnost uveďme, že $R[a,b]$ jako podprostor $L^1[a,b]$ není uzavřený. Co to znamená s přihlédnutím k Poznámce 2.98? O $L^p$ prostorech budeme často hovořit zejména v kontextu normovaných lineárních prostorů a navazujících témat.

**Příklad 2.103.** Baireův metrický prostor zavedený v Příkladu 2.12 je úplný.

**Poznámka 2.104.** Nechť $f$ je homeomorfní zobrazení metrického prostoru $(M,\varrho)$ na prostor $(N,\sigma)$. Je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v $(M,\varrho)$, *nemusí* být posloupnost $\{f(x_n)\}$ cauchyovská. Uvažme posloupnost $a_n := 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, v prostoru $(0,1)$ s eukleidovskou metrikou a homeomorfismus $f(x) = x/(1-x)$ intervalů $(0,1)$ a $(0,\infty)$, rovněž s eukleidovskou metrikou. Pak je $f(a_n) = n-1$, a tedy $\{f(a_n)\}$ není cauchyovská posloupnost.

## Další vlastnosti úplných prostorů

**Poznámka 2.105.** Úplnost se zachovává při izometrii.

Následující věta udává nutnou a postačující podmínku pro úplnost metrického prostoru. Lze ji chápat jako *zobecnění principu vložených intervalů.*

**Věta 2.106.** *Metrický prostor $(M,\varrho)$ je úplný, právě když každá posloupnost $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ do sebe vnořených uzavřených koulí, jejichž poloměry konvergují k nule, má neprázdný průnik. Navíc v tomto případě je daný průnik pro každou posloupnost $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ jednoprvkový.*

*Důkaz.* Nechť $(M, \varrho)$ je úplný metrický prostor a nechť

$$M \supseteq B_1[x_1, r_1] \supseteq B_2[x_2, r_2] \supseteq B_3[x_3, r_3] \supseteq \cdots \supseteq B_k[x_k, r_k] \supseteq \cdots, \tag{2.42}$$

kde $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, je nějaká posloupnost do sebe vložených uzavřených koulí v $M$ s poloměry konvergujícími do nuly. Odpovídající posloupnost středů $\{x_k\}$ je v souladu s Definicí 2.58 cauchyovská, neboť platí $\varrho(x_m, x_n) \le r_m$ pro každou dvojici indexů $m, n$ splňující $n \ge m$. Díky úplnosti prostoru $(M, \varrho)$ potom $\{x_k\}$ konverguje v $M$, tj. existuje $x \in M$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Platí

$$x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k[x_k, r_k]. \tag{2.43}$$

Skutečně, podle (2.42) pro každé dané $n \in \mathbb{N}$ množina $B_n[x_n, r_n]$ obsahuje všechny body posloupnosti $\{x_k\}$ od indexu $k = n$ včetně. A poněvadž $B_n[x_n, r_n]$ je uzavřená v $M$ a $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, z Poznámky 2.32 vyplývá, že nutně $x \in B_n[x_n, r_n]$. Podle (2.43) je tedy průnik posloupnosti $\{B_k\}$ neprázdný.

Naopak předpokládejme, že každá posloupnost do sebe vložených uzavřených koulí v $M$ s poloměry konvergujícími do nuly má neprázdný průnik. Nechť $\{x_k\} \subseteq M$ je nějaká posloupnost cauchyovská v metrickém prostoru $(M, \varrho)$. Dokážeme, že $\{x_k\}$ je i konvergentní a její limita patří do $M$. V souladu s Definicí 2.58 ze skutečnosti, že $\{x_k\}$ je cauchyovská, vyplývá existence indexu $n_1$ s vlastností

$$\varrho(x_m, x_n) \le \frac{1}{2} \quad \text{pro každé } m, n \ge n_1. \tag{2.44}$$

Zejména, nerovnost v (2.44) (s $m := n_1$) implikuje relaci

$$x_n \in B\left[x_{n_1}, \frac{1}{2}\right] \quad \text{pro každé } n \ge n_1. \tag{2.45}$$

Dále existuje $n_2 > n_1$ s vlastností

$$\varrho(x_m, x_n) \le \frac{1}{2^2} \quad \text{pro každé } m, n \ge n_2, \tag{2.46}$$

což následně (s $m := n_2$) ukazuje, že

$$x_n \in B\left[x_{n_2}, \frac{1}{2^2}\right] \quad \text{pro každé } n \ge n_2. \tag{2.47}$$

Nechť nyní $x \in B\left[x_{n_2}, \frac{1}{2}\right]$. Použitím trojúhelníkové nerovnosti potom máme

$$\varrho(x, x_{n_1}) \le \varrho(x, x_{n_2}) + \varrho(x_{n_2}, x_{n_1}) \overset{(2.45)}{\le} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad \text{a tedy } x \in B\left[x_{n_1}, 1\right]$$

$$\Downarrow$$

$$B\left[x_{n_2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq B\left[x_{n_1}, 1\right]. \tag{2.48}$$

Tímto způsobem můžeme induktivně sestrojit posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a vybranou podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Konkrétně, jestliže

$$\text{indexy } n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k \text{ a body } x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}$$

jsou sestrojené jako výše, potom existuje index $n_{k+1} > n_k$ s vlastností

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{pro každé } m, n \geq n_{k+1}, \tag{2.49}$$

což (s $m := n_{k+1}$) ukazuje, že pro každé $n \geq n_{k+1}$ platí

$$x_n \in B\left[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}\right], \quad \text{a následně} \quad B\left[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k}}\right] \subseteq B\left[x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]. \tag{2.50}$$

Získali jsme tedy posloupnost do sebe vložených uzavřených koulí $B\left[x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]$, $k \in \mathbb{N}$, jejichž poloměry očividně konvergují do nuly. Tato posloupnost má podle předpokladů neprázný průnik, tj. existuje bod $x \in M$ tak, že $x \in B\left[x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. To však znamená, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Z Věty 2.59-(v) vyplývá, že i celá posloupnost $\{x_k\}$ je konvergentní s limitou $x$. To ukazuje úplnost metrického prostoru $(M, \varrho)$. $\square$

**Poznámka 2.107.** Poznamenejme, že uzavřené koule ve větě mohou být nahrazeny uzavřenými množinami $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, takovými, že $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$.

**Cvičení 2.108.** V souvislosti s předpoklady a tvrzením Věty 2.106 prozkoumejte systém množin

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] \cap \mathbb{Q}$$

v metrickém prostoru $(\mathbb{Q}, \varrho_1)$.

Důsledkem následující věty je pozorování, že neprázdný úplný metrický prostor neobsahující izolované body není spočetný (v takovém prostoru je každá jednobodová množina řídká). Mnoho dalších informací o původu, vývoji a významu Baireovy věty lze nalézt v [46].

**Věta 2.109** (Baireova věta)**.** *Úplný metrický prostor $(M, \varrho)$ nelze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha množin řídkých v prostoru $(M, \varrho)$.*

*Důkaz.* Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje neprázdný úplný metrický prostor $(M, \varrho)$, pro který platí

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k, \quad A_k \subseteq M \text{ je řídká v } (M, \varrho) \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}. \tag{2.51}$$

Zvolme nějaký bod $x_0 \in M$. Poněvadž množina $A_1$ je řídká v $(M, \varrho)$, podle Poznámky 2.47 pro uzavřenou kouli $B[x_0, 2]$ existuje $r_1 \in (0, 1)$ a bod $x_1 \in M$ tak, že uzavřená koule

$B[x_1, r_1] \subseteq B[x_0, 2]$ a $B[x_1, r_1] \cap A_1 = \emptyset$. Podobně, množina $A_2$ je řídká v $(M, \varrho)$, proto pro uzavřenou kouli $B[x_1, r_1]$ existuje $r_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ a bod $x_2 \in M$ tak, že $B[x_2, r_2] \subseteq B[x_1, r_1]$ a $B[x_2, r_2] \cap A_2 = \emptyset$. Pokračujíce v tomto procesu, sestrojíme posloupnost $\{B[x_k, r_k]\}$ uzavřených koulí, které pro každý index $k \in \mathbb{N}$ splňují vlastnosti

$$B[x_{k+1}, r_{k+1}] \subseteq B[x_k, r_k], \quad B[x_k, r_k] \cap A_k = \emptyset, \quad 0 < r_k < \frac{1}{k}. \tag{2.52}$$

Jedná se tedy o posloupnost do sebe vložených uzavřených koulí, jejichž poloměry konvergují do nuly. Díky úplnosti metrického prostoru $(M, \varrho)$ je potom podle Věty 2.106 průnik $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B[x_{k+1}, r_{k+1}]$ neprázdný, tj. existuje $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B[x_{k+1}, r_{k+1}]$. Očividně, $x \in M$. Avšak podle (2.52) bod $x$ není prvkem žádné z množin $A_k$, $k \in \mathbb{N}$. zejména s ohledem na (2.51) tedy platí $x \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = M$, což je však zřejmý spor. Tedy množinu $M$ není možné vyjádřit ve tvaru (2.51). □

**Poznámka 2.110.** Podmnožina metrického prostoru se nazývá množinou *první kategorie* nebo množinou *první Baireovy kategorie*, je-li spočetným sjednocením řídkých množin. Množina je *druhé kategorie* v metrickém prostoru, pokud není množinou první kategorie. Množina $\mathbb{Q}$ je první kategorie v $\mathbb{E}^1$.

## Úplný obal

Protože ve funkcionální analýze mají velký význam především úplné metrické prostory, nabízí se otázka, zda lze neúplný prostor nějak „spravit“. Jak uvidíme, neúplný prostor lze vždy nějakým (a v podstatě jediným) způsobem vnořit do úplného prostoru. K tomu účelu se zavádí pojem *úplný obal* metrického prostoru.

**Definice 2.111** (Úplný obal metrického prostoru)**.** Nechť $(M, \varrho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory. Řekneme, že metrický prostor $(N, \sigma)$ je *úplný obal* metrického prostoru $(M, \varrho)$, jestliže platí:

(i) $(N, \sigma)$ je úplný metrický prostor,

(ii) $M \subseteq N$ a $\varrho \equiv \sigma|_{M \times M}$ (tj. $(M, \varrho)$ je vnořený do $(N, \sigma)$),

(iii) množina $M$ je hustá v $(N, \sigma)$.

**Věta 2.112.** *Pro každý metrický prostor $(M, \varrho)$ existuje jeho úplný obal, který je určen jednoznačně v následujícím smyslu. Jestliže $(N_1, \sigma_1)$ a $(N_2, \sigma_2)$ jsou dva úplné obaly metrického prostoru $(M, \varrho)$, potom existuje izometrie $\Phi : N_1 \to N_2$ taková, že její zúžení $\Phi|_M$ je identické zobrazení na $M$.*

*Důkaz.* Exaktní důkaz tohoto tvrzení je poněkud komplikovaný a se všemi prodrobnostmi je možno jej nalézt např. v [17] nebo [28]. Poněvadž je však tento důkaz konstruktivní a poměrně důležitý, uvedeme zde alespoň jeho hlavní myšlenky. Uvažujme všechny cauchyovské posloupnosti z prostoru $(M,\varrho)$ a na této množině definujme relaci (o které lze poměrně snadno dokázat, že je relací ekvivalence) následujícím způsobem:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \text{ právě když } \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n,y_n) = 0.$$

Nyní uvažujme třídy rozkladu cauchyovských posloupností v $(M,\varrho)$ definované touto ekvivalencí a množinu těchto tříd označme $N$. Nechť $X, Y$ jsou dvě třídy ekvivalence z $N$ a $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou nějací reprezentanti těchto tříd (lze ukázat, že na jejich výběru nezáleží). Definujme

$$\sigma(X,Y) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n,y_n).$$

Lze ukázat, že takto definovaná funkce na $N^2$ je metrikou a že prostor $(N,\sigma)$ je úplný. Přiřadíme-li nyní každému prvku $x \in M$ třídu $X \in N$ tvořenou všemi posloupnostmi konvergujícími k tomuto prvku, je tímto způsobem definováno izometrické zobrazení $M$ na jistou podmnožinu v $N$. Ztotožníme-li $M$ s touto podmnožinou, dostáváme platnost podmínky (ii) z definice úplného obalu. Z vlastností cauchyovských posloupností plyne platnost podmínky (iii). Takto definovaný metrický prostor je tedy hledaným úplným obalem prostoru $(M,\varrho)$. $\square$

**Poznámka 2.113.** Nechť $(M,\varrho)$ je úplný metrický prostor a $N \subseteq M$ neprázdná množina. Potom $(\overline{N},\varrho)$ je úplný obal metrického prostoru $(N,\varrho)$.

**Příklad 2.114.** Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je eukleidovský prostor $\mathbb{E}^n$ úplný obal metrického prostoru $(\mathbb{Q}^n,\varrho_2)$ a rovněž i metrického prostoru $(\mathbb{R}^n \setminus \{[0,\dots,0]\},\varrho_2)$. Zejména, pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je podle Věty 2.97 metrický prostor $([a,b]^n,\rho_2)$, jako uzavřený podprostor v $\mathbb{E}^n$, úplný a je zúplněním každého z metrických prostorů $([a,b)^n,\varrho_2)$, $((a,b]^n,\varrho_2)$ a $((a,b)^n,\varrho_2)$, ve shodě s Poznámkou 2.113.

**Poznámka 2.115.** Věta 2.112 sice mj. říká, že $\mathbb{E}^1$ je zúplněním prostoru racionálních čísel. Nelze ji však přímo použít pro konstrukci reálných čísel, protože definice potřebného metrického prostoru předpokládá znalost množiny reálných čísel. Cantorova konstrukce reálných čísel je však podobná myšlence úplného obalu aplikovaného na racionální čísla. V literatuře lze najít i jiné přístupy ke konstrukci oboru reálných čísel, např. axiomaticky či pomocí metody tzv. Dedekindových řezů.

**Příklad 2.116.** Již víme, že $C[a,b]$ vzhledem k integrální metrice není úplný. Lze ukázat, viz např. [40], že zúplněním $C[a,b]$ vzhledem k $L^p$-metrice, tj. metrice $\left(\int_a^b |f-g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$, dostaneme prostor $L^p[a,b]$; $L_p$-prostory (Lebesgueovy prostory) diskutujeme v následující kapitole. Lze najít i jiné husté podmnožiny $L^p$-prostorů. V Sekci 5.5 prokazujeme hustotu $C[a,b]$ v $L^2[a,b]$, a to v kontextu Fourierovy analýzy.

## 2.6 Banachův princip pevného bodu a jeho aplikace

V této kapitole si zformulujeme jeden z nejdůležitějších výsledků teorie metrických prostorů, tzv. *Banachovu větu o pevném bodu* (či *princip kontraktivních zobrazení*). Totiž řadu problémů souvisejících s existencí a jednoznačností řešení rovnic různého typu (např. diferenciálních rovnic) lze převést na otázku existence a jednoznačnosti pevného bodu nějakého zobrazení odpovídajícího metrického prostoru do sebe. Důležitou roli hraje kontrakce a úplnost, tedy pojmy, které již známe. Věta je nazvána podle polského matematika Stefana Banacha (1892–1945), který ji uveřejnil okolo roku 1922.

Poznamenejme, že v matematice existuje velké množství rozličných vět o pevném bodu. Každá z nich může být vhodná v určité situaci. Později zmíníme ještě i Browerovu větu a Schauderovu větu. Výhodou Banachovy věty je její jednoduchost, síla a jistá „konstruktivnost“. V literatuře lze nalézt i různé modifikace a zobecnění Banachovy věty.

**Definice 2.117** (Pevný bod zobrazení)**.** Nechť $M$ je libovolná neprázdná množina a $F : M \to M$ zobrazení. Bod $x \in M$ se nazývá *pevný bod zobrazení* $F$, jestliže platí

$$F(x) = x. \tag{2.53}$$

**Příklad 2.118.** Nechť $M = \mathbb{R}$. Potom $f(x) = x^2$ má dva pevné body $0, 1$ a $f(x) = x^3$ má tři pevné body $-1, 0, 1$.

**Cvičení 2.119.** Nechť $M = C^\infty[a, b]$, tj. množina funkcí, které mají derivace všech řádů na $[a, b]$. Uvažujte zobrazení $f : M \to M$ definované jako $f(y) = y'$ a najděte jeho pevné body.

Banachův princip říká, za jakých podmínek existuje právě jedno řešení rovnice (2.53). Poznamenejme, že důkaz tohoto tvrzení je v jistém smyslu stejně důležitý jako samotné tvrzení. (Tuto zdánlivě zbytečnou poznámku uvádíme, neboť důkazy matematických tvrzení jsou v učebních textech studenty většinou přeskakovány a při přednášce jsou nezřídka odpočinkovou chvilkou.) Z důkazu totiž plyne metoda — tzv. *metoda postupných aproximací* — kterou lze dané řešení rovnice (2.53) zkonstruovat. Někdy se hovoří i o *metodě prosté iterace*. Dokonce je udána i chyba, jíž se při aproximaci dopouštíme.

**Věta 2.120** (Banachova věta o pevném bodu)**.** *Nechť $(M, \varrho)$ je úplný metrický prostor. Potom každá kontrakce $F : M \to M$ má právě jeden pevný bod v $M$.*

*Důkaz.* Důkaz si důkladněji připomeneme na přednášce. Zde jen uveďme, že se nadefinuje posloupnost $\{x_n\}$ předpisem: $x_1 \in M$ je libovolný bod a $x_{n+1} = F(x_n)$. O této posloupnosti se ukáže, že je cauchyovská a má tedy (díky úplnosti $M$) limitu v $M$, která je jediným pevným bodem zobrazení $F$. □

**Poznámka 2.121.** (i) Z důkazu Věty 2.120 vyplývá, že daný jediný pevný bod $x^* \in M$ zobrazení $F$ je limitou posloupnosti $\{F^k(x)\}_{k=1}^\infty$ pro libovolné pevně zvolené $x \in M$; zde $F^{k+1}(x) = F\left(F^k(x)\right)$ je označuje iteraci.

(ii) V důkazu Banachovy věty jsou odvozeny vztahy, které přímou vedou na odhad chyby $n$-té iterace, a to

$$\varrho(x_n, x^*) \leq \varrho(x_1, F(x_1)) \frac{L^{n-1}}{1-L},$$

kde $x_1$ je počáteční aproximace. Odvoďte tento vztah. Tento odhad rychlosti je však dosti pesimistický, často bývá chyba mnohem menší. Všimněme si, že kromě konstanty $L$ odhad chyby velmi záleží na volbě počáteční aproximace.

(iii) Podmínky Banachovy věty jsou pouze postačující, nikoliv nutné pro existenci pevného bodu. Zobrazení může mít pevný bod i v případě, že není splněn některý z předpokladů věty (tj. kontrakce, zobrazení prostoru do sebe, úplnost). Např. otáčení v rovině, které má evidentně jeden pevný bod, není kontrakcí.

(iv) Podmínku $\varrho(F(x), F(y) \leq L\varrho(x, y)$, $L \in [0, 1)$ nelze obecně nahradit slabší podmínkou

$$\varrho(F(x), F(y)) \leq \varrho(x, y); \tag{2.54}$$

v tomto případě hovoříme o tzv. *neexpanzivním zobrazení*. Prozkoumejte např. situaci, kde $(M, \varrho) = \mathbb{E}^1$ a $F(x) = x + \pi/2 - \operatorname{arctg} x$.

(v) Podmínku úplnosti nelze vynechat. Prozkoumejte např. situaci, kde $M = (0, \infty)$ (s metrikou indukovanou z $\mathbb{E}^1$) a $F(x) = x/2$.

(vi) Připomeňme, že pro posouzení kontraktivity některých jednoduchých zobrazení lze využít vztahu z Poznámky 2.84.

**Důsledek 2.122.** *Nechť $(M, \varrho)$ je úplný metrický prostor a $F : M \to M$ zobrazení s vlastností, že nějaká jeho iterace $F^n$, $n \in \mathbb{N}$, je kontrakce. Potom zobrazení $F$ má právě jeden pevný bod v $M$.*

*Důkaz.* Nechť $F$ a $n$ jsou jako v zadání tvrzení. Označme $T := F^n$. V souladu s Banachovou větou 2.120 má potom kontraktivní zobrazení $T : M \to M$ právě jeden pevný bod $x_0 \in M$, t.j. platí $T(x_0) = x_0$. Dokážeme, že $x_0$ je i pevným bodem zobrazení $F$. Položme $x := F(x_0)$. Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} x &= F(x_0) = F\left(T(x_0)\right) = F\left(F^n(x_0)\right) = F^{n+1}(x_0) \\ &= F^n\left(F(x_0)\right) = T\left(F(x_0)\right) = T(x), \end{aligned} \tag{2.55}$$

tedy $x$ je též pevný bod zobrazení $T$. Proto nutně $x = x_0$, a tedy $F(x_0) = x_0$, tj. zobrazení $F$ má aspoň jeden pevný bod $x_0 \in M$. Je však zároveň i jediným pevným bodem tohoto zobrazení v $M$, protože každý pevný bod zobrazení $F$ je zároveň i pevným bodem zobrazení $T = F^n$, které má v $M$ jediný pevný bod $x_0$. □

**Poznámka 2.123.** Uveďme si ještě variantu Věty 2.120 pro kompaktní prostor (který zavedeme v příští podkapitole) a neexpanzivní zobrazení. Nechť $(M, \varrho)$ je kompaktní metrický prostor a $F : M \to M$ splňuje podmínku (2.54) pro každé $x, y \in M$, $x \neq y$. Potom zobrazení $F$ má právě jeden pevný bod v $M$. Připomeňme, že podmínka (2.54) je slabší než kontrakce, zato kompaktnost je víc než úplnost. Důkaz lze nalézt např. v [11]. Zmiňme pouze, že se zavádí pomocné zobrazení $f(x) = \varrho(x, F(x))$, přičemž se využije faktu, že díky spojitosti $f$ a kompaktnosti $M$ nabývá $f$ na $M$ své nejmenší hodnoty.

## Aplikace Banachovy věty

Existuje množství různorodých problémů, jejichž řešení může být převedeno na úlohu o pevném bodu.

**Příklad 2.124.** Jednou z nejjednodušších typických aplikací je zkoumání (nelineární) rovnice $f(x) = 0$, kde $f$ je „rozumná“ reálná funkce jedné reálné proměnné. Existují různé přístupy, jak problém převést na hledání pevného bodu. Uveďme zde alespoň následující jednoduchý postup. Řešení rovnice $f(x) = 0$ je jistě i řešením rovnice

$$F(x) := x - \lambda f(x) = x,$$

kde $\lambda \neq 0$, a naopak. Hledáme pak pevný bod zobrazení $F$. Konstantu $\lambda$ volíme s ohledem na potřebu kontraktivnosti funkce $F$ či rychlosti konvergence, velmi nám pomůže např. omezenost derivace funkce $f$ na uvažovaném intervalu (je-li splněna).

**Cvičení 2.125.** Prozkoumejte užití metody postupných aproximací při hledání kořenů rovnice $x^3 + x - 1 = 0$. Uvažujte různé přístupy, např. vyšetřete vztah $x = \sqrt[3]{1-x}$ a vztah $x = 1 - x^3$. Nakreslete si obrázky. Analyzujte též zobrazení $F(x) = x - \lambda(x^3 + x - 1)$, kde $\lambda \in (0, 1]$.

**Příklad 2.126** (Systém lineárních rovnic)**.** Uvažujme systém $Ax = b$, kde $x, b$ jsou vektory z $\mathbb{R}^n$ a $A$ je reálná regulární $n \times n$ matice. Přepišme tento systém do tvaru

$$F(x) := (E - A)x + b = x,$$

kde $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je zobrazení. Za jistých předpokladů na koeficienty matice $A$ je zobrazení $F$ kontrakcí a má tedy podle Banachovy věty pevný bod. Lze též disktutovat jiné metriky na $\mathbb{R}^n$ než jen eukleidovské, což má za následek změnu tvaru podmínky na prvky matice $A$, viz např. [11, 17, 28].

**Příklad 2.127** (Cauchyova úloha, Picardova věta)**.** Důkaz *Picardovy věty* o jednoznačné existenci Cauchyovy úlohy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

je klasickou aplikací Banachova principu. Jednoznačná existence řešení uvedené diferenciální rovnice, které prochází bodem $[x_0, y_0]$, je zaručena spojitostí funkce $f(x, y)$ a její lipschitzovskostí vzhledem k proměnné $y$. Hlavní myšlenka spočívá v přepsání problému do integrální rovnice

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t =: F(y)(x);$$

zde pak uvažujeme prostor $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ s dostatečně malým $\delta$ a pomocí Banachovy věty se ukáže, že zobrazení $F$ má pevný bod. V Podkapitole 2.8 naznačíme a v Podkapitole 4.7 dokážeme, že existenci řešení Cauchyovy úlohy lze zaručit i bez předpokladu lipschitzovskosti (tzv. Peanova věta, která v důkazu využívá Arzeláovu-Ascoliho větu; jako hlavní nástroj použijeme Schauderovu větu o pevném bodu). Pro zobecnění Picardovy věty na systém diferenciálních rovnic, jejíž důkaz je rovněž založen na použití Banachovy věty, viz např. [17].

**Cvičení 2.128.** Metodou postupných aproximací najděte řešení problému $y' = -2xy$, $y(0) = 1$. V posledním kroku využijte teorie Taylorových řad pro nalezení explicitního vyjádření řešení ve formě elementární funkce.

**Poznámka 2.129.** Existuje množství dalších typů aplikací Banachovy věty. Nejsou to jen problémy řešitelnosti různých rovnic (jako např. integrální rovnice Fredholmova či Volterrova, viz [28]), ale třeba i důkaz důležité věty o implicitní funkci či o inverzní funkci, viz např. [3, 13]. Pro další možnosti použití Věty 2.120 viz např. [3, 19].

## 2.7 Kompaktní prostory

### Definice a ekvivalentní charakterizace

Níže definovaný pojem (sekvenciální) kompaktnosti můžeme motivovat např. připomenutím jednoho notoricky známého výsledku z diferenciálního počtu funkce jedné proměnné. Tzv. první a druhá Weierstrassova věta říkají, že spojitá funkce $f$ definovaná na uzavřeném a omezeném intervalu je zde omezená a nabývá své nejmenší a největší hodnoty. Projdeme-li si důkaz, zjistíme, že kromě spojitosti funkce $f$ je nejdůležitější skutečností fakt, že z každé posloupnosti bodů uzavřeného intervalu lze vybrat konvergentní podposloupnost (toto tvrzení je známo jako Bolzanova-Weierstrassova věta). Právě tato charakterizace se ukazuje být v jistém smyslu klíčovou, pokud přejdeme od $\mathbb{E}^1$ k obecným metrickým prostorům.

Až budeme v prostorech, kde má smysl mluvit o jejich dimenzi (Kapitola 4), bude možno o kompaktnosti mluvit zhruba jako o *nekonečnědimenzionální analogii podmínky „uzavřenost a omezenost“*.

Shrnutí informací o původu, vývoji a významu pojmu kompaktnosti lze nalézt v [46].

**Definice 2.130** (Kompaktnost (pomocí posloupností))**.** Metrický prostor $(M, \varrho)$ se nazývá *kompaktní* (přesněji *sekvenciálně kompaktní*), jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost. *Množina* $N \subseteq M$ se nazývá *kompaktní* (v $M$), je-li vnořený metrický prostor $(N, \varrho|_{N\times N})$ kompaktní.

V literatuře věnované metrickým prostorům lze často narazit i na následující definici kompaktnosti pomocí otevřeného pokrytí. Netřeba se však znepokojovat. V metrických prostorech (na rozdíl od obecnějších topologických prostorů) jsou totiž obě definice ekvivalentní, viz Věta 2.133. Pokud nebude řečeno jinak, budeme kompaktním prostorem mít na mysli prostor z Definice 2.130. *Otevřeným pokrytím* množiny $M$ máme na mysli systém libovolně mnoha otevřených množin, jejichž sjednocení pokrývá $M$ (je jeho nadmnožinou). Slovní spojení otevřené podpokrytí má intuitivně zřejmý smysl.

**Definice 2.131** (Kompaktnost (pomocí otevřeného pokrytí))**.** Metrický prostor $(M, \varrho)$ se nazývá *kompaktní*, jestliže z každého otevřeného pokrytí množiny $M$ lze vybrat konečné podpokrytí.

**Poznámka 2.132.** Lze ukázat, že v metrických prostorech kompaktnost lze ekvivalentně vyjádřit i pomocí jisté modifikace předchozí definice, totiž, že z každého spočetného otevřeného pokrytí množiny $M$ lze vybrat konečné podpokrytí. Tato vlastnost bývá nazývána jako *spočetná kompaktnost*. V metrických prostorech však kompaktnost a spočetná kompaktnost splývají.

A nyní uvedeme slíbenou ekvivalenci mezi definicemi kompaktnosti pomocí posloupností a pomocí otevřeného pokrytí. V literatuře se někdy uvádí pod názvem *Heineovo-Borelovo lemma*. V důkazu se poněkud prohřešíme proti náležitému didaktickému výkladu. Použijeme totiž již nyní poznatky z níže uvedené sekce o prekompaktních množinách. Doporučujeme proto se k tomuto důkazu po prostudování příslušného tématu vrátit.

**Věta 2.133.** *Metrický prostor je kompaktní ve smyslu Definice 2.130, právě když je kompaktní ve smyslu Definice 2.131.*

*Důkaz.* Nechť $(M, \varrho)$ je kompaktní ve smyslu Definice 2.130. Buď $G_\alpha$, $\alpha \in A$, jeho otevřené pokrytí. Protože je $(M, \varrho)$ kompaktní, je i prekompaktní (viz Věta 2.165) a existuje tedy ke každému $\varepsilon_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, konečná $\varepsilon_n$-ová síť $M_n\{m_1^{(n)}, \ldots, m_{k(n)}^{(n)}\}$, takže platí

$$M = \bigcup_{j=1}^{k(n)} \mathcal{B}\left[m_j^{(n)}, \frac{1}{n}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Připusťme, že z pokrytí $G_\alpha$, $\alpha \in A$, nelze vybrat konečné pokrytí. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje uzavřená koule $\mathcal{B}\left[m_j^{(n)}, 1/n\right]$, kterou nelze pokrýt žádným konečným podsystémem vybraným z $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$. Označme tyto koule $B_n$ a jejich středy $s_n$. Protože je $M$ kompaktní, lze z posloupnosti $\{s_n\}$ vybrat konvergentní posloupnost $s_{n_k} \to \xi \in M$. Buď $\alpha_0 \in A$ některý z indexů, pro něž platí $\xi \in G_{\alpha_0}$. Protože je $G_{\alpha_0}$ otevřená, existuje $r > 0$ tak, že $\mathcal{B}[\xi, r] \subseteq G_{\alpha_0}$. Zvolme přirozené $n$ tak, aby $1/n < r/2$, $\varrho(\xi, s_n) < r/2$. Pak je $B_n = \mathcal{B}[s_n, 1/n] \subseteq G_{\alpha_0}$, neboť pro libovolný bod $x \in B_n$ platí

$$\varrho(x, \xi) \leq \varrho(x, s_n) + \varrho(s_n, \xi) \leq \frac{1}{n} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

To je ale spor, neboť podle předpokladu kouli $B_n$ nelze pokrýt žádnou množinou $G_\alpha$. Lze tedy z pokrytí $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ vybrat konečné pokrytí.

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Nechť z každého otevřeného pokrytí metrického prostoru $(M, \varrho)$ lze vybrat konečné pokrytí. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak systém otevřených koulí $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$, $x \in M$, tvoří otevřené pokrytí prostoru $M$ a existuje tedy konečná množina $P = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq M$ taková, že $M = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}(x_i, \varepsilon)$. Množina $P$ pak ale tvoří konečnou $\varepsilon$-ovou síť v $M$, takže je prostor $M$ prekompaktní. Podle Věty 2.165 stačí nyní pouze dokázat, že prostor $M$ je úplný. Buď tedy $\{T_n\}$ nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v $M$, jejichž průměr konverguje k nule. Podle Věty 2.106 a Poznámky 2.107 stačí dokázat, že $\bigcap_{n=1}^\infty T_n \neq \emptyset$. Připusťme tedy, že $\bigcap_{n=1}^\infty T_n = \emptyset$. Označme $Q_n = M \setminus T_n$. Pak platí $M \setminus \bigcap_{n=1}^\infty T_n = \bigcup_{n=1}^\infty (M \setminus T_n) = \bigcup_{n=1}^\infty Q_n = M$. Ale množiny $Q_n$ jsou podle předpokladu otevřené. Z otevřeného pokrytí $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ prostoru $M$ však nelze vybrat žádné konečné pokrytí, neboť jinak by průnik vhodného konečného počtu množin $T_n$ byl prázdný, což není možné. My jsme však předpokládali, že z každého otevřeného pokrytí prostoru $M$ lze vybrat konečné pokrytí, což je spor. Je tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n \neq \emptyset$, takže prostor $M$ je úplný a tím i kompaktní. □

**Příklad 2.134.** (i) Diskrétní metrický prostor je kompaktní, právě když má pouze konečně mnoho prvků.

(ii) Interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, je kompaktní v $\mathbb{E}^1$. Totiž každá posloupnost bodů z tohoto intervalu je zřejmě ohraničená a podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (známé z diferenciálního počtu) lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost. Protože je uvažovaný interval uzavřený, leží limita této podposloupnosti v tomto intervalu.

(iii) Polouzavřený interval $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ není kompaktní v $\mathbb{E}^1$. Ozřejměte si tuto skutečnost jak pomocí vhodné posloupnosti, tak i pomocí otevřeného pokrytí.

V naší motivační úvaze jsme uvažovali uzavřenou a ohraničenou množinu. Její vztah s kompaktností v obecných metrických prostorech popisuje následující věta.

**Věta 2.135.** *Nechť $N \subseteq M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru $(M, \varrho)$. Potom $N$ je uzavřená a omezená.*

*Důkaz.* Jak uzavřenost, tak i omezenost se ukazují sporem. Pokuste se o důkaz sami. □

**Příklad 2.136.** Uvažujme metrické prostory $\ell^\infty$ a $c_0$ z Příkladu 2.6. Potom $c_0$ není kompaktní podprostor v $\ell^\infty$. Skutečně, nechť $\{x^{[n]}\}_{n=0}^{\infty}$ je systém reálnych posloupností tvaru

$$x_k^{[n]} := \begin{cases} n, & k = n+1, \\ 0, & k \neq n+1, \end{cases} \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.56}$$

Zřejmě $x^{[n]} \in c_0$ pro každý index $n \in \mathbb{N}_0$. Současně podle (2.13) a (2.56) máme

$$\varrho(x^{[n]}, x^{[0]}) \overset{(2.13)}{=} \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^{[n]} - x_k^{[0]}| \overset{(2.56)}{=} n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.57}$$

Podprostor $c_0$ proto není ohraničený v $\ell^\infty$, neboť pro jeho průměr platí $d(c_0) = \infty$. Proto podle Věty 2.135 podprostor $c_0$ nemůže být ani kompaktní v $\ell^\infty$.

Vyvstává přirozená otázka, totiž zda tvrzení Věty 2.135 lze obrátit. Odpověď je záporná, jak ukazuje následující příklad.

**Příklad 2.137.** (i) V prostoru $\ell^\infty$ všech omezených posloupností reálných čísel se supremovou metrikou není uzavřená jednotková koule kompaktní. Proč? Uvažujte posloupnost $\{u^{[n]}\}$, kde

$$u^{[n]} := (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots),$$

a pokuste se z ní vybrat konvergentní podposloupnost.

(ii) Podobně lze ukázat, že v prostoru $C[0,1]$ se supremovou metrikou není uzavřená jednotková koule kompaktní.

(iii) Prozkoumejte uzavřenost a omezenost vs. kompaktnost pro diskrétní metrický prostor mající nekonečně mnoho prvků.

V kompaktních metrických prostorech kompaktní a uzavřené množiny splývají.

**Věta 2.138.** *Podmnožina kompaktního metrického prostoru je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená.*

*Důkaz.* Implikace zleva doprava je obsahem Věty 2.135. Naopak, nechť $\{x_n\} \subseteq N$, kde $N$ je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru $M$. Protože $M$ je kompaktní, existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$, tj. $x_{n_k} \to x_0 \in M$. Protože však $\{x_{n_k}\} \subseteq N$ a $N$ je uzavřená, platí $x_0 \in N$, tedy $N$ je kompaktní. □

Omezíme-li se na na eukleidovské prostory, pak tvrzení Věty 2.135 lze obrátit.

**Věta 2.139** (Heineova-Borelova věta)**.** *Nechť $A$ je podmnožina v $\mathbb{E}^n$. Množina $A$ je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*

*Důkaz.* Implikace zleva doprava platí v obecných prostorech a je obsahem Věty 2.135. Pro důkaz opačné implikace nejdříve uvedeme pomocné tvrzení. Uvažujme dva metrické prostory $(M,\varrho), (N,\sigma)$. Na množině $M \times N$ definujme funkci

$$\varrho_p([x_1,y_1],[x_2,y_2]) = \left(\varrho^p(x_1,x_2) + \sigma^p(y_1,y_2)\right)^{1/p}$$

pro $p \in [1,\infty)$ a $\varrho_p([x_1,y_1],[x_2,y_2]) = \max\{\varrho(x_1,x_2), \sigma(y_1,y_2)\}$ pro $p = \infty$. Potom $\varrho_p$ je metrika na $M \times N$. Navíc, platí, že prostory $(M,\varrho), (N,\sigma)$ jsou kompaktní, právě když $(M \times N, \varrho_p)$ je kompaktní. Indukcí lze toto tvrzení rozšířit na součin libovolného konečného počtu prostorů. Vzhledem k tomuto tvrzení stačí požadovanou implikaci z věty dokázat pro $n = 1$. Každá uzavřená a omezená množina $A$ je jistě podmnožinou nějakého intervalu $[a,b]$. Tento interval je podle Příkladu 2.134-(ii) kompaktní v $\mathbb{E}^1$. Poněvadž $A$ je uzavřenou podmnožinou kompaktní množiny $[a,b]$, je podle Věty 2.138 kompaktní i množina $A$. □

V příští větě ukážeme další charakterizaci kompaktnosti, tentokrát pomocí tzv. *centrovaných systémů.*

**Definice 2.140** (Centrovaný systém množin)**.** Nechť $(M,\varrho)$ je metrický prostor a $I$ nějaká neprázdná indexová množina. Systém podmnožin $\{A_k\}_{k\in I}$ v $M$ se nazývá *centrovaný*, jestliže pro každou konečnou podmnožinu $J \subseteq I$ platí $\bigcap_{k\in J} A_k \neq \emptyset$.

**Věta 2.141** (Kompaktnost pomocí centrovaných systémů)**.** *Metrický prostor $(M,\varrho)$ je kompaktní právě tehdy, když každý centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny $M$ má neprázdný průnik.*

Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení.

**Lemma 2.142.** *Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor a $I$ libovolná neprázdná indexová množina. Nechť $\{A_k\}_{k\in I}$ je systém uzavřených podmnožin množiny $M$ a položme $B_k := M \setminus A_k$ pro každé $k \in I$. Potom systém $\{B_k\}_{k\in I}$ je otevřené pokrytí množiny $M$ právě tehdy, když $\bigcap_{k\in I} A_k = \emptyset$.*

*Důkaz Lemmatu 2.142.* Tvrzení vyplývá jednak z faktu, že každá z množin $B_k$, $k \in I$, je otevřená v $M$, a jednak z množinových *de Morganových pravidel*, konkrétně

$$\bigcup_{k\in I} B_k = M \setminus \left(\bigcap_{k\in I} A_k\right), \qquad \bigcap_{k\in I} A_k = M \setminus \left(\bigcup_{k\in I} B_k\right). \tag{2.58}$$

Jestliže $\{B_k\}_{k\in I}$ je otevřené pokrytí množiny $M$, potom platí $M = \bigcup_{k\in I} B_k$, a tedy z druhé identity v (2.58) máme $\bigcap_{k\in I} A_k = \emptyset$. Naopak, jestliže $\bigcap_{k\in I} A_k = \emptyset$, potom první rovnost v (2.58) implikuje $M = \bigcup_{k\in I} B_k$, a tedy $\{B_k\}_{k\in I}$ je otevřené pokrytí množiny $M$. □

*Důkaz Věty 2.141.* Nechť $(M, \varrho)$ je kompaktní metrický prostor a uvažujme nějaký centrovaný systém $\{A_k\}_{k\in I}$ uzavřených podmnožin množiny $M$. Položme $B_k := M \setminus A_k$. V souladu s Definicí 2.140 pro každou konečnou podmnožinu $J \subseteq I$ je $\bigcap_{k\in J} A_k \neq \emptyset$, což podle (2.58) znamená, že $\bigcup_{k\in J} B_k \subsetneq M$, tj. systém $\{B_k\}_{k\in J}$ není otevřeným pokrytím množiny $M$. Předpoklad kompaktnosti $(M, \varrho)$ a Definice 2.131 však následně zaručí, že ani $\{B_k\}_{k\in I}$ nemůže být otevřené pokrytí množiny $M$. Proto podle Lemmatu 2.142 platí $\bigcap_{k\in I} A_k \neq \emptyset$. Naopak předpokládejme, že každý centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny $M$ má neprázdný průnik. Nechť $\{B_k\}_{k\in I}$ je nějaké otevřené pokrytí množiny $M$ a položme $A_k := M \setminus B_k$, $k \in I$. Každá z množin $A_k$ je zřejmě uzavřená a v souladu s Lemmatem 2.142 platí $\bigcap_{k\in I} A_k = \emptyset$. Proto $\{A_k\}_{k\in I}$ nemůže být centrovaný systém podmnožin v $M$. Podle Definice 2.140 tedy existuje konečná množina indexů $J \subseteq I$ taková, že $\bigcap_{k\in J} A_k = \emptyset$. Ve shodě s Lemmatem 2.142 potom ale $\{B_k\}_{k\in J}$ je otevřené pokrytí množiny $M$, a tedy konečné podpokrytí pokrytí $\{B_k\}_{k\in I}$. Podle Definice 2.131 je tedy metrický prostor $(M, \varrho)$ kompaktní. □

**Příklad 2.143.** (i) Nechť $M = [0, 1]$. Systém množin $A_n = [0, 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$, je centrovaný, jeho průnikem je množina $\{0\}$.

(ii) Nechť $M = [0, 1]$. Systém množin $A_n = (0, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, je centrovaný, jeho průnikem je však prázdná množina.

**Poznámka 2.144.** Formulaci Věty 2.141 lze pozměnit ve smyslu vzetí spočetného centrovaného systému uzavřených množin, přičemž ekvivalence zůstane zachována, viz [28].

Následuje další charakterizace kompaktnosti.

**Věta 2.145** (Kompaktnost pomocí hromadného bodu)**.** *Metrický prostor $(M, \varrho)$ je kompaktní právě tehdy, když každá nekonečná podmnožina $N \subseteq M$ má aspoň jeden hromadný bod v $M$ (tj. $N' \neq \emptyset$).*

*Důkaz.* Dokážeme implikaci zleva doprava. Sporem předpokládejme, že existuje nekonečná podmnožina $N \subseteq M$, která nemá žádný hromadný bod. Zřejmě je možné vybrat její spočetnou podmnožinu

$$\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots\} \subseteq N,$$

která též nemá žádný hromadný bod. Uvažujme systém nekonečných množin

$$A_k := \{x_k,\, x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots,\, x_n,\, \ldots\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.59}$$

V souladu s Definicí 2.140 je potom $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ centrovaným systémem uzavřených podmnožin množiny $M$. Skutečně, pro každou konečnou množinu indexů $J = \{k_1,\, \ldots,\, k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$\bigcap_{k\in J} A_k = \{x_l,\, x_l+1,\, x_l+2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots\} \neq \emptyset, \quad \text{kde } l := \max\{k_1,\, \ldots,\, k_n\}.$$

Na druhé straně zřejmě $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$, a proto podle Věty 2.141 metrický prostor $(M, \varrho)$ nemůže být kompaktní, což je však spor s předpokladem věty. Pro důkaz opačné implikace odkážeme čtenáře např. na [28]. $\square$

**Příklad 2.146.** Uvažujme prostor $\ell^2$ a jeho podmnožinu $N$ tvořenou posloupnostmi

$$x^{[n]} := (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots),$$

$n \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí $\varrho_2(x^{[m]}, x^{[n]}) = \sqrt{2}$ pro $m \neq n$. Nekonečná množina $N$ je zřejmě uzavřená a ohraničená v $\ell^2$. Nemá však žádný hromadný bod a tedy podle Věty 2.145 nemůže být kompaktní. Máme tak další potvrzení toho, že tvrzení Věty 2.135 nelze obrátit. Poznamenejme, že množina $N$ leží na jednotkové sféře $\mathcal{S}$ v $\ell^2$.

**Poznámka 2.147.** Shrňme si některá z výše uvedených pozorování. Kompaktnost (v metrických prostorech) je „víc“ než uzavřenost & omezenost a lze ji ekvivalentně vyjádřit:

- pomocí posloupností;
- pomocí (spočetného) otevřeného pokrytí;
- pomocí (spočetných) centrovaných systémů;
- pomocí existence hromadného bodu.

Upozorněme, že v obecných topologických prostorech tyto charakteristiky nedávají ekvivalentní pojmy. Zmíněné (ekvivalentní) vlastnosti lze pak často užít při teoretických úvahách či při zkoumání konkrétních situací v metrických prostorech. Existují ještě další charakterizace kompaktnosti; k této problematice se vrátíme při studiu prekompaktních a relativně kompaktních množin.

## Spojitá zobrazení kompaktních prostorů

Následující tvrzení lze chápat jako zobecnění již dříve zmíněné Weierstrassovy věty (spojitá funkce na uzavřeném a omezeném intervalu je omezená).

**Věta 2.148.** *Nechť $(M,\varrho)$ a $(N,\sigma)$ jsou metrické prostory, $f : M \to N$ je spojité zobrazení a $A \subseteq M$ kompaktní. Potom $f(A)$ je množina kompaktní v $(N,\sigma)$.*

*Důkaz.* Buď $\{u_n\} \subseteq f(A)$ libovolná posloupnost. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ tak, že $f(x_n) = u_n$ (tj. vzor pro $u_n$). Poněvadž $A$ je kompaktní, existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že $x_{n_k} \xrightarrow{\varrho} x_0 \in A$. Vzhledem ke spojitosti $f$ dostáváme $f(x_{n_k}) \xrightarrow{\sigma} f(x_0) \in f(A)$. Proto $\{u_n\} \subseteq f(A)$ obsahuje konvergentní podposloupnost, která konverguje k prvku z $f(A)$. Je tedy $f(A)$ kompaktní. □

Lze nalézt i jiný přístup k důkazu, totiž pomocí otevřených pokrytí, viz [28]. Z uvedené věty zejména plyne, že spojitý obraz kompaktní množiny je vždy uzavřený a ohraničený. Jako speciální případ máme tuto variantu Weierstrassovy věty.

**Důsledek 2.149** (Weierstrassova věta)**.** *Nechť $(M,\varrho)$ je kompaktní metrický prostor a $f$ spojité zobrazení zobrazující $M$ do eukleidovského prostoru $\mathbb{E}^1$. Potom je zobrazení $f$ omezené a nabývá své maximum a minimum na $M$.*

Vezmeme-li za $M$ nějakou uzavřenou a omezenou množinu v $\mathbb{E}^n$, pak se předchozí důsledek redukuje na známé tvrzení z diferenciálního počtu funkce více proměnných.

Dále uvidíme, že v případě kompaktních prostorů je spojitost automaticky stejnoměrná.

**Věta 2.150** (Cantorova-Heineova věta)**.** *Nechť $(M,\varrho)$ je kompaktní metrický prostor, $(N,\sigma)$ metrický prostor a $f : M \to N$ spojité zobrazení. Pak $f$ je stejnoměrně spojité.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že zobrazení $f$ není stejnoměrně spojité, tj. podle Definice 2.78 existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují body $x_n, x_n^* \in M$ s vlastností

$$\rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \sigma(f(x_n), f(x_n^*)) \geq \varepsilon. \tag{2.60}$$

Vzhledem k Větám 2.145 a 2.135 obsahuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ díky kompaktnosti množiny $M$ konvergentní vybranou podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou $x \in M$. Využitím trojúhelníkové nerovnosti a první nerovnosti v (2.60) vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}^*\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{x_n^*\}_{k=1}^{\infty}$ splňuje

$$\lim_{k\to\infty} \varrho(x_{n_k}^*, x) \leq \lim_{k\to\infty} \left[\varrho(x_{n_k}^*, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x)\right] \overset{(2.60)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{n_k} + \varrho(x_{n_k}, x)\right] = 0,$$

což podle Definice 2.57 znamená, že i posloupnost $\{x_{n_k}^*\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní s limitou $x$. Následně podle Věty 2.73 ze spojitosti zobrazení $f$ dostáváme

$$\varepsilon \overset{(2.60)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \sigma(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^*)) \leq \lim_{k\to\infty} \left[\sigma(f(x_{n_k}), f(x)) + \sigma(f(x), f(x_{n_k}^*))\right] = 0,$$

což odporuje předpokladu o čísle $\varepsilon$. Proto zobrazení $f$ je stejnoměrně spojité. □

## Prekompaktnost a relativní kompaktnost

V této sekci se zabýváme množinami, které jsou v jistém smyslu blízko kompaktním množinám. Jak uvidíme, tyto úvahy se nám později budou velmi hodit pro praktické účely. Pozor, terminologie v této oblasti je dost nejednotná. Začneme s definicí pomocného pojmu.

**Definice 2.151** ($\varepsilon$-ová síť)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor, $N \subseteq M$ podmnožina a $\varepsilon$ kladné reálné číslo. Množina $A \subseteq M$ se nazývá *síť množiny $N$ s poloměrem $\varepsilon$*, resp. *$\varepsilon$-ová síť množiny $N$*, jestliže pro každý bod $x \in N$ existuje bod $y \in A$ tak, že $\varrho(x, y) \leq \varepsilon$.

**Poznámka 2.152.** Množina $A$ je $\varepsilon$-ovou sítí množiny $N$, jestliže sjednocení koulí o poloměru $\varepsilon$ se středy v bodech množiny $A$ pokryje $N$ v $(M, \varrho)$.

**Příklad 2.153.** Síť všech bodů v $\mathbb{E}^n$, jejichž souřadnice jsou celočíselnými násobky čísla $\varepsilon$, tvoří $\varepsilon$-ovou síť množiny $\mathbb{R}^n$. Tato síť je jistě nekonečná a zřejmě neexistuje konečná $\varepsilon$-ová síť množiny $\mathbb{R}^n$. Na druhou stranu, pro libovolnou omezenou množinu v $\mathbb{R}^n$ konečnou $\varepsilon$-ovou síť najdeme.

Nyní zavedeme pojem prekompaktní množiny. Přestože to z definice není na první pohled patrné, později uvidíme, že prekompaktní množinu lze chápat jako objekt, který obdržíme, zaměníme-li v definici kompaktnosti konvergentní posloupnost za cauchyovskou. Později navíc ukážeme, že je za určitých okolností v úzkém vztahu s tzv. relativně kompaktní množinou. Lze se ovšem též motivovat předchozím příkladem.

**Definice 2.154** (Prekompaktní množina)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor. Říkáme, že množina $N \subseteq M$ je *prekompaktní*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná $\varepsilon$-ová síť této množiny. Říkáme, že metrický prostor $(M, \varrho)$ je *prekompaktní*, jestliže množina $M$ je prekompaktní.

**Poznámka 2.155** (Terminologická poznámka)**.** Zejména (ovšem nejen) ve starší literatuře se místo pojmu prekompaktní množina užívá pojmu *totálně omezená* množina. Aby těch zmatků nebylo málo, někde v literatuře se výraz prekompaktní množina používá pro tzv. *relativně kompaktní* množinu, kterou také diskutujeme níže.

**Poznámka 2.156.** A teď trocha „legrace“. Právě definovaný pojem lze interpretovat následujícím způsobem (jde o dobrou pomůcku k zapamatování): Prekompaktní (či totálně omezený) prostor je město, které lze střežit konečným počtem libovolně krátkozrakých strážců.

Uvážíme-li konečnost $\varepsilon$-ové sítě, trojúhelníkovou nerovnost a definici omezenosti, dostáváme následující tvrzení.

**Věta 2.157.** *Každý prekompaktní prostor je omezený.*

**Poznámka 2.158.** V prostorech $\mathbb{E}^n$ prekompaktnost a omezenost splývají. V obecném případě tomu tak není. Např. diskrétní metrický prostor je prekompaktní, právě když má konečně mnoho prvků. Na druhé straně, každý, tedy i nekonečný, diskrétní prostor je evidentně omezený. V této souvislosti prozkoumejte i množinu $N \subset \ell^2$ z Příkladu 2.146 a uvědomte si, že jednotková sféra $\mathcal{S}$ v $\ell^2$ (na níž množina $N$ leží) je zřejmě ohraničená, ale nelze na ní najít konečnou $\varepsilon$-ovou síť pro jistá (malá) $\varepsilon$.

**Příklad 2.159.** V předchozím jsme viděli, že jednotková sféra $\mathcal{S}$ v $\ell^2$, tj. množina takových bodů $x = (x_1, x_2, \dots)$, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1$, je příkladem ohraničené, ale nikoli prekompaktní množiny. Příkladem nekonečněrozměrné prekompaktní množiny je tzv. *Hilbertův kvádr* v prostoru $\ell^2$, tj. množina $\{x \in \ell^2 : |x_k| \le 1/2^{k-1},\ k \in \mathbb{N}\}$.

**Věta 2.160.** *Každý prekompaktní prostor je separabilní.*

*Důkaz.* Nechť $(M, \varrho)$ je prekompaktní metrický prostor. Označme $A_n$ konečnou $1/n$-síť množiny $M$. Potom je množina $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nejvýše spočetná a podle Poznámky 2.44 hustá v $(M, \varrho)$. □

**Příklad 2.161.** Tvrzení Věty 2.160 nelze obrátit. Vhodně to ilustruje např. podprostor $(N, \varrho_2)$ metrického prostoru $\ell^2$ zkoumaný v Příkladu 2.146. Již z dřívějška (viz Příklad 2.52) víme, že $\ell^2$ je separabilní. Tedy i podprostor $(N, \varrho_2)$ je separabilní. Avšak není prekompaktní v $\ell^2$, neboť pro množinu $N$ neexistuje konečná $\varepsilon$-ová síť s hodnotou $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

**Cvičení 2.162.** Promyslete si: Množina $N$ v metrickém prostoru $(M, \varrho)$ je separabilní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje spočetná $\varepsilon$-ová síť této množiny.

Prekompaktnost lze charakterizovat pomocí cauchyovských posloupností. Právě proto se někde v literatuře níže uvedený vztah používá jako definice prekompaktnosti.

**Věta 2.163** (Prekompaktnost pomocí cauchyovských posloupností)**.** *Metrický prostor $(M, \varrho)$ je prekompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti bodů množiny $M$ lze vybrat posloupnost cauchyovskou.*

*Důkaz.* Dokážeme implikaci zprava doleva. Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor takový, že z každé posloupnosti bodů množiny $M$ lze vybrat posloupnost cauchyovskou a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Zvolme bod $x_1 \in M$ libovolně. Je-li uzavřená koule $\mathcal{B}[x_1, \varepsilon] = M$, lze za $\varepsilon$-ovou síť v $M$ zvolit množinu $\{x_1\}$. Nechť tedy $\mathcal{B}[x_1, \varepsilon] \subset M$. Potom existuje bod $x_2 \in M$ tak, že $\varrho(x_1, x_2) > \varepsilon$. Je-li nyní $\mathcal{B}[x_1, \varepsilon] \cup \mathcal{B}[x_2, \varepsilon] = M$, tvoří $\varepsilon$-ovou síť množina $\{x_1, x_2\}$. Pokud je $\mathcal{B}[x_1, \varepsilon] \cup \mathcal{B}[x_2, \varepsilon] \subset M$, existuje bod $x_3 \in M$ takový, že $\varrho(x_1, x_3) > \varepsilon$ a $\varrho(x_2, x_3) > \varepsilon$ atd. Takto lze ovšem sestrojit pouze konečnou posloupnost bodů $x_n$, neboť z nekonečné posloupnosti $\{x_n\}$ by nebylo možné vybrat posloupnost cauchyovskou. Existuje tedy v $M$ konečná $\varepsilon$-ová síť.

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Nechť v metrickém prostoru $(M, \varrho)$ ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná $\varepsilon$-ová síť $A_\varepsilon$. Označme $\varepsilon_k = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, a místo $A_{\varepsilon_k}$ pišme stručně $A_k$. Buď $\{x_n\}$ libovolná posloupnost v $M$. Protože $M = \bigcup_{y\in A_1} \mathcal{B}[y, 1]$ a $A_1$ je konečná množina, obsahuje aspoň jedna uzavřená koule $\mathcal{B}[y, 1]$, $y \in A_1$, nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$, tedy v $\{x_n\}$ existuje vybraná podposloupnost $\{x_n^{(1)}\}$ taková, že pro vhodné $a_1 \in A_1$ je $x_n^{(1)} \in \mathcal{B}[a_1, 1]$. Analogicky v $\{x_n^{(1)}\}$ existuje vybraná posloupnost

$\{x_n^{(2)}\}$ taková, že pro vhodné $a_2 \in A_2$ je $x_n^{(2)} \in \mathcal{B}[a_2, 1/2]$ atd. Obecně tedy ke každému $\varepsilon_k = 1/k$ existuje aspoň jedna uzavřená koule $\mathcal{B}[a_k, 1/k]$, $a_k \in A_k$, taková, že obsahuje posloupnost $\{x_n^{(k)}\}$ vybranou z $\{x_n^{(k-1)}\}$. Pak ale „diagonální" posloupnost $\{x_n^{(n)}\}$ vybraná z $\{x_n\}$ je cauchyovská, neboť k libovolnému $\delta > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $2/k < \delta$, tedy $d(\mathcal{B}[a_k, 1/k]) = 2/k < \delta$. Proto pro libovolné $i, j \geq k$ platí $\varrho(x_i^{(i)}, x_j^{(j)}) < \delta$. □

Než uvedeme následující důležité tvrzení, které dává do souvislosti kompaktnost, úplnost a prekompaktnost, uvědomme si, že jsme zatím nehovořili o vztahu mezi kompaktností a úplností. Zkuste si nejdříve jako cvičení (bez poznatků této sekce a nahlédnutí do důkazu) ukázat, že kompaktnost implikuje úplnost, ale nikoliv naopak. K neplatnosti opačné implikace uveďme následující příklad.

**Příklad 2.164.** Nekonečný diskrétní prostor je úplný, ale není kompaktní. Uzavřená jednotková koule v $(C[a,b], \varrho_C)$ je díky úplnosti $(C[a,b], \varrho_C)$ a Větě 2.97 úplným metrický prostorem, avšak nikoliv kompaktním, viz Příklad 2.137. Uvedli jsme příklady požadovaných prostorů, které jsou dokonce omezené, což ani nebylo potřeba. Najít vhodný příklad neomezeného prostoru s požadovanými vlastnostmi je ještě jednodušší.

**Věta 2.165** (Zobecněná Heineova-Borelova věta)**.** *Metrický prostor $(M, \varrho)$ je kompaktní právě tehdy, když je prekompaktní a zároveň úplný.*

*Důkaz.* Nechť $(M, \varrho)$ je kompaktní. Potom z definice kompaktnosti a z Věty 2.163 je zřejmé, že $M$ je prekompaktní. Dokážeme úplnost. Nechť $\{x_n\}$ je libovolná cauchyovská posloupnost v $M$. Z kompaktnosti $M$ plyne, že existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $x_0 \in M$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Z trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\varrho(x_n, x_0) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x_0).$$

Jsou-li nyní $n$ a $n_k$ dostatečně velká, je každý ze sčítanců v poslední nerovnosti menší než $\varepsilon/2$. To tedy znamená, že $x_n \xrightarrow{\varrho} x_0$.

Naopak, nechť $(M, \varrho)$ je prekompaktní a úplný. Vzhledem k Větě 2.163 je kompaktnost prostoru $(M, \varrho)$ zřejmá. Připomeňme, že v úplných prostorech konvergentní a cauchyovské posloupnosti splývají. □

**Poznámka 2.166.** Důkaz faktu, že prekompaktnost (tj. existence konečné $\varepsilon$-ové sítě) a úplnost implikují kompaktnost, byl jednoduchý díky Větě 2.163. Přímý důkaz této skutečnosti lze založit i na kombinaci myšlenek důkazu Věty 2.163 a zobecněném principu vložených intervalů (Věta 2.106), viz např. [28].

**Cvičení 2.167.** Jaký je vztah mezi prekompaktností a úplností?

**Poznámka 2.168.** Některé z následujících faktů jsme diskutovali už dříve. Nicméně je užitečné poznamenat, že jako důsledek předchozí věty (díky vlastnostem prekompaktních množin) okamžitě dostáváme, že každý kompaktní prostor je úplný, omezený a separabilní.

Výše jsme uvedli, že o kompaktnosti lze hovořit zhruba jako o analogii podmínky „uzavřenost a omezenost“ (zejména jde o v jistém smyslu její „nekonečnědimenzionální“ analogii, viz normované lineární prostory). Vynecháme-li — vágně řečeno — podmínku uzavřenosti, dostáváme následující slabší verzi kompaktnosti, zvanou relativní kompaktnost.

**Definice 2.169** (Relativně kompaktní množina)**.** Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor. Říkáme, že množina $N \subseteq M$ je *relativně kompaktní* (v prostoru $(M, \varrho)$), jestliže její uzávěr $\overline{N}$ v $(M, \varrho)$ je kompaktní.

**Poznámka 2.170.** Jak už jsme poznamenali dříve, někde v literatuře se právě definovaný pojem nazývá prekompaktní množina.

Důvodem, proč jsou uvedené pojmy v literatuře zaměňovány, může být následující fakt. Zdůrazněme však, že se týká pouze úplných prostorů.

**Věta 2.171.** *Nechť $(M, \varrho)$ je úplný metrický prostor. Potom neprázdná podmnožina $N \subseteq M$ je relativně kompaktní právě tehdy, když je prekompaktní.*

*Důkaz.* Nejprve poznamenejme, že podle Poznámky 2.32 je množina $N$ prekompaktní, právě když $\overline{N}$ je prekompaktní. Předpokládejme, že $N$ je prekompaktní. Podle Věty 2.97 dostáváme, že $\overline{N}$ je úplný metrický prostor. Z Věty 2.165 plyne, že $\overline{N}$ je kompaktní a tedy $N$ je relativně kompaktní. Opačný směr přenecháváme jako cvičení. Můžete využít výše zmíněného vztahu mezi $N$ a $\overline{N}$ (kde se prekompaktnost zachovává), nebo přemýšlet o jiném způsobu důkazu, a to s využitím Věty 2.163 a Věty 2.172. □

**Věta 2.172** (Relativní kompaktnost pomocí konvergentních posloupností)**.** *Nechť $(M, \varrho)$ je metrický prostor. Potom neprázdná podmnožina $N \subseteq M$ je relativně kompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti bodů množiny $N$ lze vybrat konvergentní podposloupnost (jejíž limita ovšem nemusí již ležet v $N$).*

*Důkaz.* Implikace zleva doprava je jednoduchá; pokuste se o ni. Pro důkaz opačné implikace vezměme $N \subseteq M$ takovou, že z každé posloupnosti $\{y_n\} \subseteq N$ lze vybrat podposloupnost konvergentní v $M$. Potom $\{y_n\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ takovou, že $y_{n_k} \to y_0$, přičemž zřejmě $y_0 \in \overline{N}$. Poněvadž $N$ je hustá v $\overline{N}$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in N$ tak, že $\varrho(x_n, y_n) < 1/n$. Odtud, s využitím trojúhelníkové nerovnosti, dostáváme

$$\varrho(x_{n_k}, y_0) \leq \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(y_{n_k}, y_0) < \frac{1}{n_k} + \varrho(y_{n_k}, y_0) \to 0$$

pro $k \to \infty$. Tedy $x_{n_k} \to y_0 \in \overline{N}$, a proto $\overline{N}$ je kompaktní. □

**Poznámka 2.173.** Poznamenejme, že někde v literatuře se relativní kompaktnost definuje právě pomocí charakterizace z Věty 2.172. Dobře si všimněte drobných (ale velmi podstatných) rozdílů v definici kompaktní množiny, v charakterizaci prekompaktnosti z Věty 2.163 a v charakterizaci relativní kompaktnosti z Věty 2.172.

**Cvičení 2.174.** (i) Platí v obecném případě (tj. bez úplnosti) alespoň jedna z implikací Věty 2.171?

(ii) Najděte příklad relativně kompaktní množiny, která není kompaktní. Dále ukažte, že omezené množiny v $\mathbb{E}^n$ jsou relativně kompaktní; pokuste se najít víc způsobů (pomocí vlastností uzavřených a omezených množin v $\mathbb{E}^n$ nebo pomocí $\varepsilon$-ové sítě nebo pomocí posloupností).

**Poznámka 2.175.** Shrňme některá důležitá fakta uvedená v této sekci:

- Prekompaktnost množiny znamená, že v ní existuje konečná $\varepsilon$-síť, tzn., že prekompaktní množinu lze vždy pokrýt konečně mnoha koulemi o libovolně malém poloměru. Prekompaktním množinám se někdy říká totálně omezené.
- Relativně kompaktní množiny jsou ty, jejichž uzávěr je kompaktní. Relativně kompaktním množinám se někdy říká prekompaktní.
- Množina je prekompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti jejich prvků lze vybrat cauchyovskou posloupnost.
- Množina je relativně kompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti jejich prvků lze vybrat konvergentní posloupnost (přičemž limita nemusí ležet v této množině).
- V úplných metrických prostorech prekompaktní množiny a relativně kompaktní množiny splývají
- Kompaktní množiny jsou právě ty, které jsou prekompaktní a úplné.

Jen na okraj zmiňme, že v Poznámce 4.45 diskutujeme zobrazení, v nichž důležitou roli hraje relativní kompaktnost.

## 2.8 Kritéria (relativní) kompaktnosti a aplikace

Pro praktické účely je potřeba mít k dispozici rozumné nástroje, kterými zjistíme, zda je daná množina relativně kompaktní. Uvedeme kritéria pro některé speciální prostory. Pro velmi často využívanou Arzeláovu-Ascoliho větu, která popisuje situaci v prostoru $(C[a,b], \varrho_C)$, potřebujeme následující pojmy.

**Definice 2.176** (Stejnoměrná ohraničenost, rovnomocná spojitost)**.** Pro daná $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, uvažujme (neprázdnou) množinu $N$ funkcí $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(i) Řekneme, že funkce z množiny $N$ jsou *stejnoměrně ohraničené* (též *stejně ohraničené*) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje kladné reálné číslo $L$ s vlastností

$$|f(x)| \leq L \quad \text{pro každé } x \in [a,b] \text{ a každé } f \in N. \tag{2.61}$$

(ii) Řekneme, že funkce z množiny $N$ jsou *rovnomocně spojité* (též *stejně spojité*) na intervalu $[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\begin{aligned} &\text{pro všechna } x, x^* \in [a,b] \;\; \text{s vlastností } |x - x^*| < \delta \\ &\text{a pro všechny funkce } f \in N \text{ platí } |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.62}$$

**Poznámka 2.177.** Z podmínky (2.61) je zřejmé, že jestliže $N$ je množina funkcí stejnoměrně ohraničených na intervalu $[a,b]$, potom nutně $N \subseteq B[a,b]$. Zejména platí, že množina $N$ je ohraničená v metrickém prostoru $(B[a,b], \varrho_B)$. Jestliže $N$ je množina funkcí rovnomocně spojitých na intervalu $[a,b]$, potom podle Definice 2.78 a podmínky (2.62) je každá funkce $f \in N$ stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

**Cvičení 2.178.** Dokažte, že každá konečná množina funkcí spojitých na $[a,b]$ tvoří množinu rovnomocně spojitých funkcí. Dále ukažte, že systém $\{f_c : 0 \le c \le 1\}$, kde $f_c(x) = cx(1-x)$, tvoří množinu stejnoměrně ohraničených funkcí na $[0,1]$, kdežto systém $\{f_c : c \ge 0\}$ už takovou množinu netvoří.

**Věta 2.179** (Arzeláova-Ascoliho věta)**.** *Množina $N \subseteq C[a,b]$ je relativně kompaktní v prostoru $(C[a,b], \varrho_C)$ právě tehdy, když funkce z množiny $N$ jsou stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojité na $[a,b]$.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt v mnoha zdrojích, např. [20, 21, 28]. Naznačme alespoň, jak se konstruuje konečná $\varepsilon$-síť (její existence nám zaručí — díky úplnosti uvažovaného prostoru — relativní kompaktnost). Nejdříve se vhodně rozdělí definiční obor a interval $[-L, L]$ (kde $L$ je konstanta z (2.61)) a dělícími body vedeme přímky rovnoběžné s osami. Požadovaná $\varepsilon$-síť je vytvořena z po částech lineárních funkcí, které procházejí průsečíky sestrojených přímek. Danou funkci $f \in N$ pak aproximujeme funkcí z $\varepsilon$-sítě, která prochází body nejbližšími grafu funkce $f$. Důkaz relativní kompaktnosti lze ovšem založit i na jiné myšlence, kdy se prokazuje možnost nalezení jisté vybrané (diagonální) cauchyovské posloupnosti funkcí. □

**Důsledek 2.180** (Kompaktnost v prostoru spojitých funkcí)**.** *Množina $N \subseteq C[a,b]$ je kompaktní v prostoru $(C[a,b], \varrho_C)$ právě tehdy, když $N$ je uzavřená v $(C[a,b], \varrho_C)$ a funkce z množiny $N$ jsou stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojité na $[a,b]$.*

**Důsledek 2.181.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí spojitých na kompaktním intervalu $[a,b]$, $a < b$. Jestliže funkce $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojité na $[a,b]$, potom existuje vybraná podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$.*

K předchozímu důsledku poznamenejme, že je-li tedy $\mathcal{F}[a,b]$ systém stejnoměrně ohraničených a rovnomocně spojitých funkcí na $[a,b]$, lze z $\mathcal{F}[a,b]$ vybrat posloupnost konvergentní v $C[a,b]$.

Klasickým výsledkem, který využívá Arzeláovu-Ascoliho větu, je *Peanova věta* o řešitelnosti Cauchyovy úlohy

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

na nějakém intervalu. Peanova věta vyžaduje pouhou spojitost funkce $f(x,y)$, na rozdíl od dříve zmíněné Picardovy věty, která potřebuje i Lipschitzovskost vzhledem k $y$. Připomeňme, že důkaz Picardovy věty je založen na Banachově větě o pevném bodu a zaručuje i jednoznačnost řešení, které je navíc zkonstruováno pomocí posloupnosti postupných aproximací, viz Příklad 2.127. Důkaz Peanovy věty žádný návod na nalezení řešení nedává.

Předvedeme jej v Podkapitole 4.7. Poznamenejme, že existují různé verze důkazů Peanovy věty. Je možné např. provést konstrukci jistých pomocných funkcí, z nichž pak na základě Arzeláovy-Ascoliho věty vybereme stejnoměrně konvergentní posloupnost, jejíž limitou je hledané řešení, viz např. [26, 28]. Jinou možností je důkaz prostřednictvím Schauderovy věty o pevném bodu (viz Věta 4.44), avšak i v tomto případě hraje důležitou roli Věta 2.179. Právě takový důkaz podáme v Podkapitole 4.7 Existuje však i důkaz, který není založen na použití Věty 2.179. Další aplikaci Arzeláovy-Ascoliho věty v rámci našeho kurzu předvedeme v důkazu Věty 4.49, kde dokazujeme řešitelnost tzv. Hammersteinovy integrální rovnice, a to opět pomocí Schauderovy věty o pevném bodu. Tento výsledek nám pak umožní prozkoumat jistý nelineární oscilátor.

Existují kritéria kompaktnosti v různých dalších speciálních prostorech. Pro zajímavost zde uveďme tvrzení pro prostory $\ell^p$ a (Lebesgueovy) prostory $L^p$. Pro jejich důkazy viz např. článek [21], kde lze nalézt i hezký historický přehled této problematiky.

**Věta 2.182** (Relativní kompaktnost v prostoru $\ell^p$)**.** *Pro dané $p \in [1, \infty)$ uvažujme metrický prostor $\ell^p$. Potom neprázdná podmnožina $N \subseteq \ell^p$ je relativně kompaktní v $\ell^p$ právě tehdy, když*

*(i) $N$ je ohraničená v $\ell^p$,*

*(ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n \in \mathbb{N}$ tak, že*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon \quad \text{pro každé } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in N. \tag{2.63}$$

V následující větě uvažujeme Lebesgueovy prostory, které zavedeme až v příští kapitole.

**Věta 2.183** (Rieszova-Kolmogorova věta)**.** *Pro dané $p \in [1, \infty)$ uvažujme metrický prostor $L^p(\mathbb{R}^n)$. Potom neprázdná podmnožina $N \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ je relativně kompaktní v $L^p(\mathbb{R}^n)$ právě tehdy, když*

*(i) $N$ je ohraničená v $L^p(\mathbb{R}^n)$,*

*(ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R$ tak, že pro každé $f \in N$ platí*

$$\left( \int_{|x|>R} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

*(iii) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $f \in N$ a každé $y \in \mathbb{R}^n$ s vlastností $|y| < \delta$ platí*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Kapitola 3

# Lebesgueův integrál

Nyní z našeho výkladu trochu odbočíme a budeme se věnovat Lebesgueově míře a Lebesgueovu integrálu. Protože se tohoto zajímavého tématu jen stručně dotkneme, zájemce o hlubší studium odkážeme např. na [4, 5, 18, 23, 24, 28, 32, 34, 37, 38, 41, 43, 44, 47, 52, 53, 56, 59].

Poznamenejme, že zdroje se mohou lišit v hutnosti a hloubce výkladu, výběru témat i volbě přístupů.

H. L. Lebesgue (1875-1941) byl francouzský matematik. Okolo roku 1901 zformuloval, vycházeje z myšlenek Borelových a Jordanových, teorii míry a ještě v témže období podal definici Lebesgueova integrálu zobecňujícího integrál Riemannův. Tím způsobil jistou „revoluci“ v integrálním počtu.

## 3.1 Motivační úvahy

Pokud nejste přiznivci upovídaných motivačních úvah, můžete tuto část přeskočit a přikročit rovnou k Podkapitole 3.2.

V prvé řadě zdůrazněme, že níže nenajdeme beze zbytku precizní zavedení všech podstatných pojmů teorie míry a integrálu a odvození alespoň těch nejdůležitějších tvrzení. To vzhledem k náplni a rozsahu kurzu bohužel není možné. Protože se však ve funkcionální analýze těžko obejdeme bez Lebesgueova integrálu, podáme alespoň jeho hrubé přiblížení. Neodpustíme si ovšem např. důkaz Leviho věty, důkaz věty o úplnosti prostorů $L^p$ a několika dalších vybraných tvrzení, které mají úzkou vazbu na obsah kurzu. Některá z nich jsou hlouběji diskutována i v jiných kapitolách, a to v kontextu příslušných témat.

Je dobře známo, že Jordanova míra či Riemannův integrál (příp. Newtonův integrál) nemusejí vyhovovat našim potřebám v řadě důležitých situací (některé z nich se objevují právě v našem kurzu, ale lze je nalézt v různých dalších oblastech matematiky). Myšlenka Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu souvisí s hledáním „lepší“ míry a „lepšího“ integrálu. V tento moment poznamenejme, že Riemannův integrál je definován pouze pro takové funkce, které jsou buď spojité, nebo nemají „příliš mnoho“ bodů nespojitosti. Pro tzv. měřitelné funkce, které mohou být nespojité všude tam, kde jsou definovány (nebo mohou být definovány v abstraktní množině, takže pro ně pojem spojitosti nemá jednoduše význam; můžeme mít i prostory bez topologie), nelze Riemannovy (či Newtonovy) konstrukce integrálu použít. Zmiňme dále zejména problém s neúplností prostoru Riemannovsky integrovatelných funkcí, problém s příliš striktními požadavky, které jsou potřeba ve větách o limitním přechodu s Riemannovým integrálem, či s nutností popasovat se s některými těžkopádnými manipulacemi s Riemannovým integrálem (které mohou být nahrazeny „elegantnějšími“ argumenty zahrnujícími Lebesgueův integrál). Jak např. píše N. Wiener [61]: „*An adequate theory of the Fourier series can only be established on the basis of Lebesgue integration. All those theorems which proceed from a given function to its Fourier coefficients can indeed be established on the basis of any less ilusive concepts, such as that of Riemann integral, but the fundamental theorem which proceeds from a set of coefficients to the existence of a function having these Fourier coefficients, that of Riesz and Fischer, is simply false for any definition narrower than that of Lebesgue.*“ Problémy s Riemannovým integrálem vznikly např. i při výpočtu délky rektifikace schopné křivky. Značně široká třída Lebesgueovsky integrovatelných funkcí je jen jednou z výhod, neboť — jak již bylo výše naznačeno — Lebesgueův integrál lze uvažovat i v abstraktním pojetí (což má řadu aplikací v různých oblastech matematiky). Důvodů k zavedení obecnějšího integrálu je tedy víc než dost.

Základní myšlenka Lebesgueova integrálu spočívá v tom, že na rozdíl od Riemannova integrálu se body $x$ seskupují nikoli podle své blízkosti na ose $x$, nýbrž podle blízkosti funkčních hodnot v těchto bodech. Jinak řečeno, rozdíl mezi obyčejným „riemannovským“ dělením a lebesgueovským dělením spočívá hlavně v tom, že riemannovské dělení je pouze na intervaly, u lebesgueovského dělení se dělí na libovolné množiny. To bezprostředně umožňuje rozšířit pojem integrálu na velmi širokou třídu funkcí. Kromě toho se Lebesgueův integrál může definovat zcela stejně pro funkce v libovolných prostorech s mírou, zatímco Riemannův integrál se zavádí nejprve pro funkce jedné proměnné a potom s příslušnými modifikacemi se zavede pro případ několika proměnných. Pro funkce definované v abstraktních prostorech s mírou však Riemannův (ani Newtonův) integrál obecně nemá smysl.

V literatuře se lze setkat s různými přístupy při konstrukci Lebesgueova integrálu (či Lebesgueovy míry). Pro názornost zde nejprve naznačíme „klasickou“ (v podstatě původní) definici (a některé její modifikace), kde se postupuje v jistém smyslu analogicky k definici Riemannova integrálu. Předtím hrubě popíšeme konstrukcí míry. Velmi stručně zde uvedeme i častější přístup založený na aproximaci pomocí jednoduchých funkcí.

Typicky se v teorii míry a integrálu řeší následující základní problémy: Máme-li vybudován „integrál“, odvodit z něj přislušnou „míru“. Máme-li již zavedenu míru, zkonstruovat z ní „integrál“. Máme-li vybudován „integrál“ (či „míru“), rozšířit tento na co největší systém funkcí (či množin) se zachováním jeho (či jejich základních vlastností). Původní (Lebesgueova) cesta spočívá v zavedení míry na měřitelných podmnožinách prostoru $\mathbb{R}^n$. Druhým způsobem, Rieszovým, se nejdříve definují integrovatelné funkce a jejich integrál a pomocí něj pak měřitelné množiny a jejich míra (základem je prostor schodovitých (jednoduchých) funkcí, který bývá často nahrazen prostorem spojitých funkcí s kompaktním nosičem). Teorie Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}^n$ může být zasazena do rámce abstraktního integrálu (v abstraktním prostoru bez topologie), kdy tento konkrétní integrál vznikne z abstraktního speciální volbou prostoru a v něm zavedené míry.

V obecném přístupu k teorii míry (a integrálu) jde o zavedení široké třídy množin, tzv. měřitelných množin. Na nich se pak zavádí množinová funkce (tzv. míra), která splňuje rozumné vlastnosti (zejména v elementárních případech odpovídá pojmům obsah, objem atd. a musí se s ní dobře zacházet). Přirozeným požadavkem např. je, že sjednocení (spočetně mnoha) měřitelných množin je měřitelné a pokud jsou množiny disjunktní, míra jejich sjednocení je součet měr. Požadované vlastnosti jsou shrnuty do axiomů. Výběr axiomů je výsledek práce matematiků, kteří zjistili, co vše mohou požadovat a vzdali se naopak nesplnitelných požadavků (např. na měřitelnost každé množiny). Taková konstrukce Lebesgueovy míry není jediná aplikace této teorie, naopak, na pojmech, které se takto budují, je postavena např. celá teorie pravděpodobnosti. Jak jsme již naznačili, níže Lebesgueovu míru zkonstruujeme jistým názorným způsobem, nikoliv axiomaticky.

Z historického a didaktického hlediska je důležité rozšíření elementárního objemu na již zmíněnou Jordanovu (či Jordanovu-Peanovu) míru (nebo spíš tzv. Jordanův objem, neboť nejde o míru), kterou už znáte z teorie Riemannova integrálu. Není těžké setrojit Jordanovsky neměřitelné množiny. Navíc spočetné sjednocení Jordanovsky měřitelných množin nemusí být měřitelné. Jordanův objem tedy není naše cílová meta a směřujeme k lepšímu rozšíření elementárního objemu.

V kontextu klasického kalkulu najdeme bezpočet příznivců Riemannova integrálu — odůvodňují to např. jednoduchostí jeho definice. Uvědomme si však, že jednoduchost definice není tím správným kritériem. Totiž definici zavádíme jen jednou, kdežto (numerických) příkladů a teoretických úvah, v nichž využíváme vlastnosti integrálu, je nepřeberné množství, neboť integrál je jedním z nejdůležitějších nástrojů analýzy a jejich aplikací. Tedy složitější definice Lebesgueova integrálu je pouze „jednorázovou vadou“, kterou však bohatě vyvažuje jeho obecnost, hezké vlastnosti a jednoduchost v teoretických i praktických úvahách.

Závěrem poznamenejme, že ani Lebesgueův integrál neřeší všechny problémy, při nichž je Riemannův integrál nedostačující. V souvislosti s tím zmiňme tzv. Kurzweilův integrál (též Henstockův, Denjoyův, či Perronův), který se v některých situacích ukázal vhodnější než integrál Lebesgueův. Totiž Lebesgueův integrál nepokrývá tzv. neabsolutně konvergentní integrály (např. $\int_0^\infty \sin x/x \,\mathrm{d}x$), které v jednoduchých případech zachycuje Newtonův integrál. Pro hlubší studium neabsolutně konvergentních integrálů se hodí právě pojem Kurzweilova nebo Perronova integrálu, které zde však blíže diskutovat nebudeme.

## 3.2 Lebesgueova míra

Uvažujme množinu $A \subseteq \mathbb{R}$. Našim cílem je najít vhodný prostředek, kterým tuto množinu „změříme“, a to v dosti obecných situacích. Tzv. *mírou* omezeného intervalu $I = (a, b)$ máme na mysli jeho délku $\mathrm{m}(I) := b - a$. Množinu $A$ pokryjeme otevřenou množinou, kterou umíme „změřit“. Předtím poznamenejme, že každou otevřenou množinu $M$ v $\mathbb{R}$ lze napsat jako $M = \bigcup_k I_k$, kde $I_k$ jsou navzájem disjunktní otevřené intervaly, kterých je konečně či spočetně mnoho, viz Poznámka 2.38. Míru otevřené množiny $M$ zavedeme takto:

$$\mathrm{m}(M) := \sum_k \mathrm{m}(I_k), \quad \mathrm{m}(\emptyset) := 0.$$

Vypustíme-li požadavek disjunktnosti (přičemž posloupnost otevřených intervalů $\{I_k\}$ pokrývá množinu $M$), pak máme slabší podmínku $\mathrm{m}(M) \le \sum_k \mathrm{m}(I_k)$. I v takovém případě lze definici přirozeně zavést; hodnota infima v definici níže tím není ovlivněna. Zdůrazněme, že nepožadujeme omezenost množiny $A$.

**Definice 3.1.** Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná množina. Tzv. *vnější Lebesgueovu míru* množiny $A$ definujeme jako

$$\mu^*(A) = \inf\{\mathrm{m}(M) : A \subseteq M, M \text{ je otevřená}\}.$$

**Poznámka 3.2.** (i) Vnější míra je *subaditivní*, tj. $\mu^*(A \cup B) \le \mu^*(A) + \mu^*(B)$ pro $A, B$ disjunktní.

(ii) Vnější míra je *$\sigma$-subaditivní*, tj. $\mu^*\left(\bigcup_k A_k\right) \le \sum_k \mu^*(A_k)$ pro disjunktní posloupnost množin $\{A_k\}$.

(iii) Obecně sice neexistuje nejmenší otevřená množina $M$ obsahující $A$, ale vždy můžeme vytvořit číslo $\inf\{\mathrm{m}(M) : A \subseteq M, M \text{ je otevřená}\}$.

My však požadujeme, aby naše míra byla $\sigma$-aditivní (tj. aby nastávala vždy rovnost v nerovnosti z předchozí poznámky). Vnější míra je definována pro příliš širokou třídu množin. Zavedeme tedy striktnější požadavek, který našim potřebám vyhoví. Smysl podmínky z následující definice nemusí být na první pohled zřejmý. Jde o úsporné vyjádření, které je výsledkem našich potřeb kladených na míru; níže diskutujeme jiná vyjádření.

**Definice 3.3.** Množina $A \subseteq \mathbb{R}$ je *měřitelná v Lebesgueově smyslu*, je-li splněna podmínka

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(X) \tag{3.1}$$

pro každou množinu $X \subseteq \mathbb{R}$. *Lebesgueovu míru* množiny $A$ definujeme jako $\mu(A) := \mu^*(A)$.

**Poznámka 3.4.** (i) Intuitivní smysl definice bude možná pro někoho zřejmější, pokud poznamenáme, že podmínka (3.1) je ekvivalentní podmínce $\mu^*(X_1)+\mu^*(X_2) = \mu^*(X_1 \cup X_2)$ pro každé $X_1 \subseteq A$, $X_2 \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Jinak řečeno, jsou-li $X_1, X_2$ oddělené měřitelnou množinou $A$, je míra sjednocení $X_1 \cup X_2$ rovna součtu měr $X_1$ a $X_2$. Podmínce (3.1) se někdy říká *Caratheodoryho podmínka.*

(ii) Lze vyslovit i alternativní (přičemž ekvivalentní) definice, či jejich různé modifikace. Důkazy ekvivalencí a dalších vztahů ani genezi zde podrobněji diskutovat nebudeme. Např. lze říci, že systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny $\mathbb{R}$ je systémem Lebesgueovsky měřitelných množin, právě když

$$\forall \varepsilon \exists G \in \tau : A \subseteq G \wedge \mu^*(G \setminus A) < \varepsilon,$$

kde $A \in \mathcal{A}$ a $\tau$ je systém všech otevřených množin v $\mathbb{R}$. Definici lze interpretovat tak, že množina je Lebesgueovsky měřitelná, pokud se ve smyslu vnější míry „libovolně málo“ liší od otevřené množiny. Ekvivalentně lze brát místo otevřených nadmnožin uzavřené podmnožiny $F$, které se libovolně málo liší ve smyslu $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

Jiná alternativní definice je založena na pojmu vnější míry, kterou už známe, a *vnitřní Lebesgueovy míry* definované jako $\mu_*(A) = \sup\{\mathrm{m}(K) : K \subseteq A, K \text{ je kompaktní}\}$; míru uzavřené množiny $K$ (ležící v otevřeném intervalu $J$) lze určit jako doplněk míry otevřené množiny $J \setminus K$ v $J$, tj. $\mathrm{m}(K) = \mathrm{m}(J) - \mathrm{m}(J \setminus K)$; zde se nejprve pracuje s množinami omezenými. Lze též vzít $\mu_*(A) = \mu(J) - \mu^*(J \setminus A)$. Vždy platí $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$. Měřitelností množiny $A$ máme na mysli splnění podmínky

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) =: \mu(A),$$

kde výraz napravo je označení pro Lebesgueovu míru. Poznamenejme, že v případě omezené množiny zřejmě platí $\mu^*(A) < \infty$. Pro libovolnou množinu $A$ (ne nutně konečné vnější míry) klademe $\mu(A) := \sup\{\mu(A \cap M) : M \in \mathcal{M}_0\}$, kde $\mathcal{M}_0$ označuje systém majících konečnou míru (či přímo bereme omezené měřitelné množiny, např. intervaly), přičemž požadujeme $A \cap M \in \mathcal{M}_0$ pro každou $M \in \mathcal{M}_0$.

(iii) Podobně lze postupovat při konstrukci míry v $\mathbb{R}^n$. Poznamenejme, že otevřené množiny (např. v rovině) nelze napsat jako sjednocení otevřených disjunktních dvourozměrných intervalů. Vnější míru množiny $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zavádíme takto. Pro objem $n$-rozměrného otevřeného kvádru $K = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ platí $\mathrm{m}(K) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$. Množinu $A$ pokryjeme nejvýše spočetně mnoha otevřenými $n$-rozměrnými kvádry $K_i \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ značí systém všech $n$-rozměrných otevřených kvádrů, a klademe

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}(K_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,\ K_i \in \mathcal{K}\right\}.$$

V této definici může být $\mu^*(A) = \infty$. Dále si všimněme, že nepožadujeme disjunktnost množin $K_i$. To však neovlivňuje hodnotu infima. Ostatně, jak již bylo naznačeno, i naše jejdříve uvedená definice vnější míry v $\mathbb{R}$ může být vyslovena bez předpokladu disjunktnosti množin, které tvoří pokrývající otevřenou množinu.

(iv) Existují i jiné míry; vše lze začlenit do obecné teorie míry.

(v) Existují Lebesgueovsky neměřitelné množiny. Jejich „konstrukce“ vyžaduje axiom výběru.

(vi) Lebesgueova míra je *σ-aditivní*, tj. *spočetně aditivní*, tj. platí podmínka

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k)$$

pro disjunktní posloupnost množin $\{A_k\}$; zde předpokládáme měřitelnost množin $A_k$. Nejsou-li $A_k$ disjunktní, pak rovnost je nahrazena nerovností $\leq$. Lebesgueova míra má řadu dalších očekávatelných vlastností, např. monotonii vzhledem k inkluzi, nezávislost na posunutí atd. Poznamenejme, že Jordanova-Peanova míra není spočetně aditivní; vlastně proto není ani mírou v pravém slova smyslu.

(vii) Zde jsou některé důvody, proč požadujeme spočetnou aditivitu: (a) konečná aditivita je příliš slabá pro ospravedlnění limitních procesů; (b) nespočetná aditivita je příliš „silná", např. by implikovala, že pokud míra jednobodové množiny je nula, pak by míra každé pomnožiny množiny $\mathbb{R}^n$ byla nula.

**Shrnutí definice Lebesgueovy míry** Vycházeje z výše uvedeného, shrňme si stručně jeden z možných přístupů při konstrukci Lebesgueovy míry (v prvních krocích zvoleného přístupu vyžadujeme omezenost množiny $A \subseteq \mathbb{R}$):

- Vnější Lebesgueovu míru (omezené) množiny $A$ definujeme jako
$$\mu^*(A) = \inf\{\mathrm{m}(M) : A \subseteq M, M \text{ je otevřená}\}.$$
Otevřenou množinu „změřit" umíme; pokrytí nemusí být nutně disjunktní.

- Vnitřní Lebesgueovu míru (omezené) množiny $A$ definujeme jako
$$\mu_*(A) = \sup\{\mathrm{m}(N) : N \subseteq A, N \text{ je uzavřená}\}.$$
Míru uzavřené (omezené) množiny $N$ lze určit pomocí vnější míry a doplňku (který je otevřenou množinou) jako $\mathrm{m}(N) = \mathrm{m}(J) - \mathrm{m}(J \setminus N)$, kde $J$ je otevřený (omezený) interval obsahující $N$.

- (Omezená) množina $A$ je Lebesgueovsky měřitelná, jestliže
$$\mu_*(A) = \mu^*(A).$$
V tom případě definujeme Lebesgueovu míru množiny $A$ jako $\mu(A) := \mu_*(A) = \mu^*(A)$.

- Libovolnou množinu $A$ (ne nutně omezenou, ne nutně konečné vnější míry) nazveme Lebesgueovsky měřitelnou, je-li měřitelný průnik $A \cap (-k, k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Lebesgueovu míru definujeme jako
$$\mu(A) := \lim_{k\to\infty} \mu(A \cap (-k, k)).$$

**Poznámka 3.5.** Každá množina měřitelná v Jordanově smyslu je také měřitelná v Lebesgueově smyslu (ale nikoliv obráceně), přičemž Jordanova míra a Lebesgueova míra jsou si pak rovny.

**Příklad 3.6.** (i) Množina $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ není Jordanovsky měřitelná (proč?), je však Lebesgueovsky měřitelná. Platí $\mu(A) = 0$. Pokuste se odvodit, že $\mu^*(A) = 0$. Napovězme, že množinu $A$ lze chápat jako posloupnost (proč?); každý bod této posloupnosti nechť se nachází v intervalu $K_i$ délky $2^i/\varepsilon$, $i \in \mathbb{N}$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné. Ukáže se pak, že $\mu^*(A) \leq \varepsilon$.

(ii) Cantorovo diskontinuum je příkladem nespočetné množiny mající nulovou Lebesgueovu míru. Podotkněme, že tato množina je uzavřená.

Stejný argument jako v části (i) předchozího příkladu ukazuje, že libovolná spočetná množina má vnější míru nulovou a je tedy její míra nulová. Další — avšak poměrně obdobnou — možností je využít přímo $\sigma$-aditivity míry a faktu, že jednobodové množiny mají míru nula. Promyslete si detaily. Poznamenejme, že pokud $A$ pokryjeme konečným systémem intervalů, pak sjednocení intervalů by obsahovalo $[0,1]$ (připomeňme, že $A$ je hustá v $[0,1]$) a součet jejich délek by byl alespoň 1. To mj. ukazuje, proč je důležité užít spočetný systém intervalů (či kvádrů) a ne jen konečný. „Spočetný $\varepsilon$-trik“ se typicky užívá v různých formách v teorii míry.

**Poznámka 3.7.** (Terminologická poznámka) Řekneme, že vlastnost nebo tvrzení platí *skoro všude* v $A$ nebo pro *skoro všechna* $x \in A$, jestliže platí pro všechna $x \in A$ s výjimkou bodů z množiny mající míru nula (požíváme zkratku *s.v.*). Např. $f(x) = g(x)$ pro s.v. $x \in A$ znamená $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in A \setminus B$, kde $\mu(B) = 0$. V angličtině se používá zkratka *a.e.* (*almost everywhere* či for *almost each*).

Na závěr poznamenejme, že kromě Lebesgueovy (a Jordanovy) míry se v matematice vyskytuje celá řada dalších měr, např. míra pravděpodobnostní, čítací, Borelova, Diracova, Lebesgueova-Stieltjesova, Radonova, Hausdorffova a další. Definuje se i obecný prostor s mírou, kde důležitou roli hraje tzv. *$\sigma$-algebra* podmnožin základního prostoru. Jde o systém množin, který obsahuje prázdnou množinu, je uzavřen na doplňky a na spočetná sjednocení. Na tomto systému se pak zavádí reálná množinová funkce, zvaná míra, u které se požaduje nezápornost, $\sigma$-aditivita a její nulovost pro prázdnou množinu.

Systém Lebesgueovsky měřitelných množin je $\sigma$-algebrou a Lebesgueova míra je mírou v právě uvedeném smyslu. Jordanova „míra“ takovou mírou není.

## 3.3 Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$

Nejprve připomeňme jednu z možných definic Riemannova integrálu:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

kde $\nu = \max_k(x_k - x_{k-1})$, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$; limita zde musí existovat nezávisle na dělení a výběru. U Riemannova integrálu provádíme dělení definičního oboru $[a,b]$. Myšlenka Lebesgueova integrálu je odlišná: provádíme dělení oboru hodnot!

**Poznámka 3.8.** Aproximace $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ je nevhodná, pokud se funkce $f$ „rychle mění“. Je pak účelné počítat obsah jejího subgrafu (tj. obrazce pod nezápornou funkcí $f$) jinak.

Lebesgueův integrál se v moderní literatuře často zavádí pomocí tzv. jednoduchých funkcí (nebo třeba i pomocí axiomů). Totiž po Lebesgueovi se rozvíjel přístup k Lebesgueovu integrálu tím, že se rozpracovávaly nové definice, které byly v případě reálných funkcí ekvivalentní původní Lebesgueově definici. Byly však současně takové, že je bylo možné převádět do složitějších abstraktních situací.

My zde však – kvůli názornosti – nejdříve naznačíme jemnou modifikaci „klasické“ definice, která je v jistém smyslu analogická konstrukci Riemannova integrálu; níže zmíníme i onu klasickou verzi. Rozdíl přístupů (tedy v porovnání s definicí přes jednoduché funkce) je však pouze formální, neboť i v součtu v první definici budou vlastně vystupovat jednoduché funkce.

Často se srovnání Riemannova a Lebesgueova přístupu připodobňuje k dvojímu možnému sčítání většího počtu mincí různých hodnot. Riemannovu integrálu odpovídá běžné sčítání mincí po řadě. Lebesgueovu integrálu odpovídá roztřídění mincí podle hodnoty; poté počet mincí stejné hodnoty vynásobíme jejich hodnotou a získané součiny sečteme.

## „Názorná“ konstrukce

Nejprve uvažujme ohraničenou nezápornou funkci $f(x)$ na (omezeném) uzavřeném intervalu $[a, b]$. Označme $\alpha = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $\beta = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Interval $[\alpha, \beta]$ nyní rozdělíme pomocí dělících bodů $\alpha = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = \beta$. Označme $E_i = \{x : f(x) \geq y_i\}$ a její míru $\mu(E_i)$. Zdůrazněme, že je předpokládána měřitelnost této množiny pro libovolnou hodnotu $y_i$ (jak později uvidíme, předpokládáme vlastně tzv. *měřitelnost funkce* $f$). Uvažme nyní obrazec, který se nachází v horizontálních pásech mezi přímkami $y = y_{i-1}$ a $y = y_i$, přčemž je zároveň obsažen v subgrafu funkce $f$. Tento obrazec připomíná obdélníky s malými výškami. Za základny obdélníků volíme např. jejich strany ležící na horní straně pásu. Plošný obsah takového obrazce je přibližně roven $\mu(E_i)(y_i - y_{i-1})$. Tedy plošný obsah celého subgrafu lze aproximovat číslem

$$\mu(E_0)y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)(y_i - y_{i-1}).$$

Je zajímavé, že přesnost této hodnoty málo závisí na tom, zda je $f(x)$ spojitá či nespojitá.

**Definice 3.9.** *Lebesgueovým integrálem* z ohraničené funkce $f$ na intervalu $[a, b]$ nazýváme limitu

$$\lim_{\lambda\to 0} \left\{ \mu(E_0)y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)(y_i - y_{i-1}) \right\},$$

kde $\lambda = \max(y_i - y_{i-1})$.

**Poznámka 3.10.** (i) Lebesgueův integrál z funkce $f$ se často v literatuře značí $\int_a^b f \,\mathrm{d}\mu$ příp. $\int_I f \,\mathrm{d}\mu$, kde $I$ značí integrační obor. My budeme ovšem často používat i „tradiční“ značení, typické pro Riemannův integrál, totiž $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, případně budeme stručně psát $\int_I f$. Jak uvidíme později, Lebesgueův integrál z Riemannovsky integrovatelné funkce vždy existuje a má stejnou hodnotu jako Riemannův integrál. Pokud budeme potřebovat rozlišit, se kterým integrálem pracujeme, budeme psát $(L) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro Lebesgueův integrál, resp. $(R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro Riemannův integrál.

(ii) Analogicky lze při definici postupovat pro funkce více proměnných.

(iii) Máme-li zkonstruován $\int_a^b f\,\mathrm{d}\mu$, v dalších krocích je pak potřeba postupně odstranit omezenost funkce, omezenost integračního oboru a nezápornost funkce. To lze učinit více způsoby Lze též zřejmým způsobem zavést např. Lebesgueův integrál z komplexní funkce. Vybrané detaily některých těchto rozšíření naznačíme až po konstrukci pomocí jednoduchých funkcí.

## Modifikované definice

Nejdříve stručně popišme původní Lebesgueův přístup, který je velmi podobný předchozí konstrukci. Opět začněme s nezápornou ohraničenou funkcí $f$ na $[a,b]$, o které předpokládáme, že je měřitelná. Nechť $\ell, L$ jsou takové, že $\ell \leq f(x) \leq L$ pro $x \in [a,b]$. Uvažme dělení $\ell = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = L$ a definujme $M_i = \{x \in [a,b] : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$; je tedy $M_i$ „vzor“ intervalu $[y_{i-1}, y_i)$. Nyní definujme integrální součet v Lebesgueově smyslu rovností předpisem

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \mu(M_i),$$

kde $\eta \in [y_{i-1}, y_i]$ je libovolné. Funkce $f$ se nazývá integrovatelná v Lebesgueově smyslu na $[a,b]$, pokud existuje limita těchto součtů při $\max(y_i - y_{i-1})$ jdoucím k nule. Opět lze definici rozšířit na integrál z neohraničené nezáporné funkce, integrál přes neomezený obor a integrál z funkce libovolného znaménka. Výše zmíněný přístup lze modifikovat ve smyslu zavedení horních součtů $\sum_{i=1}^{n} y_i \mu(M_i)$ a dolních součtů $\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \mu(M_i)$ Je-li infimum horních součtů rovno suprému dolních součtů (kde inf a sup bereme přes všechna možná dělení intervalu $[\ell, L]$), prohlásíme funkci za Lebesgueovsky integrovatelnou.

Velmi stručně zde ještě zmiňme Youngův přístup, který zavádí tzv. horní a dolní Lebesgueovy součty, přičemž se vychází z dělení intervalu $[a,b]$ na konečný počet měřitelných množin $E_k$, které se nepřekrývají (tzv. měřitelné dělení intervalu $[a,b]$). Opět se pak porovnává jisté supremum s infimem a v případě rovnosti dostáváme Lebesgueovskou integrovatelnost. Lze zde tedy najít paralelu s Darbouxovým přístupem konstrukce Riemannova integrálu pomocí horních a dolních Riemannových součtů.

## Konstrukce pomocí jednoduchých funkcí, měřitelné funkce

Stejně jako ne všechny množiny jsou měřitelné, nelze očekávat, že všechny funkce mohou být integrovatelné. Následující funkce lze chápat jako „kandidáty“ na integraci.

**Definice 3.11.** Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Funkce* $f$ se nazývá *měřitelná*, jestliže je množina $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ měřitelná pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je měřitelná. $f : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nazýváme *měřitelnou na* $M$, pokud její rozšíření nulou na celé $\mathbb{R}$ je funkce měřitelná.

**Poznámka 3.12.** (i) Ekvivalentně lze nerovnost $>$ v předchozí definici nahradit kteroukoliv z nerovností $<$, $\leq$, $\geq$.

(ii) Každá spojitá funkce je měřitelná. Dirichletova funkce je měřitelná.

(iii) Lze ukázat, že pro měřitelné funkce platí řada vlastností, jako např. uzavřenost na operace $+, -, \cdot, /$, pokud pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ je výsledek operace definován.

(iv) Pro měřitelné funkce dále platí

uzavřenost na bodovou konvergenci,

pokud limita existuje. Toto je velmi významná vlastnost. Připomeňme, že odpovídající tvrzení pro spojité funkce (či Riemannovsky integrovatelné funkce) vyžaduje silnější podmínku, totiž stejnoměrnou konvergenci. V praktických úlohách však typicky posloupnost funkcí nekonverguje stejnoměrně, ale pouze bodově. Vezměme nyní systém všech funkcí spojitých a omezených na intervalu $I$ a všechny funkce, které dostaneme jako bodové litmity těchto funkcí. Systém takových funkcí bývá nazýván jako *funkce první Baireovy třídy*. Kromě spojitých funkcí obsahuje i některé nespojité funkce. Vezměme funkce první Baireovy třídy a opět uvažme jejich bodové limity. Dostaneme tak *funkce druhé Baireovy třídy*, což je množina větší než funkce první Baireovy třídy; např. Dirichletova funkce je druhé Baireovy třídy, ale ne první. Takto můžeme pokračovat dále a obdržíme *funkce $k$-té Baireovy třídy*, které tvoří množinu větší než funkce Baireovy třídy $k-1$. Ve světle těchto úvah tedy o to více oceníme uzavřenost měřitelných funkcí na bodovou limitu.

Konstrukci integrálu provedeme pomocí jednoduchých funkcí, které se definují takto:

**Definice 3.13.** Nezáporná funkce $f$ definovaná na $\mathbb{R}$ se nazývá *jednoduchá*, jestliže je měřitelná a nabývá konečně mnoha hodnot.

**Poznámka 3.14.** (i) Zejména po částech konstantní funkce (kde částí je konečně mnoho) je jednoduchá.

(ii) Je-li $f$ jednoduchá, pak ji lze napsat ve tvaru $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i}(x)$, kde $c_1, \dots, c_n \in (0, \infty)$, $A_1, \dots, A_n$ jsou měřitelné množiny a $\chi_{A_i}$ je charakteristická funkce množiny $A_i$.

**Definice 3.15** (Konstrukce/definice Lebesgueova integrálu)**.**
Lebesgueův integrál zavádíme pomocí následujících kroků:

- Je-li $\varphi$ jednoduchá funkce, pak klademe $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i)$; součet může být i nekonečný.

- Je-li $f$ nezáporná měřitelná funkce, pak položíme $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$, kde $\{f_n\}$ je neklesající posloupnost jednoduchých funkcí konvergující k $f$. Poznamenejme, že někde v literatuře se definuje (pro nezápornou funkci $f$):

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \text{ je jednoduchá, } 0 \le \varphi \le f\right\}. \tag{3.2}$$

  Definice pomocí litmity je však také korektní, neboť lze dokázat, že každou nezápornou funkci $f$ můžeme obdržet jako $\varphi_n(x) \to f(x)$ pro $n \to \infty$, kde $\{\varphi_n\}$ je neklesající posloupnost jednoduchých nezáporných funkcí (její existence je zaručena); definice integrálu navíc nezávisí na volbě takové posloupnosti.

- Je-li $f$ měřitelná funkce, pak položíme $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f^+(x) = (|f(x)| + f(x))/2$, $f^-(x) = (|f(x)| - f(x))/2$. Zde předpokládáme, že aspoň jeden z integrálů je konečný; hodnota integrálu může být cokoliv z množiny $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. (Integrál z měřitelné funkce neexistuje vlastně v jediném případě, a to když oba integrály z kladné i záporné části funkce jsou nekonečné.)

- Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce na $M$, kde $M \subseteq \mathbb{R}$ je měřitelná množina, pak definujeme
$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde } \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M, \\ 0 & \text{pro } x \notin M. \end{cases}$$

- *Integrovatelnými funkcemi* (na $M$) na máme na mysli (měřitelné) funkce $f$ takové, že $\int_M |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$.

- Je-li $f$ komplexní, definujeme $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} f(x)\,\mathrm{d}x + i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f(x)\,\mathrm{d}x$, pokud oba integrály na pravé straně jsou konečné.

## 3.4 Některé vlastnosti Lebesgueova integrálu

### Srovnání Riemannova a Lebesgueova integrálu

Má-li funkce $f$ Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$, má i Lebesgueův integrál na $[a, b]$ a platí
$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
kde $R$ resp. $L$ značí Riemannův resp. Lebesgueův integrál. Opačná implikace však neplatí; prozkoumejte Dirichletovu funkci. Připomeňme, že Riemannův integrál se definuje pro omezené funkce na omezeném intervalu. V případě neomezenosti funkce či oboru pak zavádíme nevlastní Riemannův integrál. Tzv. Newtonův integrál zavádíme pomocí primitivní funkce (v podstatě formálně vycházíme z Newtonovy-Leibnizovy formule), kde hodnoty v krajních bodech integračního oboru dosazujeme ve smyslu jednostranných limit. Dají se nalézt příklady (nijak exotických) funkcí, pro které existuje (nevlastní) Riemannův integrál a/nebo Newtonův integrál, avšak nejsou Lebesgueovsky integrovatelné (tj. nemají konečný integrál). Např. $(L)\int_{-\infty}^{\infty} |\sin x/x|\,\mathrm{d}x = \infty$, a proto funkce $\sin x/x$ není Lebesgueovsky integrovatelná, avšak Newtonův integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |\sin x/x|\,\mathrm{d}x$ je konečný. Omezíme-li se ovšem na ohraničené funkce na ohraničeném intervalu, je zde Lebesgueův integrál vždy „mocnější" než zmíněné dva integrály.

Na tomto místě je vhodné zmínit *Lebesgueovu nutnou a postačující podmínku Riemannovské integrovatelnosti* pro omezené funkce $f$ na intervalu $[a, b]$, totiž: $f$ je spojitá s.v. na $[a, b]$. V důsledku toho si všimněme, že Riemannovská integrovatelnost vyžaduje, aby integrovaná funkce neměla „příliš mnoho" bodů nespojitosti.

V souvislosti s níže uvedeným vztahem mezi integrovatelností funkce $f$ a integrovatelností funkce $|f|$ se v následujícím cvičení ještě chvíli věnujme srovnání Lebesgueova a Riemannova integrálu.

**Cvičení 3.16.** Uvažujte funkci $f$ takovou, že $f(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$ a $f(x) = -1$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ukažte, že integrály $(L)\int_0^1 f$ a $(L)\int_0^1 |f|$ existují a vypočtěte je. Dále ukažte, že $(R)\int_0^1 |f| = 1$, avšak $(R)\int_0^1 f$ neexistuje.

## Další vlastnosti Lebesgueova integrálu

- Lebesgueův integrál je tzv. *absolutně konvergentní*, tj. má-li $f$ (konečný) integrál, pak má i $|f|$ (konečný) integrál. Platí i opačná implikace.

- Lebesgueovsky integrovatelné funkce na měřitelné množině $M$ jsou s.v. na $M$ konečné.

- Lebesgueův integrál je vzhledem k integrandu lineární.

- Lebesgueův integrál je vzhledem k integračnímu oboru aditivní ($\sigma$-aditivní).

- Lebesgueův integrál je vzhledem k integrandu monotonní.

- Jestliže se změní hodnota funkce na množině nulové míry, pak se hodnota integrálu nezmění. Navíc, Lebesgueův integrál má smysl, i pokud hodnoty funkce nejsou definovány na množině nulové míry. Odtud plyne, že $\int_a^b f \mathrm{d}\mu = 0$, jestliže $f = 0$ s.v. (platí i opak). Dále zejména platí: Je-li $f = g$ s.v. na měřitelné množině $M$ a $g$ je Lebesgueovsky integrovatelná na $M$, potom i $f$ je Lebesgueovsky integrovatelná na $I$ a platí $\int_M f = \int_M g$. Poznamejme, že není-li funkce definovaná na množině míry nula, lze ji na ní libovolně dodefinovat (aniž se změní hodnota integrálu) — typicky to mohou být např. body, kde je limita funkce rovna $\pm\infty$, nebo kde hodnota funkce není definována kvůli dělení nulou apod.

  Ukažte, že $\int_0^1 f = 1/2$, jestliže

  $$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \text{ racionální, } 0 \le x \le 1 \\ 1 - x & \text{pro } x \text{ iracionální, } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

- Je-li $f$ lebesgueovsky integrovatelná na $[a, b]$, je funkce $F(x) = (L)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ absolutně spojitá na $[a, b]$ a $F' = f$ s.v. na $[a, b]$. Připomeňme, že funkce $f$ definovaná na intervalu $[a, b]$ se nazývá *absolutně spojitá na intervalu* $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro kterýkoliv disjunktní systém intervalů $(a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, patřících do $[a, b]$ a splňujících $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, platí nerovnost $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Všimněme si, že tento pojem zesiluje stejnoměrnou spojitost.

- Je-li $F$ absolutně spojitá na $[a,b]$, je funkce $F'$ Lebesgueovsky integrovatelná a platí

$$(L)\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a) \tag{3.3}$$

pro $x \in [a,b]$. Lze ukázat ještě víc: Funkce $F$ je absolutně spojitá na $[a,b]$, právě když $F$ má derivaci $F'$ skoro všude na $[a,b]$, přičemž tato derivace je Lebesgueovsky integrovatelná a platí (3.3). Další ekvivalentní podmínkou absolutní spojitosti $F$ je existence Lebesgueovsky integrovatelné funkce $g$ takové, že

$$(L)\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

pro $x \in [a,b]$. Platí pak nutně, že $g = F'$ s.v. Tato ekvivalence bývá nazývána jako *základní věta (Lebesgueova) integrálního počtu.*

- Pomocí Lebesgueova integrálu lze zpětně vyjádřit míru měřitelné množiny $M$ jako integrál z její charakteristické funkce. Funkce $\chi_M$ je jednoduchá, proto

$$\mu(M) = \int_{\mathbb{R}} \chi_M(x)\,\mathrm{d}x.$$

### Některé druhy konvergencí

Na různých místech tohoto textu zmiňujeme stejnoměrnou konvergenci, bodovou konvergenci, bodovou konvergenci s.v. a konvergenci v normě $L^p$; o normách a $L^p$ prostorech budeme hovořit zanedlouho. Je zajímavé se podívat na srovnání těchto a dalších konvergencí. Uvažujeme zde posloupnost měřitelných funkcí $\{f_n\}$ na omezeném intervalu $I$, která nějakým způsobem konverguje k (měřitelné) funkci $f$. Nechť $1 \le p < q < \infty$. Pro zajímavost zde zařaďme i tzv. *konvergenci podle míry*, která znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ je splněno $\mu\{x \in I : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} \to 0$ pro $n \to \infty$. Potom platí (a implikace nelze obrátit), viz např. [18, 28]:

(a) Stejnoměrná konvergence $\Rightarrow$ bodová konvergence $\Rightarrow$ bodová konvergence s.v. $\Rightarrow$ konvergence podle míry.

(b) Stejnoměrná konvergence $\Rightarrow$ konvergence v normě $L^\infty$ $\Rightarrow$ konvergence v normě $L^q$ $\Rightarrow$ konvergence v normě $L^p$ $\Rightarrow$ konvergence podle míry.

(c) Konvergence v normě $L^\infty$ $\Rightarrow$ bodová konvergence s.v.

## 3.5 Věty o limitním přechodu

Následujícím větám o limitním přechodu bychom měli věnovat mimořádnou pozornost, neboť jsou velmi užitečné v aplikacích a ukazují sílu Lebesgueova integrálu. Vlastně jedním z hlavních důvodů zavedení Lebesgueova integrálu je požadavek větší „flexibility“ konvergence integrálů konvergentních funkčních posloupností (či řad).

Připomeňme, že pro rovnost $\lim_{n\to\infty}(R)\int_I f_n = (R)\int_I f$ potřebujeme stejnoměrnou konvergenci. Taková podmínka je však v mnoha aplikacích příliš restriktivní. Podobný problém může nastat z pochopitelných důvodů i u funkčních řad. Uvedeme některé výsledky, kde požadavek stejnoměrné konvergence je zeslaben, avšak stále je garantována konvergence integrálů a požadovaná rovnost. Musíme ale přikročit k Lebesgueovu integrálu, který dává více šancí integrovat limitní funkci.

**Příklad 3.17.** (i) Pišme $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ jako $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ (proč si to můžeme dovolit?). Nechť konečná množina $Q_k$ obsahuje prvních $k$ prvků množiny $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$. Definujme posloupnost funkcí

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x\in Q_k \\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Platí $f_k\in R[0,1]$ pro každé $k\in\mathbb{N}$ (proč?), kde $R[0,1]$ označuje množinu Riemannovsky integrovatelných funkcí na $[0,1]$. Poznamenejme, že posloupnost je cauchyovská (ve smyslu metriky $\varrho_I$). Bodovou limitou $f(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ je Dirichletova funkce, pro kterou však platí $f\notin R[0,1]$. Tedy prostor $R[0,1]$ není uzavřený na bodovou konvergenci (na rozdíl od stejnoměrné). Zejména nelze zaměnit operaci limity a integrování. Pro Lebesgueovy integrály ovšem v tomto případě platí $\lim_{k\to\infty}(L)\int_0^1 f_k = 0 = (L)\int_0^1 f$.

(ii) Prozkoumejte posloupnost

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{pro } x\in(0,1/n) \\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

a její bodovou limitu. Jak lze snadno zjistit, neplatí $\lim_{n\to\infty}(R)\int_\mathbb{R} f_n = (R)\int_\mathbb{R} f$, avšak ani $\lim_{n\to\infty}(L)\int_\mathbb{R} f_n = (L)\int_\mathbb{R} f$. Lebesgueův integrál tedy není všemocný.

**Věta 3.18** (Beppo Leviho (či — méně často — Lebesgueova) věta o monotonní konvergenci)**.** *Předpokládejme, že $f_n : I\to\mathbb{R}$ je neklesající posloupnost nezáporných měřitelných funkcí, tj. pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $0\le f_n(x)\le f_{n+1}(x)$ pro $x\in I$. Nechť $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pro $x\in I$. Potom lze zaměnit limitu a integrál (přičemž $f$ je měřitelná), tj. $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_I f\,\mathrm{d}\mu$.*

*Důkaz.* (Bez použití Fatouova lemmatu, viz poznámku níže.) Z vlastností měřitelných funkcí víme, že jsou uzavřeny na bodovou limitu, proto $f$ je měřitelná. Z monotonie $\{f_n\}$ dostáváme $f_k(x)\le f(x)$ pro každé $k\in\mathbb{N}$ a každé $x\in I$, proto $\int_I f_k(x)\,\mathrm{d}\mu \le \int_I f\,\mathrm{d}\mu$, a tedy

$$\lim_{k\to\infty}\int_I f_k\,\mathrm{d}\mu \le \int_I f\,\mathrm{d}\mu;$$

poznamenejme, že limita existuje (konečná či nekonečná) díky monotonii. Nyní ukážeme opačnou nerovnost. Nechť $\varphi$ je daná (zafixovaná) jednoduchá funkce taková, že $0\le\varphi\le f$.

Nechť $\lambda \in (0,1)$. Definujme $A_k = \{x \in I : f_k(x) \geq \lambda\varphi(x)\}$. Potom $A_k \subseteq A_{k+1}$, neboť $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I$. Dále tvrdíme, že $I = \bigcup_k A_k$. Zřejmě $\bigcup_k A_k \subseteq I$. Ukážeme, že $I \subseteq \bigcup_k A_k$. Sporem předpokládejme, že existuje $x_0 \in I \setminus \bigcup_k A_k = \bigcap_k (I \setminus A_k)$. Potom pro každé $k$ platí $f_k(x_0) < \lambda\varphi(x_0)$. Pro $k \to \infty$ pak dostáváme $f(x_0) \leq \lambda\varphi(x_0) < \varphi(x_0)$, což je spor s $\varphi \leq f$. Nyní ukážeme, že pro každou jednoduchou funkci $\varphi$, $0 \leq \varphi \leq f$, platí $\int_I \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_I f_k \,\mathrm{d}\mu$. Skutečně, máme $\int_{A_k} \lambda\varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{A_k} f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int_I f_k \,\mathrm{d}\mu$, z čehož pro $k \to \infty$ dostáváme $\lambda \int_I \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_I f_k \,\mathrm{d}\mu$. Odtud pro $\lambda \to 1$ plyne

$$\int_I \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_I f_k \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.4}$$

Konečně ukážeme požadovanou nerovnost. Z definičního vztahu (3.2) a nerovnosti (3.4) obdržíme

$$\int_I f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{\varphi \in S_f} \int_I \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_I f_k \,\mathrm{d}\mu,$$

kde $S_f$ je množina jednoduchých funkcí $\varphi$ s vlastností $0 \leq \varphi \leq f$. □

**Poznámka 3.19.** (i) Pro obecnější posloupnosti máme k dispozici *Fatouovo lemma*, které je dalším důležitým tvrzením ve sbírce vět o limitním přechodu: Předpokládejme, že $f_n : I \to \mathbb{R}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí. Nechť $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ pro $x \in I$. Potom $f$ je měřitelná a platí $\int_I f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I f_n \,\mathrm{d}\mu$.

(ii) V literatuře lze najít typicky dvojí přístup k důkazu. Někde se Fatouovo lemma dokazuje pomocí věty o monotonní konvergenci. Jinde se nejprve dokáže Fatouovo lemma a teprve poté pomoci něj Leviho věta.

**Věta 3.20** (Lebesgueova věta o dominantní (či majorizované) konvergenci)**.** *Předpokládejme, že $f_n : I \to \mathbb{R}$ je posloupnost měřitelných funkcí a $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pro $x \in I$. Nechť $g$ je Lebesgueovsky integrovatelná funkce na $I$ (tj. $\int_I |g| \mathrm{d}\mu < \infty$, tj. $g \in L^1(I)$) taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro $x \in I$. Potom $f \in L^1(I)$ a $f_n$ konverguje k $f$ v normě $L^1$, tj. $\lim_{n\to\infty} \int_I |f - f_n| \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^1} = 0$; v důsledku toho $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_I f \mathrm{d}\mu$.*

*Důkaz.* Pomocí Fatouova lemmatu. □

**Poznámka 3.21.** (i) Všechna tvrzení lze vylepšit ve smyslu, že stačí, aby předpoklady platily pouze s.v. na uvedené množině. Místo bodové konvergence uvažujeme bodovou konvergenci s.v.

(ii) Předpoklady ve všech tvrzeních nemohou být beztrestně vynechány.

(iii) Analogická tvrzení lze formulovat i pro funkční řady.

(iv) Jako důsledek Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci lze obdržet její verzi pro $L^p$ prostory, kde $1 \leq p < \infty$.

**Cvičení 3.22.** Alespoň dvěma různými způsoby ukažte, že

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{kx}{1 + k^2 x^2} \,\mathrm{d}x = 0.$$

## 3.6 Prostory integrovatelných funkcí, Lebesgueovy prostory

„Rozumné“ funkční prostory, jejichž prvky tvoří integrovatelné funkce a mají nějakou dodatečnou strukturu, jsou v naší teorii nepostradatelné. Různá fakta o tzv. $L^p$-prostorech jsou rozptýlena v textu. Zde některá z nich pro přehlednost shrneme a podrobněji budeme diskutovat zejména úplnost.

Dříve než zavedeme Lebesgueovy prostory, připomeňme problematičnost prostoru Riemannovsky integrovatelných funkcí — viz třeba Příklad 3.17. Prozkoumejte též následující příklad.

**Příklad 3.23.** Uvažujme posloupnost funkcí definovanou na $[0,1]$ takto:

$$f_n(t) = \begin{cases} n & 0 \le t \le 1/n^2, \\ 1/\sqrt{t} & 1/n^2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Lze ukázat, že $(R)\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,\mathrm{d}t < 2/n$ pro $m > n$. Dále si uvědomte, že Riemannovsky integrovatelné funkce jsou omezené. Co z toho lze usoudit?

Příklad 3.23 si promyslete i v kontextu Poznámky 2.98, přičemž si uvědomte, že prostor $(R[a,b], \varrho_I)$ jako podprostor prostoru $L^1[a,b]$ není uzavřený. Jak napovídají tyto úvahy, jedním ze základních nedostatků Riemannova integrálu je neúplnost prostoru

$$\left( R[a,b], \left( (R)\int_a^b |f(t) - g(t)|^p \,\mathrm{d}t \right)^{1/p} \right),$$

$p \in [1,\infty)$; zde se předpokládá ztotožnění funkcí z $R[a,b]$ rovných s.v., aby vůbec šlo o metrický prostor (viz též Poznámka 2.102). Nahradíme-li však „Riemanna“ „Lebesguem“, tedy vezmeme-li metrické prostory

$$\left( L^p[a,b], \left( (L)\int_I |f-g|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \right) \tag{3.5}$$

(a to opět ve smyslu faktorprostorů — viz níže) příp. odpovídající normované lineární prostory, dostaneme pozitivnější zprávu, viz Věta 3.24.

Přestože pojem lineárního normovaného prostoru a normy zavádíme až v příští kapitole, považujeme za vhodné jej pro zkoumání Lebesgueovsky integrovatelných funkcí používat již nyní; úvahy v řeči norem lze snadno převést do řeči metrik, které jsou těmito normami generovány. Čtenář se později — poučen — může, nebo spíš by měl, k této pasáži vrátit. Upřesněme tedy, co máme *Lebesgueovými prostory* $L^p(I)$ pro $p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$ na mysli. Prostor $L^p(I)$, kde $p \in [1,\infty)$, je tvořen měřitelnými funkcemi $f$ na intervalu $I$, přičemž předpokládáme konečnost příslušných integrálů funkcí $|f|^p$, které následně definují normu

$$\|f\|_p := \left( \int_I |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

V případě prostoru $L^\infty(I)$ uvažujeme množinu funkcí omezených s.v. v $I$ a definujeme normu jako

$$\|f\|_\infty := \inf\{C \geq 0 : |f| \leq C \text{ s.v. na } I\}. \tag{3.6}$$

Na pravé straně (3.6) je tzv. *esenciální suprémum*, ozn. ess sup; takto definovaná norma (na prostoru skoro všude omezených funkcí) odpovídá suprémové normě, kde však vylučujeme vliv hodnot funkcí na podmnožinách míry nula; lze též psát

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in I} |f(t)| = \inf_{A\subseteq I,\, \mathrm{m}(A)=0} \left( \sup_{t\in I\setminus A} |f(t)| \right).$$

Zobrazení (jde vlastně o funkcionály) $\|\cdot\|_p$ splňují vlastnosti normy až na jednu: $\|f\| = 0$ znamená, že $f = 0$ s.v., což ovšem nemusí implikovat $f = 0$ (tj. úplně všude). Pro $p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$ zaveďme dočasně prostor $\mathcal{L}^p(I)$ všech měřitelných funkcí na $I$, pro něž $\|f\|_p < \infty$. Na $\mathcal{L}^p(I)$ uvažujme ekvivalenci

$$f \sim g, \quad \text{jestliže } f = g \ \text{ s.v.}$$

Abychom vyhověli všem axiomům normovaného lineárního prostoru, měli bychom definovat prostor $L^p(I)$ jako „faktorprostor“

$$L^p(I) = \mathcal{L}^p(I)/\sim.$$

Znamená to, že prvky prostoru $L^p(I)$ jsou třídy navzájem ekvivalentních prvků. Je-li $f \in \mathcal{L}^p$, označme

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(I) : g \sim f\},$$

potom

$$L^p(I) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(I)\}.$$

Na prostorech $L^p$ je zapotřebí zavést algebraické operace, normu a uspořádání, neboli např.

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

a

$$[f] \leq [g], \text{ když existují } \hat{f} \in [f] \text{ a } \hat{g} \in [g] \text{ tak, že } \hat{f} \leq \hat{g}.$$

V matematické literatuře se tento formalismus prakticky nepoužívá a dává se přednost méně přesnému, ale přehlednějšímu vyjadřování. Toho se budeme držet i my. Namísto dvou prostorů $\mathcal{L}^p$ a $L^p$ budeme používat jen jeden prostor značený $L^p$, jehož prvky budou funkce. Budeme mluvit o $L^p$-normě funkcí, i když to norma není. Důležité je, že „víme, jak to spravit“, pokud bychom se chtěli odvolávat na obecnou teorii normovaných prostorů.

$L^p$-norma splňuje všechny axiomy normy (přijmeme-li výše zavedenou konvenci). Ověření je triviální s výjimkou trojúhelníkové nerovnosti pro $1 < p < \infty$. Ta však není ničím jným než Minkowského nerovností (9.6).

$L^p$-norma indukuje příslušnou metriku, srv. (3.5). Zejména tedy máme $\varrho_p(f,g) = \big((L)\int_I |f-g|^p \mathrm{d}\mu\big)^{1/p}$ pro $p \in [1,\infty)$ a $\varrho_\infty(f,g) = \operatorname{ess\,sup}_{t\in I} |f(t) - g(t)|$.

Výše jsme naznačili, že — co se týká úplnosti prostoru integrovatelných funkcí — jsou Lebesgueovy prostory, na rozdíl od Riemannovsky integrovatelných funkcí, tou pravou ingrediencí. Lze odvodit další jejich zajímavé a užitečné vlastnosti. Zejména platí:

- Lebesgueovy prostory $L^p(I)$ pro všechna $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ jsou Banachovy prostory, viz Definice 4.5. Pro detaily viz Větu 3.24.
- Lebesgueův prostor $L^2(I)$ je Hilbertův prostor, viz Definice 5.19.
- Lebesgueovy prostory $L^p(I)$ jsou separabilní pro $p \in [1, \infty)$. Prostor $L^\infty(I)$ separabilní není. Separabilita prostoru $L^2$ je diskutována v kontextu Fourierovy analýzy v Sekci 5.5, přesněji viz (5.38). K separabilitě $L^p(I)$ poznamenejme, že množina jednoduchých (po částech konstantních) funkcí nabývajících racionálních hodnot a definovaných pomocí intervalů s racionálními konečnými body je spočetná a hustá v $L^p(I)$.
- Nechť $\mu(I) < \infty$ a $1 < p_1 < p_2 < \infty$. Potom platí
$$BC(I) \subset L^\infty(I) \subset L^{p_2}(I) \subset L^{p_1}(I) \subset L^1(I), \tag{3.7}$$
kde $BC(I)$ je množina funkcí omezených a spojitých na intervalu $I$. Inkluze jsou ostré. Viz Věta 3.25 pro detaily k jednomu z případů. Je-li $I$ množina nekonečné míry, jsou tyto vztahy narušeny (obecně neplatí inkluze ani jedním směrem). Poznamenejme, že u prostorů posloupností $\ell^p$ jsou inkluze přesně opačné než u prostorů $L^p(I)$, kde $I$ má konečnou míru. Přesněji platí
$$c_{00} \subset \ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty,$$
kde $1 < p_1 < p_2 < \infty$. Připomeňme, že $c_{00}$ je množina posloupností majících konečně mnoho nenulových členů a prostory $\ell^p, c_0, c$ jsou definovány v Příkladu 2.6 .
- Podprostory spojitých i nekonečně hladkých funkcí v $L^p(I)$, tj. $C(I) \cap L^p(I)$ resp. $C^\infty(I) \cap L^p(I)$ jsou husté v $L^p(I)$ pro $p \in [1, \infty)$. V prostoru $L^\infty(I)$ husté nejsou. Průniky $C(I) \cap L^p(I)$ resp. $C^\infty(I) \cap L^p(I)$ zde píšeme proto, že spojité ani hladké funkce nemusí být v $L^p(I)$; např. pro $I = (0, \infty)$ vezměme $f(t) = 1$ nebo pro $I = (0, 1)$ vezměme $f(t) = 1/t$.
- Prostory $L^p$, $p \in (1, \infty)$, jsou reflexivní, viz Příklad 6.94. Prostory $L^1, L^\infty$ nejsou reflexivní, viz Příklad 6.95.
- Pro $p > 1$ je duál k $L^p$ izometricky izomorfní s prostorem $L^q$, kde $q > 1$ je číslo konjugované s $p$. Prostory $(L^1)^*$ a $L^\infty$ jsou izometricky izomorfní. Prostor $(L^\infty)^*$ je mnohem „větší“ než $L^1$. Viz Příklad 6.80, kde je uvedena i reprezentace prvků z $(L^p)^*$, $p \in [1, \infty)$, pomocí prvků z $L^q$.

V důkazu následující věty o úplnosti uvidíme využití vět o limitním přechodu (Leviho věty a věty o dominantní konvergenci) a též Minkowského nerovnosti. Někdy se v literatuře označuje jako *Rieszova-Fischerova* (či *Rieszova*) *věta o úplnosti* (pozor: nezaměňovat s Rieszovou-Fischerovou větou, Věta 5.60, z teorie Fourierových řad, jejíž je v jistém smyslu tvrzení o úplnosti malou částí).

**Věta 3.24** (Úplnost prostorů $L^p$, $p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$). *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost prvků prostoru $L^p(I)$, cauchyovská v normě $\|\cdot\|_p$. Pak existuje $f \in L^p(I)$ tak, že $\|f_n - f\|_p \to 0$. Dále (jako vedlejší produkt důkazu) je zaručena existence posloupnosti $\{g_n\}$ vybrané z $\{f_n\}$ tak, že $g_n \to f$ s.v.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme pro $p < \infty$. Případ $p = \infty$ je odlišný a snadnější; princip je podobný důkazu úplnosti prostoru $C[a,b]$ (Příklad 2.100) či prostoru $\ell^\infty$ (Příklad 2.96) — zejména platí, že limita posloupnosti funkcí omezených s.v. je funkce omezená s.v. Důkaz případu $p < \infty$ (přesněji, modifikaci důkazu) zmíníme i v příští kapitole, a to jako ilustraci použití testu úplnosti pomocí nekonečných řad, viz zejména Poznámka 4.39.

Jelikož $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost, lze z ní vybrat posloupnost $\{g_n\}$ tak, že pro všechna $n = 1, 2, \dots$ platí

$$\|g_{n+1} - g_n\|_p < 2^{-n}. \tag{3.8}$$

Položme

$$h_k = |g_1| + |g_2 - g_1| + \dots + |g_k - g_{k-1}|, \quad h = \lim_{k\to\infty} h_k.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro $L^p$-normu a (3.8) dostaneme

$$\|h_k\|_p \le \|g_1\|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \|g_{j+1} - g_j\|_p \le \|g_1\|_p + 1.$$

Podle Leviho věty a předchozího odhadu je

$$\int_I h^p \mathrm{d}\mu = \lim_k \int_I h_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_k \|h_k\|_p^p \le (\|g_1\| + 1)^p.$$

Funkce $h^p$ je tedy integrovatelná a tím spíš s.v. konečná (viz vlastnosti Lebesgueova integrálu). Uvažujme bod $x$, v němž $h(x) < \infty$. Potom řada

$$g_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (g_{j+1}(x) - g_j(x))$$

konverguje, neboť konverguje řada absolutních hodnot. Tím jsme dokázali existenci limity

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

v každém takovém bodě. Lebesgueova věta o dominantní konvergenci s majorantou $h^p$ dává

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f - g_n|^p \mathrm{d}\mu = \int_I \lim_{n\to\infty} |f - g_n|^p \mathrm{d}\mu = 0.$$

Znovu použijeme, že $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost, a dostáváme

$$\|f - f_n\|_p \le \|f - g_n\|_p + \|g_n - f_n\|_p \to 0.$$

Tvrzení o konvergenci s.v. jsme dokázali v průběhu. □

**Věta 3.25.** *Nechť $I$ je interval takový, že $\mu(I) < \infty$. Jestliže $1 < p_1 < p_2 < \infty$, potom $L^{p_2}(I) \subset L^{p_1}(I)$.*

*Důkaz.* Zřejmě nám pro důkaz vztahu $L^{p_2}(I) \subseteq L^{p_1}(I)$ stačí ukázat, že $\|u\|_{p_1} \leq c\|u\|_{p_2}$ pro nějaké $c > 0$. Skutečně, $u \in L^{p_2}(I)$ znamená $\|u\|_{p_2} < \infty$, což spolu s nerovností $\|u\|_{p_1} \leq c\|u\|_{p_2}$ dává $u \in L^{p_1}(I)$. Nyní využijeme Hölderovy nerovnosti (9.3), kde zvolíme $f(t) = |u(t)|^{p_2}$, $g(t) = 1$, $p = p_2/p_1 > 1$ (a tedy nutně $1/q = 1 - p_1/p_2$). Dostáváme pak

$$\begin{aligned}\|u\|_{p_1} &= \left(\int_I |u|^{p_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p_1} \leq \left(\left(\int_I (|u|^{p_1})^{p_2/p_1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{p_1/p_2}\left(\int_I \mathrm{d}\mu\right)^{1-p_1/p_2}\right)^{1/p_1} \\ &= \|u\|_{p_2}(\mu(I))^{(1-p_1/p_2)/p_1}.\end{aligned}$$

Ostrost inkluze ukažte jako cvičení. Uvažujte např. $I = (0,1)$ a $u(t) = t^\gamma$ pro vhodné $\gamma$. Pokuste se i o důkaz ostatních vztahů v (3.7).

$\square$

**Poznámka 3.26.** Jak už bylo naznačeno dříve, prostor $L^p[a,b]$ může být chápán i jako zúplnění prostoru

$$\left(C[a,b], \left((L)\int_a^b |f-g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right),$$

či jiných prostorů. Máme tak alternativní možnost zavedení těchto prostorů. Ve skutečnosti je však potřeba opět ztotožnit funkce, které jsou rovny s.v. Tedy nelze se při této definici zcela vyhnout pojmu míry. Avšak stačí nám pouze vědět, co znamená nulová míra. Pojem nulové míry však lze zavést mnohem snadněji než pojem obecné míry. V Sekci 5.5 uvedeme více detailů k případu $L^2$, a to kontextu teorie klasických Fourierových řad.

**Poznámka 3.27.** Lze ukázat, že jestliže $f \in L^r$ pro nějaké $r < \infty$, potom

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Tento fakt ospravedlňuje používání symbolu $L^\infty$. Jako speciální případ pak dostaneme ozřejmení používání symbolu $\ell^\infty$ (jako limitního případu $\ell^p$).

Kapitola 4

# Normované lineární prostory

Na rozdíl od druhé kapitoly, kde jsme při zavádění metriky pracovali s obecnou množinou, nyní se budeme zabývat lineárními prostory. Na nich lze zavést pojem *normy*, který zobecňuje pojem délky (délky ve smyslu „středoškolsky“ chápaného vektoru). Jak uvidíme, každá norma jistým způsobem generuje metriku. Metrický prostor je tedy obecnější strukturou než normovaný lineární prostor.

Pojem normovaného lineárního prostoru se objevuje poprvé patrně v práci, kterou napsal v r. 1910 F. Riesz, a v několika dalších pracích z let 1920-1922, které napsali E. Helly, H. Hahn, N. Wiener a S. Banach.

Pro připomenutí některých pojmů z teorie lineárních prostorů, které budeme často používat, viz Sekci 8.2.

## 4.1 Základní pojmy a vlastnosti

V následující definici lze uvažovat lineární (tj. vektorový) prostor $X$ nad tělesem skalárů $\mathbb{K}$. My se však nyní omezíme na lineární prostor nad $\mathbb{R}$.

**Definice 4.1** (Normovaný lineární prostor)**.** Nechť $X$ je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ zobrazení, které pro každou dvojici prvků $x, y \in X$ a každý skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky

(N1) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$ (norma rozlišuje body),

(N2) $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\|x\|$ (absolutní homogenita),

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Zobrazení $\|\cdot\|$ se nazývá *norma* na prostoru $X$ a dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaný lineární prostor* (nad $\mathbb{R}$).

**Poznámka 4.2.** (i) Snadno se ověří, že pro každý normovaný prostor $X$ s normou $\|\cdot\|$ je zobrazení

$$\varrho(x,y) := \|x-y\|, \quad x,y \in X, \tag{4.1}$$

*metrikou* na množině $X$, a tedy dvojice $(X,\varrho)$ je *metrický prostor*. Tento fakt umožňuje přenést a aplikovat na normovaný lineární prostor všechny pojmy a výsledky z teorie metrických prostorů (konvergence, otevřenost/uzavřenost množiny, úplnost, kompaktnost, zúplnění atd.). O výše uvedené metrice $\varrho$ zpravidla říkáme, že *je generována* (či *indukována*) *normou* $\|\cdot\|$.

(ii) Úvahu z předchozího odstavce nelze obrátit. Předně, na lineárním prostoru definovaná metrika nemusí s jeho lineární strukturou vůbec souviset. Lze však zjistit více. Je-li metrika $\varrho$ generována normou $\|\cdot\|$, platí pro všechna $x,y,z \in X$ a všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ identity

$$\varrho(x+z,y+z) = \varrho(x,y), \quad \varrho(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|\varrho(x,y); \tag{4.2}$$

ověřte! Má-li metrika $\varrho$ na lineárním prostoru $X$ tyto dvě vlastnosti, lze ji vytvořit pomocí normy, položíme $\|x\| = \varrho(x,0)$. Viz též Poznámku 8.17 pro související úvahy v širším kontextu. Ukažte, že zobrazení $\|x\| = \varrho(x,0)$ splňuje vlastnosti normy za předpokladu (4.2). Dále prozkoumejte metrický prostor z Příkladu 2.7 a ukažte, že metrika není generovaná žádnou normou na množině všech posloupností.

**Poznámka 4.3.** Přenesením příslušného pojmu z metrického prostoru máme definován jistý základní typ konvergence, tzv. *silnou konvergenci* (nebo též *konvergenci v normě*):

$$x_n \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \varrho(x_n,x) = \|x_n - x\| \to 0,$$

kde $x_n$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru $X$ a $x \in X$. Píšeme též $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ v normě $\|\cdot\|$, či $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ (zejména chceme-li zdůraznit, že se jedná o konvergenci v dané normě).

**Poznámka 4.4** (Ohraničenost podmnožin normovaného lineárního prostoru)**.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|$. Podmnožinu $A \subseteq X$ budeme považovat za *ohraničenou* v normovaném prostoru $X$, jestliže existuje taková nezáporná reálná konstanta $K$, že $\|x\| \le K$ pro každé $x \in A$. Je nutné zdůraznit, že takto chápaný pojem ohraničenosti koresponduje s pojmem ohraničenosti zavedeným v kontextu metrických prostorů. Přesněji, množina $A \subseteq X$ je ohraničená v normovaném prostoru $X$ právě tehdy, když je ohraničená v metrickém prostoru $(X,\varrho)$ s metrikou $\varrho$ z Poznámky 4.2-(i). Skutečně, jestliže existuje $K \ge 0$ takové, že $\|x\| \le K$ pro každý vektor $x \in A$, potom

$$\varrho(x,y) = \|x-y\| \le \|x\| + \|y\| \le 2K \quad \text{pro každé } x,y \in A,$$

a tedy průměr $d(A) \le 2K$. Naopak, jestliže množina $A$ má (v metrickém prostoru $(X,\varrho)$) konečný průměr $d(A)$ a zvolíme nějaký prvek $x_0 \in A$, potom

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \le \|x - x_0\| + \|x_0\| = \varrho(x - x_0) + \|x_0\| \le d(A) + \|x_0\|$$

pre každý vektor $x \in A$. Množina $A$ je tedy ohraničená i v normovaném prostoru $X$, kde můžeme položit např. $K := d(A) + \|x_0\|$.

Následuje definice velmi významného pojmu.

**Definice 4.5** (Banachův prostor)**.** Normovaný lineární prostor $X$ nad $\mathbb{R}$, který je úplný vzhledem k metrice v (4.1) indukované danou normou na $X$, se nazývá *(reálný) Banachův prostor*.

**Příklad 4.6.** Pro dané $n \in \mathbb{N}$ položme $X := \mathbb{R}^n$ a nechť $p \in [1, \infty)$. Potom obě zobrazení

$$\|x\|_p := \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{1 \le k \le n} |x_k|, \tag{4.3}$$

kde $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, jsou normy na lineárním prostoru $X$, které v kontextu Poznámky 4.2 indukují metriky $\varrho_p$ a $\varrho_\infty$. Navíc, z teorie metrických prostorů vyplývá, že každý z normovaných prostorů $(X, \|\cdot\|_p)$, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ je $n$-rozměrným Banachovým prostorem.

**Příklad 4.7.** Pro pevně zvolené $p \in [1, \infty)$ je prostor posloupností $\ell^p$ zavedený v teorii metrických prostorů zároveň normovaným lineárním prostorem s normou

$$\|x\|_p := \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad x := \{x_k\} \in \ell^p. \tag{4.4}$$

Podobně i prostory $\ell^\infty$, $c$ a $c_0$ jsou normované lineární prostory s normou

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad x := \{x_k\} \text{ je ohraničená posloupnost.} \tag{4.5}$$

Každý z prostorů $\ell^p$, $\ell^\infty$, $c$ a $c_0$ je nekonečněrozměrný Banachův prostor.

**Příklad 4.8.** Nechť $a, b$, kde $a < b$, jsou daná reálná čísla. Množina $B[a, b]$ všech reálných funkcí ohraničených na $[a, b]$ zřejmě tvoří lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení

$$\|f\|_B := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad f \in B[a, b], \tag{4.6}$$

je normou na prostoru $B[a, b]$. Speciálně, množina $C[a, b]$ všech funkcí spojitých na $[a, b]$ tvoří (algebraický) lineární podprostor prostoru $B[a, b]$. Navíc každé ze zobrazení

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|, \qquad \|f\|_I := \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x, \quad f \in C[a, b], \tag{4.7}$$

je normou na prostoru $C[a, b]$. Z kapitoly o metrických prostorech vyplývá, že normovaný prostor $(C[a, b], \|\cdot\|_C)$ je nekonečněrozměrný Banachův prostor, zatímco $(C[a, b], \|\cdot\|_I)$ není Banachův prostor. Dále platí, že i samotný prostor $(B[a, b], \|\cdot\|_B)$ je Banachův, tj. je úplný vzhledem k metrice $\varrho_B$. Prostor $(R[a, b], \|\cdot\|_I)$, kde $R[a, b]$ jsou Riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, je (po příslušné faktorizaci) normovaný lineární prostor, avšak není Banachův.

**Příklad 4.9.** Lebesgueovy prostory $L^p(I)$, $p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$, definované v předchozí kapitole, jsou nekonečněrozměrnými Banachovými prostory. Připomeňme, že jde o „faktorprostory“ měřitelných funkcí $f$ na $I$, jejichž $L^p$-normy jsou konečné. Tyto normy definujeme následujícím způsobem:

$$\|f\|_p := \left( \int_I |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

pro $p \in [1,\infty)$ a

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} |f(t)| = \inf\{C \geq 0 : |f| \leq C \text{ s.v. na } I\}.$$

Existuje nepřeberné množství dalších příkladů Banachových prostorů zavedených k různým účelům, viz např. [35].

**Definice 4.10** (Podprostor normovaného lineárního prostoru)**.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|$ a $A \subseteq X$ je podmnožina. Říkáme, že $A$ je *podprostor normovaného prostoru* $X$, jestliže $A$ je algebraický lineární podprostor v $X$, který je uzavřený v $X$ vzhledem k metrice indukované normou $\|\cdot\|$ (tj. obsahuje všechny své hromadné body).

**Příklad 4.11.** V Příkladu 4.8 jsme poznamenali, že množina $C[a,b]$ je algebraický lineární podprostor prostoru $B[a,b]$. Díky úplnosti metrického prostoru $(C[a,b], \varrho_C)$ je množina $C[a,b]$ uzavřená v metrickém prostoru $(B[a,b], \varrho_B)$, a tedy $C[a,b]$ je i podprostor normovaného prostoru $(B[a,b], \|\cdot\|_B)$ ve smyslu Definice 4.10.

**Příklad 4.12.** Je potřeba zdůraznit, že algebraický lineární podprostor obecného normovaného prostoru $X$ *nemusí být uzavřený* v $X$. Například pro $X := \ell^1$ množina $A := \{x \in \ell^1,\ x$ má jen konečně mnoho nenulových členů$\}$ je zřejmě vlastním algebraickým lineárním podprostorem v $X$, který však není uzavřený v $X$, neboť $\overline{A} = \ell^1$. Zejména tedy $A$ není podprostor normovaného prostoru $X$. Prozkoumejte v této souvislosti i prostor $(C[a,b], \|\cdot\|_C)$ a množinu $P[a,b]$ všech polynomů.

Nyní dokážeme tzv. *Rieszovo lemma*, kterému se někdy říká *lemma o skorokolmici.* Zhruba řečeno tvrdí, že i v normovaném lineárním prostoru bez skalárního součinu (kde nemáme pojem kolmosti) existují k danému podprostoru jakési „skorokolmé“ vektory, které v jistém smyslu aproximují kolmý vektor s libovolnou přesností. Zkuste si nakreslit obrázek v $\mathbb{R}^2$. Později toto lemma využjeme zejména při důkazu charakterizace konečnědimenzionálních prostorů. Poznamenejme, že alternativně vedle myšlenky v níže uvedeném „klasickém“ důkazu Rieszova lemmatu lze použít i Hahnovu–Banachovu větu (tuto větu diskutujeme v kapitole o lineárních funkcionálech).

**Lemma 4.13** (Rieszovo lemma)**.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|$ a $\emptyset \neq A \subset X$ jeho vlastní (uzavřený) podprostor. Potom pro každé $\eta \in [0,1)$ existuje vektor $x_\eta \in X$ s $\|x_\eta\| = 1$ takový, že* $\operatorname{dist}(x_\eta, A) \geq \eta$*, kde příslušná metrika na $X$ je indukovaná normou $\|\cdot\|$.*

*Důkaz.* Uvažovaný podprostor $A$ je různý jednak od nulového prostoru a jednak od celého prostoru $X$. Množina $X \setminus A$ je proto neprázdná. Zvolme libovolné $z \in X \setminus A$. Z uzavřenosti množiny $A$ v $X$ vyplývá, že vzdálenost bodu $z$ od $A$ je kladná, tj. $d := \varrho(z, A) > 0$. Zejména platí

$$d = \inf\{\varrho(z,y),\ y \in A\}, \quad \text{a tedy } \varrho(z,y) \geq d \text{ pro každé } y \in A. \tag{4.8}$$

Zafixujme nyní nějaké $\eta \in (0,1)$. Poněvadž $\frac{d}{\eta} > d$, podle (4.8) z vlastností infima

$$\text{existuje } \tilde{y} \in A \text{ takové, že } 0 < d \leq \varrho(z, \tilde{y}) < \frac{d}{\eta}. \tag{4.9}$$

Položme $x_\eta := \frac{z-\tilde{y}}{\|z-\tilde{y}\|}$. Potom zřejmě $\|x_\eta\| = 1$ a pro každé $y \in A$ platí

$$\varrho(x_\eta, y) = \|x_\eta - y\| = \left\| \frac{z-\tilde{y}}{\|z-\tilde{y}\|} - y \right\| = \left\| \frac{z - \tilde{y} - \|z-\tilde{y}\|\, y}{\|z-\tilde{y}\|} \right\|$$

$$= \frac{\|z - \overbrace{(\tilde{y} + \|z-\tilde{y}\|\, y)}^{\in A}\|}{\|z-\tilde{y}\|} \overset{(4.8),(4.9)}{>} \frac{d}{\frac{d}{\eta}} = \eta,$$

z čehož vyplývá, že $\varrho(x_\eta, A) \geq \eta$. Případ $\eta = 0$ je triviální, neboť metrika $\varrho$ je nezáporná. $\square$

**Poznámka 4.14.** Poznamenejme, že pro každý vektor $x \in X$ s normou $\|x\| = 1$ platí nerovnost $\varrho(x, A) \leq 1$. Vyplývá to z odhadu

$$\varrho(x, A) = \inf\{\varrho(x,y),\ y \in A\} \leq \varrho(x, 0) = \|x\| = 1 \quad \text{pro každé } x \in \mathcal{S}(0,1),$$

kde symbol $\mathcal{S}(0,1)$ označuje jednotkovou sféru v normovaném prostoru $X$, tj.

$$\mathcal{S}(0,1) = \{x \in X,\ \|x\| = 1\}.$$

Dále je nutné zdůraznit, že v Rieszově lemmatu v obecném případě není možno uvažovat hodnotu $\eta = 1$. Tuto skutečnost lze ilustrovat na vhodném příkladu. Např se vezme

$$X := \{f \in C[0,1],\ \ f(0) = 0\}, \quad \|f\| := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|,$$

a

$$A := \left\{ f \in X,\ \ \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

Následně se ukáže, že pro $g \in \mathcal{B}[0,1]$, kde $\mathcal{B}[0,1]$ je uzavřená jednotková koule v uvažovaném prostoru (tedy máme $\|g\| \leq 1$), platí $\varrho(g, A) < 1$.

Spojitost normy, o které hovoří následující tvrzení, v budoucnu několikrát využijeme.

**Věta 4.15.** *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Potom $\|\cdot\|$ je spojité zobrazení prostoru $X$ do eukleidovského prostoru $\mathbb{E}$.*

*Důkaz.* Nejdříve si všimněme, že každá norma $\|\cdot\|$ splňuje nerovnost

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \quad \text{pro každé } x, y \in X. \tag{4.10}$$

Skutečně, pro libovolné vektory $x, y \in X$ platí

$$\begin{aligned} \|x\| = \|(x-y) + y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \quad &\Rightarrow \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|, \\ \|y\| = \|(y-x) + x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \quad &\Rightarrow \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|, \end{aligned}$$

z čehož ihned vyplývá nerovnost (4.10). Nyní nechť $x \in X$ je libovolný vektor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je nějaká posloupnost, která má v dané normě limitu $x$, tj. platí $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$. Z (4.10) potom dostáváme, že $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$, což dokazuje spojitost zobrazení $\|\cdot\|$ v bodě $x$. A poněvadž prvek $x \in X$ byl vybraný libovolně, platí tento výsledek na celém prostoru $X$. □

**Poznámka 4.16.** Nejen norma, ale i operace lineárního prostoru (tj. součet a násobení skalárem) jsou spojité.

## 4.2 Ekvivalence norem

Před příští definicí připomeňme, že v Definici 2.66 jsme zavedli pojem ekvivalence metrik a v Poznámce 2.67 zmínili silnější verzi (tzv. stejnoměrnou ekvivalenci). Jak brzy uvidíme (v řeči norem), v normovaných lineárních prostorech tyto pojmy splývají

**Definice 4.17** (Ekvivalence norem)**.** Nechť $X$ je lineární prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jeho dvě normy. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, jestliže pro každou posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ prvků v $X$ a každý bod $x \in X$ platí vztah

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ v normě } \|\cdot\|_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ v normě } \|\cdot\|_2. \tag{4.11}$$

Následující věta udává ekvivalentní charakterizaci právě definovaného pojmu. Tato bývá někde v literatuře užita jako definice.

**Věta 4.18.** *Nechť $X$ je lineární prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jeho dvě normy. Potom tyto normy jsou ekvivalentní právě tehdy, když existují kladná reálná čísla $m$ a $M$ s vlastností*

$$m\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\,\|x\|_1 \quad \textit{pro každý vektor } x \in X. \tag{4.12}$$

*Důkaz.* Označme $\varrho_1$, $\varrho_2$ metriky indukované normami $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ podle Poznámky 4.2. Předpokládejme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní a nechť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je posloupnost splňující $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ v normě $\|\cdot\|_1$. V souladu s (4.11) potom $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ i v normě $\|\cdot\|_2$, což znamená, že identické zobrazení z metrického prostoru $(X, \varrho_1)$ do metrického prostoru $(X, \varrho_2)$ je spojité v bodě $x = 0$. Tedy

$$\text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta > 0 \text{ tak, že pro každé } x \in X \text{ s } \|x\|_1 < \delta \text{ je } \|x\|_2 < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Položme v (4.13) $\varepsilon = 1$. To znamená, že existuje $\delta > 0$ s vlastností, že pro každé $x \in X$ splňující $\|x\|_1 < \delta$ platí $\|x\|_2 < 1$. Nechť $x$ je libovolný nenulový vektor a označme $\tilde{x} := \frac{\delta}{2\|x\|_1}\, x$. Zřejmě $\tilde{x} \in X$ a pro normu $\|\tilde{x}\|_1$ máme

$$\|\tilde{x}\|_1 = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1}\, x \right\|_1 = \frac{|\delta|}{2\|x\|_1}\, \|x\|_1 = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Potom $\|\tilde{x}\|_2 < 1$, odkud

$$1 > \|\tilde{x}\|_2 = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1}\, x \right\|_2 = \frac{|\delta|}{2\|x\|_1}\, \|x\|_2 = \frac{\delta}{2}\, \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}, \quad \text{a tedy } \|x\|_2 < \frac{2}{\delta}\, \|x\|_1.$$

Tím jsme dokázali druhou nerovnost v (4.12) s volbou $M := \frac{2}{\delta} > 0$. Analogicky se dokáže i platnost první nerovnosti v (4.12) (v předcházejících úvahách zaměníme roli norem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$). Naopak, jestliže normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ splňují (4.12) pro nějaká $m, M > 0$, potom pro každou posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a bod $x \in X$ máme

$$m\, \|x_k - x\|_1 \leq \|x_k - x\|_2 \leq M\, \|x_k - x\|_1 \quad \text{pro každý index } k \in \mathbb{N}.$$

Tyto nerovnosti bezprostředně implikují ekvivalenci norem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ v souladu s Definicí 4.17. □

**Poznámka 4.19.** Poznamenejme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ na $X$ splňující relaci (4.12) jsou skutečně v ekvivalentním vztahu, neboť zřejmě platí

$$\frac{1}{M}\, \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\, \|x\|_2 \quad \text{pro každý vektor } x \in X. \tag{4.14}$$

**Příklad 4.20.** Pro dané $n \in \mathbb{N}$ nechť $X := \mathbb{R}^n$. Potom normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na $X$ z Příkladu 4.6 pro $p = 1$ a $p = 2$ jsou podle Věty 4.18 ekvivalentní. Skutečně, s využitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým (zde kvadratickým) průměrem lze dokázat, že jestliže

$$\|x\|_1 \overset{(4.3)}{=} \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 \overset{(4.3)}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in X, \tag{4.15}$$

potom platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\, \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \quad \text{pro každý vektor } x \in X. \tag{4.16}$$

Prozkoumejte nerovnosti (4.16) pro $n = 2$. Tvrzení o ekvivalenci platí i pro libovolné normy tvaru $\|\cdot\|_p$. Není však třeba vyšetřovat tyto případy zvlášť, neboť brzy uvidíme, že v prostorech konečné dimenze jsou všechny normy ekvivalentní.

**Příklad 4.21.** Nechť $X$ je lineární prostor tvaru

$$X := \left\{ f \in \mathcal{C}^1[0,\pi],\ f(0) = 0 = f(\pi) \right\}, \tag{4.17}$$

tj. prostor všech reálných funkcí se spojitou derivací na intervalu $[0,\pi]$ a nulovými hodnotami v krajních bodech. Uvažujme na $X$ dvojici norem

$$\|f\|_1 := \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)|, \qquad \|f\|_2 := \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)| + \max_{x\in[0,\pi]} |f'(x)|, \quad f \in X. \tag{4.18}$$

Jedná se o neekvivalentní normy. Dokažte tuto skutečnost. Můžete např. vzít posloupnost funkcí $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ definovanou předpisem

$$f_k(x) := \frac{\sin k^2 x}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujme nyní na prostoru $X$ následující dvojici norem

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \left( \int_0^\pi |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}, \\ \|f\|_2 &:= \left( \int_0^\pi |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} + \left( \int_0^\pi |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$f \in X$. Není těžké ověřit, že se skutečně jedná o normy na prostoru $X$ ve smyslu Definice 4.1. V tomto případě jsou normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ekvivalentní. Z (4.19) triviálně vyplývá, že $\|f\|_1 \le \|f\|_2$ pro každou funkci $f \in X$. Na druhé straně, pomocí teorie lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu se dá dokázat nerovnost

$$\int_0^\pi \left( |f'(x)|^2 - |f(x)|^2 \right) \mathrm{d}x \ge 0 \quad \text{pro každé } f \in X \tag{4.20}$$

(konkrétně se jedná o důsledek tzv. diskonjugovanosti rovnice $y'' + y = 0$ na intervalu $(0,\pi)$). Využitím výsledku (4.20) a předpisů v (4.19) potom ihned dostáváme nerovnost $\|f\|_2 \le 2\|f\|_1$ pro každou funkci $f \in X$. Celkem tedy máme odhady

$$\|f\|_1 \le \|f\|_2 \le 2\|f\|_1 \quad \text{pro všechny } f \in X,$$

které podle Věty 4.18 zaručují ekvivalenci norem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ v (4.19).

**Cvičení 4.22.** Ukažte, že normy $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ a $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ na $\ell^\infty$ nejsou ekvivalentní. Uvažujte např. posloupnost $\{x^{[n]}\}$, kde $x^{[n]} = (1/n, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$; zde vždy prvních $n$ členů je nenulových.

## 4.3 Izometrie a homeomorfismus

V souvislosti s tématem této sekce doporučujeme si osvěžit pojem *izomorfizmu* lineárních prostorů. Připomeňme, že jde o *lineární bijekci*. Složení izomorfizmu je izomorfizmus a inverze k izomorfizmu je izomorfizmus.

**Definice 4.23** (Izometrie normovaných lineárních prostorů)**.** Nechť $X$ a $Y$ jsou dva normované lineární prostory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$. Říkáme, že prostory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou *izometricky izomorfní* (někdy se — ne zcela přesně — říká *lineárně izometrické* či jen *izometrické*), jestliže existuje bijektivní lineární zobrazení $F : X \to Y$ zachovávající normy, tj. platí $\|F(x)\|_Y = \|x\|_X$ pro každý vektor $x \in X$.

**Definice 4.24** (Homeomorfismus normovaných lineárních prostorů)**.** Nechť $X$ a $Y$ jsou dva normované lineární prostory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$. Říkáme, že prostory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou *homeomorfní* (*lineárně homeomorfní*), jestliže existuje bijektivní lineární zobrazení $F : X \to Y$ a kladné reálné konstanty $m, M$ s vlastností $m\,\|x\|_X \le \|F(x)\|_Y \le M\,\|x\|_X$ pro každé $x \in X$.

**Poznámka 4.25.** (i) Existence lineárního homeomorfismu mezi dvěma normovanými lineárními prostory zaručuje, že dané prostory jsou jak z algebraického hlediska tak i z hlediska funkcionální analýzy „totožné“. To zejména umožňuje mezi těmito prostory přenášet pojem otevřenosti, uzavřenosti, úplnosti a kompaktnosti. Poznamenejme, že izometrie normovaných prostorů je zřejmě speciálním případem lineárního homeomorfismu s $m = 1 = M$, jak lze vidět z Definic 4.23 a 4.24.

(ii) Vztah z definice lineárního homeomorfismu je relací ekvivalence.

**Poznámka 4.26.** Existence izometrického izomorfismu mezi prostory $X$ a $Y$ umožňuje ztotožnit prvky těchto množin (přičemž se v tomto případě rovnají i jejich normy). Má pak smysl psát $X = Y$. Označení $X = Y$, které se často používá, je v tomto kontextu potřeba chápat právě jako existenci izometrického izomorfismu či jako ztotožnění učiněné prostřednictvím tohoto zobrazení. Má pak opodstatnění psát i $X \subseteq Y$, v případě, že $X$ a $F(X) \subseteq Y$ jsou izometricky izomorfní. Místo označení $X = Y$ se též někdy používá $X \sim Y$, nebo $X \approx Y$, nebo $X \cong Y$.

**Příklad 4.27.** (i) Prostory $L^2[a, b]$ a $\ell^2$ jsou izometricky izomorfní. Z historického hlediska jde vlastně o původní Rieszovu-Fischerovu větu, viz Větu 5.60 a komentář před ní. Argumenty pro toto tvrzení, které nyní podrobněji diskutovat nebudeme, se opírají mj. o teorii Fourierových řad. Ve skutečnosti jde o důsledek úvah z Podkapitol 5.3 a 5.4.

(ii) Prostory $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ s libovolnou dvojicí norem jsou vzájemně lineárně homeomorfní, jak plyne z výsledků příští podkapitoly.

**Věta 4.28.** *Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou lineárně homeomorfní normované lineární prostory. Prostor $(X, \|\cdot\|_X)$ je Banachův, právě když $(Y, \|\cdot\|_Y)$ je Banachův.*

*Důkaz.* Můžete se o něj pokusit jako cvičení. $\square$

## 4.4 Normované prostory konečné dimenze

Začneme užitečným sledováním.

**Poznámka 4.29.** Klasickým výsledkem funkcionální analýzy je pozorování, že každý reálný normovaný lineární prostor $X$ konečné dimenze $n \in \mathbb{N}$ je lineárně izometrický s prostorem $\mathbb{R}^n$, na kterém je zavedená vhodná norma. Skutečně, nechť $\|\cdot\|$ je norma na $X$ a $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ je nějaká (algebraická) báze lineárního prostoru $X$. Potom zobrazení $F : X \to \mathbb{R}^n$ definované jako

$$F(x) := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in X, \tag{4.21}$$

je zřejmě izomorfismus lineárních prostorů $X$ a $\mathbb{R}^n$. Navíc, zobrazení $\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definované pro každou $n$-tici $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_* := \|x\|, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in X, \tag{4.22}$$

je norma na prostoru $\mathbb{R}^n$, jak lze lehce ověřit přímo z Definice 4.1. A jestliže podle (4.21) a (4.22) platí $\|F(x)\|_* = \|x\|$ pro každé $x \in X$, normované prostory $(X, \|\cdot\|)$ a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ jsou v souladu s Definicí 4.23 izometrické. Ve světle Poznámky 4.25 se tedy při zkoumání normovaných prostorů s dimenzí $n$ stačí soustředit na prostor $\mathbb{R}^n$. Všechny získané výsledky tak budou platné pro každý konečněrozměrný normovaný prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

**Věta 4.30.** *Pro dané $n \in \mathbb{N}$ jsou každé dvě normy na prostoru $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní.*

*Důkaz.* Uvažujme tzv. kanonickou bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru $\mathbb{R}^n$, tj.

$$e_k := (0, \dots, 1, \dots, 0), \quad \text{kde 1 je na } k\text{-té pozici pro každé } k \in \{1, \dots, n\}. \tag{4.23}$$

Potom každý vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je možno zřejmě vyjádřit ve tvaru

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \tag{4.24}$$

Nechť $\|\cdot\|$ je libovolná, ale pevně zvolená norma na prostoru $\mathbb{R}^n$. Dokážeme, že je ekvivalentní se součtovou normou

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{4.25}$$

z Příkladu 4.6, kde $p = 1$. Položme $M := \max_{1 \le k \le n} \|e_k\|$. Potom

$$\|x\| \overset{(4.24)}{=} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \|e_k\| \le M \sum_{k=1}^{n} |x_k| \overset{(4.25)}{=} M \, \|x\|_1, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.26}$$

Z Příkladu 4.20 dále víme, že daná součtová norma je ekvivalentní s eukleidovskou normou, a tedy normované prostory $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ a $\mathbb{E}^n$ jsou podle Věty 4.18 a Definice 4.24 lineárně homeomorfní prostřednictvím identického zobrazení $F$. Každá podmnožina v $\mathbb{R}^n$, která je ohraničená a uzavřená vzhledem na součtovou normu, je tedy v této normě i kompaktní. Zejména jednotková sféra $\mathcal{S}(0,1)$ v $\mathbb{R}^n$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$ je kompaktní v této normě, neboť je vzhledem k ní evidentně ohraničená a uzavřená v $\mathbb{R}^n$. Uvažujme funkci $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ s předpisem $f(x):=\|x\|$ pro každý vektor $x\in\mathbb{R}^n$. V souladu s Větou 4.15 a s ohledem na nerovnost (4.26) je $f$ spojité zobrazení na $\mathbb{R}^n$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_1$. Podle Weierstrassovy věty je potom $f$ ohraničená na $\mathcal{S}(0,1)$, přičemž své odpovídající globální extrémy na $\mathcal{S}(0,1)$ i nabývá. Přesněji, jestliže $m:=\min_{x\in\mathcal{S}(0,1)} f(x)$, potom existuje vektor $y\in\mathcal{S}(0,1)$ takový, že $m=f(y)=\|y\|$. Zřejmě $m\geq 0$. Pokud by $m=0$, potom nutně pro vektor $y$ máme $y=0$, a tedy i $\|y\|_1=0$, což však odporuje faktu $y\in\mathcal{S}(0,1)$. Proto konstanta $m$ je kladná. Nechť nyní $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\}$ je libovolné. Potom vektor $\tilde{x}:=\frac{x}{\|x\|_1}$ je prvkem jednotkové sféry $\mathcal{S}(0,1)$, a následně platí

$$m\leq f(\tilde{x})=\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|=\frac{\|x\|}{\|x\|_1},\quad \text{a teda}\quad m\,\|x\|_1\leq\|x\|. \tag{4.27}$$

Kombinací výsledků v (4.26) a (4.27), ve světle Věty 4.15, dostáváme ekvivalenci norem $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_1$. A poněvadž norma $\|\cdot\|$ byla zvolená libovolně, můžeme tvrdit, že každé dvě normy na $\mathbb{R}^n$ jsou vzájemně ekvivalentní. □

**Důsledek 4.31.** *Pro dané $n\in\mathbb{N}$ uvažujme normovaný lineární prostor $\mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|$ a nechť $\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\mathbb{R}^n$ je nějaká jeho (algebraická) báze. Potom v prostoru $\mathbb{R}^n$ konvergence v normě $\|\cdot\|$ splývá se souřadnicovou konvergencí vzhledem k bázi $\{x_1,\dots,x_n\}$. Přesněji, jestliže $\{x^{[k]}\}_{k=1}^\infty\subseteq\mathbb{R}^n$ je posloupnost, $x\in\mathbb{R}^n$,*

$$x^{[k]}=\lambda_1^{[k]}\,x_1+\cdots+\lambda_n^{[k]}\,x_n,\quad \left(\lambda_1^{[k]},\dots,\lambda_n^{[k]}\right)\in\mathbb{R}^n\quad \textit{pro každé } k\in\mathbb{N}, \tag{4.28}$$

$$x=\lambda_1\,x_1+\cdots+\lambda_n\,x_n,\quad (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n, \tag{4.29}$$

*potom $\lim_{k\to\infty}x^{[k]}=x$ v normě $\|\cdot\|$ právě tehdy, když $\lim_{k\to\infty}\lambda_i^{[k]}=\lambda_i$ pro každé $i\in\{1,\dots,n\}$.*

*Důkaz.* Snadno se ukáže, že pro každou zvolenou bázi $\{x_1,\dots,x_n\}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ je funkce

$$\|x\|_*:=\sum_{i=1}^n|\lambda_i|,\quad x=\lambda_1\,x_1+\cdots+\lambda_n\,x_n\in\mathbb{R}^n, \tag{4.30}$$

normou na $\mathbb{R}^n$. Zejména je zřejmé, že konvergence v této normě je ekvivalentní se souřadnicovou konvergencí vzhledem k bázi $\{x_1,\dots,x_n\}$. A poněvadž podle Věty 4.30 jsou normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_*$ ekvivalentní, platí tvrzení v důsledku. □

**Důsledek 4.32.** *Pro dané $n\in\mathbb{N}$ je každý normovaný lineární prostor $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ úplný, tj. Banachův prostor. Navíc, každá podmnožina v $\mathbb{R}^n$, která je ohraničená a uzavřená vzhledem k normě $\|\cdot\|$, je v této normě i kompaktní.*

Shrňme si některá fakta, která vyplývají z výše uvedených pozorování.

**Věta 4.33.** *Každý reálný normovaný prostor konečné dimenze je Banachův prostor a konvergence v libovolné normě je ekvivalentní se souřadnicovou konvergencí vzhledem k jakékoliv (algebraické) bázi prostoru.*

Při důkazu ekvivalence norem v $\mathbb{R}^n$ byl důležitý fakt, že v tomto prostoru je množina kompaktní, právě když je uzavřená a omezená. Jak nyní uvidíme, právě toto je charakterizace konečnědimenzionálních normovaných prostorů.

**Věta 4.34.** *Nechť $X$ je reálný normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

*(i) Prostor $X$ má konečnou dimenzi.*

*(ii) Každá množina $A \subseteq X$, která je ohraničená a uzavřená vzhledem k normě $\|\cdot\|$, je v této normě i kompaktní.*

*Důkaz.* Směr (i) $\Rightarrow$ (ii) vyplývá z Poznámky 4.29 a Důsledku 4.32. Nechť platí výrok (ii), tj. každá ohraničená a uzavřená podmnožina v $X$ je kompaktní. Zejména jednotková sféra $\mathcal{S}(0,1)$ je tedy množina kompaktní v prostoru $X$. Předpokládejme sporem, že prostor $X$ nemá konečnou dimenzi. Zvolme libovolný vektor $x_1 \in \mathcal{S}(0,1)$. Potom množina $A_1 := \mathrm{Lin}\{x_1\}$ je zřejmě vlastní algebraický podprostor lineárního prostoru $X$ s dimenzí 1. V souladu s Větou 4.33 je $A_1$ úplný normovaný prostor. Množina $A_1$ je proto uzavřená v $X$ vzhledem k normě $\|\cdot\|$, což následně podle Definice 4.10 znamená, že $A_1$ je vlastní podprostor normovaného prostoru $X$. Z Rieszova lemmatu 4.13 pro $\eta := \frac{1}{2}$ potom vyplývá, že existuje vektor $x_2 \in \mathcal{S}(0,1)$ takový, že

$$\varrho(x_2, A_1) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tedy i} \quad \|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Vektory $x_1$ a $x_2$ jsou zřejmě lineárně nezávislé. Položme $A_2 := \mathrm{Lin}\{x_1, x_2\}$. S použitím analogických argumentů jako výše platí, že $A_2$ je vlastní podprostor normovaného prostoru $X$ s dimenzí 2. Podle Rieszova lemmatu 4.13 pro $\eta := \frac{1}{2}$ tedy existuje prvek $x_3 \in \mathcal{S}(0,1)$ s vlastností

$$\varrho(x_3, A_2) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tedy i} \quad \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Podobně, množina $A_3 := \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, x_3\}$ je vlastní podprostor normovaného prostoru $X$ s dimenzí 3, přičemž existuje vektor $x_4 \in \mathcal{S}(0,1)$ splňující

$$\varrho(x_4, A_3) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tedy i} \quad \|x_4 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \quad \|x_4 - x_2\| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a} \quad \|x_4 - x_3\| \geq \frac{1}{2}.$$

Poněvadž prostor $X$ je podle předpokladu nekonečněrozměrný, můžeme v tomto procesu pokračovat dále. Získáme tak posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}(0,1)$ s vlastností $\|x_k - x_l\| \geq \frac{1}{2}$ pro každé dva různé indexy $k, l \in \mathbb{N}$. Daná posloupnost tedy nemá žádný hromadný bod, což je však ve sporu s kompaktností množiny $\mathcal{S}(0,1)$. Proto prostor $X$ musí mít konečnou dimenzi, tj. platí tvrzení (i). $\square$

**Poznámka 4.35.** Všimněme si, že v předchozím důkazu jsme vlastně ukázali ekvivalenci

*prostor $X$ má konečnou dimenzi právě tehdy, když jednotková sféra je kompaktní.*

Tvrzení platí beze změny i pro uzavřenou jednotkovou kouli. Další významné kritérium týkající se dimenze normovaného prostoru je následující. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Potom

*prostor $X$ má konečnou dimenzi právě tehdy, když*
*každá norma $\|\cdot\|_*$ na $X$ je ekvivalentní s $\|\cdot\|$.*

Implikace „$\Rightarrow$“ je ve světle Poznámky 4.29 obsahem Věty 4.30. Důkaz opačné implikace je založený na faktu, že v každém nekonečněrozměrném normovaném prostoru $X$ umíme k dané zvolené normě $\|\cdot\|$ vždy sestrojit novou normu $\|\cdot\|_*$ na $X$, která není ekvivalentní s $\|\cdot\|$.

## 4.5 Nekonečné řady v Banachových prostorech

Nyní zavedeme analogii pojmu nekonečné (konvergentní) řady pro normované lineární prostory.

**Definice 4.36** (Konvergence nekonečné řady)**.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq X$ je posloupnost. Definujme

$$y_n := \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.31}$$

Řekneme, že nekonečná řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ *konverguje*, resp. *je konvergentní*, v prostoru $X$, jestliže posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ má v $X$ limitu vzhledem k $\|\cdot\|$, tj. $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ pro nějaké $x \in X$. V tomto případě klademe $\sum_{k=1}^\infty x_k = x$.

**Cvičení 4.37.** Ukažte, že řada $\sum_{k=0}^\infty t^k$ je konvergentní v $(C[-1/2, 1/2], \|\cdot\|_C)$ se součtem $1/(1-t)$.

Následující věta ukazuje, že v Banachových prostorech platí obdoba tvrzení: „z absolutní konvergence řady reálných čísel plyne její konvergence“. Důkaz je analogický důkazu v $\mathbb{R}$ a je založen na Cauchyově-Bolzanovu kriteriu konvergence (nekonečná řada konvergentní, právě když posloupnost jejich částečných součtů je cauchyovská).

**Věta 4.38.** *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor a $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq X$ je posloupnost s vlastností*

$$\text{číselná řada } \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ konverguje v } \mathbb{R}. \tag{4.32}$$

*Potom nekonečná řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ konverguje v $X$.*

*Důkaz.* Stačí ukázat, že posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (4.31) je cauchyovská v $X$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Předpoklad (4.32) na základě Cauchyova-Bolzanova kritéria konvergence číselné řady potom zaručuje existenci indexu $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastností, že

$$\text{pro každé dva indexy } m, n \geq n_\varepsilon,\ n > m,\ \text{platí } \big|\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\|\big| < \varepsilon. \tag{4.33}$$

Využitím trojúhelníkové nerovnosti následně dostáváme

$$\|y_n - y_m\| \overset{(4.31)}{=} \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| = \big|\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\|\big| \overset{(4.33)}{<} \varepsilon$$

pro každé $m, n \geq n_\varepsilon$, $n > m$, což dokazuje cauchyovskost, a tedy i konvergenci posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $X$. □

**Poznámka 4.39** (Test úplnosti)**.** Lze ukázat (důkaz zde nebudeme uvádět), že implikaci ve Větě 4.38 lze obrátit. Celkem tedy dostáváme: Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Prostor $X$ je Banachův.
- Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Získáváme tak účinný nástroj pro testování úplnosti daného prostoru. Např. důkaz úplnosti $L^p$ prostorů pro $p \in [1, \infty)$, tj. důkaz Věty 3.24, lze provést modifikací (a zjednodušením) již dříve prezentovaného postupu, a to právě s využitím testu úplnosti pomocí řady.

## 4.6 Báze v normovaném prostoru

V Sekci 8.2 se zmiňujeme o *Hamelově bázi*. Hamelova (neboli algebraická) báze je množina nezávislých prvků v lineárním prostoru, pomocí kterých lze každý prvek tohoto prostoru vyjádřit jako kombinaci konečně mnoha prvků báze. V lineárním prostoru (i nekonečné dimenze) taková báze vždy existuje, nemusí však být spočetná. V úplném normovaném nekonečnědimenzionálním prostoru je vždy nespočetná. V normovaném prostoru lze uvažovat i jiný typ báze (který umožňuje v jistém smyslu snížit mohutnost báze). Místo vyjádření prvku pomocí zmíněné konečné kombinace požadujeme vyjádření prvku pomocí spočetné kombinace prvků ve tvaru konvergentní řady. Dostáváme tímto tzv. *Schauderovu bázi.* Přesněji, posloupnost prvků $\{u_k\}$ v normovaném lineárním prostoru $X$ nazveme *Schauderovou bází*, jestliže každý prvek $x \in X$ lze (jednoznačně) vyjádřit ve tvaru konvergentní řady

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k,$$

kde $\{c_k\}$ je nějaká posloupnost čísel. Tedy požadujeme, aby existovala posloupnost $\{c_k\}$ taková, že $\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k\| \to 0$ pro $n \to \infty$. Např. uvažme prostor $\ell^p$, $1 \leq p < \infty$.

Posloupnost $\{e_n\}$, kde $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, jednička je na $n$-té pozici, tvoří Schauderovu bázi prostoru $\ell^p$, $1 \le p < \infty$. Skutečně, pro $x \in \ell^p$ platí

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0$$

pro $n \to 0$. Zdůrazněme, že zatímco Hamelova báze může být spočetná či nespočetná, Schauderova báze je spočetná, neboť je tvořena posloupností. Dále, na rozdíl od Hamelovy báze, ne všechny Banachovy prostory mají Schauderovu bázi. Banachův prostor s Schauderovou bází je separabilní. Skutečně, není tak obtížné ukázat, že konečné lineární kombinace vektorů (Schauderovy báze prostoru $X$) s racionálními koeficienty tvoří množinu hustou v $X$. Systém takových lineárních kombinací je spočetný. V neseparabilním Banachově prostoru Schauderova báze neexistuje. Tato sledování mj. ukazují, že $\ell^p$, $1 \le p < \infty$, je separabilní (výše jsme totiž našli Schauderovu bázi). Zato prostor $\ell^\infty$ Schauderovu bázi nemá, neboť — jak už víme z kapitoly o metrických prostorech — není separabilní. V prostoru konečné dimenze pojmy algebraická a Schauderova báze splývají. Problematiku vyjádření prvku ve tvaru konvergentní řady budeme studovat zejména v kontextu unitárních prostorů, kde — jak uvidíme — každá úplná ortogonální posloupnost už tvoří také Schauderovu bázi.

## 4.7 Schauderova věta o pevném bodu a aplikace

V této sekci navážeme zejména na naše úvahy o pevném bodu a kritériích relativní kompaktnosti.

V kontextu Banachových prostorů vyslovíme Schauderovu větu o pevném bodu a předvedeme její aplikaci při důkazu Peanovy věty a také při řešení problému z teorie nelineárních oscilátorů. Důležitou roli bude hrát mj. i Arzeláova-Ascoliho věta (Věta 2.179).

Schauderova věta nebývá typickou součástí úvodu do funkcionální analýzy. Nám však nejde o detaily jejího důkazu a širší diskuzi o ní, ale zejména o její aplikaci v konkrétních situacích. Jak uvidíme, díky našim poznatkům o pojmech jako spojitost zobrazení mezi prostory, relativní kompaktnost atd. jsme na její použití plně připraveni.

Zdůrazněme, že ve větách, které v této sekci uvádíme, není zaručena jednoznačnost pevného bodu (na rozdíl od Banachovy věty). To je však vyváženo v jistém smyslu slabšími podmínkami.

### Browerova věta a Schauderova věta

Začneme připomenutím definice pojmu, který má zřejmou geometrickou interpretaci.

**Definice 4.40** (Konvexní množina)**.** Podmnožina $S$ vektorového prostoru se nazývá *konvexní*, jestliže pro libovolná $x, y \in S$ platí $\alpha x + (1-\alpha) y \in S$ pro všechna $\alpha \in [0, 1]$.

Jak zanedlouho uvidíme, při výkladu je přirozené dopracovat se k Schauderově větě přes známou a důležitou Browerovu větu o pevném bodu.

**Věta 4.41** (Brouwerova věta o pevném bodu)**.** *Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená, omezená a konvexní množina a $F : S \to S$ je spojité zobrazení. Potom má $F$ pevný bod v $S$.*

**Cvičení 4.42.** Vezměte si mapu Brna a umístěte ji na kterékoliv místo v Brně. Potom na ní vždy najdete bod, který se shoduje s bodem umístění mapy v Brně. Tento fakt plyne jak z Banachovy věty, tak i z Brouwerovy věty, přičemž Banachova věta zaručuje i jednoznačnost.

V literatuře lze nalézt různá zobecnění této věty, ale též různé její důkazy, analytické i topologické. Např. ji lze snadno zobecnit pro konečnědimenzionální normované lineární prostory. Přirozenou otázkou je zobecnění uvedeného tvrzení na nekonečnou dimenzi. Jeden z tradičních protipříkladů, kde se pracuje v prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$, tj. prostoru sestávajícího z prvků $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ splňujících $\|x\| := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} < \infty$, v němž uvažujeme uzavřenou jednotkovou kouli a definujeme zobrazení $(F(x))_n = x_{n-1}$ (tzv. „shift operator“), říká, že existence pevného bodu není v takovém případě zaručena. Ukazuje se tak, že — v souladu s očekáváním — důležitou roli při opuštění konečné dimenze hraje pojem kompaktnosti. Dostáváme se tímto k nekonečnědimenzionálnímu rozšíření Brouwerovy věty, totiž k větě Schauderově. Podobně jako i u jiných vět, existují v literatuře různá zobecnění. My zde nejdříve uvedeme v podstatě původní Schauderovu verzi z r. 1930.

**Věta 4.43** (Schauderova věta o pevném bodu)**.** *Nechť $X$ je Banachův prostor, $S \subseteq X$ je neprázdná, kompaktní a konvexní množina a $F : S \to S$ je spojité zobrazení. Potom má $F$ pevný bod v $S$.*

*Důkaz.* Detailní důkaz zde nebudeme uvádět. Poznamenejme pouze, že jeho hlavní myšlenka spočívá v aproximaci (nekonečnědimenzionální) množiny $S$ konečnědimezionálními množinami $S_n$ a aproximaci operátoru (tj. zobrazení) $F$ operátory $F_n : S_n \to S_n$ a následnou aplikací Brouwerovy věty o pevném bodu. Takovéto úlohy s větším $n$ aproximují původní problém lépe. Takto získáme posloupnost $\{x_n\}$, kde $x_n$ jsou pevné body pomocných problémů. Vybereme konvergentní podposloupnost a její limitou je požadovaný pevný bod původního problému. Poznamenejme, že — zhruba řečeno — limitní přechod k nekonečnu se provádí vzhledem k dimenzi. □

Nyní uvedeme drobné zobecnění Schauderovy věty, které je velmi užitečné v aplikacích. Její důkaz je založen na využití původní Schauderovy věty. Někdy se v souvislosti s předchozí a následující větou hovoří o tzv. *první* resp. *druhé Schauderově větě*.

**Věta 4.44** (Schauderova věta o pevném bodu – zobecnění)**.** *Nechť $X$ je Banachův prostor, $S \subseteq X$ je neprázdná, omezená, uzavřená a konvexní množina a $F : S \to S$ je spojité zobrazení takové, že $F(S)$ je relativně kompaktní množina (v $S$). Potom má $F$ pevný bod v $S$.*

**Poznámka 4.45.** Někdy lze v literatuře narazit na odlišnou formulaci uvedené verze Schauderovy věty, např. tuto: Nechť $X$ je Banachův prostor a $S \subseteq X$ je omezená, uzavřená a konvexní množina. Pak každý totálně spojitý operátor $F$ zobrazující množinu $S$ do sebe má alespoň jeden pevný bod. Jde však o zcela ekvivalentní tvrzení, jak lze lehce vidět, připomeneme-li následující terminologii.

*Operátorem* se má na mysli zobrazení mezi prostory (typicky se jedná o prostory funkcí). Řekneme, že operátor $F : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(X)$ *kompaktní*, jestliže její každou omezenou podmnožinu $S \subset \mathcal{D}(X)$ zobrazuje na množinu relativně kompaktní (někdy se uvádí prekompaktní, což je však v našem případě totéž) v prostoru $Y$.

Ekvivalentní definice právě uvedeného pojmu zní: operátor $F : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(X)$ *kompaktní*, jestliže z každé ohraničené posloupnosti $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(X)$ lze vybrat podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ takovou, že $\{Fu_{n_k}\}$ je konvergentní s limitou v $Y$.

Řekneme, že operátor $F : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(X)$ *totálně spojitý* (též *úplně spojitý*), jestliže je na $\mathcal{D}(X)$ spojitý a kompaktní.

Pozor, někde v literatuře se kompaktním zobrazením má na mysli totálně spojité zobrazení. Poznamenejme, že u lineárních zobrazení kompaktnost automaticky zaručí spojitost, což ovšem obecně neplatí u nelineárních zobrazení.

Ještě je třeba upozornit, že mnozí autoři mají kompaktním zobrazením na mysli výše definované kompaktní zobrazení, které je však navíc lineární.

**Poznámka 4.46.** Připomeňme, že při aplikaci Banachovy věty o pevném bodu je potřeba ukázat, že zobrazení je „dostatečně malé“. Naproti tomu u Schauderovy věty je potřeba zaručit, že — v případě prostoru $C(I)$ nebo $L^p(I)$ — obraz příslušného zobrazení se skládá z „dostatečně rozumných“ funkcí.

Mohli bychom pokračovat v uvádění dalších vět o pevném bodu, které lze uplatnit v situacích, kde předchozí věty nepostačují, přičemž nemusíme být omezeni jen na normované lineární prostory. Raději ale odkažme čtenáře na literaturu (např. [9, 12, 13, 20, 54, 63], viz též Sekci 8.4), neboť toto není cíl našeho kurzu a spíše si předveďme ukázky aplikací.

## Peanova věta

Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{4.34}$$

kde $f$ je daná funkce. Nyní splníme slib, který jsme dali v diskuzi o aplikacích Arzeláovy-Ascoliho věty, a dokážeme existenci uvedené úlohy za pouhého předpokladu spojitosti funkce $f$.

**Věta 4.47** (Peanova věta)**.** *Nechť $a, b \in (0, \infty)$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Označme $I = [x_0, x_0 + a]$ a $D = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| \le b\}$. Předpokládejme, že $f : I \times D \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom existuje aspoň jedno řešení počátečního problému* (4.34)*, které je definováno na intervalu $J = [x_0, x_0 + \alpha]$, kde $\alpha = \min\{a, b/m\}$, $m = \max_{[x,y] \in I \times D} |f(x, y)|$.*

*Důkaz.* Pracujme v Banachově prostoru $C(J)$ se supremovou normou. Buď

$$S = \{y \in C(J) : |y(x) - y_0| \le b, x \in J\}.$$

Definujme $F$ jako zobrazení, které každé funkci $y \in S$ přiřazuje funkci $Fy$ předpisem

$$(Fy)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s.$$

Jako cvičení ukažte, že $S$ je uzavřená a konvexní množina, $F$ zobrazuje $S$ do $S$ a $F$ je spojité zobrazení. Při důkazu spojitosti využijte faktu, že ze spojitosti $f$ na $J \times D$ plyne stejnoměrná spojitost. Má se ukázat, že $y_n \to y$ implikuje $Fy_n \to Fy$ v příslušné metrice (či, chcete-li, normě) uvažovaného prostoru $C(J)$; jde tedy o stejnoměrnou konvergenci. Alternativně lze užít Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci. Při následujícím důkazu relativní kompaktnosti množiny $F(S)$ předvedeme aplikaci Arzeláovy-Ascoliho věty. Nechť $y \in S$. Potom z nerovnosti

$$|(Fy)(x_1) - (Fy)(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \right| \le m|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in J,$$

plyne, že funkce množiny $F(S)$ jsou rovnomocně spojité. (Jinou možností je vzít $(Fy)'(x)$ a využít Lagrangeovu větu o střední hodnotě.) Poněvadž jsou funkce z $F(S)$ stejnoměrně ohraničené konstantou $|y_0| + b$, plyne z Věty 2.179, že $F(S)$ je relativně kompaktní.

Věta 4.44 nyní zaručuje existenci alespoň jednoho pevného bodu zobrazení $F$ a ten je řešením počátečního problému (4.34). $\square$

**Poznámka 4.48.** Peanovu větu lze přirozeně rozšířit na systém rovnic, viz např. [26]. V důkazu se používá zobecnění Věty 2.179 včetně příslušné modifikace podmínek (2.61) a (2.62) na vektorové funkce.

## Integrální rovnice a nelineární oscilátor

Uvažujme nelineární integrální rovnici (tzv. *Hammersteinovu rovnici*) ve tvaru

$$u(x) = \int_a^b K(x, y) f(y, u(y))\,\mathrm{d}y, \tag{4.35}$$

kde $K$ a $f$ jsou dané funkce a $u$ je neznámá. Schauderova věta nám umožní dokázat řešitelnost této rovnice; využijeme opět mj. Arzeláovu-Ascoliho větu.

**Věta 4.49.** *Předpokládejme, že $K(x, y)$ je spojitá funkce pro $a \le x, y \le b$ a $f(y, z)$ je spojitá a ohraničená funkce pro $a \le y \le b$ a všechna $z$. Potom rovnice* (4.35) *má spojité řešení.*

*Důkaz.* Pracujme v Banachově prostoru $C[a, b]$ se supremovou normou. Definujme množinu

$$S = \{u \in C[a, b] : \|u\| \le D\},$$

kde $D$ je konstanta, jejíž hodnotu specifikujeme níže. Dále definujme operátor $F : S \to C[a, b]$ předpisem

$$(Fu)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y, u(y))\,\mathrm{d}y.$$

Pomocí zobecněné Schauderovy věty ukážeme, že $F$ má pevný bod; tento pevný bod je evidentně řešením naší integrální rovnice. Konstantu $D$ definujeme jako $D = AB(b-a)$, kde $B$ je takové, že $|f(y,z)| \leq B$ pro $[y,z] \in [a,b] \times \mathbb{R}$ (existuje díky omezenosti funkce $f$) a $A$ je takové, že $|K(x,y)| \leq A$ pro $(x,y) \in [a,b] \times [a,b]$ (existuje díky faktu, že $K$ je spojitá na kompaktní množině). Abychom mohli aplikovat Větu 4.44, je potřeba prověřit, že jsou splněny následující podmínky:

- $S$ je omezená, uzavřená a konvexní množina;
- $F$ zobrazuje $S$ do sebe (tj. $F(S) \subseteq S$);
- $F(S)$ je relativně kompaktní množina;
- $F$ je spojitý operátor.

Detaily v této chvíli vynecháme. Můžete se o důkaz pokusit sami. Prozraďme, že při důkazu relativní kompaktnosti využijeme Arzeláovu-Ascoliho větu (tj. Větu 2.179), přičemž nám pomůže stejnoměrná spojitost funkce $K$, která je zaručena její spojitostí na kompaktní množině. V důkazu spojitosti operátoru $F$ mj. využijeme stejnoměrnou spojitost funkce $f$, která opět plyne z faktu, že $f$ je spojitá a v tomto kroku ji uvažujeme na kompaktní množině. □

Nyní předvedeme, jak Větu 4.49 je možno aplikovat při studiu konkrétního (praktického) problému. Uvažujme tzv. *matematické kyvadlo*, které je jedním z představitelů tzv. *nelineárních oscilátorů* (přesněji, v našem případě půjde o nucený nelineární oscilátor). Pohyb kyvadla je modelován nelineární diferenciální rovnicí

$$x'' + \alpha^2 \sin x = F(t), \tag{4.36}$$

kde $x(t)$ je úhel mezi kyvadlem a vertikálou, $\alpha$ je konstanta závisící na délce kyvadla a $F(t)$ je externí síla, která na kyvadlo působí. Pro velmi malé úhly bychom mohli uvažovat linearizaci problému ve tvaru

$$x'' + \alpha^2 x = F(t);$$

tato je však značně nepřesná pro velké hodnoty $x$ (typické pro rezonanci). Chceme nyní řešit problém, zda má rovnice (4.36) periodické řešení pro všechny spojité, liché, periodické síly $F(t)$. Tzn., zda naše nelinearita umí potlačit „neomezené rezonance“ podobně, jako to umí „tření“. Pomocí Schauderovy věty ukážeme, že (4.36), na rozdíl od $x'' + \alpha^2 x = F(t)$, má vždy periodické řešení, a tedy nelinearita je schopná potlačit rezonanci i při absenci tlumícího členu.

**Věta 4.50.** *Jestliže funkce $F$ je spojitá, lichá a periodická, potom rovnice* (4.36) *má periodické řešení se stejnou periodou jako má funkce $F$.*

*Důkaz.* Nechť $F$ má periodu $\omega$. Přeškálování $s = \omega t/s$ převede rovnici (4.36) na rovnici, kde vnější síla má periodu 2, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} + \beta^2 \sin x = h(s), \tag{4.37}$$

kde $\beta = \alpha\pi/\omega$ a $h = \pi^2 F/\omega^2$. Ukážeme, že tato rovnice má periodické řešení $x(s)$ takové, že $x(0) = 0$ (což je přirozené pro lichou funkci) a $x(-1) = x(1)$. Ve skutečnosti stačí najít řešení $x(s)$ jistého dvoubodového okrajového problému na $[0, 1]$, přesněji rovnice (4.37) s podmínkou $x(0) = x(1) = 0$. Toto řešení se pak rozšíří na interval $[-1, 1]$ předpisem $x(-s) = -x(s)$ pro $0 \le s \le 1$ a následně periodicky pro všechna $s$. Takové řešení vyhovuje rovnici (4.37) všude a je tedy hledaným periodickým řešením.

Řešíme okrajový problém (4.37), $x(0) = x(1) = 0$. Pomocí tzv. Greenovy funkce jej přepíšeme do integrální rovnice

$$x(s) = \int_0^1 g(s,t)[\beta^2 \sin x(t) - h(t)]\,\mathrm{d}t, \tag{4.38}$$

kde Greenovou funkcí pro náš případ je

$$g(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{pro } x \le y \\ y(1-x) & \text{pro } y \le x. \end{cases}$$

V našem jednoduchém případě ani obecný koncept Greenovy funkce nepotřebujeme a rovnici (4.38) lze odvodit intuitivní úvahou — můžete se o ni pokusit. Platí ovšem i přepis opačným směrem a tedy okrajový problém je skutečně ekvivalentní integrální rovnici (4.38).

Rovnice (4.38) je zřejmě speciálním případem Hammersteinovy rovnice (4.35) a podmínky Věty 4.49 jsou evidentně splněny. Řešitelnost rovnice (4.38) je tímto zaručena. Dostáváme tak i řešení původního problému. □

**Poznámka 4.51.** Poznamenejme, že v předchozích úvahách jsme obdrželi existenci řešení, nemáme však žádnou informaci o jeho jednoznačnosti. Lze ukázat (a můžete se o to pokusit), že za dodatečných podmínek lze aplikovat Banachovu větu o pevném bodu, která nám zaručí jednoznačnou existenci. První přirozenou volbou je práce v prostoru $C[a, b]$, kde při odhadech jednoduše nahradíme zúčastněné funkce vhodnými konstantami; odtud pak vyplyne tvar dodatečné podmínky zaručující kontraktivitu. Vhodnou volbou jiného prostoru a/nebo modifikacemi v odhadech lze dosáhnout zeslabení dodatečné podmínky.

Kapitola 8

# Apendix: Některé další prostory

## 8.1 Pseudometrické a ultrametrické prostory

Pokud (M1) v definici metrického prostoru (Definice 2.1) nahradíme slabší podmínkou, totiž

$$\text{jestliže } x = y, \text{ pak } \varrho(x, y) = 0,$$

pak dostaneme tzv. *pseudometrický* prostor. Pokud trojúhelníkovou nerovnost (M3) nahradíme silnějším požadavkem

$$\varrho(x, z) \leq \max\{\varrho(x, y), \varrho(y, z)\},$$

obdržíme tzv. *ultrametrický* (či *supermetrický*) prostor; jde tedy o speciální případ metrického prostoru.

Prostor $C[a, b]$ s pseudometrikou $\varrho(f, g) = |f(a) - g(a)|$, $f, g \in C[a, b]$, je příkladem pseudometrického prostoru.

Každý diskrétní metrický prostor je ultrametrickým prostorem.

## 8.2 Lineární prostory

Znalost základních informací z teorie lineárních (tj. vektorových) prostorů se předpokládá. Uveďme zde jen některá vybraná fakta, další údaje jsou rozptýleny v textu.

V našem výkladu (zejména v normovaných lineárních prostorech, v unitárních prostorech a při studiu lineárních funkcionálů) pracujeme s lineárními (vektorovými) prostory nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Prvky daného lineárního prostoru často nazýváme *vektory* a reálná čísla *skaláry*.

**Definice 8.1** (Lineární závislost vektorů)**.** Nechť $X$ je lineární prostor a $x_1, \dots, x_m \in X$, $m \in \mathbb{N}$, jsou nějaké jeho prvky. Říkáme, že vektory $x_1, \dots, x_m$ jsou *lineárně závislé*, jestliže existuje nenulová $m$-tice skalárů $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ s vlastností

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0.$$

V opačném případě se vektory $x_1, \ldots, x_m$ nazývají *lineárně nezávislé*. Obecně se množina $A \subseteq X$ nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže každý konečný systém vektorů z $A$ je lineárně nezávislý.

**Definice 8.2** (Podprostor lineárního prostoru)**.** Nechť $X$ je lineární prostor a $A \subseteq X$ nějaká jeho neprázdná podmnožina. Řekneme, že $A$ je *podprostor* lineárního prostoru $X$, jestliže pro libovolné $x, y \in A$ a $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ platí $\lambda x + \eta y \in A$. Případně lze tuto podmínku ekvivalentně napsat ve formě dvou jednodušších podmínek. Jakých?

**Definice 8.3** (Lineární obal)**.** Nechť $X$ je lineární prostor a $A \subseteq X$ nějaká jeho podmnožina. *Lineárním obalem* množiny $A$, označovaným jako $\operatorname{Lin} A$, máme na mysli množinu všech konečných lineárních kombinací prvků systému $A$, tj.

$$\operatorname{Lin} A := \{\text{konečné lineární kombinace prvků z } A\}.$$

**Definice 8.4** (Algebraická báze lineárního prostoru)**.** Nechť $X$ je lineární prostor. Množina $A \subseteq X$ se nazývá *algebraická* anebo též *Hamelova báze* prostoru $X$, jestliže $A$ je lineárně nezávislá a její *lineární obal* splývá s $X$, tj. platí

$$\operatorname{Lin} A = X.$$

**Poznámka 8.5.** V každém lineárním prostoru existuje algebraická báze. Je-li $A$ nějaká Hamelova báze lineárního prostoru $X$, potom každý vektor $x \in X$ se dá jediným způsobem vyjádřit ve tvaru konečné lineární kombinace některých prvků množiny $A$. Každé dvě Hamelovy báze prostoru $X$ mají stejnou mohutnost, která se nazývá *(algebraická) dimenze* (*rozměr*) prostoru $X$ a označuje se $\dim X$. Platí, že dva lineární prostory jsou (algebraicky) izomorfní, jestliže mají stejnou (algebraickou) dimenzi. Speciálně každý konečněrozměrný prostor s $\dim X = n \in \mathbb{N}$ je izomorfní s lineárním prostorem $\mathbb{R}^n$.

Lze ukázat, že průnik libovolného počtu podprostorů lineárního prostoru je opět podprostor. Avšak pozor: sjednocení lineárních podprostorů není obecně lineární podprostor. Najděte příklad. Místo sjednocení pracujeme v lineární algebře se součtem podprostorů.

**Definice 8.6** (Součet podprostorů)**.** Nechť $V, W$ a $V_i$ jsou vektorové podprostory v lineárním prostoru $X$. *Součet podprostorů* definujeme následujícím způsobem

$$V + W = \{v + w \in X : v \in V, w \in W\},$$
$$V_1 + \cdots + V_n = \{v_1 + \cdots + v_n \in X : v_i \in V_i\}.$$

Součet vektorových podprostorů je opět podprostor.

**Definice 8.7** (Direktní součet)**.** Součet podprostorů $V + W$ se nazývá *direktní*, jestliže $V \cap W = \{0\}$. Direktní součet zapisujeme $V \oplus W$.

Lze ukázat, že součet podprostorů $V + W$ je direktní, právě když každý vektor $u \in V + W$ lze psát ve tvaru $u = v + w$, $v \in V$, $w \in W$, právě jedním způsobem.

**Definice 8.8** (Faktorový prostor a kodimenze lineárního podprostoru)**.** Nechť $X$ je lineární prostor a $A \subseteq X$ jeho lineární podprostor. Definujme, že dva prvky $x, y \in X$ jsou v relaci, jestliže $x - y \in A$. Je zřejmé, že se jedná o relaci ekvivalence na množině $X$, přičemž skutečnost, že prvky $x, y \in X$ jsou v dané relaci, zapisujeme výrazem

$$x \equiv y\,(\operatorname{mod} A).$$

Příslušnou množinu tříd rozkladu označujeme $X/A$ a nazýváme *faktorový prostor* prostoru $X$ *podle modulu* $A$. Lze ověřit, že množina $X/A$ vytváří lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Jeho algebraická dimenze se standardně nazývá *kodimenze podprostoru* $A$ v prostoru $X$. Speciálně, pokud $\dim X = n$ a $\dim A = m$, potom kodimenze podprostoru $A$ je rovna $n - m$.

**Věta 8.9.** *Nechť $X$ je lineární prostor a $A \subseteq X$ jeho lineární podprostor konečné kodimenze $m \in \mathbb{N}$. Potom existují prvky $x_1, \dots, x_m \in X$ s vlastností, že každý vektor $x \in X$ se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$x = \lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_m\, x_m + y, \tag{8.1}$$

*kde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou skaláry a vektor $y \in A$.*

*Důkaz.* Nechť $\{A_1, \dots, A_m\} \subseteq X/A$ je algebraická báze faktorového prostoru $X/A$. Zvolme nějaké reprezentanty tříd $A_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, tj.

$$\text{nechť } x_i \in X \text{ jsou takové, že } A_i = [x_i], \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, m\}. \tag{8.2}$$

Nechť $x \in X$ je libovolný prvek a $[x] \in X/A$ je třída rozkladu $X/A$, která ho obsahuje. Potom zřejmě existuje jediná $m$-tice skalárů $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ taková, že

$$[x] = \lambda_1\, A_1 + \cdots + \lambda_m\, A_m \overset{(8.2)}{=} \lambda_1\, [x_1] + \cdots + \lambda_m\, [x_m] = [\lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_m\, x_m].$$

To znamená, že vektory $x$ a $\lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_m\, x_m$ patří do stejné třídy rozkladu $X/A$. Podle Definice 8.8 proto existuje (jediný) vektor $y \in A$ tak, že platí rovnost v (8.1). □

**Definice 8.10** (Izomorfizmus lineárních prostorů)**.** Nechť $X, Y$ jsou lineární prostory. Zobrazení $F : X \to Y$ se nazývá *izomorfizmus* mezi prostory $X$ a $Y$, jestliže je bijektivní a lineární. Existuje-li izomorfizmus $X$ na $Y$, pak prostory $X$ a $Y$ se nazývají *izomorfní*.

**Poznámka 8.11.** Např. prostor $\mathbb{R}^n$ a prostor všech polynomů stupně nejvýše $n - 1$ jsou izomorfní. Připomeňme, že složení izomorfizmu je izomorfizmus a inverze k izomorfizmu existuje a je to izomorfizmus. Protože izomorfní zobrazení přenáší všechny v lineární algebře studované vlastnosti množin vektorů (lineární nezávislost, obal, báze, ...), není (z hlediska lineární algebry) mezi izomorfními prostory rozdíl. Můžeme si vybrat v jakém ze vzájemně izomorfních prostorů budeme algebraický problém řešit. Často je (v případě prostoru nad $\mathbb{R}$ ) volen prostor $\mathbb{R}^n$, kde lze použít existující vektorové a maticové algoritmy.

## 8.3 Topologické prostory

Při studiu metrických prostorů si můžeme povšimnout, že v řadě úvah nehraje prakticky žádnou roli metrika jako taková, ale pouze pojmy touto metrikou indukované, jako např. otevřené a uzavřené množiny, okolí bodu apod. Má tedy smysl zavést pojem obecnější než je pojem metrického prostoru. Tím se dostáváme k tzv. topologickým prostorům. Možností, jak tyto prostory zavést je několik (např. axiomatizací pojmu otevřené, resp. uzavřené množiny, pojmu uzávěru množiny nebo okolí bodu apod.). Nejběžnější je způsob následující.

**Definice 8.12** (Topologický prostor)**.** Nechť $T \neq \emptyset$ je množina a $\mathfrak{T}$ je systém podmnožin množiny $T$, který splňuje následující podmínky:

(T1) $\emptyset \in \mathfrak{T}$ a $T \in \mathfrak{T}$.

(T2) Průnik libovolného konečného systému množin z $\mathfrak{T}$ je prvek systému $\mathfrak{T}$.

(T3) Sjednocení libovolného systému množin z $\mathfrak{T}$ je prvek systému $\mathfrak{T}$.

Systém množin $\mathfrak{T}$ se nazývá *topologie* na $T$, množiny z $\mathfrak{T}$ se nazývají *otevřené* a dvojice $(T, \mathfrak{T})$ se nazývá *topologický prostor*.

**Poznámka 8.13.** (i) je zřejmé, že na neprázdné množině lze definovat různé topologie. Např. $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, T\}$ nebo $\mathfrak{T}_2 = \mathcal{P}(T)$, kde $\mathcal{P}(T)$ značí systém všech podmnožin množiny $T$.

(ii) Každý metrický prostor je topologický prostor, neboť podle Věty 2.41 a Poznámky 2.35-část (iii) systém všech otevřených množin v metrickém prostoru splňuje axiomy (T1)–(T3). Opačné tvrzení neplatí. Je-li na množině, která je alespoň dvouprvková, dán systém podmnožin $\mathfrak{T}$ splňující axiomy (T1)–(T3), nelze obecně definovat metriku tak, že $\mathfrak{T}$ jsou právě všechny otevřené množiny v této metrice, např. pro $\mathfrak{T} = \{\emptyset, T\}$. Hledání dodatečných podmínek, za kterých je systém podmnožin množiny $T$ splňující axiomy (T1)–(T3) totožný se systémem otevřených množin při jisté metrice na $T$, je jedním z problémů (tzv. problém *metrizovatelnosti* topologického prostoru) studovaných v matematické disciplíně zvané *topologie*.

Pojmy okolí bodu, uzávěr a uzavřená množina jsou v topologickém prostoru definovány následovně.

**Definice 8.14.** Nechť $(T, \mathfrak{T})$ je topologický prostor a $x \in T$. *Okolím bodu* $x$ rozumíme každou množinu $U \in \mathfrak{T}$, pro niž $x \in U$. Bod $x \in T$ se nazývá *bodem uzávěru* množiny $A \subseteq T$, jestliže pro každé okolí $U$ bodu $x$ platí $U \cap A \neq \emptyset$. Množina $\overline{A}$ všech bodů uzávěru množiny $A$ se nazývá uzávěr množiny $A$.

Lze např. ukázat, že takto definovaný uzávěr množiny v topologickém prostoru má vlastnosti jako ve Větě 2.29.

Jinou (ekvivalentní) možností, jak definovat topologický prostor je konstrukce pomocí uzávěrové operace a uzavřených množin.

**Definice 8.15.** Nechť $T \neq \emptyset$ je množina a $u : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ je zobrazení splňující pro všechna $A, B \in \mathcal{P}$ následující podmínky (tzv. *Kuratowského axiomy*):

(K1) $u(\emptyset) = \emptyset$;
(K2) $A \subseteq u(A)$;
(K3) $u(A \cup B) = u(A) \cup u(B)$;
(K4) $u(u(A)) = u(A)$.

Množina $A \subseteq T$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $u(A) = A$. Dvojice $(T, u)$ se nazývá *topologický prostor*.

Při této definici se množina $A \subseteq T$ nazývá *otevřená*, jestliže množina $T \setminus A$ je uzavřená.

**Příklad 8.16.** Nechť $T \neq \emptyset$ a $(T, \mathfrak{T}_2)$ je topologický prostor z Poznámky 8.13-(i). Definujme $u : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ předpisem $u(A) = A$ pro každou množinu $A \subseteq T$. Pak lze ověřit, že $(T, \mathfrak{T}_2)$ a $(T, u)$ jsou totožné topologické prostory v tom smyslu, že systémy otevřených množin v $(T, \mathfrak{T}_2)$ a $(T, u)$ jsou totožné.

**Poznámka 8.17.** Nechť $X$ je lineární prostor a $\mathfrak{T}$ je topologie na $X$ (ve smyslu Definice 8.12). Jestliže součet a skalární násobek jsou spojitými funkcemi v topologii $\mathfrak{T}$, hovoříme o $(X, \mathfrak{T})$ jako o *lineárním topologickém prostoru*. Často se navíc vyžaduje, aby topologický prostor byl *Hausdorffův*, tj. aby topologie oddělovala body, neboli aby každé dva různé body měly okolí, která jsou disjunktní. Je-li topologie určená metrikou, mluvíme o lineárních metrických prostorech. K tomu, aby byl $(X, \varrho)$ lineárním metrickým prostorem, stačí, aby platilo $\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y)$ a $\varrho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\varrho(x, y)$ pro každé $x, y, z \in X$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$. Splňuje-li metrika uvedené podmínky, platí $\varrho(y, z) = \varrho(y - z, 0)$. V tomto případě stačí zavést funkci jedné proměnné $\|x\| = \varrho(x, 0)$. Tato funkce vyhovuje podmínkám definujícím normu.

## 8.4 Lokálně konvexní prostory a Fréchetovy prostory

V Poznámce 8.17 jsme zavedli topologické lineární prostory. Pokud navíc požadujeme, aby každá neprázdná otevřená množina obsahovala neprázdnou konvexní otevřenou množinu, dostaneme tzv. lokálně konvexní topologický lineární prostor, zkráceně *lokálně konvexní prostor*. Lokálně konvexní prostory mohou být charakterizovány jako lineární topologické prostory, jejichž topologie je generována systémem seminorem (viz níže). My se však raději trochu podrobněji zmíníme o speciálním případu (lokálně konvexních) topologických prostorů, totiž o tzv. *Fréchetových prostorech*. Fréchetovy prostory jsou zobecněním Banachových prostorů (a na rozdíl od nich metrika nemusí být indukována normou). Fréchetův prostor $X$ lze zavést dvěma následujícími ekvivalentními způsoby, přičemž druhý z nich je poněkud praktičtější:

- $X$ je lokálně konvexní topologický lineární (metrizovatelný) prostor, jehož topologii je možno indukovat translačně invariantní metrikou, tj. metrikou $\varrho$ takovou, že

$\varrho(x+z, y+z) = \varrho(x,y)$ pro každé $x, y, z \in X$. Libovolná (a tedy každá) translačně invariantní metrika indukující topologii musí být taková, že prostor je $X$ úplný. Množina $A \subseteq X$ je otevřená, právě když pro každé $x \in A$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{y : \varrho(x,y) < \varepsilon\}$$

je podmnožinou množiny $A$.

- $X$ je Hausdorffův topologický lineární prostor, jehož topologii je možno indukovat (spočetným) systémem *seminorem* (též pseudonorem, viz Poznámku 6.15). To jsou funkcionály $p : X \to [0, \infty)$ splňující pouze dva axiomy normy, totiž (absolutní) homogenitu a trojúhelníkovou nerovnost; mohou však nabývat nulové hodnoty i pro nenulové vektory. Požadujeme, aby prostor $X$ úplný vzhledem k systému seminorem. Poznamenejme, že cauchyovskost posloupnosti $\{x_n\}$ v topologickém lineárním prostoru $X$ lze zavést i bez normy, a to následujícím způsobem: Pro každé okolí $U$ nuly existuje $n_0$ tak, že pro každé $m, n > n_0$ platí $x_m - x_n \in U$. Množina $A \subseteq X$ je otevřená, právě když pro každé $x \in A$ existuje $M \geq 0$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{y : p_n(y-x) < \varepsilon \text{ pro všechna } n \leq M\}$$

je podmnožinou množiny $A$.

Každý Banachův prostor je Fréchetův. Klasickým příkladem Fréchetova (avšak nikoliv Banachova) prostoru je prostor reálných funkcí spojitých na nekompaktním intervalu, tj. např. $C(\mathbb{R})$. Funkce zde nemusejí být omezené, a proto nelze užít supremovou normu. Topologií je zde topologie stejnoměrné konvergence na kompaktních podintervalech. Přesněji, (generující) systém seminorem $p_n$, $n \in \mathbb{N}$, lze definovat třeba takto:

$$p_n(x) = \max\{|x(t)| : t \in [-n, n]\}.$$

pro $x \in C(\mathbb{R})$.

V Sekci 4.7 jsme uvedli Schauderovu větu o pevném bodu v Banachových prostorech. Prakticky stejné znění má i její zobecnění pro Fréchetovy prostory (v podstatě pouze Banachův prostor nahradíme Fréchetovým prostorem). Jde o tzv. *Schauderovu-Tichonovovu větu o pevném bodu.* Její užitečnost je vzhledem k uvedenému příkladu spojitých funkcí na nekompaktním intervalu zřejmá.

# Kapitola 9

# Apendix: Nerovnosti

Nerovnosti jsou extrémně důležitým nástrojem v mnoha odvětvích matematiky. Existuje nepřeberné množství různých nerovností. My zde uvedeme jen jistá klasická tvrzení, která přímo využíváme při našem studiu prostorů posloupností a prostorů funkcí.

Jedná se zejména *Hölderovu nerovnost* a *Minkowského nerovnost*. Důležitou roli hrají tzv. konjugovaná čísla (či sdružené exponenty), což jsou čísla $p, q \in (1, \infty)$ splňující vztah

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{9.1}$$

Přesné důkazy nerovností zde nebudeme uvádět. Poznamenejme pouze, že Hölderova nerovnost je — při vhodné volbě — důsledkem tzv. *Youngovy nerovnosti*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

kde $a, b$ jsou kladná čísla. Youngovu nerovnost lze dokázat různými (elegantními) způsoby a můžeme ji chápat jako zobecnění jednoduché nerovnosti

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Minkowského nerovnost získáme — při vhodné volbě — sečtením Hölderových nerovností. Jak Hölderova tak i Minkowského nerovnost mají svou „spojitou“ či „diskrétní“ verzi, tj. verzi pro funkce (tedy integrální nerovnost) či pro posloupnosti (tedy sumační nerovnost). Diskrétní verze lze dokazovat přímo (pracujeme se sumami), avšak lze je dostat i ze spojitých verzí, pokud za funkce z integrálních nerovností vezmeme po částech konstantní funkce.

Všude v následujícím předpokládáme, že uvedené integrály či řady na pravých stranách existují (jsou konečné). Pak jsou konečné i integrály a řady na levých stranách.

**Věta 9.1** (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť* $p, q \in (1, \infty)$ *splňují vztah* (9.1).

*(a) Jesliže $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, potom platí*

$$\sum_k |a_k b_k| \le \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_k |b_k|^q\right)^{1/q}. \tag{9.2}$$

*(b) Jestliže $f, g$ jsou měřitelné funkce na měřitelné množině $M$ (konečné i nekonečné míry), potom platí*

$$\int_M |fg| \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_M |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}. \tag{9.3}$$

**Poznámka 9.2.** (i) Tvrzení platí i pro komplexní posloupnosti či funkce. Mají-li posloupnosti $u, v$ pouze konečný počet nenulových členů (tj. $u, v \in \mathbb{R}^n$), lze psát Hölderovu nerovnost ve tvaru

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}. \tag{9.4}$$

(ii) Chápeme-li $u$ jako prvek prostoru $\ell^p$ (s příslušnou normou $\|u\|_p$) či prostoru $L^p$ (s příslušnou normou $\|u\|_p$), pak lze obě nerovnosti z předchozí věty napsat ve tvaru

$$\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_q.$$

(iii) Hölderovu nerovnost využíváme např. při důkazu inkluze $L^{p_2} \subset L^{p_1}$ pro $p_1 < p_2$, viz Věta 3.25.

(iv) Speciálním případem Hölderovy nerovnosti je Cauchyova–Schwarzova nerovnost (též známá jako Schwarzova, Bunjakovského, Cauchyova–Bunjakovského nebo Cauchyova–Bunjakovského–Schwarzova nerovnost). Skutečně, zvolíme-li $p = q = 2$, dostaneme nerovnost mezi absolutní hodnotou skalarního součinu a součinem „velikostí“ vektorů $|\langle u, v\rangle| \le \|u\|_2 \|v\|_2$ pro posloupnosti z $\ell^2$ či funkce z $L^2$. Takováto nerovnost ve skutečnosti platí nejen pro posloupnosti z $\ell^2$ či funkce z $L^2$, ale i pro prvky libovolného unitárního prostoru. Vztah $|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\|v\|$ lze dokázat např. pomocí zobecněné Pythagorovy věty formulované v unitárních prostorech či trikem s diskriminantem, viz Větu 5.9.

(v) Hölderova nerovnosti platí (mluvme např. o $L^p$ případu), i pokud $\|fg\|_1$ je nekonečné, pak je ovšem nekonečná i pravá strana. Naopak, pokud $f \in L^p(M)$ a $g \in L^q(M)$, pak $fg \in L^1(M)$.

**Věta 9.3** (Minkowského nerovnost)**.** *Nechť $p \in [1, \infty)$.*

*(a) Jesliže $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, potom platí*

$$\left(\sum_k |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_k |b_k|^p\right)^{1/p}. \tag{9.5}$$

*(b) Jestliže $f, g$ jsou měřitelné funkce na měřitelné množině $M$ (konečné i nekonečné míry), potom platí*

$$\left(\int_M |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_M |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{9.6}$$

**Poznámka 9.4.** (i) Platí podobný komentář jako v části (i) Poznámky 9.2.

(ii) Chápeme-li $u$ jako prvek prostoru $\ell^p$ (s příslušnou normou $\|u\|_p$) či prostoru $L^p$ (s příslušnou normou $\|u\|_p$), pak lze obě nerovnosti z předchozí věty napsat ve tvaru

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Lze snadno ukázat, že tato nerovnost platí i v případě $p=\infty$.

(iii) S ohledem na tvar relace $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$ lze snadno usoudit, že může být přímo využita při důkazu faktu, že funkcionál $\|u\|_p$ splňuje jeden z axiomů normy, totiž trojúhelníkovou nerovnost. Dále nám slouží např. při ověřování uzavřenosti prostorů $\ell^p, L^p$ na sčítání (což je jedna ze dvou podmínek charakterizujících lineární podprostor).

# Literatura


[1] B. Bollobas, Linear analysis, Cambridge University Press 1990.

[2] J. Bouchala, Úvod do funkcionální analýzy, VŠB TU Ostrava 2012.

[3] V. Bryant, Metric spaces: Iteration and applications, Cambridge University Press 1994.

[4] F. Burk, Lebesgue measure and integration: An introduction, Wiley 1998.

[5] F. Burk, A garden of integrals, MAA 2007.

[6] J. Conway, A course in functional analysis, 2nd ed., Springer 1985.

[7] C. Costara, D. Popa, Exercises in functional analysis, Kluwer 2003.

[8] J. Dieudonné, History of functional analysis, North-Holland 1981.

[9] V. Dolejší, K. Najzar, Nelineární funkcionální analýza, MatfyzPress 2010.

[10] O. Došlý, Lineární funkcionální analýza, učební text, PřF MU Brno 2012.

[11] Z. Došlá, O. Došlý, Metrické prostory: teorie a příklady, PřF MU Brno 2006.

[12] P. Drábek, A. Kufner, Úvod do funkcionální analýzy, KAM ZČU Plzeň 1993.

[13] P. Drábek, J. Milota, Lectures on nonlinear analysis, Vydavatelský servis, Plzeň 2004.

[14] V. A. Erovenko, M. A. Kovalyov, Y. V. Radyno, Examples and counter-examples in functional analysis, 2004.

[15] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, Banach space theory: The basis for linear and nonlinear analysis, Springer 2011.

[16] D. Farenick, Fundamentals of functional analysis, Springer 2016.

[17] E. Fuchs, Metrické prostory, PřF MU Brno 1984.

[18] J. Franců, Funkcionální analýza 1, FSI VUT 2014.

[19] J. Giles, Introduction to the analysis of metric spaces, Cambridge University Press 1987.

[20] D. H. Griffel, Applied functional analysis, Dover 2002.

[21] H. Hanche-Olsen, H. Holden, The Kolmogorov-Riesz compactness theorem, Exp. Math. 28 (2010), 385–394.

[22] V. L. Hansen, Functional analysis: Entering Hilbert space, World Scientific 2006.

[23] J. Hutchinson, Measure theory, Lecture notes.

[24] S. Cheng, A crash course on the Lebesgue integral and measure theory, Lecture notes.

[25] V. Jarník, Diferenciální počet II, Academia Praha 1976.

[26] J. Kalas, M. Ráb, Obyčejné diferenciální rovnice, PřF MU 2001.

[27] O. Kalenda, Texty k přednáškám z Úvodu do funkcionální analýzy, MFF UK 2015.

[28] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy, SNTL 1975.

[29] S. G. Krantz, A guide to functional analysis, MAA 2013.

[30] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, J. Wiley 1978.

[31] A. Kufner, Geometrie Hilbertova prostoru, SNTL 1973.

[32] S. Kwon, H. Yoon, Lebesgue integral theory, Lecture notes.

[33] A. Lomtatidze, Lineární funkcionální analýza 1, učební text, FSI VUT, 2016.

[34] J. Lukeš, Teorie míry a integrálu I, MFF UK 1980.

[35] J. Lukeš, Zápisky z funkcionální analýzy, Karolinum 1998.

[36] J. Lukeš, Úvod do funkcionální analýzy, Karolinum 2005.

[37] J. Lukeš, J. Malý, Míra a integrál, Karolinum 2002.

[38] J. Malý, Teorie míry a integrálu, učební text, MFF UK.

[39] R. E. Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, Springer 1998.

[40] R. Melrose, Functional analysis, Lecture notes MIT 2014.

[41] S. G. Michlin, Variačné metódy v matematickej fyzike, Alfa Bratislava 1974.

[42] L. Mišík, Funkcionálna analýza, Alfa 1989.

[43] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek, Lebesgueova míra a integrál, SNTL 1985.

[44] I. P. Natanson, Theory of functions of a real variable, F. Ungar Publ. 1964.

[45] W. Naylor, G. R. Sell, Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách, Alfa 1981.

[46] I. Netuka, Základy moderní analýzy, MatfyzPress 2014.

[47] S. Ovchinnikov, Measure, integral, derivative: A course on Lebesgue's theory, Springer 2013.

[48] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill 1991.

[49] B. Rynne, M. Youngson, Linear functional analysis, Springer 2008.

[50] K. Saxe, Beginning functional analysis, Springer 2002.

[51] M. Schechter, Principles of functional analysis, AMS 2002.

[52] S. Schwabik, P. Šarmanová, Malý průvodce historií integrálu, PřF MU 1996.

[53] R. Sikorski, Diferenciální a integrální počet: Funkce více proměnných, Academia 1973.

[54] D. R. Smart, Fixed point theorems, Cambridge University Press 1974.

[55] P. Šepitka, Funkcionálna analýza 1, učební text, PřF MU, 2017.

[56] T. Tao, An introduction to measure theory, GSM 126, AMS.

[57] A. E. Taylor, Úvod do funkcionální analýzy, Academia 1974.

[58] G. Teschl, Topics in real and functional analysis, Lecture notes 2016.

[59] B. Thomson, Theory of integral, Classical Real Analysis 2012.

[60] A. Torchinsky, Problems in real and functional analysis, AMS 2015.

[61] N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge University Press 1933.

[62] K. Yoshida, Functional analysis, Springer 1980.

[63] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications: Fixed-point theorems, Springer 1986.

[64] E. Zeidler, Applied functional analysis: Main principles and their applications, Springer, 1995.