

# **Počítačová geometrie a grafika**

**pro studijní program B-MAI**

**Matematické inženýrství**

**Dalibor Martišek**

**Brno 2017**

# Obsah

Úvod.....	5
1 Grafická data .....	6
1.1 Vektorová a rastrová data .....	6
1.2 Barevné systémy .....	9
2 Euklidovský prostor .....	18
2.1 Incidence .....	19
2.2 Uspořádání .....	19
2.3 Shodnost .....	22
2.4 Rovnoběžnost .....	26
2.5 Spojitost .....	27
2.6 Geometrie v prostoru .....	32
2.7 Analytický a syntetický model afinního a euklidovského prostoru .....	34
2.8 Geometrická zobrazení v euklidovské rovině.....	39
3 Projektivní prostor.....	43
3.1 Základní pojmy .....	43
3.2 Dělicí poměr a dvojpoměr bodů .....	49
3.3 Zobrazení v projektivní rovině .....	53
3.4 Uživatelská souřadná soustava v rovině .....	60
3.5 Zobrazení v projektivním prostoru .....	61
3.6 Promítání prostoru na rovinu .....	62
4 Křivky.....	66
4.1 Definice křivky, plochy a (geometrického) tělesa.....	66
4.2 Klasifikace křivek .....	70
4.3 Analytické určení křivky .....	70
4.4 Algoritmy konstrukce křivek .....	73
4.5 Analytické modelování pohybu .....	74
4.6 Softwarové modelování pohybu .....	83
4.7 Softwarové modelování rychlosti .....	85
4.8 Transformace křivek .....	89
5 Reprezentace křivek v CAD systémech.....	92
5.1 Afinní kombinace bodů .....	92
5.2 Řídící body.....	94
5.3 Bézierovy křivky .....	95
5.4 Některé další křivky.....	99
5.5 Bázové funkce, prostory funkcí a křivek.....	102
5.6 Aproximace po částech, splajny .....	102
5.7 B-splajny .....	106
5.8 NURBs křivky .....	108
5.9 Kuželosečkové oblouky jako NURBs .....	111

6 Plochy .....	117
6.1 Analytické vyjádření plochy .....	117
6.2 Křivky na ploše .....	117
6.3 Explicitní a implicitní rovnice plochy .....	119
6.4 Algoritmy konstrukce ploch .....	120
6.5 Metody generování ploch .....	126
6.6 Rozvinutelnost ploch .....	131
6.7 Rozvinutelné plochy .....	135
6.8 Zborcené plochy .....	136
6.9 NURBs plochy .....	139
7 Fraktály .....	145
7.1 Pojem fraktálu - motivace .....	145
7.2 Míra a dimenze .....	152
7.3 Box counting .....	157
7.4 Soběpodobnost a soběpříbuznost .....	159
7.5 Iterační systémy .....	166
7.6 Dynamické systémy .....	170
7.7 L-systémy .....	171
7.8 Náhodné fraktály .....	173

## Úvod

Dnešní život si již nedovedeme představit bez počítačů. Výpočetní technika a informační technologie vůbec dnes ovlivňují prakticky veškerou lidskou činnost. Jedním z prvních oborů, do kterého výpočetní technika začala významně zasahovat, bylo strojírenství. Již před půl stoletím se začaly objevovat první náznaky toho, co dnes označujeme všeobecně známým pojmem CAD (Computer Aided Design). Dnes pod tuto zkratku zahrnujeme nejen softwarové konstrukce modelů strojních součástí, ale i spoustu dalších užitečných prostředků, bez kterých si dnes již nedovedeme představit konstruktérskou praxi.

Vývoj algoritmů pro tyto systémy si od jejich vývojářů postupně vyžádal řadu specifických znalostí, které měly geometrickou povahu, které se však od poznatků „klasické“ geometrie značně lišily. Tyto poznatky, které byly původně velmi roztříštěné a zpočátku značně závislé na konkrétním hardware, se postupně dařilo systematizovat a pro takto nově vznikající obor se vžil název **počítačová grafika**.

S rozvojem možností hardware rostly i možnosti grafických systémů a jejich vývojáři byli stavěni před nové a nové problémy. Při vytváření stále složitějších objektů přestávaly dostačovat „elementární“ křivky, plochy a tělesa a „klasické“ geometrické operace. Křivky plochy a tělesa bylo třeba tvarovat uživatelsky intuitivní změnou polohy několika „významných“ bodů, plochy a tělesa bylo třeba tvořit předem definovaným pohybem křivek a ploch atd. Tyto úlohy jsou svojí povahou sice čistě geometrické, avšak bývají řešeny na přímou „objednávku“ počítačových grafiků. Jsou natolik specifické, že geometrie, která je řeší, se velmi často označuje jako **geometrie počítačová**.

Rozdíl mezi „klasickou“ **geometrií**, **počítačovou geometrií** a **počítačovou grafikou** je jasně vidět na následujícím jednoduchém příkladu. Počítačový grafik potřebuje algoritmus na vyplnění trojúhelníka barvou. Z geometrie ví, že spojíme-li vnitřní bod trojúhelníka s bodem vnějším, pak tato spojnice protne obvod trojúhelníka. Je to věc tak zřejmá, že se v klasické geometrii vůbec nedokazuje a stojí v jejích základech jako axiom. Algoritmus by tedy mohl fungovat tak, že by vzal vnitřní bod trojúhelníka (např. jeho těžiště) a postupoval od něj v libovolném směru k průsečíku s obvodem. Vzniklou úsečku by pak obarvil. Opakováním tohoto postupu pro jiné vnitřní body a jiné směry se pak docílí vybarvení celého trojúhelníka. Pokud by ovšem tato úloha byla skutečně takto naprogramována, skončila by v drtivé většině případů „vylitím“ barvy na celé výstupní okno. Proč? Jednoduše proto, že výstupní zařízení počítače není „klasická“ geometrická rovina a spousta takto sestrojených polopřímek obvod trojúhelníka neprotíná. Zde musí nastoupit počítačový geometr. Zahodit tento axiom a přijít na jiný geometrický princip, který by mohl nabídnout grafikovi k implementaci.

Grafické systémy jsou dnes většinou natolik intuitivní, že jejich základní ovládání lze pochopit i bez speciální geometrické průpravy. Takového uživatele moderního grafického systému však lze přirovnat ke svátečnímu řidiči, který usedne za volant formule 1. Při troše štěstí se mu možná podaří bez nehody pomaloučku projet prázdný závodní okruh (tj. v CADu možná vytvoří nějakou „docela hezkou věc“), ale závodit (sofistikovaně navrhnout třeba nový raketový motor) takový člověk prostě nemůže. Dobrý jezdec formule 1 musí být jednak výborným řidičem a jednak musí podrobně znát konstrukci svého vozu, aby mohl co nejlépe využít všech jeho možností. Dobrý konstruktér dnes musí být velmi dobrý geometr, aby měl předem jasnou představu o tom, co a jak chce vlastně tvořit, a detailně znát principy a algoritmy skryté v jeho grafickém systému, aby mohl využít všech jeho možností k realizaci svého záměru.



## 1 Grafická data

Základní rozdíly mezi geometrií a počítačovou grafikou spočívají již v elementárních geometrických pojmech „bod“ a „přímka“. Podle **Euklida** (asi 325–265 př. n. l.), zakladatele systematické geometrie, je bod to, co nelze rozdělit na části (tedy „tečka bez rozměrů“) a přímka je délka bez šířky (tj. „nekonečně dlouhá, rovná a nekonečně tenká čára“). Zobrazovací plocha výstupního zařízení počítače (ať již monitoru či tiskárny, koneckonců i sítnice lidského oka) je však fyzické zařízení a „body bez rozměrů“ zobrazovat resp. vnímat neumí. Místo pojmu **bod** je proto používán pojem **pixel** (z anglického *picture element*) jako „nejmenší zobrazitelný útvar“. „Přímka“ na výstupním zařízení nemůže být ani nekonečná, ani rovná, ani nekonečně tenká. Informace, které tato zařízení poskytují, i informace, které jsou ukládány do počítače v podobě souborů, jsou konečné, přesněji řečeno jsou konečnou posloupností základních jednotek informace – **bitů**.

**Počítačová grafika** se zabývá počítačovým zpracováním **grafických informací**, přičemž grafickou informací rozumíme reprezentaci lidského zrakového vjemu pomocí výše zmíněné konečné množiny bitů. **Počítačová geometrie** je pak teoretickým základem počítačové grafiky. Tvoří ji systém geometrických poznatků, které jsou využitelné v počítačové grafice, či přímo vznikly na její „objednávku“.

Základním pojmem počítačové geometrie i počítačové grafiky je pojem obraz. **Obrazem** rozumíme reprezentaci reálného zrakového vjemu datovým souborem. Podle způsobu této reprezentace pak hovoříme o datech **vektorových** resp. **rastrových**.

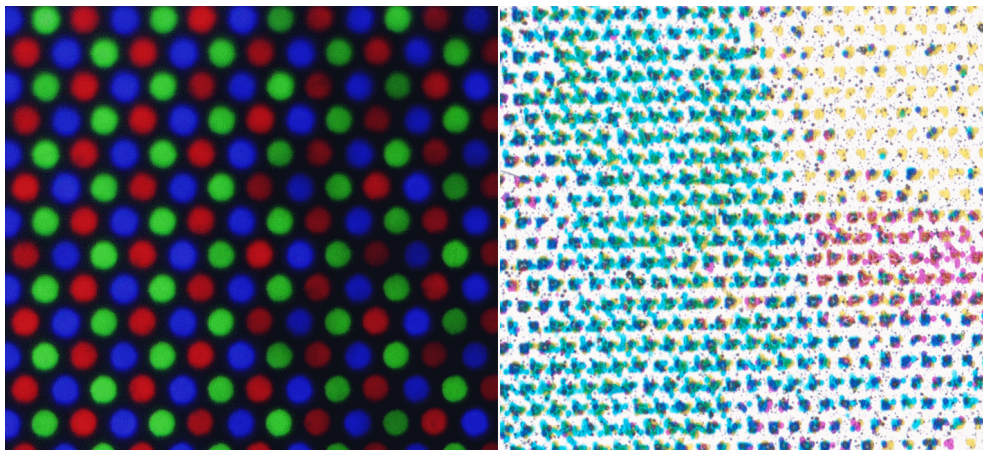
### 1. 1 Vektorová a rastrová data

Grafické informace, data, která jsou uložena v souborech, se zásadně dělí na dvě velké skupiny - na data **vektorová** a data **rastrová**.

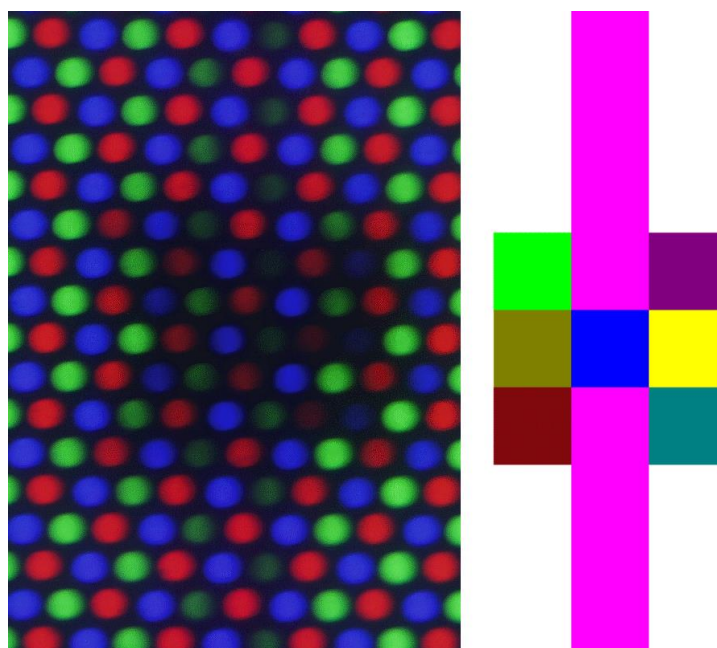
**1. Vektorová data:** vektorový grafický soubor obsahuje informace o objektech složených z křivek a jednoduchých těles, které umožňují jejich geometrickou konstrukci. Je-li takto uložena např. kružnice, soubor neobsahuje informace o všech jednotlivých bodech, které na ní leží. Informuje o tom, že se jedná o kružnici, dále obsahuje souřadnice jejího středu, jednoho bodu, který na ní leží, a ve 3D modelářích je rovněž určena rovina její konstrukce. Připojeny mohou být rovněž informace o barvě objektu a tloušťce čáry, kterou má být sestrojen. Program, pro který jsou tato data určena, musí být schopen tyto informace správně přečíst a musí obsahovat algoritmus, který na základě těchto informací kružnici sestojí. Vektorová data jsou typická např. pro technické výkresy.

**2. Bitmapová (rastrová) data:** neobsahují „vektorové“ informace o uloženém objektu. Z těchto dat nelze (alespoň ne jednoduše) zjistit, zda se rastrový výstup - **obraz** skládá z obdélníků, kružnic, či jehlanů. Soubor obsahuje informace o velikosti obrazu, o způsobu případné komprese a kódování barev. Samotný obraz je uložen jako matice, jejíž každý prvek znamená jeden bod obrazu. Rastrově jsou ukládány buď informace, které již nebudou dále upravovány systémem, kterým byly vytvořeny (např. žánrový pohled na strojní součást), nebo obrazy, které nebyly pořízeny počítačem (např. fotografie). Na rastrovém principu funguje většina zobrazovacích zařízení (monitory, jehličkové, inkoustové i laserové tiskárny, televize apod.).

**3. Fyzické pixely:** Rastrová data ukládáme data jako souřadnice bodů, které se ovšem, jak již bylo řečeno, nezobrazují jako bezrozměrné objekty. Konkrétní podoba těchto útvarů (fyzických pixelů) závisí na výstupním zařízení. Na obr 1.1.1 si můžeme prohlédnout fyzické pixely monitoru a inkoustové tiskárny. V počítačové geometrii jsou pixely modelovány jako čtverce, popř. obdélníky se společnými stranami. Takto modelované **fyzické pixely** používají dnes prakticky všechny grafické aplikace – viz obr 1.1.2.



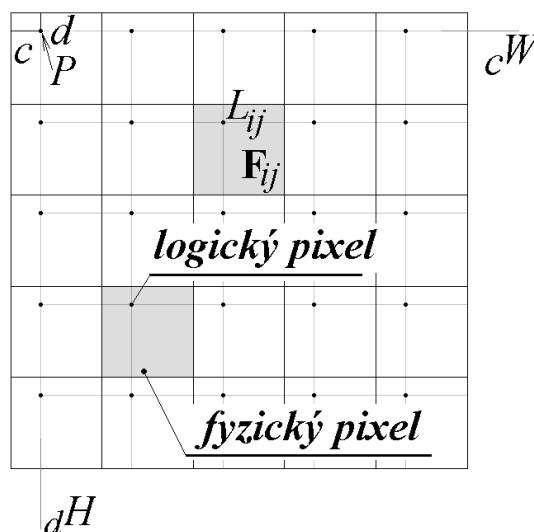
**Obr. 1.1.1:** Fyzické pixely přímo ovládané hardwarem: vlevo monitor, vpravo tiskárna



**Obr. 1.1.2:** Fyzické pixely a jejich matematický model

**4. Logické pixely:** V grafických aplikacích však velmi často potřebujeme pixely logické, tj. potřebujeme fyzický pixel reprezentovat konkrétním bodem - logickým pixelem. Lze to udělat např. uspořádanou dvojicí  $[c; d] \in \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$ , která udává pozici reprezentanta fyzického pixelu o souřadnicích  $[0; 0]$  vůči jeho levému hornímu vrcholu. Tím je definováno vzájemně jednoznačné zobrazení mezi fyzickými a logickými pixely – tzv. mapování. Nejčastěji jsou používána tzv. vrcholová mapování, kde  $[c; d] = [0; 0]$  (mapování na levý

horní roh), popř.  $[c; d] = [0; 0]$  (mapování na levý spodní roh) a středové mapování, kde  $[c; d] = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  – viz obr. 1.1.3.

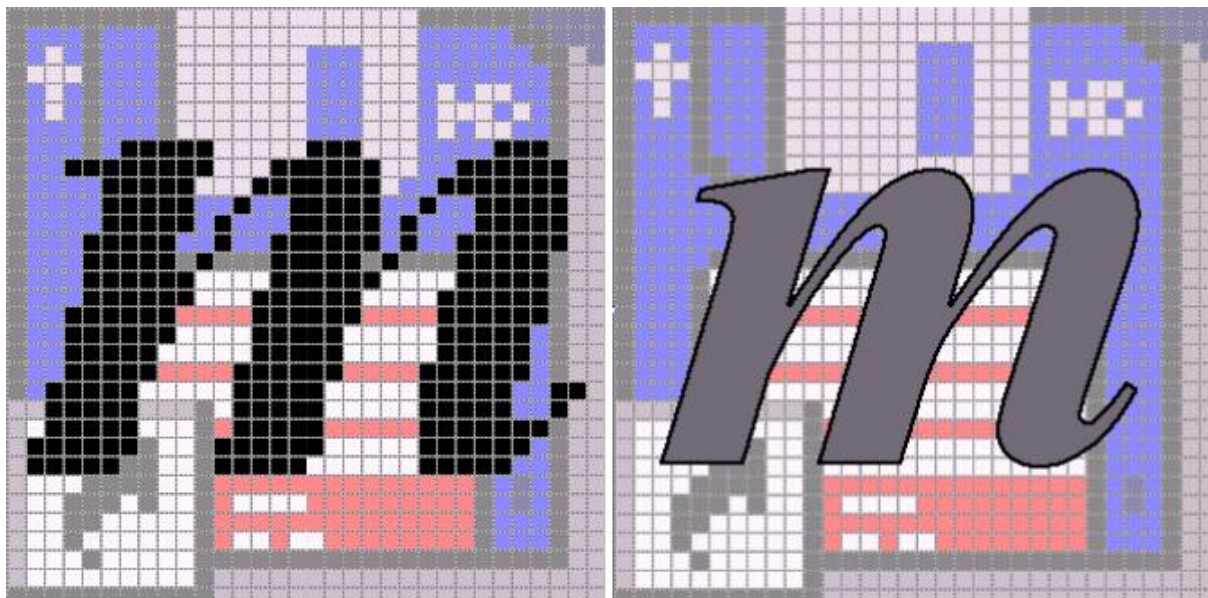


**Obr. 1.1.3:** Logické pixely a jejich mapování

**5. Rozlišení:** Důležitými vlastnostmi rastrového obrazu je **velikost pixelu resp. velikost obrazu**. Velikost jsme většinou zvyklí udávat v délkových jednotkách (např. v centimetrech). Nedocení významu velikosti fyzických pixelů může vést k zásadním omylům, a to i u profesionálních grafiků. Rastrová data jsou interpretována jako matice, jejichž každý prvek znamená jeden pixel obrazu. O kvalitě výsledného výstupu tak mimo jiné rozhoduje velikost pixelů nebo častěji udávané rozlišení - **DPI - Dots Per Inch** (počet bodů na palec).

Rozlišení 800×600 může poskytovat vysoce kvalitní obraz na čtrnáctipalcovém displeji a díky omezené rozlišovací schopnosti lidského oka zde již nemá smysl použít rozlišení větší. Totéž rozlišení však bude nedostatečné na jednadvacetipalcovém monitoru. Obraz s rozlišením 2000×3000 bude kvalitně vytištěn na listu A4, na listu A3 bude kvalita téhož obrazu podstatně horší.

Vektorová a rastrová data se dnes velmi často ukládají do jednoho souboru pomocí tzv. vrstev. Vektorová data obsahují informace o objektech složených z křivek, ploch či jednoduchých těles, které umožňují jejich geometrickou konstrukci. „Fyzická velikost“ takto reprodukováného objektu (tj. velikost udávaná v délkových jednotkách) může být optimalizována dle konkrétního výstupního zařízení. Tuto situaci ilustruje obr. 1.1.4. Je-li do rastrových dat s nízkým rozlišením (např. do obrázku) dodáno písmo a vše uloženo jako rastr, pak písmo nemůže mít větší rozlišení, než původní obrázek. Je-li však obrázek uložen jako rastr a písmo ve vektorové podobě, může být text dle možností výstupního zařízení vytištěn podstatně kvalitněji, než obrázek, do kterého je vložen. Odtud pramení názor, že pro tiskařské účely jsou vektorová data vhodnější. Většinou slýcháme, že pro tiskařské účely je třeba text dodávat vždy vektorově, neboť rastrová písmena jsou „zubatá“, „chlupatá“ apod. Tento názor zastává řada tiskařů, počítačových grafiků a průmyslových designérů. Tento názor by však byl správný pouze v případě, že lidské oko má nekonečnou rozlišovací schopnost. Nekonečné by muselo být rovněž rozlišení tiskárny a osvitového zařízení a čtyři fólie s barevnými složkami by se musely být položeny s přesností nejméně na průměr atomového jádra. Žádná z těchto podmínek však ani zdaleka nemůže být splněna.



**Obr. 1.1.4:** Rastrové a vektorové písmo v obraze s nízkým rozlišením

Na obr. 1.1.5 můžeme porovnat výsledky reálného tiskařského procesu. Jedno písmeno je rastrové, bylo uloženo spolu s obrazem s rozlišením 600 DPI. Druhé je do obrázku se stejným rozlišením dodáno vektorově. Při této kvalitě vstupních dat nejsme schopni zaznamenat rozdíl v písmu, (natož „zubatost“ či „chlupatost“) ani na mikrofotografii pořízené s rozlišením 3600 DPI.



**Obr. 1.1.5:** Rastrové a vektorové písmo v obraze s rozlišením 600 DPI (zvětšenina)

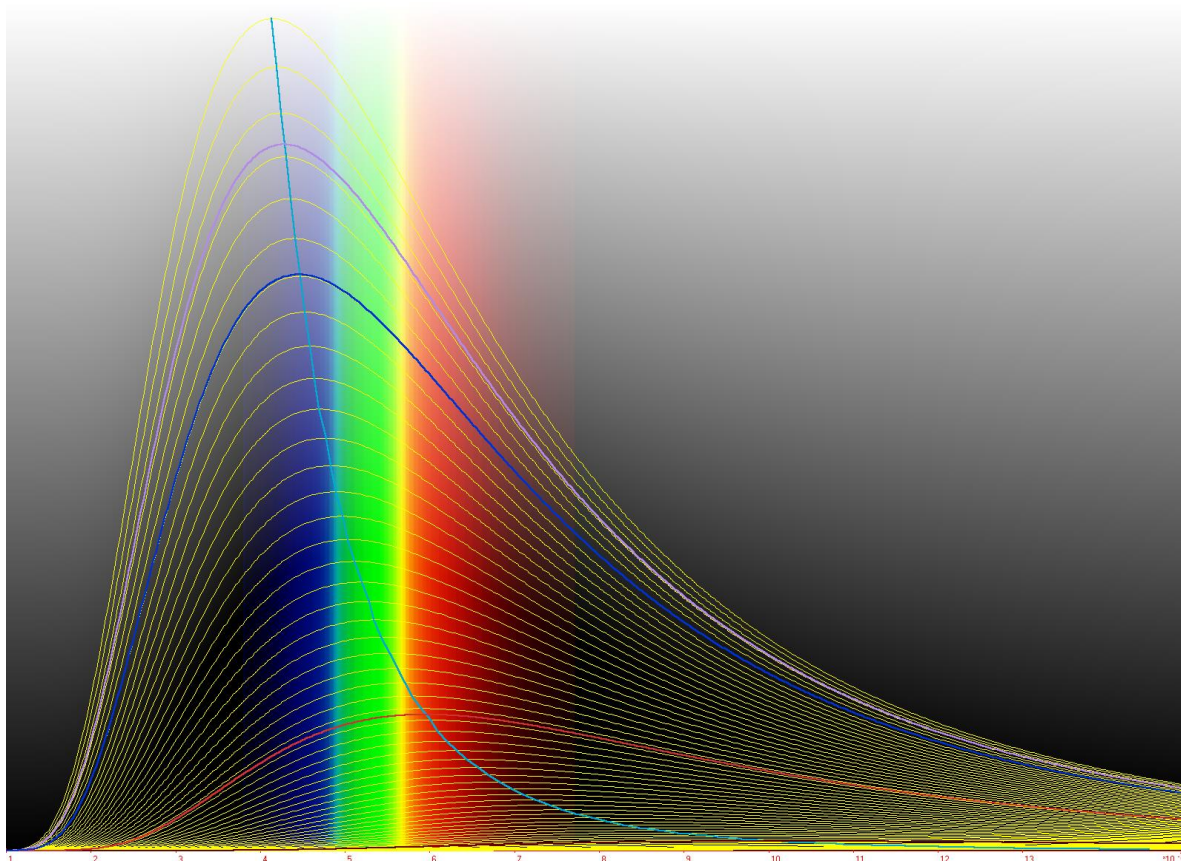
## 1. 2 Barevné systémy

Dalším podstatným rozdílem mezi geometrickou a grafickou informací je barva. Klasické geometrické konstrukce definují vzájemnou polohu event. velikost objektů, které mají být sestrojeny, nikdy však jejich barvu. Barva je ale důležitou zřakovou informací a problematika její reprezentace tvoří nedílnou součást počítačové geometrie a grafiky.

Lidské oko je omezeno ve své činnosti nejen co do velikosti vnímaných objektů, ale také co do počtu barev. Vnímá elektromagnetické vlnění o vlnových délkách 400 – 720 nm. Zdrojem



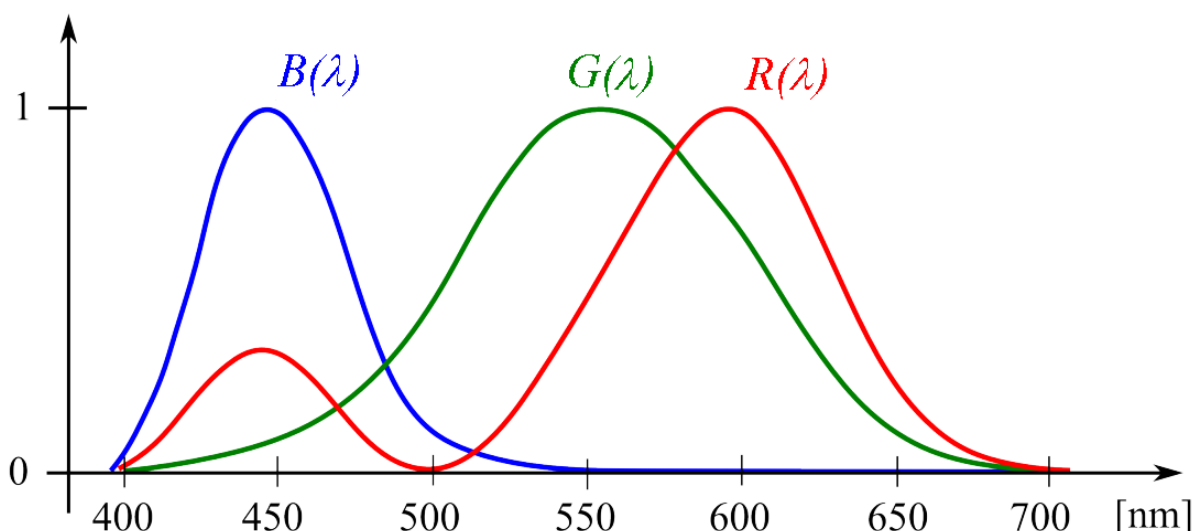
běžného denního světla je Slunce, které můžeme považovat za absolutně černé těleso. Intenzita záření takového tělesa závisí na jeho teplotě (vyšší teplota znamená vyšší intenzitu a naopak), závislost intenzity záření konkrétního tělesa na jednotlivých vlnových délkách -  $I_S(\lambda)$ , charakteristiku záření - určuje Planckův zákon. Křivky, které tento zákon určuje pro tělesa různých teplot, si můžeme prohlédnout na obr. 1.2.1.



**Obr. 1.2.1:** Planckův zákon záření absolutně černého tělesa

Nejintenzivnější záření Slunce má podle tohoto zákona vlnovou délku asi 550 nm, což je (ne náhodou) uprostřed rozsahu viditelného světla. Záření (samo o sobě) nemá barvu. To, co nazýváme barvou, je až výsledkem zpracování podráždění zrakového nervu naším mozkem. Kratší vlnové délky vnímáme jako modrou až fialovou, delší pak jako žlutou a poté červenou. Jednotlivé barvy vznikají tak, že ze slunečního světla je nějakým způsobem část záření prostředím odfiltrována. Barva, kterou vnímáme, je pak dána jednak spektrálním rozdělením tohoto přefiltrovaného záření (SPD – Spectral Power Distribution) a jednak způsobem, jakým lidské oko takové záření vnímá, přesněji řečeno až na tom, jak tento zrakový vjem zpracuje mozek.

**1. Vnímání světla lidským okem:** Na sítnici oka jsou dva druhy receptorů – tyčinky, které reagují na intenzitu světla, a čípky, které nám umožňují rozlišovat vlnové délky vnímaného záření, tedy barvy. Čípky se vzájemně neliší stavbou, ale obsahem tzv. fotopsinů – chemických látek různě citlivých na různé vlnové délky viditelného světla. Čípek je tak specializován buď na červenou, anebo zelenou resp. modrou barvu. Citlivost čípků na jednotlivé vlnové délky ilustruje obr. 1. 2. 2.



**Obr. 1.2.2:** Normalizovaná citlivost čípků na jednotlivé vlnové délky viditelného světla

Barevný vjem vzniká podrážděním specializovaných buněk lidského oka (čípků) elektromagnetickým vlněním v rozsahu vlnových délek 380 – 720 nm. Podle vlnové délky světelného zdroje rozlišujeme světlo **monochromatické** (obsahuje v ideálním případě jedinou vlnovou délku) a **achromatické** (obsahuje v ideálním případě všechny vlnové délky viditelného světla v poměrech daných Planckovou křivkou záření absolutně černého tělesa o teplotě povrchu Slunce).

Charakteristika záření zaznamenaná lidským okem je pak rovna

$$I(\lambda) = [R(\lambda) + G(\lambda) + B(\lambda)] \cdot I_s(\lambda)$$

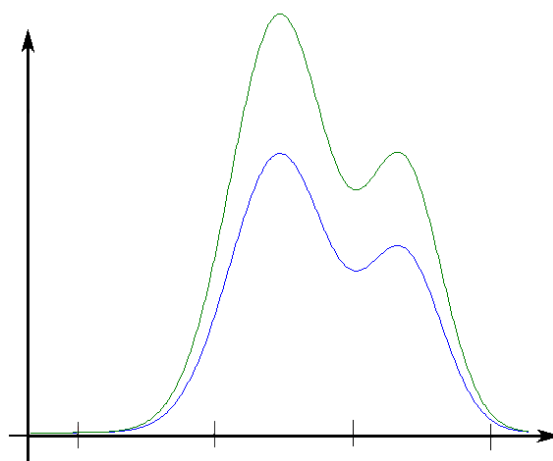
**2. Charakteristiky barvy:** Záření dané předchozím výrazem je přeneseno zrakovým nervem do mozku, kde je zpracováno na zrakový vjem. Pro toto zpracování jsou nejdůležitější tyto parametry.

**a) Jas barvy** je dán hodnotou integrálu

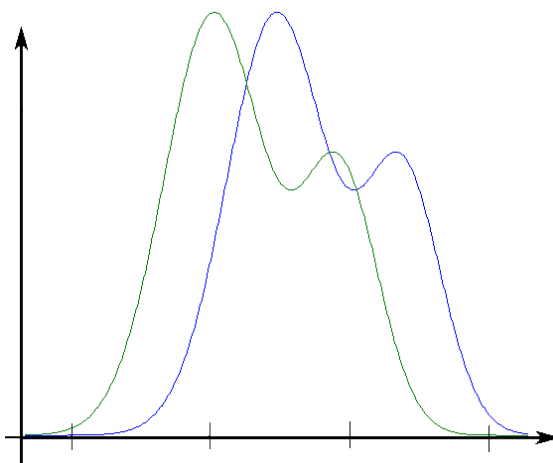
$$B = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

kde  $\langle \lambda_1; \lambda_2 \rangle$  je oblast viditelného světla. Speciálně tedy – jestliže pro charakteristiky dvou barev platí  $I_2(\lambda) = c \cdot I_1(\lambda)$ , pak druhá z nich má  $c$  - krát větší jas. Situace je znázorněna na obr. 1. 2. 3.

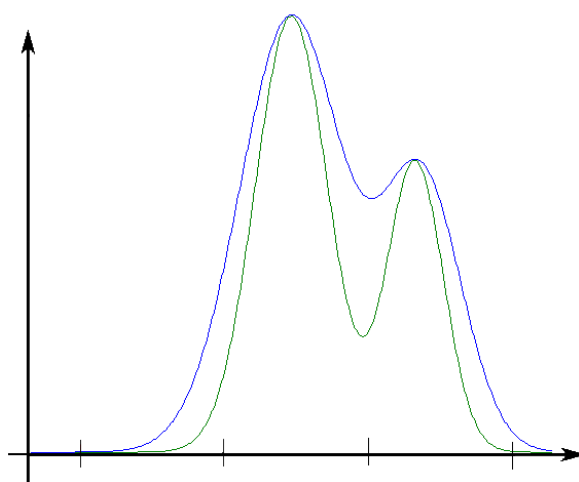
**b) Tón barvy** je dán počtem lokálních maxim charakteristiky a vzájemným poměrem jejich velikostí. Situace je znázorněna na obr 1. 2. 4.



**Obr. 1. 2. 3:** Charakteristiky barev, které mají různou intenzitu při stejné saturaci a stejném barevném tónu



**Obr. 1. 2. 4:** Charakteristiky barev, které mají různý barevný tón při stejné saturaci a při stejném jasů.



**Obr. 1. 2. 5:** Charakteristiky barev, které mají stejný barevný tón a různou saturaci a intenzitu

c) **Saturace barvy** je dána rozptylem charakteristiky kolem lokálních maxim. Uvažujme např. charakteristiku

$$I_1(\lambda) = 2 \exp\left(\frac{550 - \lambda}{30}\right)^2 + \exp\left(\frac{650 - \lambda}{20}\right)^2$$

kteřá má dvě lokální maxima pro  $\lambda_1 = 550$ ;  $\lambda_2 = 650$  a charakteristiku

$$I_2(\lambda) = 2 \exp\left(c \cdot \frac{550 - \lambda}{30}\right)^2 + \exp\left(c \cdot \frac{650 - \lambda}{20}\right)^2$$

kteřá má lokální maxima ve stejných bodech. Obě funkce mají v těchto maximech stejné hodnoty (viz obr. 1. 2. 5), ve všech ostatních bodech je  $c > 1 \Rightarrow I_1(\lambda) > I_2(\lambda)$ . V tom případě mají obě barvy stejný tón, barva daná charakteristikou  $I_2(\lambda)$  má větší saturaci a menší jas.

Má-li charakteristika barvy jediné maximum a extrémně vysokou saturaci (tj. rozptýl je téměř nulový) dostáváme speciální barevné tóny – tyto barevné tóny vždy najdeme ve spektru, jedná se o tzv. spektrální barvy.

**3. Barevné modely:** Jedním z úkolů výstupních zařízení počítačů je modelovat barvy tak, aby co nejpřesněji reprodukovaly barvy skutečně vnímané.

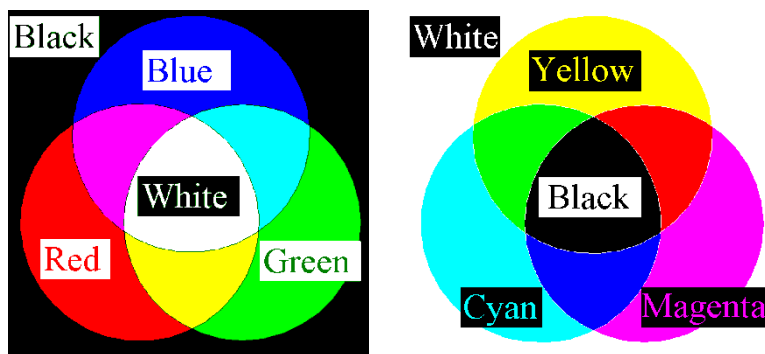
Každý pixel v bitmapovém souboru je reprezentován určitým počtem bitů. Tím je určen počet barev, které může daný pixel nabýt. Je-li  $n$  počet bitů na pixel, je možno zobrazit  $2^n$  barev. Z historie známe dvouúrovňová (jednobitová) zařízení, která dovozovala zobrazovat dvě úrovně (monochromatické monitory, jehličkové tiskárny). Lidské oko má konečný počet barevných receptorů, které obsáhnou rozsah světelných frekvencí 380 – 770 nm. Tvrdí se, že lidské oko dovede rozeznat až deset milionů barev (přesný počet se v individuálních případech samozřejmě liší). Zařízení, které je schopno zobrazit  $2^{24} = 16\,777\,216$  barev, považujeme proto za **true color** (pravé barvy). True color zařízení tedy potřebuje  $24 = 3 \cdot 8$  bitů na pixel.

Velikost fyzického pixelu na obrazovce je závislá na velikosti monitoru a pohybuje se řádově v desetinách milimetru. Pokud je vedle sebe umístěno několik takových pixelů o různých barvách, pak za normálních podmínek není oko schopno rozlišit jeden pixel od druhého. Zraková informace je v mozku integrována a my vnímáme třeba i barvu, která na výstupním zařízení vůbec není zobrazena. Důležitou věcí, která hraje roli při vnímání barev, je způsob, jakým je barva vytvořena.

**Aditivní model:** Barva každého pixelu je složena z vlnových délek světla vyzařovaného ze tří zdrojů světla. Maxima záření jednotlivých zdrojů jsou dána maximy křivek na obr. 1.3.2 a oko je tedy vnímá jako červenou zelenou resp. modrou barvu. Pro tento model se tedy vžila zkratka **RGB (Red, Green, Blue)**. Jsou-li tyto zdroje dostatečně malé, oko je není schopno rozlišit a splývají mu v jeden bod a jednu barvu, která je dána intenzitou jednotlivých zdrojů. Tento model využívají všechny aktivní zobrazovací systémy (např. monitory, dataprojektory, barevné displeje mobilních telefonů apod.). Svítí-li na displeji např. všechny červené a zelené čipy v maximální intenzitě a nesvítí žádný modrý, vnímáme celý displej jako žlutý. Základní míchání barev v systému RGB vidíme na obr 1.4.1 vlevo.

**Subtraktivní model:** Barva každého pixelu je složena z vlnových délek zdrojů bílého světla, ve kterém byly nějakým způsobem potlačeny (odfiltrovány) vlnové délky odpovídající červené, zelené resp. modré barvě. Takto upravené světlo je pak vnímáno v tzv. doplňkových barvách - jako modrozelené (odfiltrována červená), purpurové (odfiltrována zelená) resp. žluté (odfiltrována modrá). Pro tento model se vžila zkratka **CMY (Cyan, Magenta, Yellow)**. Využívají ho barevné tiskárny, které tisknou na bílý papír. Ten je bílý proto, že odráží všechny vlnové délky viditelného spektra. Nanesení barevných inkoustů či tonerů působí jako filtr, který v definované intenzitě potlačí červenou, zelenou resp. modrou a máme tedy opět možnost barvy míchat. Základní míchání barev v systému CMY vidíme na obr. 1.4.1 vpravo.





**Obr. 1.4.1:** Základní míchání barev v systémech RGB (vlevo) a CMY (vpravo)

I když je míchání barev ze složek CMY teoreticky možné, v praxi k těmto základním barvám přidáváme ještě černou, a to především ze dvou důvodů. Složením všech tří barev CMY by sice měla teoreticky vzniknout černá, reálně však vzniká barva hnědo šedivá. Druhým důvodem je skutečnost, že míchání černé z barevných složek je značně neekonomické. Proto se ke třem základním barvám přidává ještě černá.

V modelu RGB lze definovat atributy pixelu, o kterých jsme se zmínili v předchozí kapitole, takto:

**Intenzita barevných složek:** Hodnoty barevných složek  $R; G; B$  jsou hodnoty z intervalu  $\langle 0; D \rangle$ , číslo  $D$  nazýváme **dynamickým rozsahem obrazu**. V modelu RGB tak máme k dispozici celkem  $(D + 1)^3$  různých hodnot. Zdravé lidské oko je schopno rozlišit asi šest až osm milionů různých hodnot. V praxi proto většinou postačuje dynamický rozsah 255 – v tom případě obsazuje každá barevná složka 8 bitů – hovoříme o osmibitovém obrazu. K dispozici je  $(D + 1)^3 = 256^3 = 16\,777\,216$  barev. Pro vědecké účely je však často potřeba vyšší hodnoty – obrazy dvanáctibitové ( $D = 4\,096$ ) a šestnáctibitové ( $D = 65\,535$ ).

**Jas:** Je dán celkovou intenzitou všech tří barevných složek daného pixelu. Rozeznáváme dva typy jasů – jas **objektivní** a jas **subjektivní**. Objektivní jas je určen intenzitou záření pixelu, kterou by naměřil fotometr, v modelu  $RGB$  tedy zřejmě

$$J_o = \frac{R + G + B}{3}$$

Subjektivní jas je určen intenzitou záření pixelu tak, jak ho vnímá lidské oko, které je na barevné složky různě citlivé. Pro subjektivní jas platí:

$$J_s = c_1 R + c_2 G + c_3 B; \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

Hodnota konstant  $c_1; c_2; c_3$  se určuje experimentálně, většinou se uvádí

$$c_1 = 0.3; \quad c_2 = 0.59; \quad c_3 = 0.11$$

Různé prameny udávají pro tyto konstanty mírně rozdílné hodnoty, pro běžnou potřebu jsou však tyto rozdíly zanedbatelné.

Zatímco objektivní jas červené, zelené i modré je stejný ( $1/3$ ), je subjektivní jas červené (v maximální intenzitě) roven  $J_R = 0.3D$ ; zelené  $J_G = 0.59 \cdot D$  a modré  $J_B = 0.11 \cdot D$ . Je to dáno tím, že právě zelená je zhruba uprostřed spektra viditelného záření Slunce. Je to vlastně obráceně – Slunce zasobuje Zemi po miliardy let zářením, které má podle Planckova zákona maximum ve žlutozelené oblasti. Proto se (nejen) lidský zrak vyvinul tak, že je nejcitlivější na zelenou barvu. Subjektivní jas doplňkových barev je pak

$$\text{modrozelená: } J_C = J_G + J_B = 0.59D + 0.11D = 0.70D$$

$$\text{purpurová } J_M = J_R + J_B = 0.30D + 0.11D = 0.41D$$

$$\text{žlutá } J_Y = J_R + J_G = 0.30D + 0.59D = 0.89D$$

Největší subjektivní jas má tedy žlutá, lidské oko ji tedy vidí jako nejjasnější, což se projevuje zvláště při nedostatečném osvětlení. Objektivní jas všech doplňkových barev je přitom stejný -  $J_0 = \frac{2}{3}$ .

**4. Barevné prostory:** Barevným prostorem rozumíme přesně definovanou množinu barev, kterou je dané zařízení schopno snímat, zobrazit nebo reprodukovat. Vycházejí z barevného modelu, na rozdíl od něj však mají přesným způsobem definované barvy. Rozsah barev, které jsou v daném prostoru definovány, se nazývá **gamut**.

**Barevné prostory založené na modelu RGB:** Jsou prostory, ve kterých se barvy míchají ze složek RGB. Liší se definicí těchto složek a definicí bílé. Některé z nich jsou závislé na zařízení, některé jsou nezávislé. Jedním z prvních matematicky definovaných barevných prostorů je **CIE XYZ**. Byl definován mezinárodním úřadem **Commision Internationale de l'Eclairage** v r. 1931. Koncept vnímání barev rozděluje na dvě části tak, jak bylo popsáno v úvodu kpt. 1. 3. Parametr Y vyjadřuje jas, vnímaný čípkami, a vlastní barva, rozpoznávaná tyčinkami, je specifikována dvěma odvozenými parametry x,y. Tento barevný prostor je znázorněn chromatickým diagramem na obr. 1.5.1. Nejrozšířenějším barevným prostorem v současnosti je zřejmě **standard RGB (sRGB)**. Jeho základem je osmibitový RGB. Každá barevná složka obsazuje jeden byte a má tedy k dispozici 256 hodnot. Prostor se znázorňuje jako krychle – viz obr. 1.5.2. Gamut tohoto prostoru je na obr. 1.5.3 vyznačen žlutým trojúhelníkem. Barvy mimo tento trojúhelník není schopen prostor sRGB reprodukovat. Dalším prostorem je **Adobe RGB**. Má širší gamut než sRGB – dokáže zachytit některé barvy, které jsou mimo sRGB, ale některé monitory a tiskárny je dokáží zobrazit. Gamut AdobeRGB je na obr 1.5.3 vyznačen purpurovou barvou. Existuje několik dalších standardů na bázi RGB, např. **Apple RGB, Pro Photo RGB** apod.

**Systémy HSV; HSL** – jsou ekvivalentní s RGB. Transformují RGB krychli na pravidelný šestiboký jehlan, dvojkužel či válec. Jsou to barevné systémy, jehož složky se snaží respektovat běžné vnímání barvy. Těmito složkami jsou:

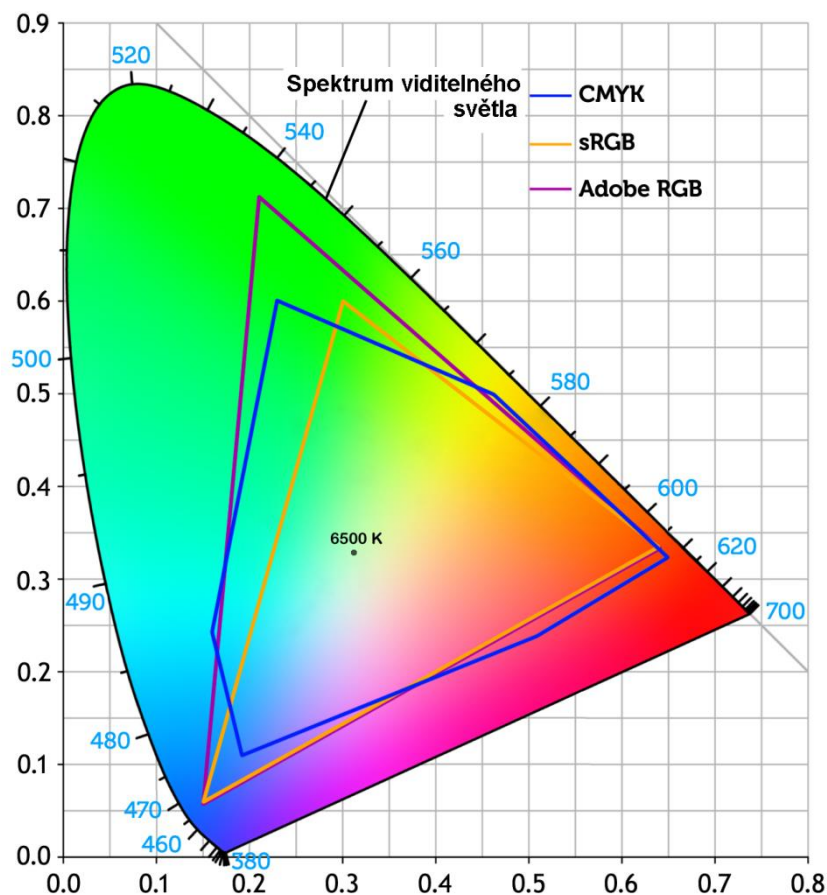
**a) Hue (barevný tón)**

**b) Saturation (saturace, sytost barvy)**

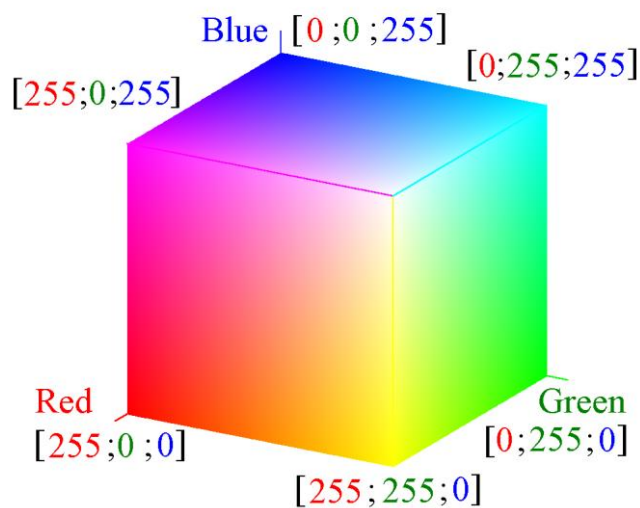
**c) Value (jas, světelnost)**

Tyto systémy respektují vymezení barvy tak, jak bylo uvedeno v předchozí kapitole. Jas klesá se vzdáleností od podstavy kuželu či jehlanu, ve vrcholu nulový. Saturace a barevný tón tvoří jakousi obdobu polární soustavy souřadné, kde ovšem barvy se stejnou saturací neleží na kružnici, ale na obvodu pravidelného šestiúhelníka. Tuto nepříjemnost odstraňuje model **HSL** (Hue-Saturation-Lightness). Barevný prostor má tvar dvojkuželu, kde saturace a barevný tón tvoří (tentokrát klasickou) polární soustavu souřadnou a barvy v rovině podstavy mají poloviční světelnost. Ta se vzdáleností od podstavy roste směrem k „bílému“ vrcholu a klesá směrem k „černému“ vrcholu. V grafických systémech využívajících systémy HSV resp. HSL nenajdeme většinou jehlan či dvojkužel, ale některou z jejich možných transformací.

**Barevný tón** je v těchto modelech geometricky znázorňován jako úhel. Přepočty RGB na HSL je následující. Odstíny šedé, tj. případy kdy  $R = G = B$  se přepočítávají na  $H = S = 0$  a  $L = R = G = B$ . V ostatní případech se postupuje následovně: V HSL se položí



**Obr. 1.5.1:** Barevný prostor CIE – obvod tvoří spektrální barvy, uvnitř vyznačeny gamuty některých dalších používaných prostorů.



**Obr. 1.5.2:** Barevný prostor sRGB – RGB krychle

$$L = \max\{R; G; B\}.$$

Konečně výpočet úhlu pro barvu ( $H$ ):

$$L = R \Rightarrow H = \frac{G - B}{L - \min\{R; G; B\}}; \quad H < 0 \Rightarrow H := 360 + H$$

$$L = G \Rightarrow H = 120 \cdot \frac{R - B}{L - \min\{R; G; B\}};$$

$$L = B \Rightarrow H = 120 \cdot \frac{R - G}{L - \min\{R; G; B\}};$$

**Saturace barvy:** V modelu RGB je saturace dána vztahem

$$S = \max\{R; G; B\} - \min\{R; G; B\}$$

popř. v normalizované podobě

$$S_n = \frac{\max\{R; G; B\} - \min\{R; G; B\}}{\max\{R; G; B\}}; \quad \max\{R; G; B\} = 0 \Rightarrow S_n = 0$$

**Prostor YUV:** Prostor sRGB poskytuje velmi širokou paletu barev, je však poměrně nevýhodný pro bezztrátovou kompresi (sousední pixely mají velmi často velmi blízké hodnoty). To je velká nevýhoda např. při přenosu televizního signálu. Model YUV tuto nevýhodu do značné míry potlačuje. Odděluje jasovou složku Y - jas a dvě barevné složky U a V (písmeno Y tedy nezaměňovat s Y v modelu CMY, kde značí žlutou). Vektor  $\mathbf{y} = (y; u; v)$  obdržíme transformací vektoru  $\mathbf{r} = (r; g; b)$  následovně

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}^T: \begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,144 \\ -0,147 & -0,289 & 0,436 \\ 0,615 & -0,515 & -0,100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

Matice převodu je regulární, existuje k ní tedy matice inverzní, tudíž rovněž jednoznačný převod zpět z YUV do RGB.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{y}^T: \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,144 \\ -0,147 & -0,289 & 0,436 \\ 0,615 & -0,515 & -0,100 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,000 & 0,000 & 1,137 \\ 1,000 & -0,397 & -0,580 \\ 1,000 & 2,034 & 0,000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Barevné prostory založené na modelu CMYK:** Jsou prostory, ve kterých se barvy míchají ze složek Cyan, Magenta, Yellow a Black. Na rozdíl od některých prostorů založených na RGB jsou tyto prostory vždy závislé na zařízení. Proto je těchto prostorů velmi mnoho. Převod barev z prostorů RGB do CMYK může být velký problém, především pokud se týká barev, které CMYK nedokáže zobrazit. Gamut prostorů založených na CMYK je přibližně vyznačen na obr. 13 modrou barvou.

## 2 Euklidovský prostor

Základními geometrickými útvary jsou bod, přímka a rovina, základním geometrickým vztahem je vztah incidence, který se většinou opisuje spojeními „bod leží na přímce“, „přímka prochází bodem“, „bod leží v rovině“, „přímka leží v rovině“. Bod si přitom představujeme jako „bezrozměrný objekt“, přímku jako „nekonečně tenkou rovnou čáru“, atd. Pokud bychom ovšem chtěli tyto popisy považovat za matematické definice, museli bychom předtím definovat bezrozměrný objekt, tenkou rovnou čáru atd. Je zřejmé, že tímto způsobem by nebylo možné nikdy nikde začít. Moderní geometrie vyřešila tuto potíž velmi elegantně. Neříká totiž, co je bod, co je přímka, ani co to znamená, když přímka prochází bodem. Geometrie pouze stanoví základní tvrzení o těchto pojmech a vztazích, která přijme bez důkazu (tzv. axiomy). Například:

1. Dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
2. Na každé přímce leží alespoň dva body.... atd.

Pod těmito tvrzeními si nemusíme představit vůbec nic. A pokud si představovat chceme, jsou tyto představy čistě naší subjektivní věcí, pokud stále korespondují s postupně budovanou teorií. Geometrii, která by měla jen tyto dva axiomy, si můžeme představit třeba jako fotbalový zápas. Bod je fotbalové mužstvo, přímka je hřiště. Vztah "bod  $A$  leží na přímce  $a$ " znamená, že mužstvo  $A$  hraje na hřišti  $a$ . Mužstva, která proti sobě hrají, nemohou běhat po tribuně ani hrát na dvou hřištích. Je tak splněn první axiom. Má-li jít o fotbalový zápas, nemůže po hřišti běhat jen jedno mužstvo, takže je splněn i druhý axiom.

Geometrie dnes opravdu nikoho nenutí představovat si bod jako co nejmenší tečku a přímku jako tenkou rovnou čáru. Přesto si drtivá většina lidstva (včetně matematiků) přímku tak představuje. A chce-li člověk znázornit bod, který na ní leží, nesleduje fotbalový zápas, ale trefuje se ořezanou tužkou do tenké rovné čáry. Proč? Jednoduše proto, že tato představa jako jedna z mála odolá náporu dalších axiomů, které jsou potřeba k vybudování „rozumné“ geometrie. Už další axiom (existují alespoň tři body, které neleží na jedné přímce) totiž milovníka fotbalu přinutí vymyslet nějaký fotbalový turnaj, který se hraje alespoň na dvou hřištích. A v okamžiku, kdy budeme potřebovat třeba střed úsečky, „fotbalový geometr“ asi skončí. Vždyť které ze dvou mužstev běžících po hřištích tím středem mělo být? Jakkoli si totiž matematická teorie sama o sobě musí vystačit s pojmy a vztahy, kterým ona sama nedává konkrétní obsah, matematik, který ji buduje, si tohoto konkrétního obsahu a smyslu naopak musí být vědom vždy, a to velmi přesně. Sebekrásnější matematická teorie by totiž byla k ničemu, kdyby podle ní nikde nic reálně nefungovalo.

Jak již bylo řečeno, geometrie stojí na několika axiomech – tvrzeních, která se nedokazují. Soustava axiomů musí splňovat poměrně přísné požadavky, které zde nebudeme rozebírat. K vybudování jedné a téže geometrie není bezpodmínečně nutná zcela identická soustava axiomů. Axiomy by však měly být v každém případě jednoduché a zřejmé. Jsou to tvrzení, která se nedokazují, proto musí být akceptovatelná pro každého.

Základy rovinné geometrie (planimetrie), kterou jste studovali na střední škole, tvoří soustava axiomů německého matematika Davida Hilberta (1862 - 1943). Ten rozdělil axiomy do několika skupin:

1. Incidence
2. Uspořádání
3. Shodnost
4. Spojitost
5. Rovnoběžnost

## 2. 1 Incidence

Běžně používané různé popisy téže geometrické situace – bod leží na přímce, přímka prochází bodem, se někdy nahrazují jednotným pojmem incidence: se dvěma různými body inciduje právě jedna přímka, s každou přímkou incidují alespoň dva různé body... Odtud název první skupiny axiomů.

**1. DEFINICE – incidenční rovina:** Incidenční rovinou rozumíme uspořádanou trojici neprázdných, po dvou disjunktních množin  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I} \rangle$ , kde prvky množin  $\mathcal{B}; \mathcal{P}$  nazýváme body (značíme velkými písmeny) resp. přímky (značíme malými písmeny) a množina  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{P}$ ; je binární relace incidence bodů a přímek, která má následující vlastnosti:

**I1:**  $\forall A; B \in \mathcal{B} : [(A \neq B) \Rightarrow \exists ! p \in \mathcal{P} : (AIp \wedge BIp)]$

(s každými dvěma různými body inciduje právě jedna přímka, běžně říkáme dvěma různými body prochází právě jedna přímka)

zapisujeme  $p \equiv AB$

**I2:**  $\forall p \in \mathcal{P} : [\exists A; B \in \mathcal{B} : (A \neq B) \wedge AIp \wedge BIp]$

(s každou přímkou incidují alespoň dva různé body, na každé přímce leží alespoň dva různé body)

**I3:**  $(\exists p A; B; C \in \mathcal{B}) (\forall p \in \mathcal{P}) : \neg (AIp \wedge BIp \wedge CIp)$

(existují alespoň tři body, které neincidují s jednou přímkou – existují alespoň tři body, které neleží na jedné přímce.)

Geometrie, která zavádí abstraktní pojmy splňující jisté axiomy bez jakýchkoli představ o tom, co tyto pojmy a axiomy znamenají, je matematickou abstrakcí. Jestliže tyto pojmy a axiomy „objevíme“ v konkrétních situacích, říkáme, že jsme našli model (nebo realizaci) této geometrie.

**2. MODEL INCIDENČNÍ GEOMETRIE:** Nejjednodušší představa (model) geometrie, v níž platí jen axiomy incidence (tzv. incidenční geometrie), má tři body a tři přímky. Tuto geometrii si můžeme představit jako tři provázky svázané třemi uzly: Dva body (uzly) leží na téže přímce (provázku), tvoří-li jeho konce. Je zajímavé, že zde funguje i představa duální: Body si lze představit jako provázky a přímky jako uzly, kterými jsou svázány.

## 2. 2 Uspořádání

Pokud by geometrie pracovala jen s axiomy incidence, byla by sice možná zajímavá, ale na druhou stranu velice chudá. Ze školních lavic jsme zvyklí, že „kdekoli“ na přímce či úsečce můžeme zvolit bod, tj. přímku i úsečku jsme automaticky chápali jako „nekonečné množiny bodů“. Axiomy incidence však nic takového neříkají. Přímka ani rovina nemusí být množinou bodů. Proto zápis  $A \in p$  ve smyslu „bod  $A$  leží na přímce  $p$ “, na který jsme zvyklí ze školy, je v tuto chvíli poněkud předčasný. Skutečnost, že bod  $A$  leží na přímce  $p$ , bychom v tuto chvíli měli chápat jako incidenci, tj. zapisovat  $AIp$  (bod  $A$  inciduje s  $p$ ). V tuto chvíli se však přece jen přidržíme obvyklejšího  $A \in p$ . Podobně budeme značit vztah bod leží v rovině ( $A \in \alpha$ ), event. přímka leží v rovině ( $p \subset \alpha$ ).

Axiomy incidence zaručují pouze to, že na každé přímce existují body pouze dva. Více bodů na přímce zaručují až axiomy uspořádání. Ty zároveň umožňují definovat další geometrické útvary – polopřímku, úsečku, polorovinu atd.

**1. DEFINICE – uspořádaná incidenční rovina:** Incidenční rovina  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I} \rangle$  je uspořádaná právě tehdy, když na množině všech jeho bodů je definována ternární relace  $\mu \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$  (oddělování), kde místo  $[A; B; C] \in \mu$  píšeme  $C\mu AB$  a čteme „bod  $C$  odděluje body  $A; B$ “ nebo „bod  $C$  leží mezi body  $A; B$ “, takovou, že platí:

$$\mathbf{U1:} (C\mu AB) \Rightarrow [(A \neq B \neq C \neq A) \wedge (\exists p \in \mathcal{P}: A; B; C \in p) \wedge (C\mu BA)]$$

(jestliže  $C$  leží mezi  $A; B$ , pak  $A; B; C$  jsou tři navzájem různé body téže přímky a platí také  $C$  leží mezi  $B; A$ ).

$$\mathbf{U2:} (\forall A; B \in \mathcal{B}) [A \neq B \Rightarrow \exists C \in \mathcal{B}: (C\mu BA)]$$

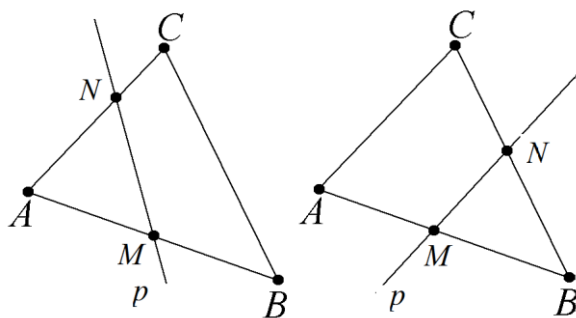
Ke každým dvěma různým bodům  $A; B$  existuje alespoň jeden bod  $C$ , který leží mezi nimi.

$$\mathbf{U3:} (\forall A; B; C \in \mathcal{B}) (A \neq B \neq C \neq A) \wedge (\exists p \in \mathcal{P}: A; B; C \in p) \Rightarrow \\ (A\mu BC \vee B\mu AC \vee C\mu AB)$$

Pro každé tři různé body téže přímky platí, že právě jeden z nich leží mezi zbylými dvěma.

**U4 (Paschův):** Jsou-li  $A; B; C$  nekolineární body (tj. neleží na jedné přímce) a  $p$  je přímka, na které leží bod  $M\mu AB$ , pak existuje bod  $N$ , který leží na  $p$  a platí buď  $N = C$ , anebo  $N\mu AC$ , anebo  $N\mu BC$

(tedy: přímka, která neprotíná žádný vrchol trojúhelníka a protíná jeho stranu, protíná právě jednu další stranu)



Obr. 2.2.1 Paschův axiom

**2. DEFINICE – polohová geometrie:** Uspořádanou incidenční rovinu značíme podrobně  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U} \rangle$ . Jeho teorii nazýváme polohovou geometrií.

Lze ukázat, že relace  $\mu$  indukuje na každé přímce uspořádání

$$C\mu AB \Leftrightarrow (A < C < B) \vee (B < C < A)$$

s běžnými vlastnostmi, které uvádí následující věta:

**3. VĚTA – uspořádání bodů na přímce:** Na množině  $\mathcal{B}$  všech bodů uspořádaného incidenčního prostoru existuje relace  $< \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$  taková, že

$$\mathbf{a)} \forall A \in \mathcal{B}: \neg(A < A) \quad (\text{je antireflexivní})$$

$$\mathbf{b)} \forall A; B \in \mathcal{B}: (A \neq B) \Rightarrow (A < B \vee B < A) \quad (\text{je antisymetrická})$$

$$\mathbf{c)} \forall A; B; C \in p: (A < B) \wedge (B < C) \Rightarrow (A < C)$$

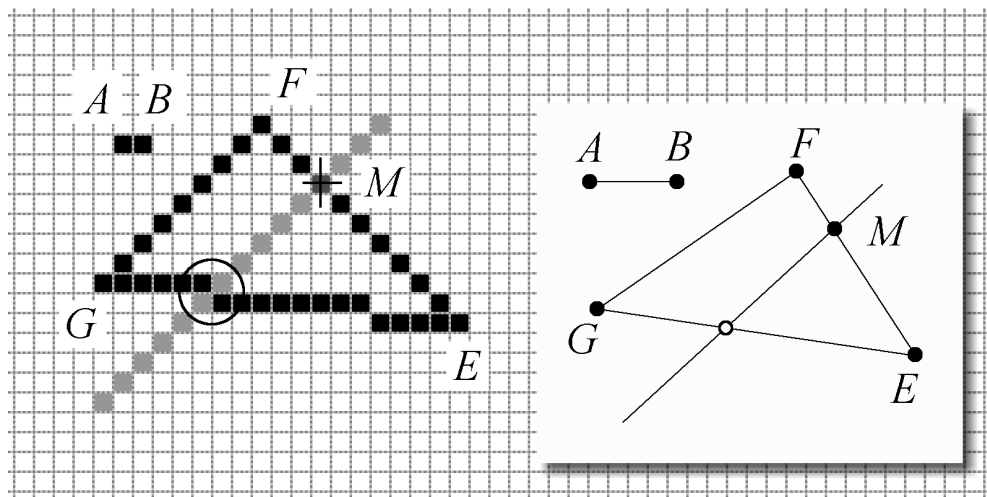
(na množinách kolineárních bodů je tranzitivní)

$$\mathbf{d)} (\forall p \in \mathcal{P}) (\forall P \in \mathcal{B}): (P \in p) \Rightarrow [(\exists A; B \in \mathcal{B}): (A; B \in p) \wedge (A < P < B)]$$

(pro každou přímku  $p$  a každý bod  $P$ , který na ní leží, existuje vždy bod „nalevo“ i „napravo“).

**4. POZNÁMKA:** Uspořádanou incidenční rovinu lze vybudovat nejen tak, že z axiomů  $U1 - U4$  odvodíme tvrzení a) – d) věty 3, ale i rovněž tak, že vlastnosti a) – d) věty 2 považujeme za axiomy. Tvrzení  $U1 - U4$  bychom pak odvodili jako věty. Tvrzení  $U4$  by pak samozřejmě nebyl Paschův axiom, ale Paschova věta.

Na axiomy uspořádání nemohou spoléhat grafické algoritmy, které pracují přímo na výstupním zařízení počítače (tzv. rastrové algoritmy). Jak je vidět na připojených obrázcích zvětšeného monitoru, mezi různými body  $A; B$  již žádný další bod neleží (tj. není splněn  $U2$ ). Přímka  $p$  protíná stranu  $EF$  trojúhelníka  $\triangle EFG$  v bodě  $M$ , ale navzdory Paschovu axiomu je to její jediný společný bod s obvodem trojúhelníka.



**Obr. 2.2.2** Neplatnost axiomů uspořádání na rastrovém výstupním zařízení

Geometrie, která splňuje axiomy incidence a uspořádání, už je poměrně bohatá. Lze již definovat řadu známých pojmů (polopřímka, úsečka, polorovina, úhel, trojúhelník, ...)

**5. MODEL GEOMETRIE  $\langle B; P; I; U \rangle$  (polohové geometrie):** jak již bylo, řečeno, modelem geometrie rozumíme jakoukoli představu, která koresponduje s jejími axiomy. S přibývajícemi axiomy musíme postupně opouštět „exotické“ modely – fotbalová hřiště a provázky s uzly (viz modely incidenční geometrie). K dalšímu geometrickému modelování tak budeme mít podstatě jen dva základní přístupy“

**a)** body a přímky budeme modelovat buď jako čísla a rovnice – tyto modely budeme nazývat **modely analytické**, protože jimi budeme postupně směřovat ke známé analytické geometrii.

Tyto modely budeme označovat  $AM$  (analytický model)

**b)** body budeme modelovat jako tečky a přímky jako tenké čáry, čímž budeme směřovat ke známým konstrukcím např. pomocí pravítka a kružítko. Tyto modely budeme nazývat **modely syntetické**. Tyto modely budeme značit  $SM$  (syntetický model).

Na tomto místě tedy začneme modelem analytickým. Můžeme sestavit model geometrie nad množinou  $\mathbb{Q}$ , označíme ho  $AM(\mathbb{Q})$ , kde body jsou uspořádané dvojice čísel  $[p_1; p_2]$ , přímky jako uspořádané dvojice  $[q_1 + ts_1; q_2 + ts_2]$ ; kde  $p_1; p_2; q_1; q_2; s_1; s_2; t \in \mathbb{Q}$ . Bod  $P$  leží na přímce  $q$  právě tehdy, když existuje  $t \in \mathbb{Q}$  tak, že  $[q_1 + ts_1; q_2 + ts_2] = [p_1; p_2]$ . Tento model již připomíná známou analytickou geometrii. Na rozdíl od ní však naše geometrie prozatím vystačí s racionálními čísly, body jako  $[\sqrt{2}; \pi]$  nezná. Její přímky jsou tak značně „děravé“, tyto „díry“ se však díky vlastnostem racionálních čísel nemohou „potkat“



v případném průsečíku, takže naše „děravá racionální“ geometrie splňuje axiomy uspořádání, včetně axiomy Paschova. Tato geometrie však prozatím nezná např. kružnici, protože k její definici potřebujeme minimálně shodnost.

## 2.3 Shodnost

Shodnost úseček a úhlů umožňuje definovat další důležité útvary. K problému, jak shodnost zavést, lze přistupovat různě. Hilbert zavádí axiomaticky shodnost úseček a shodnost úhlů.

**S1:** Shodnost úseček je ekvivalence.

**S2:** Necht'  $AB$  je úsečka,  $\rightarrow CD$  polopřímka. Pak na  $\rightarrow CD$  leží právě jeden bod  $E$  tak, že  $AE \cong CD$ .

**S3:**  $C \mu AB \wedge C' \mu A'B' \wedge AC \cong A'C' \wedge CB \cong C'B' \Rightarrow AB \cong A'B'$

**S4:** Shodnost úhlů je ekvivalence.

**S5:** Pro každý  $\sphericalangle AVB$  a každou polorovinu  $\rightarrow A'V'M$  existuje jediná polopřímka  $\rightarrow V'B'$  tak, že  $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle A'V'B'$

**S6:** „Věta“ sus o shodnosti trojúhelníků.

Uspořádaný prostor se shodností značíme podrobně  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$ . Jsou-li dva útvary  $U_1; U_2$  shodné, píšeme  $U_1 \cong U_2$ .

Axiomy shodnosti umožňují definovat řadu důležitých útvarů. V rovině  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$  lze definovat např. střed úsečky, pravý úhel (jako úhel, který je shodný se svým úhlem vedlejším), velikost úhlu ve stupních, osu úsečky, rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník apod.

**1. KRUŽNICE:** Jedním z nejdůležitějších útvarů, které lze nyní definovat, je kružnice. Běžně ji definujeme jako množinu bodů, které mají od daného bodu (středu) stejnou vzdálenost. Taková definice však v tuto chvíli není korektní, protože nemáme definován pojem vzdálenosti. Tuto nepříjemnost je možné obejít tak, že řekneme, že kružnice je množina všech koncových bodů navzájem shodných úseček, jejichž druhý koncový bod je společný.

Pojem vzdálenosti nicméně budeme dále potřebovat. Můžeme ji definovat mnoha způsoby. Všechny však musejí vyhovovat známé definici metriky:

**2. DEFINICE – metrika, metrický prostor:** Necht'  $\mathcal{M}$  je neprázdná množina a  $\rho: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazení takové, že pro každé  $x; y; z \in \mathcal{M}$  platí:

$$\text{a) } \rho(x; y) \geq 0; \rho(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{b) } \rho(x; y) = \rho(y; x)$$

$$\text{c) } \rho(x; z) \leq \rho(x; y) + \rho(y; z)$$

Pak zobrazení  $\rho$  nazýváme metrikou na množině  $\mathcal{M}$  a množinu  $\mathcal{M}$  nazýváme metrickým prostorem. Podrobně značíme  $(\mathcal{M}; \rho)$ .

**3. RACIONÁLNÍ MODEL GEOMETRIE  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$ :** Uvažujme strukturu  $AM(\mathbb{Q})$  z předchozí kapitoly a pokusme se ji vybavit shodností. Úsečky  $AB; CD$  prohlásíme za shodné zřejmě právě tehdy, když jejich krajní body budou mít stejnou vzdálenost. Tu budeme chápat ve smyslu předchozí definice jako hodnotu nějaké metriky. Za střední školy jsme zvyklí „měřit“ vzdálenost dvou bodů výrazem

$$e(AB) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad (1)$$

To je samozřejmě možné, tato funkce vyhovuje všem požadavkům definice 2 kladeným na metriku (nazývá se euklidovská metrika). Není to však jediná možnost a v případě modelu geometrie  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$  dokončení korektní (viz dále). Velikost úsečky můžeme stejně dobře definovat např. takto:

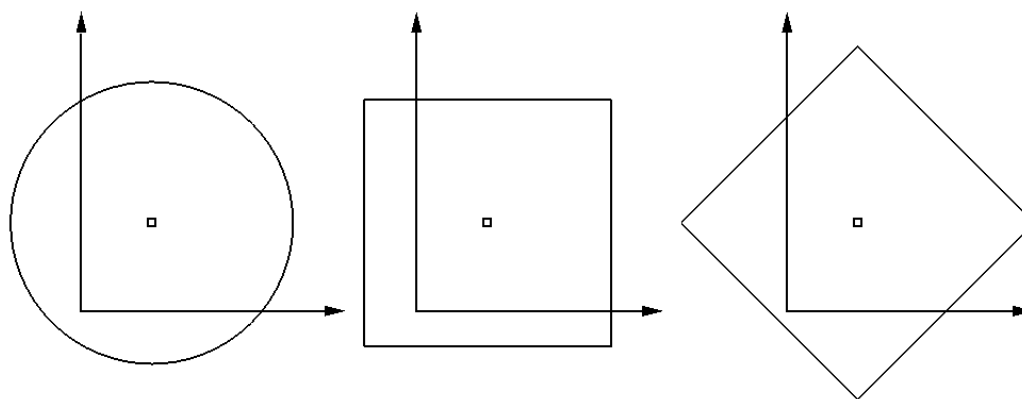
$$c(AB) = \max\{|a_1 - b_1|; |a_2 - b_2|\} \quad (2)$$

(čtvercová nebo též maximální metrika), anebo takto:

$$p(AB) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (3)$$

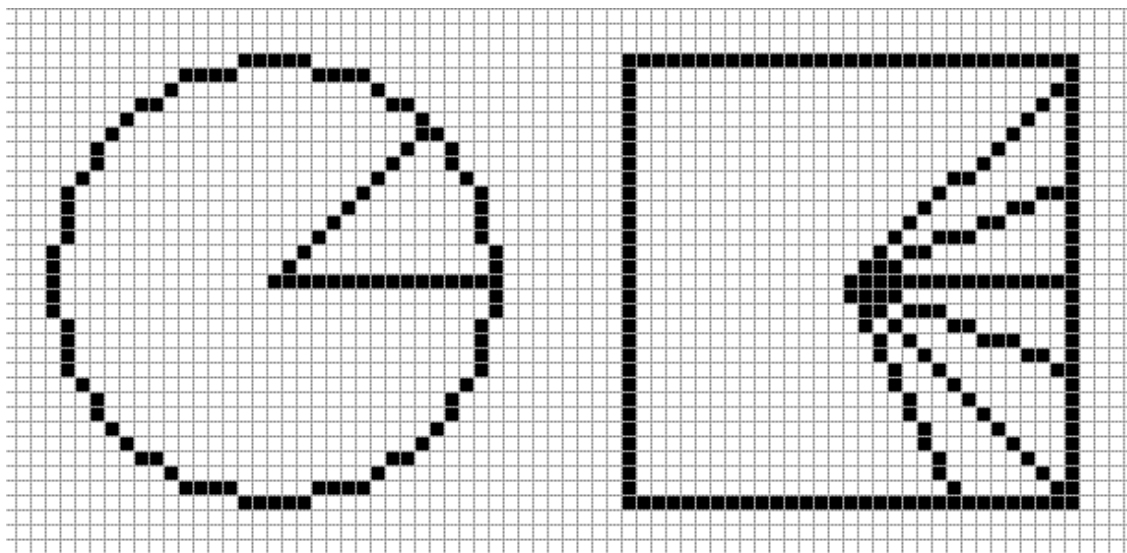
(poštácká nebo též manhatanská metrika)

Dostáváme tak tři různé modely, označme je  $AM(\mathbb{Q}; e)$ ;  $AM(\mathbb{Q}; c)$ ;  $AM(\mathbb{Q}; p)$  - analytický racionální model s euklidovskou, čtvercovou, resp. poštáckou metrikou. Ve všech jsou shodné právě ty úsečky, které mají stejnou délku, modely se však liší tím, jak je délka definována. Podle toho se také liší kružnice tak, jak je znázorněno na obr. 2. 3. 1.



**Obr. 2.3.1** Kružnice v různých metrikách – euklidovské, čtvercové a poštácké

Metrika (2) má v rastrových algoritmech počítačové grafiky jistý význam. Například rychlost vygenerování úsečky na rastrovém výstupu závisí mimo jiné na počtu pixelů, které je třeba obarvit. Počet pixelů však není dán euklidovskou velikostí úsečky. Na obr. 2. 3. 2 vidíme vlevo euklidovskou kružnici vygenerovanou v rastru a její dva poloměry. Ačkoli mají stejnou euklidovskou délku, vodorovný poloměr má 16 pixelů, šikmý jen 11 pixelů. Vpravo je kružnice ve čtvercové metrice – každý její poloměr (všechny jsou shodné!) má 16 pixelů.



**Obr. 2.3.2** Kružnice na rastrovém zařízení – vlevo v euklidovské, vpravo ve čtvercové.

„Tvar“ ovšem není to jediné, v čem se kružnice v modelech  $AM(\mathbb{Q}; e)$ ;  $AM(\mathbb{Q}; c)$ ;  $AM(\mathbb{Q}; p)$  liší. Zamyslíme-li se nad počtem možných společných bodů přímek a kružnic, dojdeme k zajímavým výsledkům. V modelech  $AM(\mathbb{Q}; c)$ ;  $AM(\mathbb{Q}; p)$  mohou mít přímka a kružnice nejen žádný, jeden či dva, ale dokonce nekonečně mnoho bodů. Totéž platí pro kružnice – mohou mít nekonečně mnoho společných bodů, i když nesplývají. Přímka jdoucí středem kružnice protne tuto kružnici vždy ve dvou bodech. Na rozdíl od „počítačových“ příkladů jsou totiž splněny axiomy uspořádání (včetně Paschova).

V modelu  $AM(\mathbb{Q}; e)$  je tomu jinak. Přímka jdoucí středem kružnice nemusí mít s kružnicí žádný společný bod. Kružnicí v tomto modelu je například množina  $\{[x; y] \in \mathbb{Q}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$ , přímka jdoucí jejím středem např.  $\{[x; y] \in \mathbb{Q}^2 | x = y\}$ . Tyto dvě množiny nemají žádné společné body, protože  $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . V modelu  $AM(\mathbb{Q}; e)$  lze sice definovat rovnostranný trojúhelník, velmi snadno lze ovšem dokázat, že v tomto modelu neexistuje. Na stejný problém narazíme vlastně už při ověřování axiomů shodnosti. **S1** je sice bez problémů, **S2** ovšem euklidovská metrika nesplňuje, jak ukazuje následující příklad.

Uvažujme body  $A = [0; 0]$ ;  $B = [1; 1]$ ;  $C = A$ ;  $D = [1; 0]$  a pokusme se vyhovět axiomu **S2**, tj. na polopřímce  $CD$  najít bod  $E$  tak, že  $AB \cong CE$  (viz obr. 2. 3. 3). Je zřejmé

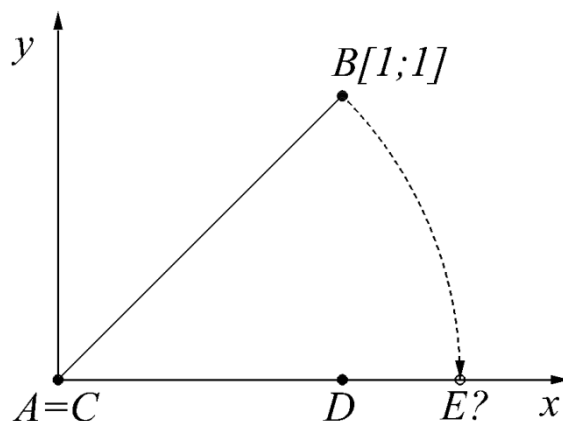
$$e(AB) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

Polopřímka  $CD$  je modelována uspořádanou dvojicí  $[t; 0]$ ;  $t \in \mathbb{Q}_0^+$ . Hledáme-li na ní bod  $E$  tak, aby  $AB \cong CE$ , pak hledáme  $t \in \mathbb{Q}_0^+$  tak, aby

$$\sqrt{(0 - t)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{2}$$

Takové  $t$  ovšem neexistuje, neboť opět  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Model  $AM(\mathbb{Q}; e)$  tedy není modelem geometrie  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$ .

Felix Klein zavedl v r. 1872 shodnost v rámci tzv. erlangenského programu pomocí grupy shodností. Pojem grupa známe z algebry:

Obr. 2. 3. 3. Potíže se shodností v modelu  $AM(\mathbb{Q}; e)$ 

**4. DEFINICE – grupa:** Necht'  $G$  je neprázdná množina, na které je definována binární operace  $\circ$  – tj. zobrazení  $\circ : G \times G \rightarrow G$  – která

- a) je asociativní, tj.  $\forall a; b; c \in G: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- b) existuje neutrální prvek, tj.  $(\exists e \in G)(\forall a \in G)[a \circ e = e \circ a = a]$
- c) ke každému prvku existuje prvek inverzní, tj.  $(\forall a \in G)(\exists a^* \in G)[a \circ a^* = a^* \circ a = e]$

Pak množinu  $G$  spolu s operací  $\circ$  nazýváme grupa, značíme  $(G; \circ)$ . Je-li operace navíc

- d) komutativní, tj.  $(\forall a; b \in G)[a \circ b = b \circ a]$

hovoříme o komutativní grupě.

Zobrazení studovaná v geometrii, jsou zřejmě zobrazení na množině všech geometrických útvarů, tj. podmnožin množiny  $\mathcal{B}$  všech bodů. Přitom nás zajímají ta zobrazení, která umožní rozřadit geometrické útvary podle některé jejich vlastnosti, tj. sestavit rozklad množiny všech geometrických útvarů. Taková zobrazení tedy na množině geometrických útvarů definují nějakou ekvivalenci – dva útvary  $U_1; U_2$  jsou ekvivalentní (vzhledem k nějaké množině zobrazení  $G$ ) právě tehdy, když existuje zobrazení  $f \in G$  takové, že  $f(U_1) = U_2$ . Pak můžeme psát  $U_1 \equiv U_2$ . Aby však relace  $\equiv$  byla ekvivalencí, musí množina  $G$  s každými dvěma zobrazeními  $f_1; f_2$  obsahovat i zobrazení  $f_1 \circ f_2$  (plyne z tranzitivity) – skládání tedy musí být binární operací na  $G$ , množina  $G$  musí obsahovat identické zobrazení (plyne z reflexivity) a s každým zobrazením musí obsahovat rovněž zobrazení k němu inverzní (plyne ze symetrie). Množina  $(G; \circ)$  tedy musí být grupa. Podle toho, jaké vlastnosti geometrických útvarů má grupa těchto zobrazení zachovávat, rozlišujeme pak např. grupu projektivních, afinních, podobných, shodných zobrazení a mnohé jejich podgrupy (připomeňme, že podgrupou grupy  $(G; \circ)$  rozumíme podmnožinu  $\mathcal{P}$  množiny  $G$ , která je vzhledem k téže operaci rovněž grupou). Grupami jsou např.  $(\mathbb{R}; +); (\mathbb{Q} - \{0\}; \cdot)$ , naopak např.  $(\mathbb{N}; +); (\mathbb{Z} - \{0\}; \cdot)$  grupy nejsou. Grupa podobných zobrazení je podgrupou zobrazení afinních a ta je podgrupou zobrazení projektivních. Naopak můžeme říci, že projektivní grupa je nadgrupou grupy afinní. Těmito zobrazeními se budeme zabývat dále. Grupa shodných zobrazení je podgrupou všech výše jmenovaných. Podobně můžeme hovořit o nadgrupách (grupa podobných zobrazení je nadgrupou grupy zobrazení shodných).

Shodnost definoval Klein pomocí euklidovské metriky. Aby to ovšem mohl udělat, musel vyhovět axiomu **S2** a být schopen na polopřímku  $CD$  přenést každou úsečku  $AB$ . Abychom to dokázali, potřebujeme provést následující úvahu:

Nejdříve opět zopakujme jeden z ústředních pojmů algebry:

**5. DEFINICE – těleso:** Necht'  $\mathcal{T}$  je libovolná neprázdná množina, na které jsou definovány dvě binární operace  $\oplus : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ ;  $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  takové, že

- a)  $(\mathcal{T}; \oplus)$  je komutativní grupa,
- b)  $(\mathcal{T} - \{0\}; \otimes)$  je grupa bez vlastních dělitelů nuly  
tj. pro každé  $a; b \in \mathcal{T}$  je  $(a \otimes b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$
- c)  $\otimes$  je distributivní vzhledem k  $\oplus$ ,  
tj. pro každé  $a; b; c \in \mathcal{T}$  je  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ .

Pak množinu  $\mathcal{T}$  nazýváme tělesem, podrobně značíme  $(\mathcal{T}; \oplus; \otimes)$ . Je-li navíc

- d) grupa  $(\mathcal{T} - \{0\}; \otimes)$  komutativní, hovoříme o komutativním tělese.

Podobně jako o podgrupách a nadgrupách můžeme hovořit o podtělesech a nadtělesech. Např.  $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$  je těleso a je to podtěleso tělesa  $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ . Rovněž  $(\mathbb{C}; +; \cdot)$  je těleso a je to nadtěleso tělesa  $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ ;  $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$ ;  $(\mathbb{N}; +; \cdot)$ ;  $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$  tělesa nejsou.

**6. AM(PK) MODEL GEOMETRIE  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$ :** Jak je patrné z odst. 3, je třeba těleso všech racionálních čísel rozšířit tak, aby kromě racionálních čísel obsahovalo nejméně ještě druhé odmocniny z těchto čísel. Takovým tělesem je samozřejmě těleso  $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ ; Model  $AM(\mathbb{R}; e)$  skutečně splňuje všechny výše uvedené axiomy, nicméně má ještě další (důležitou) vlastnost, kterou však dosavadní axiomy nevyžadují. Pokusme se tedy najít těleso  $(PK; +; \cdot)$ , které by splňovalo všechny dosavadní axiomy a přitom by bylo „nejmenší možné“, tj.  $(\mathbb{Q}; +; \cdot) \subset (PK; +; \cdot) \subset (\mathbb{R}; +; \cdot)$ . Těleso  $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$  bylo pro naše účely nedostatečné proto, že neobsahuje odmocniny ze všech (kladných) racionálních čísel. Naše těleso musí navíc umožnit konstrukci druhých odmocnin opakovaně. Definujme tedy  $PK$ -těleso následovně:

**$PK$ -těleso** je těleso, které

- a) Obsahuje  $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$  jako své podtěleso
- b) Pro každé  $a \in PK$  platí:  $a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \in PK$
- c) Pro každé těleso  $(T; +; \cdot)$ , které má vlastnosti a) b), je  $(PK; +; \cdot) \subseteq (T; +; \cdot)$

Vlastnost c) zajišťuje, že jsme sestrojili skutečně „minimální“ těleso s požadovanými vlastnostmi, tj. těleso, které obsahuje jen čísla, která lze obdržet z celých čísel pomocí (opakovaného) součtu, rozdílu, součinu, podílu a druhé odmocniny.

Modelem  $AM(PK)$  pak budeme rozumět model, kde body resp. přímky jsou – podobně jako v modelu  $AM(\mathbb{Q}; e)$  – uspořádané dvojice  $[p_1; p_2]$  resp.  $[q_1 + s_1 \cdot t; q_2 + s_2 \cdot t]$ , na rozdíl od modelu  $AM(\mathbb{Q}; e)$ , kde bylo  $p_1; p_2; q_1; q_2; s_1; s_2; t \in \mathbb{Q}$ ; je ovšem tentokrát  $p_1; p_2; q_1; q_2; s_1; s_2; t \in PK$ .

Jak je vidět, geometrie  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$  již umožňuje definovat mnohé známé útvary, některé z nich se však mohou mít řadu vlastností, které od nich běžně neočekáváme. Abychom je přiblížili našim běžným představám, potřebujeme další axiomy.

## 2. 4 Rovnoběžnost

Naše dosavadní geometrie prozatím nehovořila o jedné ze základních relací, se kterou běžně pracujeme, a sice o rovnoběžnosti.

**1. DEFINICE – rovnoběžka:** přímku  $p$  nazveme rovnoběžkou k přímce  $q$  právě tehdy, když s ní nemá žádný společný bod.

Definici rovnoběžky lze vyslovit už v incidenční rovině, zároveň však lze dokázat, že v geometrii vybavené pouze axiomy incidence nemusí rovnoběžky vůbec existovat (viz odst. 2 kpt. 2.1). Lze ukázat, že v geometrii  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$  už rovnoběžky existovat musejí. Nelze v nich však dokázat, že daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku. Tím tato geometrie připouští možnost, že daným bodem lze vést k dané přímce více rovnoběžek a v některých jejích modelech tomu tak skutečně je. Nechceme-li tuto situaci připustit, musíme jako axiom přijmout následující tvrzení

**E(Euklidův)– axiom rovnoběžnosti:** Každým bodem  $A \notin p$  lze vést nejvýše jednu rovnoběžku s přímkou  $p$ .

Geometrii  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$ , která je navíc vybavena axiomem  $E$ , budeme značit  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E} \rangle$ . Protože v  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S} \rangle$  lze daným bodem vést nejméně jednu rovnoběžku, dostáváme jako bezprostřední důsledek axiomu  $E$  toto silnější tvrzení:

**2. VĚTA – jednoznačnost rovnoběžky:** Nechť v geometrii  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E} \rangle$  je dána přímka  $p$  a bod  $A$ , který na ní neleží. Pak existuje právě jedna přímka  $q$ , která prochází bodem  $A$  a nemá s  $p$  společný bod.

Díky rovnoběžkám jsme schopni vyřešit jednu z důležitých úloh – totiž danou úsečku rozdělit na  $n$  shodných úseček. Dále budeme směřovat k možnosti důkazu známých a závažných geometrických tvrzení o součtu úhlů v trojúhelníku, Euklidovým větám a větě Pythagorově. Již k formulaci těchto tvrzení je však třeba pojmů velikost úsečky a velikost úhlu, které je třeba ještě precizovat.

## 2. 5 Spojitost

Pojmu velikost úsečky jsme se již dotkli. V modelech  $AM(\mathbb{Q})$ ;  $AM(PK)$  jsme se pokusili modelovat shodnost tím, že jsme shodným úsečkám přiřadili jistým způsobem stejné číslo. Ovšem způsob, jakým jsme to provedli, byl úspěšný – alespoň v případě modelu  $AM(PK)$  – jenom díky tomu, že se jednalo o model analytický. Jak to ovšem udělat v případech, kdy jsou body modelovány jinak (například synteticky)? Zobrazení, které toto číslo („délku“, „velikost“) úsečkám přiřazuje, to musí provést bez ohledu na to, jak jsou body a úsečky modelovány, přitom musí být stále vhodně svázána se shodností.

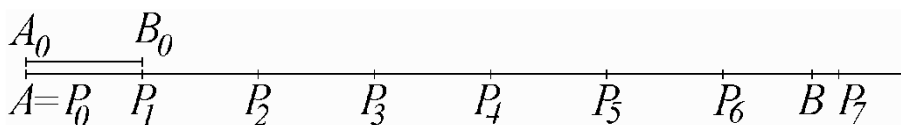
**1. DEFINICE– míra úsečky, délka úsečky:** Nechť  $\mathcal{U}$  je množina všech úseček geometrie  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E} \rangle$ ,  $A_0B_0 \in \mathcal{U}$  libovolná úsečka a  $|\cdot|: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazení, takové, že

- a)  $\forall AB \in \mathcal{U}: |AB| > 0$
- b)  $\forall AB; CD \in \mathcal{U}: AB \cong CD \Rightarrow |AB| = |CD|$
- c)  $\forall AB; BC; AC \in \mathcal{U}: C \mu AB \Rightarrow |AB| = |AC| + |CB|$
- d)  $|A_0B_0| = 1$

Pak zobrazení  $|\cdot|: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme mírou úsečky, jeho hodnotu  $a = |AB|$  pro úsečku  $AB$  pak délkou (nebo též velikostí) úsečky  $AB$  v míře  $|\cdot|$ . Úsečku  $A_0B_0$  nazýváme jednotkovou úsečkou míry  $|\cdot|$ .

Tato definice sice zavádí pojem délky úsečky, neříká však nic o tom, jak ji geometrickými nástroji určovat. Zamysleme-li se hlouběji nad procesem měření vzdálenosti pomocí „stupnice“ či „měřítka“, pak takové měření spočívá v opakovaném nanášení „jednotkové“ úsečky  $A_0B_0$  (délky např. jeden metr, centimetr apod.) na měřenou úsečku  $AB$ . První nanesení provedeme na polopřímku  $\rightarrow AB$  tak, že  $A_0 = A$ , a jednotku nanášíme tak dlouho, až se bodem  $B_0$  „dostaneme za bod  $B$ “ (toto opakované nanášení jednotky většinou realizuje „odstupňované měřidlo“ na pravítku či metru). Ze zkušenosti víme, že ať je měřená vzdálenost  $AB$  sebedelší a jednotka  $A_0B_0$  sebekratší, tento proces nanášení po konečném počtu kroků vždy skončí „překročením“ bodu  $B$ . Tuto zkušenost můžeme zformalizovat do následujícího tvrzení:

**A (Archimedův axiom):** Necht'  $A_0B_0$ ;  $AB$  jsou libovolné úsečky. Na polopřímce  $\rightarrow AB$  sestrojme posloupnost  $P_0; P_1; \dots; P_k; \dots = \{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tak, že  $P_0 = A_0$ ;  $P_k P_{k+1} \cong A_0B_0$ . Pak existuje  $n \in \mathbb{N}$  tak, že  $B \mu AP_n$ .



Obr. 2. 5. 1 K Archimedově axiomu

K formulaci Archimedova axiomu zřejmě potřebujeme jen dosavadní axiomy – incidenci, shodnost a relaci oddělování, tj. axiomy uspořádání. Avšak jakkoli se nám toto tvrzení zdá intuitivně zřejmé, není možné ho v prostoru  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E} \rangle$  dokázat. Je tedy třeba ho přijmout jako axiom. Budeme ho nazývat axiomem Archimédovým, uspořádanou sedmici  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E}; \mathcal{A} \rangle$  **archimédovskou rovinou** a její teorii **archimédovskou geometrií**. Podívejme se nyní, jakými pojmy a vlastnostmi lze tuto geometrii vybavit.

**4. MĚŘENÍ ÚSEČEK:** „Umět měřit úsečky“ především znamená, umět každé úsečce geometrie  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E}; \mathcal{A} \rangle$  přiřadit kladné reálné číslo. Archimédův axiom dává teoretický návod, jak toto číslo najít. Měříme-li úsečku  $AB$  v jednotkách  $|A_0B_0|$ , nanášíme úsečku  $A_0B_0$  tak dlouho, až bod  $P_{n_0} \mu AB$  je poslední, pro který platí  $P_{n_0} \mu AB$  (na obr. 2.3.4 je  $n_0 = 6$ ).

Poté rozdělíme jednotkovou úsečku na  $k_1$  shodných úseček (což umíme díky rovnoběžnosti) a jednu z nich použijeme jako novou jednotku na zbývající úsečku (na obr. 2.3.4 je to  $P_6B$ ). Tak použijeme  $n_1$  úseček, které mají délku  $1/k_1$ ;  $n_1 < k_1$ ; (plyne z def. 2.6.1.b). Starověcí geometři předpokládali, že pro každé dvě úsečky  $AB$ ;  $A_0B_0$  existuje posloupnost  $k_1; k_2; \dots; k_n$  tak, že bod  $P_m$ , který takto získáme, splyne s bodem  $B$ , tj.  $P_m = B$  a délka úsečky je tak rovna

$$|AB| = n_0 + \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_1 k_2} + \dots + \frac{n_r}{k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_r}$$

(určení celkové délky součtem plyne z def. 2.6.1.c), tj. že každé dvě úsečky jsou souměřitelné. Pythagoras zjistil, že tomu tak není. (nesouměřitelná je např. úhlopříčka čtverce s jeho stranou). Tím byl celý tento intuitivně zřejmý proces měření zpochybněn.

Dnes je cesta z této teoretické „pasti“ celkem jednoduchá. Díky infinitesimálnímu počtu totiž výše uvedený proces skončit nemusí a za délku úsečky můžeme vždy prohlásit součet

$$|AB| = n_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n_r}{k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_r}$$

Podle své konstrukce je totiž posloupnost částečných součtů neklesající a shora ohraničená jedničkou. Součet dokonce ani nezávisí na volbě posloupnosti  $\{k_r\}$ , takže můžeme volit např. konstantní posloupnost  $\{k_r\} = \{10\}$  tj. „původní jednotku“ v případě potřeby vždy zmenšit

desetkrát. Zvolíme-li pak za jednotku stranu čtverce a budeme tímto způsobem určovat délku úhlopříčky, dostaneme řadu

$$|AC| = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100000} + \frac{3}{1000000} + \dots = 1,414213 \dots$$

jejímž součtem je  $\sqrt{2}$ .

Podobně jako velikost (délku) úsečky můžeme definovat velikost úhlu. V archimedovské geometrii pak můžeme dokázat známé věty o součtu úhlů v trojúhelníku, Euklidovy věty, větu Pythagorovu a mnohé další.

Celá věc má ovšem jeden háček, ke kterému se v závěru této kapitoly ještě vrátíme.

**5. SYNTETICKÝ MODEL ARCHIMEDOVSKE GEOMETRIE (*PK-geometrie*):** Je model, na kterém jsme se s geometrií začali seznamovat – je to geometrie tzv. euklidovských konstrukcí, tj. konstrukcí pomocí pravítka a kružítka. Veškeré konstrukce prováděné pravítkem a kružítkem lze tedy redukovat na konstrukce bodů pomocí elementárních kroků, a to následovně:

- 1) První dva různé body jsou dány.
- 2) Přímka je sestrojena, jsou-li sestrojeny dva její různé body (ty lze spojit dostatečně dlouhým přímým pravítkem bez stupnice a přímku libovolně prodlužovat)
- 3) Kružnice je sestrojena, je-li znám její střed a bod ležící na jejím obvodu (nikoliv tedy poloměr – nemáme jej jak odměřit, pravítko nemá stupnici)
- 4) Další body lze sestrojit pouze jako průsečíky přímek a kružnic sestrojených v bodech 2 a 3.

Tato konstrukce musí někdy skončit, jinými slovy – tímto způsobem lze sestrojit pouze konečný počet bodů. Jestliže tyto kroky formalizujeme, dostáváme definici *PK*-bodů (bodů sestrojitelných pravítkem a kružítkem):

*PK*-bodem geometrie  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E}; \mathcal{A} \rangle$  rozumíme  $n$ -tý bod posloupnosti  $P_0; P_1; \dots; P_n$  pro kterou platí:

- 1)  $P_0; P_1$  dva různé body.
- 2) Pro každý bod  $P_k; k > 1$  platí:
  - a)  $P_k = P_0$
  - nebo b)  $P_k = P_1$
  - nebo c)  $P_k$  je průsečíkem dvou přímek, z nichž každá prochází dvěma různými body  $P_r; P_s$  posloupnosti sestrojenými dříve, tj.  $r; s < k$
  - nebo d)  $P_k$  je průsečíkem dvou kružnic, které mají středy ve dvou různých bodech  $P_r; P_s$  a procházejí body  $P_i; P_j$ , přičemž  $P_r; P_s; P_i; P_j$  jsou body posloupnosti sestrojené dříve, tj.  $r; s; i; j < k$
  - nebo e)  $P_k$  je průsečíkem kružnice se středem v bodě  $P_r$ , která prochází bodem  $P_s$ , a přímky, která prochází body  $P_i; P_j$ , přičemž  $P_r; P_s; P_i; P_j$  jsou body posloupnosti sestrojené dříve, tj.  $r; s; i; j < k$



Pomocí *PK*-bodů (bodů sestrojitelných pravítkem a kružítkem) můžeme definovat *PK*-přímku jako přímku procházející dvěma různými *PK*-body, *PK*-úsečku jako úsečku, jejíž koncové body jsou *PK*-body, *PK*-kružnici jako kružnici se středem v *PK*-bodě a procházející dalším *PK*-bodem. Můžeme definovat i *PK*-číslo jako číslo  $a$ , kde  $[a; 0]$  je *PK*-bod.

Nyní je otázkou, jaké útvary je možné tímto způsobem (*PK*-konstrukcemi) sestrojit. V analytickém modelu je přímka modelována jednou lineární rovnicí o dvou neznámých, kružnice pak kvadratickou rovnicí o dvou neznámých. Hledání požadovaných průsečíků v analytickém modelu neznamena nic jiného, než řešit soustavu

- a) dvou lineárních rovnic (průsečík dvou přímek)
- b) kvadratické a lineární rovnice (průsečík přímky a kružnice)
- c) dvou kvadratických rovnic (průsečík dvou kružnic)

Žádné jiné body *PK*-konstrukcemi dostat nemůžeme. K řešení případu a) jsou v analytickém modelu třeba pouze čtyři základní aritmetické operace. Abychom totéž mohli udělat synteticky, je třeba umět provést tyto operace „graficky“, tj. ze dvou daných úseček sestrojit úsečku, jejíž velikost je rovna součtu, rozdílu, součinu a podílu velikostí daných úseček. To *PK*-konstrukce umožňují – právě ke konstrukci součinu a podílu potřebujeme axiom E, proto jsme ho zmiňovali. Hledání průsečíků v případech b) a c) vede na kvadratickou rovnici, k jejímu řešení potřebujeme navíc druhou odmocninu. Tu ale rovněž umíme určit graficky, a to díky Euklidovým větám resp. větě Pythagorově. Zřejmě nás tedy nepřekvapí, že množina všech *PK*-čísel je právě *PK*-těleso.

Právě skutečnost, že množina všech *PK*-čísel je vlastní podmnožinou množiny  $\mathbb{R}$ , je příčinou tisíciletých neúspěchů mnoha generací geometrů při řešení některých geometrických úloh. V *PK*-geometrii nelze například provést kvadraturu kruhu (tj. sestrojit čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh) či rektifikaci kružnice (sestrojit úsečku, která má přesně stejnou délku jako daná kružnice). K vyřešení těchto úloh je totiž třeba sestrojit číslo  $\pi$ , které není *PK*-číslem. Je možné sestrojit pravidelný pětiúhelník – pokud jste zapomněli jeho konstrukci, pak vězte, že pětiúhelník vepsaný do kružnice se středem  $P_0 = [0; 0]$ , jehož jeden vrchol je  $P_1 = [0; 1]$ , má další vrcholy

$$P_{2;3} = \left[ \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{2}}}{4}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \right]; P_{4;5} = \left[ \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{2}}}{4}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \right]$$

což jsou všechna *PK*-čísla. Naopak např. nelze sestrojit pravidelný sedmiúhelník, protože vždy nejméně pět jeho vrcholů nelze zadat *PK*-číslly.

**6. PŘÍKLAD:** Vraťme se k odst. 4, kde jsme změřili úsečku délky  $\sqrt{2}$  pomocí Archimedova axiomu a konvergence nekonečné řady. Vezměme jednotkovou úsečku  $A_0B_0$  a sestrojme posloupnost *PK*-bodů  $P_0; P_1; \dots; P_k; \dots = \{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  takto:

- a)  $P_0 = A_0; P_1 = B_0$
- b)  $P_2: P_1 \mu P_0 P_2; |P_1 P_2| = 0.1 \cdot |P_0 P_1| = 0.1$
- c)  $P_3: P_2 \mu P_0 P_3; |P_2 P_3| = 0.01 \cdot |P_1 P_2| = 0.001$
- d)  $P_4: P_3 \mu P_0 P_4; |P_3 P_4| = 0.001 \cdot |P_2 P_3| = 0.000\,001$

.....

Úsečka  $AP$ , kterou jsme takto změřili, má délku.

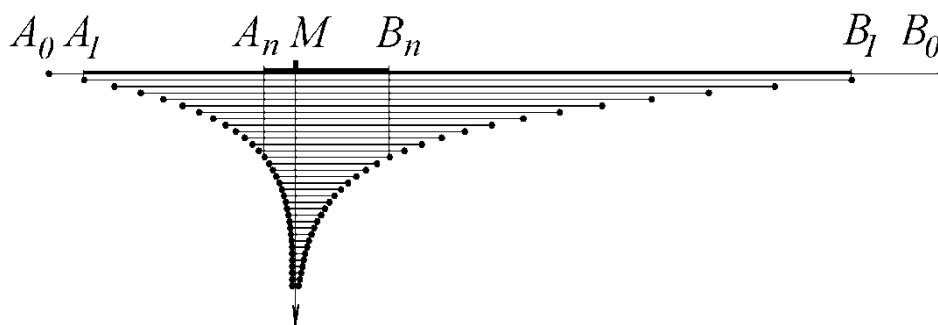
$$|AP| = \sum_{i=0}^{\infty} |P_i P_{i+1}| = 1.101\,001\,000\,100\,001\ldots$$

To ovšem není racionální číslo a dokonce ani  $PK$ - číslo. Právě jsme změřili úsečku, která v archimedovské geometrii neexistuje...

Aby k těmto paradoxům nedocházelo, musíme být schopni nejen každé úsečce přiřadit kladné reálné číslo jako její velikost, ale také naopak – ke každému kladnému reálnému číslu najít úsečku, jejíž délka je tímto číslem vyjádřena.

Výše uvedený bod  $P$  představuje „mezeru“ v archimedovské přímce, kterou je třeba „zalepit“. Příslušné „lepidlo“ poskytuje Cantorův axiom:

**C (Cantorův):** Necht'  $\{A_n; B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je posloupnost úseček přímky  $p$  taková, že pro každé  $n$  je  $A_{n+1}B_{n+1} \subseteq A_nB_n$  a  $A_{n+1}B_{n+1} \subseteq A_nB_n$ . Pak existuje bod  $M \in p$  takový, že pro každé  $n$  je  $M \in A_nB_n$ .



Obr. 2. 5. 2 Cantorův axiom

Cantorovým axiomem jsme završili budování geometrie, která umožňuje analytický přístup, jehož základy známe ze střední školy – každému bodu v rovině lze přiřadit (jedinou) uspořádanou dvojici reálných čísel jako jeho souřadnice a naopak – ke každé dvojici reálných čísel (souřadnic) existuje v rovině (jediný) bod. Rovinu, kterou jsme až dosud budovali, můžeme označit  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E}; \mathcal{A}; \mathcal{C} \rangle$ .

V poznámce 4 kpt. 2.2 jsme konstatovali, že uspořádanou rovinu lze vybudovat (nejméně) dvojí soustavou axiomů. K vybudování spojitého vedou rovněž dvě cesty.

Archimedův a Cantorův axiom jsou schopny „ucpat mezery“ na hustě uspořádaných přímkách roviny  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E}; \mathcal{A}; \mathcal{C} \rangle$ , jsou ale poněkud „nesourode“. Zatímco Cantorův axiom „pracuje“ jen s incidencí a uspořádáním, axiom Archimedův potřebuje shodnost. Proto se tyto dva axiomy nahrazují jediným axiomem – Dedekindovým axiomem spojitosti. Při konstrukci spojitého prostoru pomocí prostoru uspořádaného použil Richard Dedekind stejnou myšlenku jako při konstrukci množiny  $\mathbb{R}$  pomocí množiny  $\mathbb{Q}$ . Jeho konstrukce tedy demonstruje souvislost mezi geometrií a aritmetikou.

**7. DEFINICE – řez v množině bodů:** Necht'  $p$  je množina všech bodů ležících na přímce  $p$  uspořádané incidenční roviny. Množinu  $m \subset p$  nazveme řezem v množině  $p$  všech bodů přímky  $p$  právě tehdy, když

- a)  $m \neq \emptyset$ ;
- b)  $\forall C; D: (C \in m \wedge D < C) \Rightarrow (D \in m)$
- c)  $m$  nemá maximum

Je zřejmé, že libovolný bod  $A \in p$  určuje řez  $m$  v množině všech bodů přímky  $p$ , pro body řezu platí:  $\forall B \in m: B < A$ . Množina  $m$  má stejné vlastnosti, jako řez v množině  $\mathbb{R}$ . Množina  $p - m$  má minimum – totiž bod  $A$  – ten je (opět v souladu s analogickými definicemi pro množinu  $\mathbb{R}$ ) hraničním prvkem řezu  $m$ . Nyní je otázkou, zda naopak ke každému řezu  $m$  množiny  $p$  všech bodů přímky  $p$  existuje hraniční prvek.

Čtenáře jistě nepřekvapí, že tomu tak není. Stačí vzít model  $AM(\mathbb{Q})$  uspořádané incidenční roviny a uvažovat přímku  $p \equiv AB$ , kde  $A = [1; 0; 0]$ ;  $B = [2; 0; 0]$ . Množina  $m = \{[x; 0; 0] \in \mathbb{Q}^3 | x^2 < 2\}$  je pak zřejmě řezem v množině  $p$  všech bodů této přímky, která nemá hraniční prvek a je tudíž mezerou v této množině.

**8. DEFINICE (spojitá úsečka, polopřímka, přímka):** Necht'  $p \equiv AB$ ;  $A < B$  je přímka v uspořádané incidenční rovině  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U} \rangle$ . Úsečku  $AB$  nazýváme spojitou právě tehdy, když každý řez  $m$  přímky  $p$ , pro který je  $A \in m$ ;  $B \notin m$ , má hraniční prvek. Polopřímku resp. přímku nazýváme spojitou právě tehdy, když je spojitá každá její úsečka.

**9. DEFINICE – spojitá incidenční rovina:** Uspořádanou incidenční rovinu  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U} \rangle$  nazýváme spojitou právě tehdy, když

**D:** Existuje alespoň jedna spojitá úsečka

Spojitou incidenční rovinu značíme podrobně  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{D} \rangle$ .

**10. VĚTA – ekvivalence geometrií:** Dedekindův axiom je ekvivalentní současné platnosti Archimedova a Cantorova axiomu, tj. geometrie  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{E}; \mathcal{A}; \mathcal{C} \rangle$ ;  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{D} \rangle$  jsou ekvivalentní.

Vzhledem k této ekvivalenci budeme místo axiomů  $\mathcal{E}; \mathcal{A}$ ; dále používat axiom  $\mathcal{D}$ . Jednak pro větší stručnost a jednak z formálních důvodů – písmenem  $\mathcal{A}$  budeme totiž v dalším textu značit afinní prostor (viz dále).

Všimněte si, že jsme v předchozí větě nepožadovali rovnoběžnost. Axiom  $\mathcal{E}$  skutečně není k vybudování „smysluplné“ geometrie potřeba, jak bylo dokázáno konstrukcí řady jejích modelů. Geometrie, o které je řeč ve větě 10, proto zaslouží speciální pojmenování:

**11. DEFINICE – absolutní geometrie, euklidovská a neeuklidovská geometrie:**

Geometrii  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{D} \rangle$  nazýváme **absolutní geometrií**. Geometrii  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{D}; \mathcal{E} \rangle$  nazýváme **euklidovskou geometrií**. Geometrii  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{D}; \neg \mathcal{E} \rangle$ , nazýváme **neeuklidovskou geometrií**.

V řadě geometrických úloh potřebujeme pracovat s rovnoběžností, zato se omejdeme bez shodnosti:

**12. DEFINICE – afinní geometrie:** Prostor  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{D}; \mathcal{E} \rangle$  nazýváme afinní rovinou, její teorii pak afinní geometrií.

## 2. 6 Geometrie v prostoru

V dosavadním textu jsme prozatím mluvili jen o bodech a přímkách a jejich vzájemných vztazích. Všechny geometrie, které jsme takto budovali, byly tedy geometrie rovinné (planimetrie). Abychom mohli vbudovat geometrii prostorovou (stereometrii), je třeba naše rozšířit jednak množinu základních útvarů o roviny a jednak přidat některé axiomy incidence:

**1. DEFINICE – incidenční prostor:** Incidenčním prostorem rozumíme uspořádanou čtveřici neprázdných, po dvou disjunktních množin  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{R}; \mathcal{I} \rangle$ , kde prvky množin  $\mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{R}$  nazýváme po řadě **body** (značíme velkými písmeny), **přímky** (značíme malými písmeny), **roviny** (značíme malými řeckými písmeny) a množina  $\mathcal{I}$  je sjednocením tří binárních relací  $I_1; I_2; I_3$ , kde  $I_1 \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{P}$  (incidence bodů a přímek);  $I_2 \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{R}$  (incidence bodů a rovin);  $I_3 \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{R}$  (incidence přímek a rovin); kde množina  $\mathcal{I}$  splňuje dříve zavedené axiomy incidence I1; I2; I3a dále:

- I4:**  $(\forall A; B; C \in \mathcal{B})(\forall p \in \mathcal{P})[\neg(AIp \wedge BI_p \wedge CI_p) \Rightarrow (\exists! \alpha \in \mathcal{R}: A\alpha \wedge B\alpha \wedge C\alpha)]$   
 (ke každým třem bodům současně neincidujícím s toutéž přímkou existuje právě jedna rovina, která s nimi inciduje), zapisujeme  $\alpha \equiv ABC$
- I5:**  $(\forall A \in \mathcal{B})(\forall p \in \mathcal{P})(\forall \alpha \in \mathcal{R})[(AIp \wedge p\alpha) \Rightarrow (A\alpha)]$   
 (jestliže bod inciduje s přímkou a přímka s rovinou, pak bod inciduje s rovinou)
- I6:**  $(\forall A; B \in \mathcal{B})(\forall p \in \mathcal{P})(\forall \alpha \in \mathcal{R})[(A \neq B \wedge AIp \wedge A\alpha \wedge BI_p) \Rightarrow (p\alpha)]$   
 (jestliže dva různé body incidují s přímkou a současně s rovinou, pak přímka inciduje s rovinou).
- I7:**  $(\forall \alpha; \beta \in \mathcal{R})(\forall A \in \mathcal{B})[(A\alpha \wedge A\beta) \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B})(A \neq B \wedge BI_p \wedge B\alpha)]$   
 (jestliže dvě roviny incidují s bodem, pak incidují nejméně se dvěma různými body)
- I8:**  $(\exists A; B; C; D \in \mathcal{B})(\forall \alpha \in \mathcal{R})[\neg(A\alpha \wedge B\alpha \wedge C\alpha \wedge D\alpha)]$   
 (existují alespoň čtyři body, které současně neincidují s žádnou rovinou)
- I9:**  $(\forall \alpha \in \mathcal{R})(\exists A \in \mathcal{B})[A\alpha]$   
 (s každou rovinou inciduje alespoň jeden bod)

Postupným přidáváním axiomů uspořádání shodnosti, spojitosti a rovnoběžnosti dostáváme analogicky k dříve uvedenému:

- $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{R}; \mathcal{I}; \mathcal{U} \rangle$  – uspořádaný incidenční prostor (polohovou geometrii v prostoru)  
 $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{R}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{D} \rangle$  – absolutní prostor (absolutní geometrii v prostoru)  
 $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{R}; \mathcal{I}; \mathcal{S}; \mathcal{D}; \mathcal{E} \rangle$  – afinní prostor (afinní geometrii v prostoru)  
 $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{R}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{S}; \mathcal{D}; \mathcal{E} \rangle$  – euklidovský prostor (euklidovskou geometrii v prostoru)

(kde  $\mathcal{I}$  značí nikoli tři, ale devět axiomů incidence).

Poslední z výše uvedených geometrií je dostatečně bohatá k tomu, abychom z jejich axiomů mohli vybudovat celou stereometrii tak, jak ji známe ze střední školy. My se však chceme dostat trochu dál, proto se podíváme na modely této geometrie poněkud podrobněji. Jak jsme poznali výše, tuto geometrii již nelze modelovat konstrukcemi pomocí pravítka a kružítka. Teoreticky přesné konstrukce lze v euklidovské geometrii neomezeně provádět pouze analyticky. Na analytickém modelu jsou založeny i veškeré CAD systémy, i když ani ony (vzhledem k omezenému počtu cifer při reprezentaci čísla) nemohou provádět konstrukce teoreticky zcela přesně. Přesto jsou jejich možnosti nesrovnatelně větší než možnosti pravítka a kružítka.

Syntetický přístup ke geometrii – představa bodů jako nekonečně malých teček a přímek jako nekonečně tenkých rovných čar – je však na druhé straně zcela nezastupitelný. V CAD systému koneckonců nepracujeme proto, abychom získali množinu bodů matematicky složitě popsanou souřadnicemi, ale proto, abychom sestrojili nějakou strojní součást – geometrický útvar, který se skládá z křivek a ploch a který vnímáme synteticky. V dalších kapitolách se tedy zaměříme na souvislosti mezi analytickým a syntetickým přístupem.

## 2.7 Analytický model afinního a euklidovského prostoru

V předchozích kapitolách jsme postupně uváděli analytické modely nejruznějších geometrií – body jako uspořádané dvojice či trojice čísel, přímky jako uspořádané dvojice resp. trojice lineárních rovnic, aniž bychom se zajímali o souvislosti mezi analytickým a syntetickým modelem. To se pokusíme nyní napravit.

**1. DEFINICE – vektorový (též lineární) prostor nad tělesem:** Necht'  $(\mathcal{V}; \oplus)$  je komutativní grupa,  $(\mathcal{T}; +; \cdot)$  těleso a  $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  zobrazení takové, že pro každé  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  a každé  $c, d \in \mathcal{T}$  platí:

- a)  $1 \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- b)  $c \otimes (d \otimes \mathbf{u}) = (c \cdot d) \otimes \mathbf{u}$
- c)  $(c + d) \otimes \mathbf{u} = (c \otimes \mathbf{u}) \oplus (d \otimes \mathbf{u})$
- d)  $c \otimes (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (c \otimes \mathbf{u}) \oplus (c \otimes \mathbf{v})$

Pak grupu nazýváme vektorovým prostorem nad tělesem  $(\mathcal{T}; +; \cdot)$ , její prvky vektory. Podrobně značíme  $((\mathcal{V}; \oplus); (\mathcal{T}; +; \cdot); \otimes)$ , popř. (při vynechání operací) jen  $(\mathcal{V}; \mathcal{T})$ . Operaci  $\oplus$  nazýváme sčítání vektorů, prvky tělesa  $\mathcal{T}$  nazýváme skaláry, operaci  $\otimes$  násobení vektoru skalárem. Neutrální prvek grupy  $(\mathcal{V}; \oplus)$  nazýváme nulovým vektorem a značíme  $\mathbf{0}$ .

V dalším textu budeme pracovat jen s reálnými vektorovými prostory, tj.  $(\mathcal{T}; +; \cdot) = (\mathbb{R}; +; \cdot)$ . Dále budeme operace  $\oplus; \otimes$  značit jen  $+$ ;  $\cdot$  a opakované sčítání vektorů klasickým sumačním znaménkem.

**2. DEFINICE – lineární kombinace množiny vektorů:** Lineární kombinací prázdné množiny rozumíme nulový vektor. Lineární kombinací neprázdné (konečné) množiny vektorů  $\mathcal{M} = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{V}$  rozumíme součet  $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$ . Jsou-li všechna  $c_i$  rovna nule, hovoříme o triviální lineární kombinaci. V opačném případě se jedná o kombinaci netriviální.

**3. DEFINICE – lineární obal množiny vektorů:** Lineárním obalem (konečné) množiny  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$  rozumíme množinu  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  všech jejich kombinací. Značíme

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n \rangle = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i \right\} \Leftrightarrow \mathcal{M} = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \langle \rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathcal{M} = \emptyset$$

**4. DEFINICE – lineární závislost a nezávislost (konečné) množiny vektorů:** konečnou podmnožinu vektorového prostoru  $\mathcal{V}$  nazveme lineárně závislou právě tehdy, když alespoň jeden vektor této množiny je lineární kombinací ostatních vektorů této množiny. V opačném případě nazýváme tuto množinu lineárně nezávislou.

**5. DEFINICE – konečný generátor lineárního prostoru, báze:** (Konečnou) množinu  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$  nazveme generátorem prostoru  $\mathcal{V}$  právě tehdy, když  $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}$ . Lineárně nezávislý generátor prostoru  $\mathcal{V}$  nazýváme jeho bází.

**6. VĚTA:** Libovolné dvě konečné báze téhož lineárního prostoru mají stejný počet prvků.

**7. DEFINICE – konečná dimenze:** Necht' lineární prostor  $\mathcal{V}$  má konečnou bázi s  $n$  prvky. Pak číslo  $n$  nazýváme dimenzí prostoru  $\mathcal{V}$ . Dimenzi prostoru  $\mathcal{V}$  značíme  $\dim \mathcal{V}$ . Je-li  $\dim \mathcal{V} = n$ , pak prostor  $\mathcal{V}$  značíme  $\mathcal{V}^n$ .

Z předchozího textu plynou následující důsledky:

Jednoprvková množina neobsahuje žádný „ostatní“ vektor, množina „ostatních“ vektorů je v tomto případě prázdná. Lineární kombinace prázdné množiny je nulový vektor (def. 2). Nulový vektor je tedy lineárně závislý (def. 3). Každý jednotlivý nenulový vektor je lineárně nezávislý, neboť není lineární kombinací prázdné množiny (def. 3).

Bázi triviálního vektorového prostoru (prostoru obsahujícího pouze nulový vektor) je prázdná množina, její lineární kombinací je dle def. 2. nulový vektor. I v tomto případě je tedy každý vektor lineární kombinací báze. Dimenze tohoto prostoru je rovna nule, neboť jeho báze neobsahuje žádný prvek.

**8. DEFINICE – izomorfismus vektorových prostorů:** Vektorové prostory  $((V; \oplus); (\mathbb{R}; +; \cdot); \otimes)$ ;  $((W; \boxplus); (\mathbb{R}; +; \cdot); \boxtimes)$  jsou izomorfní právě tehdy, když existuje bijekce  $\varphi: V \rightarrow W$  taková, že pro každé  $u, v \in V$  a každé  $c, d \in \mathbb{R}$  platí:

$$a) \varphi(u \oplus v) = \varphi(u) \boxplus \varphi(v)$$

$$b) \varphi(c \otimes u) = c \boxtimes \varphi(u)$$

**9. VĚTA – o izomorfismu konečněrozměrných prostorů:** Každý vektorový prostor  $V^n$  je izomorfní s vektorovým prostorem  $\mathbb{R}^n$  uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel.

Pracujeme-li tedy s konečně rozměrným lineárním prostorem  $V^n$ , pak předchozí věta zaručuje existenci izomorfismu  $\varphi: V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Umožňuje tak pracovat vždy v prostoru  $\mathbb{R}^n$  a výsledky pak pomocí inverzního izomorfismu  $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow V^n$  přenést zpět do prostoru  $V^n$ . V prostoru  $\mathbb{R}^n$  nejčastěji pracujeme s bází

$$e_1 = (1; 0; 0; \dots; 0); e_2 = (0; 1; 0; \dots; 0); \dots; e_n = (0; 0; 0; \dots; 1) \quad (2.7.1)$$

**10. DEFINICE – standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^n$ :** Bázi  $\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$  dle (1) nazýváme standardní bází prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

Abychom ušetřili indexy značíme standardní bázi prostoru  $\mathbb{R}^2$  resp.  $\mathbb{R}^3$  často  $\{i; j\}$  resp.  $\{i; j; k\}$ .

**11. DEFINICE – souřadnice vektoru:** Necht'  $V^n$  je lineární prostor dimenze  $n$ ,  $\mathcal{B} = \{u_i\}_{i=1}^n$  jeho libovolná báze a  $v = \sum_{i=1}^n v_i u_i$  jeho libovolný vektor. Koeficienty  $v_i; i = 1; 2; \dots; n$  této lineární kombinace nazýváme souřadnicemi vektoru  $v$  v bázi  $\mathcal{B}$ , píšeme  $v = (v_1; v_2; \dots; v_n)_{\mathcal{B}}$ . Je-li báze  $\mathcal{B}$  standardní, budeme její značení vynechávat.

Nyní je zřejmá konstrukce izomorfismu z věty 8: Každý vektor prostoru  $V^n$  zobrazíme na uspořádanou  $n$ -tici jeho souřadnic v libovolné bázi.

**12. DEFINICE – kolineární a komplanární vektory:** nenulové vektory  $u, v \in V^n$  ( $u, v, w \in V^n$ ) nazveme vzájemně kolineární (komplanární) právě tehdy, když jsou lineárně závislé.

**13. DEFINICE – afinní prostor:** Necht'  $\mathcal{A}^n$  je neprázdná množina,  $V^n$  lineární prostor dimenze  $n$  a  $\varphi: \mathcal{A}^n \times \mathcal{A}^n \rightarrow V^n$  zobrazení takové, že platí:

a) pro každé  $A \in \mathcal{A}^n$  a každé  $x \in V^n$  existuje právě jedno  $B \in \mathcal{A}^n$  takové, že  $\varphi(A; B) = x$

b) pro každé  $A, B, C \in \mathcal{A}^n$  je  $\varphi(A; C) = \varphi(A; B) = \varphi(B; C)$

Pak množinu  $\mathcal{A}^n$  nazýváme (algebraickým) afinním prostorem. Lineární prostor  $V^n$  nazýváme zaměření prostoru  $\mathcal{A}^n$ , značíme často  $V^n = Z(\mathcal{A}^n)$ . Prvky  $A \in \mathcal{A}^n$  nazýváme

body afinního prostoru. Uspořádanou dvojici  $[A; B]$  nazýváme umístěním vektoru  $\mathbf{x}$  v prostoru  $\mathcal{A}^n$ . Místo  $\mathbf{x} = \varphi(A; B)$  budeme psát  $\mathbf{x} = B - A$ , popř.  $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$ . Je-li  $\mathbf{x} = B - A$ , pak píšeme  $B = A + \mathbf{x}$ . Tento model značíme podrobně jako uspořádanou trojici  $(\mathcal{A}^n; \mathcal{V}^n; \varphi)$ .

Pojmenování tohoto prostoru není náhodné. V kpt. 2. 5. jsme definovali afinní rovinu jako rovinu  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{D}; \mathcal{E} \rangle$ , v kpt. 2. 6. pak afinní prostor jako  $\langle \mathcal{B}; \mathcal{P}; \mathcal{R}; \mathcal{I}; \mathcal{S}; \mathcal{D}; \mathcal{E} \rangle$ . Lze ukázat, že afinní prostor definovaný definicí 12 splňuje všechny axiomy afinní roviny v případě, že jeho zaměřením je vektorový prostor  $\mathcal{V}^2$ , tj. vektorový prostor izomorfní s  $\mathbb{R}^2$ , a všechny axiomy afinního prostoru v případě, že jeho zaměřením je vektorový prostor  $\mathcal{V}^3$ , tedy prostor izomorfní s  $\mathbb{R}^3$ . Přímka procházející dvěma různými body  $A; B$  je definována jako množina bodů

$$X = A + t \cdot (B - A); \quad t \in \mathbb{R}$$

rovina určená třemi navzájem různými nekolineárními body  $A; B; C$

$$X = A + u \cdot (B - A) + v \cdot (C - A); \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Vektory v těchto rovnicích (směrové vektory) většinou značíme jedním tučným písmenem, dostáváme tak

přímku  $X = A + t \cdot \mathbf{s}; \quad t \in \mathbb{R}; \quad (2.7.2)$

a rovinu  $X = A + u \cdot \mathbf{r} + v \cdot \mathbf{s}; \quad u, v \in \mathbb{R}; \quad (2.7.3)$

Máme-li afinní prostor  $(\mathcal{A}^2; \mathcal{V}^2; \varphi) = (\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2; \varphi)$  resp.  $(\mathcal{A}^3; \mathcal{V}^3; \varphi) = (\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3; \varphi)$ , kde  $\varphi(A; B) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$  resp.  $\varphi(A; B) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$ ; jsou body stejně jako vektory uspořádané dvojice (trojice) reálných čísel, takže můžeme psát  $\mathbf{s} = (s_1; s_2)$ ;  $A = [a_1; a_2]$  (pro odlišení od vektorů v hranatých závorkách). V trojrozměrném případě analogicky. Rovnice (2.7.2), (2.7.3) pak můžeme přepsat ve tvaru

$$[x_1; x_2] = [a_1; a_2] + t \cdot (s_1; s_2) \text{ resp. } [x_1; x_2; x_3] = [a_1; a_2; a_3] + t \cdot (s_1; s_2; s_3)$$

Porovnáním jednotlivých složek dostaneme známé parametrické rovnice:

$$\begin{array}{ll} x_1 = a_1 + t \cdot s_1 & x_1 = a_1 + t \cdot s_1 \\ x_2 = a_2 + t \cdot s_2 & \text{resp. } x_2 = a_2 + t \cdot s_2 \\ & x_3 = a_3 + t \cdot s_3 \end{array}$$

Podobně jako v poznámce 4, bod a nenulový vektor generuje jednorozměrný afinní podprostor (přímku), bod a dva nekolineární vektory generují dvojrozměrný afinní prostor (rovinu). Analogicky se značením zavedeným v def. 3 budeme přímku určenou bodem  $A$  a směrovým vektorem  $\mathbf{s}$  značit  $\langle A; \mathbf{s} \rangle$ , rovinu určenou bodem  $A$  a nekolineárními vektory  $\mathbf{r}; \mathbf{s}$  pak  $\langle A; \mathbf{r}; \mathbf{s} \rangle$ .

**14. DEFINICE – rovnoběžnost v afinním prostoru:** Dvě přímky (roviny) afinního prostoru nazveme rovnoběžné právě tehdy, když jsou jejich směrové vektory kolineární (komplanární).

Afinní prostor s takto zavedenou rovnoběžností splňuje všechny axiomy  $\mathcal{I}; \mathcal{U}; \mathcal{D}; \mathcal{E}$  a je tedy afinní rovinou (v případě  $\mathcal{A}^2$ ) resp. afinním prostorem (v případě  $\mathcal{A}^3$ ) ve smyslu předchozích definic. Takto vybudovaný afinní prostor je však daleko obecnější než afinní prostor definovaný dříve, a to ve dvou směrech: jednak můžeme pracovat ve více než třech rozměrech a jednak můžeme opustit čistě geometrickou představu takového prostoru. Požadavky def. 12 splňují (a afinní prostor tedy tvoří) nejen body, přímky a roviny, ale také např. všechna řešení soustavy lineárních algebraických a diferenciálních rovnic a další matematické objekty.

Abychom tímto způsobem vybudovali nejen prostor afinní, ale i euklidovský, je třeba zaměřením prostoru vybavit dalšími vlastnostmi.

**15. DEFINICE – norma, normovaný lineární prostor:** Necht'  $\mathcal{V}$  je lineární prostor a  $\|\cdot\|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazení takové, že pro každé  $c \in \mathbb{R}$ ;  $\mathbf{u}; \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  platí:

- a)  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ ;  $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- b)  $\|c\mathbf{u}\| = |c| \cdot \|\mathbf{u}\|$
- c)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Pak zobrazení  $\|\cdot\|$  nazýváme normou vektoru a prostor  $\mathcal{V}$  normovaným lineárním prostorem.

**16. VĚTA – norma a metrika:** Na každém normovaném prostoru lze definovat metriku. Touto metrikou je funkce  $\rho(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ . Říkáme, že tato metrika je indukována normou, anebo naopak norma indukuje metriku.

Obrácená věta samozřejmě neplatí. Ne každý metrický prostor je prostorem normovaným. Už proto, že to nemusí být vůbec prostor vektorový.

**17. DEFINICE – skalární součin, unitární prostor:** Necht'  $\mathcal{V}$  je lineární prostor a  $(;): \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazení takové, že pro každé  $\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w} \in \mathcal{V}$  a každé  $c \in \mathbb{R}$  platí:

- a)  $(\mathbf{u}; \mathbf{u}) \geq 0$ ;  $(\mathbf{u}; \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- b)  $(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = (\mathbf{v}; \mathbf{u})$
- c)  $(c\mathbf{u}; \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}; \mathbf{v})$
- d)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}; \mathbf{w}) = (\mathbf{u}; \mathbf{w}) + (\mathbf{v}; \mathbf{w})$

Pak operaci  $(;)$  nazýváme skalární součin a lineární prostor  $\mathcal{V}$  nazýváme unitárním prostorem.

**18. VĚTA – o existenci skalárního součinu:** Na každém konečněrozměrném vektorovém prostoru lze definovat skalární součin.

Podle věty 8. je každý konečněrozměrný vektorový prostor izomorfní s  $\mathbb{R}^n$ , takže existenci skalárního součinu stačí ukázat jen v  $\mathbb{R}^n$ : tímto součinem je zřejmě zobrazení

$$(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (2.7.4)$$

**19. VĚTA – skalární součin a norma:** Na každém unitárním prostoru lze definovat normu. Touto normou je zřejmě zobrazení  $\|\cdot\|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  je  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}; \mathbf{u})}$ . Říkáme, že tato norma je indukována skalárním součinem, anebo naopak – skalární součin indukuje normu.

Obrácená věta opět neplatí.

**20. POZNÁMKA:** Skalární součin (2.7.4), který znáte již ze střední školy, indukuje normu



$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}; \mathbf{u})} = \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2 + \dots + u_n u_n} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad (2.7.5)$$

kterou známe jako „velikost vektoru“ a tato norma dále indukuje metriku

$$\rho(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}; \mathbf{u} - \mathbf{v})} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2} \quad (2.7.6)$$

kterou si můžeme představit jako „vzdálenost koncových bodů“ vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ .

**21. DEFINICE – shodné zobrazení:** Zobrazení  $\sigma: \mathcal{A}^n \times \mathcal{A}^n$  se nazývá shodné právě tehdy, když pro každé  $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}^n)$  platí  $\|\sigma(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ .

Afinní prostor s takto zavedenou shodností splňuje všechny axiomy  $I; \mathcal{U}; S; \mathcal{D}; \mathcal{E}$  a je tedy euklidovskou rovinou (v případě  $\mathcal{A}^2$ ) resp. euklidovským prostorem (v případě  $\mathcal{A}^3$ ) ve smyslu předchozích definic. Rovněž u euklidovského prostoru můžeme uvažovat více dimenzí, značíme obecně  $\mathcal{E}^n$ .

**22. DEFINICE – ortogonální a ortonormální vektory, ortogonální a ortonormální báze:** Vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , pro které je  $(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = 0$  nazýváme ortogonální. Je-li navíc  $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ , jedná se o vektory ortonormální. Bázi, jejíž všechny vektory jsou navzájem ortogonální (ortonormální), nazýváme ortogonální (ortonormální) bázi.

Obecný aparát matematických struktur a prostorů umožňuje zcela nový pohled na souřadnice vektorů. Souřadnice vektoru  $\mathbf{v}$  např. v bázi  $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\}$  nejsou ničím jiným, než koeficienty  $v_1; v_2; v_3$  v lineární kombinaci  $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + v_3 \mathbf{u}_3$ . V  $\mathbb{R}^3$  používáme většinou bázi  $\{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$ , kde  $\mathbf{i} = (1; 0; 0)$ ;  $\mathbf{j} = (0; 1; 0)$ ;  $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$ . Je-li pak např.  $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ , pak tento vektor má souřadnice  $\mathbf{v} = (5; 2; -3)$ .

Uvažujme-li bázi  $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_3\}$

a mějme vektor

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + v_3 \mathbf{u}_3$$

Skalárně vynásobme vektorem  $\mathbf{u}_1$ :

$$(\mathbf{v}; \mathbf{u}_1) = (v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + v_3 \mathbf{u}_3; \mathbf{u}_1)$$

Z vlastností c) d) def. 16 plyne

$$(\mathbf{v}; \mathbf{u}_1) = v_1 (\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_1) + v_2 (\mathbf{u}_2; \mathbf{u}_1) + v_3 (\mathbf{u}_3; \mathbf{u}_1)$$

Je-li báze ortogonální, pak

$$(\mathbf{u}_2; \mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_3; \mathbf{u}_1) = 0$$

takže

$$(\mathbf{v}; \mathbf{u}_1) = v_1 (\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_1)$$

Je-li báze navíc ortonormální, pak

$$(\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_1) = 1$$

takže

$$(\mathbf{v}; \mathbf{u}_1) = v_1$$

analogicky

$$(\mathbf{v}; \mathbf{u}_2) = v_2; \quad (\mathbf{v}; \mathbf{u}_3) = v_3$$

Souřadnice vektoru  $\mathbf{v}$  dané ortonormální bázi tedy nejsou nic jiného, než hodnoty skalárních součinů daného vektoru s jednotlivými prvky báze. Pro libovolný prvek  $\mathbf{v}$   $n$ -rozměrného prostoru s ortonormální báží  $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$  tedy platí

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}; \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}; \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 + \dots + (\mathbf{v}; \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}; \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$$

**23. DEFINICE – kartézská souřadná soustava, kartézské souřadnice bodu:** Kartézskou souřadnou soustavou v rovině (prostoru) rozumíme uspořádanou trojici (čtveřici)  $\langle O; \mathbf{i}; \mathbf{j} \rangle$  resp.  $\langle O; \mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k} \rangle$ ; kde  $O \in \mathcal{E}^2$  resp.  $O \in \mathcal{E}^3$ ; a  $\{\mathbf{i}; \mathbf{j}\}$  resp.  $\{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$  je ortogonální báze  $Z(\mathcal{E}^2)$  resp.  $Z(\mathcal{E}^3)$ . Bod  $O$  nazýváme počátek, přímky  $x = \langle O; \mathbf{i} \rangle$ ;  $y = \langle O; \mathbf{j} \rangle$ ;  $z = \langle O; \mathbf{k} \rangle$  souřadnicové osy, vektory  $\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}$  jednotkové vektory. Je-li  $A = O + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$  resp.  $A = O + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ , pak koeficienty  $a_1; a_2; (a_3)$  nazýváme kartézské souřadnice bodu, zapisujeme  $A = [a_1; a_2]$  resp.  $A = [a_1; a_2; a_3]$ .

## 2. 8 Geometrická zobrazení v euklidovské rovině

Zobrazení množiny  $A$  do množiny  $B$  je, jak známo, podmnožina kartézského součinu  $A \times B$ , která obsahuje pouze uspořádané dvojice  $[x; x']$ , ve kterých každý vzor  $x$  má právě jeden obraz  $x'$ . Speciálně v euklidovské rovině  $\mathcal{E}^2$  resp. v euklidovském prostoru  $\mathcal{E}^3$  je každému bodu  $X$  přiřazen právě jeden bod  $X'$ . Na střední škole jste se zabývali osovou a středovou souměrností, posunutím, otočením a stejnolehlostí, a to výhradně synteticky – geometrické úlohy na toto téma jste řešili pravítkem a kružítkem. Grafické systémy počítačů tyto úlohy „umějí“ řešit rovněž. Řeší je samozřejmě analyticky. Analytickému popisu zobrazení v  $\mathcal{E}^2$  je věnována tato kapitola.

Uvažujme tedy bod  $X = [x_1; x_2] \in \mathcal{E}^2$ , který zobrazíme na bod  $X' = [x'_1; x'_2] \in \mathcal{E}^2$ . Dále mějme zobrazení  $Z: \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ . Toto zobrazení, je popsáno soustavou rovnic, která na základě souřadnic  $[x_1; x_2]$  bodu  $X$  stanoví souřadnice  $[x'_1; x'_2]$  bodu  $X'$ . Tuto soustavu lze zapsat obecně ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(x_1; x_2) \\ x'_2 &= f_2(x_1; x_2) \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

**1 PŘÍKLAD:** Jsou dány body  $A = [0; 0]$ ;  $B = [2\pi; 0]$ ;  $S = [\pi; 0]$  a zobrazení  $Z: \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ , které je dáno rovnicemi

$$Z: \begin{aligned} x'_1 &= 3 \sin 3x_1 + 4 \\ x'_2 &= 2 \cos 5x_1 + 6 \end{aligned}$$

Určete obrazy  $A' = Z(A)$ ;  $S' = Z(S)$ ;  $B' = Z(B)$  bodů  $A, S, B$ .

**Řešení:**

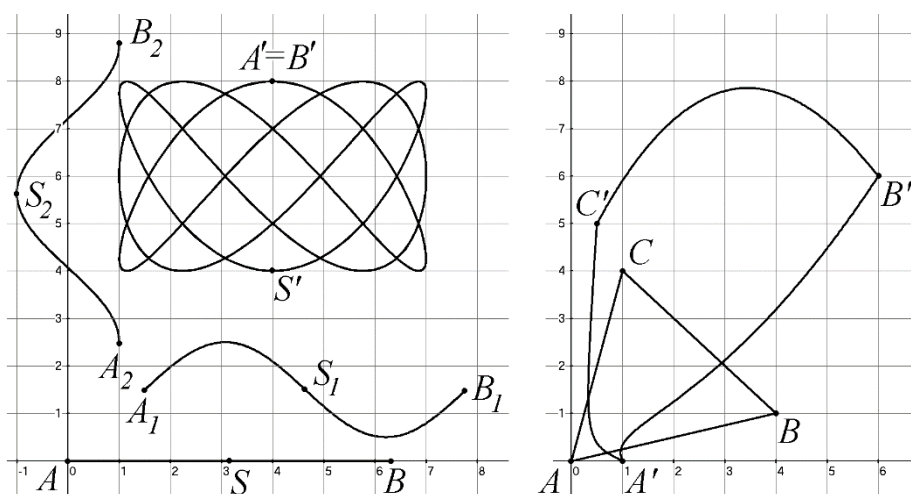
$$A': \begin{aligned} a'_1 &= 3 \sin 3a_1 + 4 \Rightarrow a'_1 = 3 \sin(3 \cdot 0) + 4 \\ a'_2 &= 2 \cos 5a_1 + 6 \Rightarrow a'_2 = 2 \cos(5 \cdot 0) + 6 \end{aligned} \Rightarrow A' = [a'_1; a'_2] = [4; 8]$$

$$S': \begin{aligned} s'_1 &= 3 \sin 3s_1 + 4 \Rightarrow s'_1 = 3 \sin(3\pi) + 4 \\ s'_2 &= 2 \cos 5s_1 + 6 \Rightarrow s'_2 = 2 \cos(5\pi) + 6 \end{aligned} \Rightarrow S' = [s'_1; s'_2] = [4; 4]$$

$$B': \begin{aligned} b'_1 &= 3 \sin 3b_1 + 4 \Rightarrow b'_1 = 3 \sin(3 \cdot 2\pi) + 4 \\ b'_2 &= 2 \cos 5b_1 + 6 \Rightarrow b'_2 = 2 \cos(5 \cdot 2\pi) + 6 \end{aligned} \Rightarrow B' = [b'_1; b'_2] = [4; 8]$$

Jestliže touto soustavou transformujeme všechny body útvaru  $\mathcal{U}$ , obdržíme jeho obraz  $\mathcal{U}'$  v daném zobrazení. Pokud jsou funkce  $f, g$  spojité (nebo alespoň po částech spojité), je obrazem křivky opět křivka (nebo několik křivek). Obrazem úsečky však nemusí být úsečka. V našem příkladu je  $AB$  úsečka, bod  $S$  je její střed. Obraz této úsečky v zobrazení  $Z$  si můžeme prohlédnout na obr. 2.8.1 vlevo. Dále jsou zde obrazy téže úsečky  $AB$  v zobrazeních  $Z^{(1)}$ ;  $Z^{(2)}$ , která jsou dána rovnicemi

$$Z^{(1)}: \begin{cases} x_1^{(1)} = x_1 + 1,5 \\ x_2^{(1)} = \sin x_1 + 1,5 \end{cases} \quad Z^{(2)}: \begin{cases} x_1^{(2)} = \cos x_1 \\ x_2^{(2)} = x_1 + 2,5 \end{cases}$$



**Obr. 2. 8. 1:** Zobrazení úsečky a trojúhelníka (k příkladům 1 a 2)

**2 PŘÍKLAD:** Jsou dány body  $A = [0; 0]$ ;  $B = [4; 1]$ ;  $C = [1; 4]$  a zobrazení  $Z: \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$  je dáno rovnicemi

$$Z: \begin{cases} x'_1 = 1,5x_1 - \sqrt{x_2} + 1 \\ x'_2 = \sqrt{x_1} + x_1x_2 \end{cases}$$

(množina  $\mathcal{F}^2$  je tedy podmnožinou  $\mathcal{E}^2$  - je to zřejmě množina bodů, jejichž obě souřadnice jsou nezáporné). Určeme obraz trojúhelníka  $ABC$ .

**Řešení:** Souřadnice  $A'$ ;  $B'$ ;  $C'$  vrcholů trojúhelníka  $A'B'C'$  určíme stejně jako v předchozím příkladě, např.:

$$B': \begin{cases} b'_1 = 1,5b_1 - \sqrt{b_2} + 1 \\ b'_2 = \sqrt{b_1} + b_1b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b'_1 = 1,5 \cdot 4 - \sqrt{1} + 1 \\ b'_2 = \sqrt{4} + 4 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow B' = [b'_1; b'_2] = [6; 6]$$

Pro body  $A$ ;  $C$  analogicky. Toto zobrazení si můžeme prohlédnout na obr. 2.8.1 vpravo. Poznamenejme, že jsou-li funkce  $f_1(x_1; x_2)$ ;  $f_2(x_1; x_2)$  ve vztahu (2.8.1) spojité, je obrazem úsečky křivka. O křivkách pojednáme podrobněji v kpt. 4., pro tuto chvíli problematiku křivek opustíme.

V geometrii na střední škole jste se setkávali nejčastěji se zobrazeními, v nichž obrazem přímky byla opět přímka. Tato zobrazení se nazývají **kolineární** (z latinského linea - přímka).

Rovnice, které tato zobrazení určují analyticky, jsou lineární. Lze je tedy psát ve tvaru

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + v_2 \end{cases}$$

anebo v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{v}^T$$

Body (zde  $\mathbf{X}^T; \mathbf{X}^T$ ) i vektory (zde  $\mathbf{v}^T$ ) „fungují“ v těchto zápisech jako matice typu  $1 \times 2$ . V těchto zápisech je tedy třeba body reprezentovat jejich polohovými vektory. Polohové vektory bodů budeme tedy značit tučnou velkou kurzívou - pro odlišení od vektorů značících např. posunutí (zde vektor  $\mathbf{v}^T$ ). Matice  $\mathbf{A}$  typu  $2 \times 2$  v tomto zápisu pak určuje další parametry zobrazení (např. otáčení, zvětšování atd.).

Stanovení některých zobrazení je velmi jednoduché. Chceme-li např. použít osovou souměrnost s osou v ose  $x$ , zřejmě stačí změnit znaménko druhé souřadnice zobrazovaného bodu, tedy

$$\mathbf{O}(x): \begin{matrix} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = -x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}(x) \cdot \mathbf{X}^T$$

kde

$$\mathbf{O}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je matice osové souměrnosti podle osy  $x$ . Pro osovou souměrnost s osou  $y$  analogicky

$$\mathbf{O}(y): \begin{matrix} x'_1 = -x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}(y) \cdot \mathbf{X}^T$$

Posunutí (translace) o vektor  $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$ :

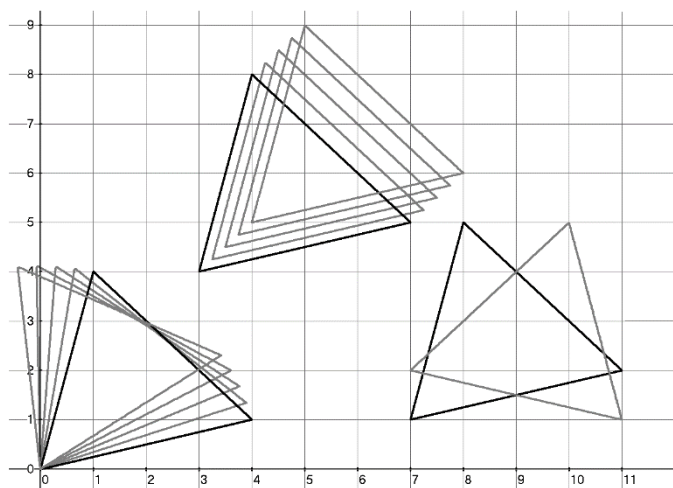
$$\mathbf{T}(\mathbf{v}): \begin{matrix} x'_1 = x_1 + v_1 \\ x'_2 = x_2 + v_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{v}^T$$

Otočení (rotace) o úhel  $\alpha$  kolem počátku:

$$\mathbf{R}(O; \alpha): \begin{matrix} x'_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x'_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}'^T = \mathbf{R}(O; \alpha) \cdot \mathbf{X}^T$$

Na obr. 2.8.2 vidíme takto provedenou rotaci trojúhelníka o  $5^\circ$  kolem počátku a posunutí o vektor  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  (obojí několikrát po sobě).



**Obr. 2.8.2:** Rotace trojúhelníka kolem počátku, posunutí a osová souměrnost podle přímky  $x = 9$ .

V počítačové grafice však nepotřebujeme jen taková „jednoduchá“ zobrazení. Otáčíme nejen kolem počátku, ale i kolem obecného bodu  $S = [s_1; s_2]$ . Útvar potřebujeme zobrazit

souměrně nejen podle souřadných os, ale i podle jiných přímek atd. Tato zobrazení získáváme skládáním zobrazení výše uvedených. Avšak tato skládání jsou v afinním prostoru dosti komplikovaná. Na obrázku vidíme sestrojenou souměrnost podle přímky  $p(x = 9)$ . Tato přímka vznikne posunutím osy  $y$  (tj. přímky  $x = 0$ ) o vektor  $\mathbf{v} = (9; 0)$ . Výše uvedená analytická reprezentace zobrazení  $O(y); \mathcal{T}(\mathbf{v})$  může tedy svádět k závěru, že „posunutá“ osová souměrnost je tvaru

$$O(p): \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}(y) \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{v}^T$$

Jestliže však podle tohoto vyjádření spočítáme souřadnice vrcholů obrazu zobrazovaného trojúhelníka, zjistíme, že výsledek neodpovídá syntetické konstrukci. Situace je totiž poněkud složitější. Abychom mohli použít matici  $\mathbf{O}_y$ , musí osa souměrnosti splývat s osou  $y$ . Proto musíme osu  $p(x = 9)$  i trojúhelník nejdříve posunout o vektor  $-\mathbf{v} = (-9; 0)$ , tj. použít zobrazení

$$\mathbf{X}_1^T = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X}^T - \mathbf{v}^T$$

Takto získaný bod  $X_1$  můžeme nyní zobrazit v osově souměrnosti s osou  $y$ , tj.

$$\mathbf{X}_2^T = \mathbf{O}(y) \cdot \mathbf{X}_1^T = \mathbf{O}(y) \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{X}^T - \mathbf{v}^T)$$

a konečně bod  $X_2$  „posunout zpět“ o vektor  $\mathbf{v}$ , tj.

$$\mathbf{X}'^T = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X}_2^T + \mathbf{v}^T = \mathbf{E} \cdot [\mathbf{O}(y) \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{X}^T - \mathbf{v}^T)] + \mathbf{v}^T$$

Pro osovou souměrnost podle osy  $x = v_1$  tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tato osová souměrnost je ilustrována opět na obr. 2. 8. 2.

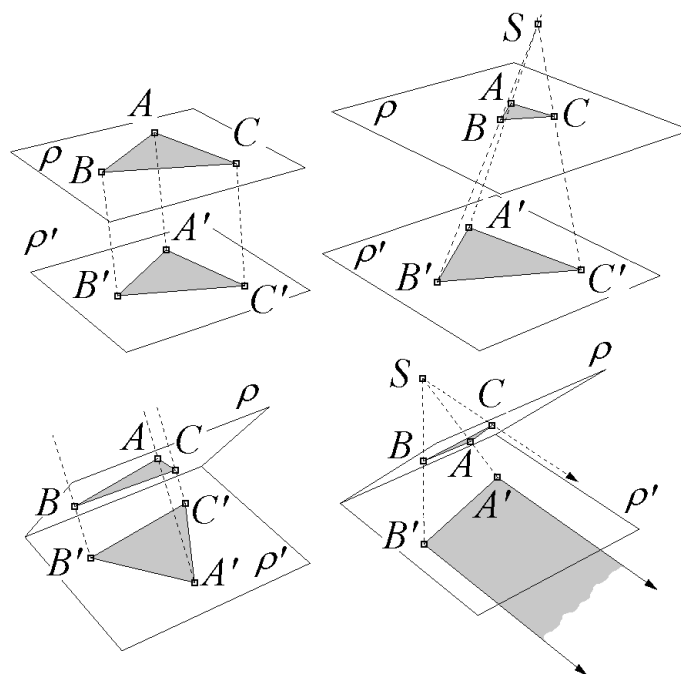
Z tohoto příkladu vidíme, že v euklidovské rovině je složení tří zobrazení už poměrně komplikované. Osovou souměrnost podle obecné přímky ale obdržíme složením ne tří, ale pěti zobrazení. Navíc budeme skládat zobrazení i v prostoru, kde bude princip stejný, počet skládaných zobrazení může být ještě vyšší a technické provedení ještě komplikovanější. V euklidovském prostoru je jak analytický, tak syntetický popis takového zobrazení již prakticky neúnosný. V následujících kapitolách proto prostudujeme tato zobrazení v projektní rovině, která tyto úlohy značně zjednoduší.

### 3 Projektivní prostor

#### 3.1 Základní pojmy

Jedním z důležitých pojmů počítačové geometrie je pojem promítání. Promítáním rozumíme zobrazení euklidovského prostoru do euklidovského prostoru, které každou přímku zobrazí opět na přímku, anebo na bod. Popis takových zobrazení je v euklidovském prostoru často velmi komplikovaný.

Podívejme se na potíže syntetického popisu takového zobrazení mezi dvěma různými euklidovskými rovinami, které označíme např.  $\rho; \rho'$ . Celou situaci si můžeme představit tak, že rovina  $\rho$  je průhledná fólie, na které je neprůhlednou barvou sestrojen nějaký geometrický útvar (úsečka, trojúhelník, atd.). Tato fólie je osvětlena světelným zdrojem, jehož paprsky po průchodu fólií dopadají na rovinné stínítko  $\rho'$ . Světelný zdroj může být buď bodový, anebo plošný, fólie může být se stínítkem rovnoběžná, anebo různoběžná. Dostáváme tak čtyři různé situace, které jsou znázorněny na obr. 3. 1. 1.



**Obr. 3.1.1.** Promítání roviny na rovinu

Budeme-li se chtít podrobněji popisovat vlastnosti tohoto zobrazení, bude třeba popisovat vždy každou situaci zvlášť. Například trojúhelníky  $\triangle ABC; \triangle A'B'C'$  jsou v prvním případě shodné, ve druhém už jen podobné. Ve třetím případě už trojúhelníky nemusejí být ani podobné a ve čtvrtém už obrazem trojúhelníka nemusí být trojúhelník. Přesto mají všechny čtyři případy mnohé vlastnosti společné. Proto je výhodné považovat je za případ jediný. To je ovšem možné jen rozšířením našich dosavadních geometrických představ.

Zmíněné čtyři situace se liší tím, že promítací přímky buď mají, anebo nemají společný bod a roviny buď mají, anebo nemají společnou přímku. Tyto čtyři na první pohled rozdílné situace budeme tedy moci popsat jako jediný případ, pokud zajistíme, aby i rovnoběžné přímky měly společný bod a rovnoběžné roviny společnou přímku. To vypadá na první pohled velmi podivně – zdá se, že bychom v euklidovském prostoru museli zrušit axiom o rovnoběžkách. I když geometrie, která nezná rovnoběžky, existuje, my půjdeme jinou cestou. V euklidovském prostoru nebudeme nic rušit, naopak ho rozšíříme. Podívejme se nejdříve na rovinu.

Euklidovskou rovinu rozšíříme o projektivní axiom:

**P:** Každé dvě přímky, které leží v téže rovině, mají společný bod.

Tím se sice dostáváme do sporu s axiomem **E** (o rovnoběžkách), situaci však jednoduše napravíme tím, že začneme rozlišovat dva druhy bodů: body, které jsme až dosud uvažovali, budou tzv. body vlastní. Axiom **E** tedy není třeba škrtat, stačí ho pouze upřesnit:

**E<sub>p</sub>:** Bodem  $A$  neležícím na přímce  $p$  prochází právě jedna přímka  $a$ , která s přímkou  $p$  nemá společný žádný **vlastní** bod.

Přímku  $a$ , o které mluví axiom **E<sub>p</sub>**, nazveme rovnoběžkou k přímce  $p$ . Axiom **E<sub>p</sub>** pak tedy říká, že rovnoběžky nemají společný žádný vlastní bod. Protože však podle axiomu **P** nějaký společný bod mít musí, bude tímto společným bodem bod, který není vlastní – nazveme ho tedy **bodem nevlastním**.

**Rovinu** resp. **prostor**, kde místo axiomu **E** platí axiomy **P** a **E<sub>p</sub>** nazveme **projektivní rovinou** resp. **projektivním prostorem**. Budeme značit  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$  resp.  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$ .

Než se zamyslíme nad tím, jak si nevlastní bod, projektivní rovinu a projektivní prostor představit (víme, že přísně vzato si je nemusíme představovat vůbec nijak), podíváme se na nějaké vlastnosti.

**1. VĚTA:** Každé dvě roviny projektivního prostoru mají

- a) společný bod
- b) společnou přímku

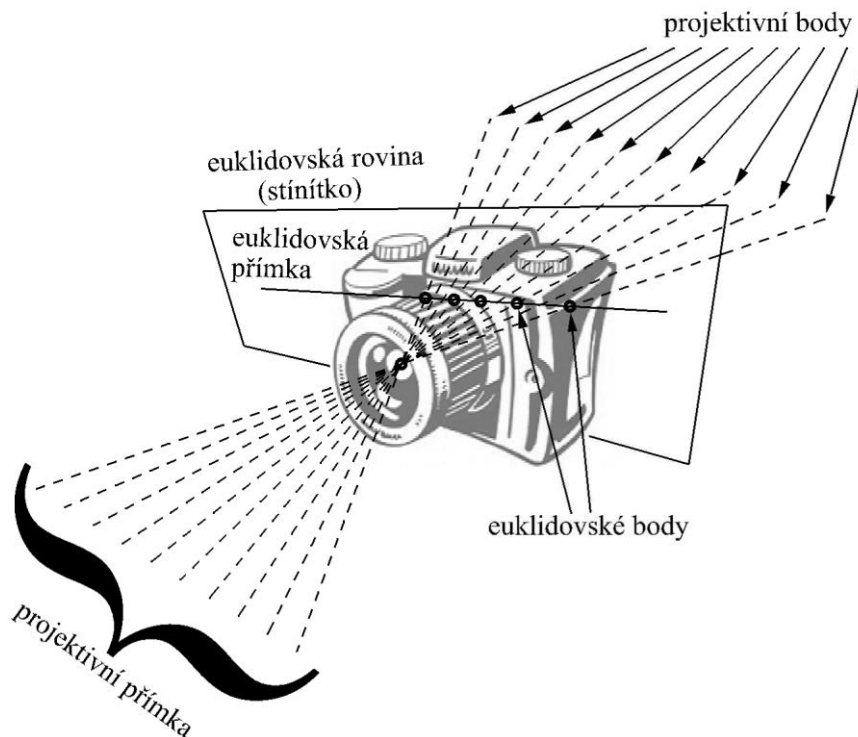
Pro ilustraci předvedme důkaz této věty (další věty už dokazovat nebudeme)

**Důkaz:** Jsou-li roviny  $\alpha; \beta$  různoběžné, mají společnou průsečnici, kterou známe již ze středoškolské geometrie. Je-li  $\alpha \parallel \beta$ , existují přímky  $a; b$  tak, že  $a \subset \alpha; b \subset \beta$  a  $a \parallel b$ . Podle axiomu **P** mají přímky  $a; b$  společný bod – označme ho  $R$ . Bod  $R$  tedy leží na přímce  $a$ , přímka  $a$  leží v rovině  $\alpha$ . Podle axiomu **I7** tedy bod  $R$  leží v rovině  $\alpha$ . Bod  $R$  ovšem leží i na přímce  $b$ , přímka  $b$  leží v rovině  $\beta$ , podle téhož axiomu **I7** tedy bod  $R$  leží i v rovině  $\beta$ . Bod  $R$  je tedy společným bodem rovin  $\alpha; \beta$  – dokázali jsme tvrzení a). Mají-li však dvě roviny společný bod, musí mít podle axiomu **I9** společnou přímku, která tímto bodem prochází. Tím je dokázáno i tvrzení b).

Zcela bez jakýchkoli představ, jen použitím dosavadních axiomů lze dále dokázat, že v každé rovině projektivního prostoru leží nekonečně mnoho nevlastních bodů, které všechny leží na jedné přímce. Jedná se o tzv. **nevlastní přímku** (na rozdíl od klasických přímek „euklidovských“ které nazýváme přímkami vlastními). Nevlastní přímkou je i společná přímka dvou rovnoběžných rovin.

Podívejme se nyní na to, jak si dané pojmy a vlastnosti představit – na modely projektivní roviny a projektivního prostoru. Stejně jako v případě euklidovské roviny a euklidovského prostoru máme k dispozici dva základní modely. Oba modelují projektivní útvary jako útvary euklidovské, které všechny procházejí jedním euklidovským bodem a mají „jeden rozměr navíc“.

**2. SYNTETICKÝ MODEL PROJEKTIVNÍ ROVINY:** Projektivní rovina je matematická konstrukce vhodná k popisu promítání. Modelem projektivní roviny může být trojrozměrný euklidovský prostor s výjimkou jednoho bodu. Představme si středové promítání na stínítko. Každý euklidovský bod v prostoru (mimo střed promítání) lze promítací přímkou promítnout na stínítko. Modelem projektivního bodu projektivní roviny bude celá tato promítací přímka. Množina všech promítacích přímek, které „svoje“ body promítají do euklidovské přímky, modeluje projektivní přímku (viz obr. 3. 1. 2.).



**Obr. 3.1.2.** Syntetický model projektivní roviny

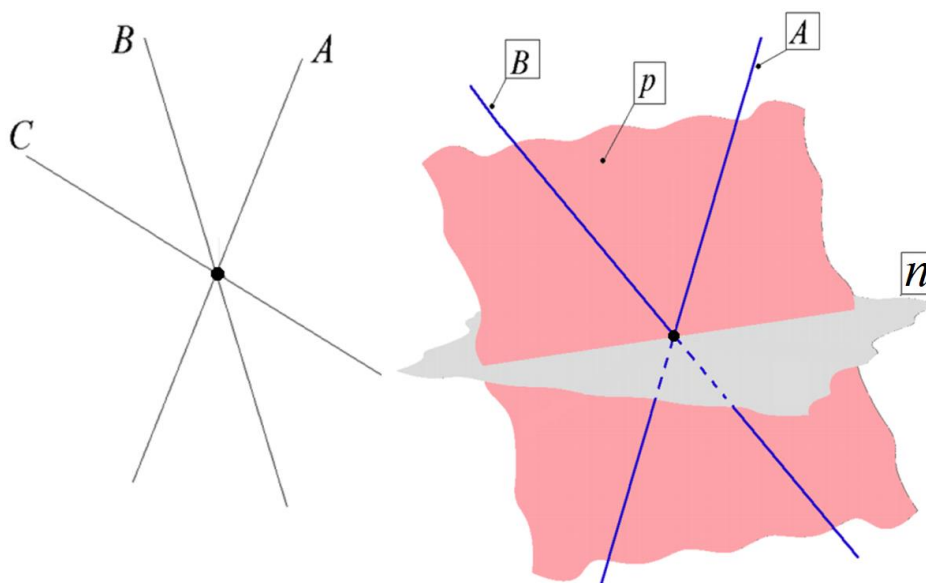
Na obr. 3.1.3 a 3.1.4 máme vymodelovány některé běžné situace týkající se incidence. Poněkud jsme změnilí prostorové uspořádání, abychom ho lépe využili při pozdějším analytickém popisu.

Na obr. 3.1.3 vlevo jsou body  $A; B; C$  projektivní roviny (promítací přímky z obr. 3.1.2), vpravo projektivní přímka  $p$  procházející projektivními body  $A; B$ . Dále je zde projektivní přímka  $n$ , která ani jedním z bodů  $A; B$  neprochází. Euklidovský bod, kterým všechny útvary  $n; p; A; B; C$  procházejí, není objektem našeho modelu projektivní roviny, odpovídá středu promítání na obr. 3.1.2.

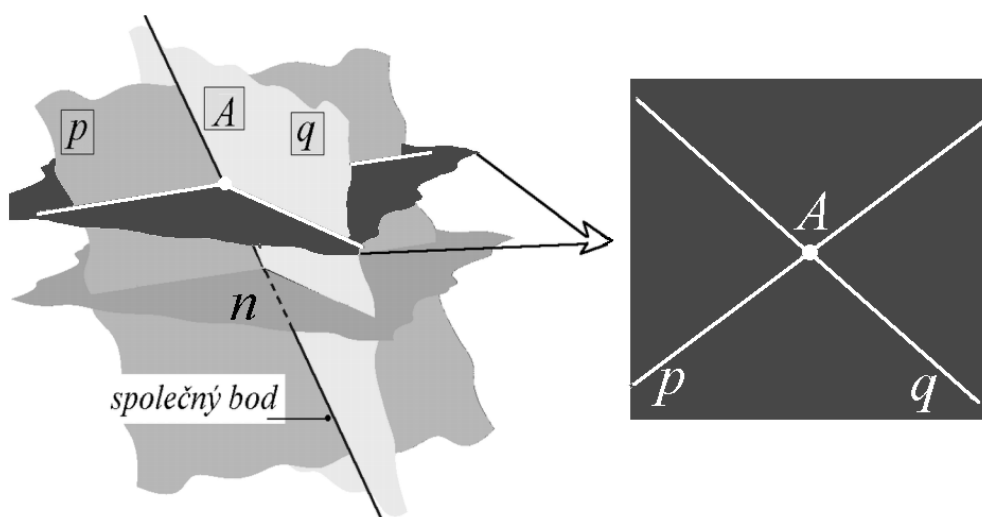
Na obr. 3.1.4 máme vymodelovány dvě projektivní různoběžky  $p; q$  se společným bodem  $A$ . Navíc zde máme sestrojenou rovinu, která neprochází společným bodem útvarů  $n; p; q; A$ , které modelují přímky resp. bod v rozšířené rovině. Tato rovina tedy není objektem našeho modelu, ale zřejmě modeluje euklidovskou rovinu – vidíme v ní „klasické“ modely různoběžek  $p; q$  a jejich průsečíku  $A$ . Tato rovina opět není objektem našeho modelu projektivní roviny a odpovídá stínítku na obr. 3.1.2.

Na obr. 3.1.5 jsou dvě rovnoběžky, které mají v projektivní rovině rovněž společný bod modelovaný euklidovskou přímkou  $\infty A$ . Ta neprotíná model euklidovské roviny a pro tento bod tedy nelze v euklidovské rovině použít „klasický“ model – „bezrozměrnou“ tečku. Tento bod je ovšem možné v euklidovské rovině vyznačit jako směrový vektor  $\infty A$  – tj. společný směrový vektor přímek  $p; q$ . Všimněte si, že nevlastní bod  $\infty A$  leží na přímce  $n$ , kterou rovněž není možné tradičně znázornit. Je to nevlastní přímka naší projektivní roviny. Budeme-li měnit směr rovnoběžných přímek  $p; q$ , bude se měnit i jejich společný nevlastní bod. Vždy však bude ležet na nevlastní přímce  $n$ .

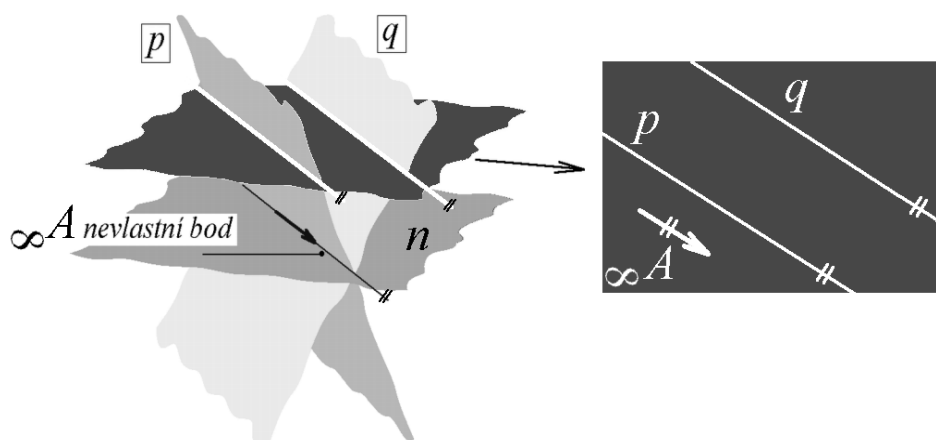




**Obr. 3.1.3** Body  $A; B; C$  projektivní roviny (vlevo), přímka  $p$  procházející body  $A; B$  a přímka  $n$ , která těmito body neprochází (vpravo)



**Obr. 3.1.3** Přímky  $p; q$  projektivní roviny se společným bodem  $A$  s model euklidovské roviny

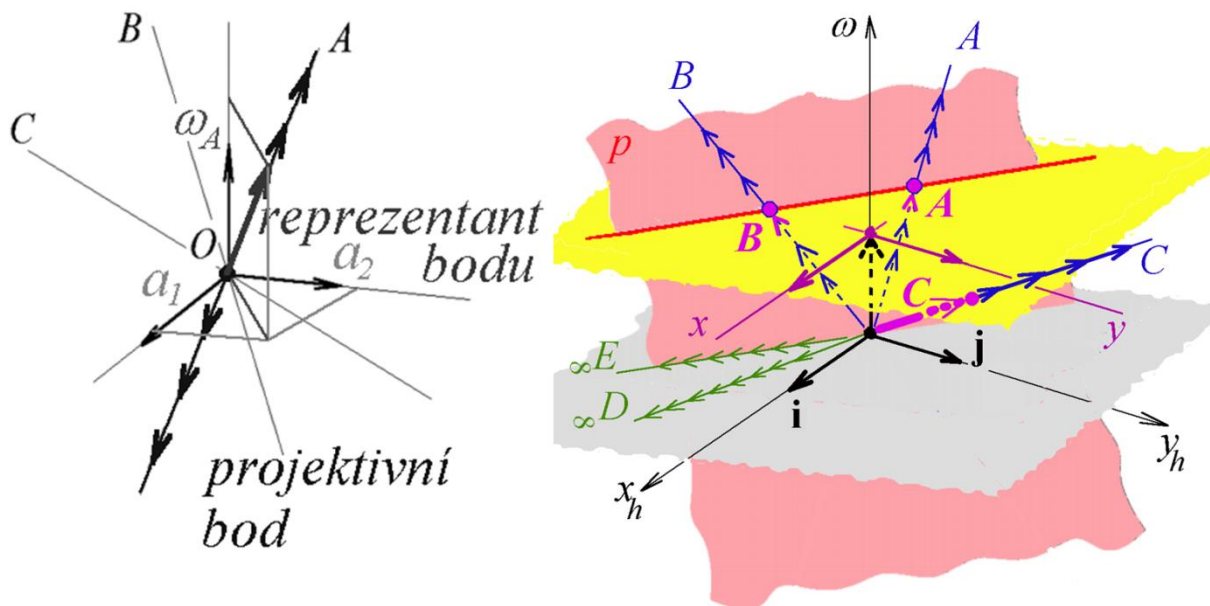


**Obr. 3.1.4** Rovnoběžky  $p; q$  projektivní roviny se společným nevlastním bodem  $\infty A$ .

**3. ANALYTICKÝ MODEL PROJEKTIVNÍ ROVINY.** Analytickým modelem roviny  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$  je množina všech jednorozměrných podprostorů zaměření  $Z(\mathcal{E}^3)$ . Bodem v tomto modelu je tedy množina všech vektorů tvaru

$$P = \{k \cdot (p_1; p_2; p_3) | (p_1; p_2; p_3) \in Z(\mathcal{E}^3); k \in \mathbb{R}\}$$

Abychom tento model uvedli do souvislosti s předchozím modelem syntetickým, opatřeme syntetický model kartézskou souřadnou soustavou s osami  $x = \langle O; \mathbf{i} \rangle$ ;  $y = \langle O; \mathbf{j} \rangle$ ;  $\omega = \langle O; \mathbf{k} \rangle$ . Počátek zvolme ve společném bodě euklidovských přímek, které modelují projektivní body, tj. ve středu promítání 3.1.2. Tyto euklidovské přímky lze chápat násobky směrového vektoru  $\mathbf{p} = (p_1; p_2; \omega_p)$ .



**Obr. 3.1.5** K analytickému modelu projektivní roviny.

Jednotlivé (nenulové) vektory z tohoto podprostoru, tj. např.  $(p_1; p_2; \omega_p) \neq \mathbf{0}$ ;  $(2p_1; 2p_2; 2\omega_p)$ ;  $(-3p_1; -3p_2; -3\omega_p)$  nazveme **reprezentanty projektivního bodu**  $P$  – budeme je značit  $\mathbf{P}^*$ . Je-li  $\mathbf{P}^* = (p_1; p_2; \omega_p)$ ; pak uspořádanou trojici  $(p_1; p_2; \omega_p)$  nazýváme homogenní souřadnice bodu  $P$ . Euklidovská rovina  $n$ , která modeluje nevlastní přímku, má rovnici  $\omega = 0$ .

Má-li být **bod**  $A = \{k \cdot (a_1^*; a_2^*; \omega_A)\}$  **vlastní**, musí euklidovská přímka určená počátkem a některým reprezentantem bodu  $A$  protnout euklidovskou rovinu, která má v naší kartézské souřadné soustavě rovnici  $\omega = 1$ . To ovšem znamená, že  $\omega_A \neq 0$ . V tom případě ovšem můžeme položit  $k = \omega_A^{-1}$  a vlastní bod reprezentovat vektorem

$$\mathbf{A}^* = \left( \frac{a_1^*}{\omega_A}; \frac{a_2^*}{\omega_A}; 1 \right) = (a_1; a_2; 1) \quad (3.1.1)$$

„Koncový bod“ každého takového vektoru leží v euklidovské rovině o rovnici  $\omega = 1$ . V této rovině lze zvolit kartézskou souřadnou soustavu tak, že „koncový bod“ reprezentanta  $\mathbf{A}^*$  má kartézské souřadnice  $[a_1; a_2]$ . Tento vektor budeme nazývat **standardním reprezentantem** bodu  $A$ . V dalším textu budeme pracovat většinou se standardními reprezentanty vlastních bodů. V tom případě budeme místo  $\mathbf{A}^*$  psát jenom  $\mathbf{A}$ . Případné jiné reprezentanty vlastních bodů budeme pro odlišení značit  $\mathbf{A}^*$ .

**4. NEVLASTNÍ BOD** v syntetickém modelu představovala přímka ležící v rovině  $\omega = 0$ . Je-li tedy  ${}_{\infty}\mathbf{S}^* = (s_1; s_2; \omega_S)$  reprezentant nevlastního bodu, musí být  $\omega_S$ , takže nevlastní bod je množina vektorů tvaru

$${}_{\infty}S = \{(ks_1; ks_2; k \cdot 0); k \neq 0\} = \{(ks_1; ks_2; 0); k \neq 0\}$$

a je možno ho reprezentovat vektorem

$${}_{\infty}\mathbf{S} = (ks_1; ks_2; 0); k \neq 0 \quad (3.1.2)$$

Přímku s tímto směrovým vektorem nelze v euklidovské rovině zobrazit jako bod. Nevlastní body tedy interpretujeme jako směry, jejich jednotlivé reprezentanty jako vektory daného směru. V analytických konstrukcích budeme tyto body místo  ${}_{\infty}\mathbf{S}^*$  často značit malým tučným  $\mathbf{s}$ .

**5. ANALYTICKÝ MODEL PROJEKTIVNÍHO PROSTORU** Konstrukce trojrozměrného projektivního prostoru  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$  probíhá prakticky stejně jako konstrukce (dvojrzměrné) projektivní roviny  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$ . Pokud bychom při konstrukci syntetického modelu trojrozměrného projektivního prostoru měli projít celou předchozí cestu, potřebovali bychom znázornit čtyřrozměrný euklidovský prostor. Uveďme tedy raději jen výsledky, které jsou analogické výsledkům předchozím.

Nevlastní bod společný rovnoběžným přímkám znázorňujeme jako jejich společný směr (tj. libovolný směrový vektor), nevlastní přímku společnou dvěma rovnoběžným rovinám znázorňujeme jakou dvojsměr (tj. libovolnou dvojici vektorů, které tvoří jejich zaměření). V trojrozměrném projektivním prostoru existuje nekonečně mnoho nevlastních přímek (roviny, které jsou navzájem rovnoběžné, procházejí vždy jednou z nich) a množina všech bodů všech nevlastních přímek tvoří nevlastní rovinu.

Také analytický popis trojrozměrného projektivního prostoru je zcela analogický dvojrzměrnému případu. Projektivní body  $P \in {}_{\infty}\mathcal{E}^3$  jsou množiny uspořádaných čtveřic

$$P = \{k \cdot (p_1; p_2; p_3; p_4) | (p_1; p_2; p_3; p_4) \in Z(\mathcal{E}^4); k \in \mathbb{R}\}$$

volbou konkrétní hodnoty  $k \neq 0$  dostáváme jednotlivé reprezentanty.

Vlastní bod je tvaru

$$A = \{k \cdot (a_1^*; a_2^*; a_3^*; \omega_A)\}; \omega_A \neq 0$$

a můžeme ho reprezentovat standardním reprezentantem, tj. vektorem

$$\mathbf{A}^* = \left(\frac{a_1^*}{\omega_A}; \frac{a_2^*}{\omega_A}; \frac{a_3^*}{\omega_A}; 1\right) = (a_1; a_2; a_3; 1) \quad (3.1.1a)$$

Nevlastní bod je tvaru

$${}_{\infty}S = \{(ks_1; ks_2; ks_3; k \cdot 0)\} = \{(ks_1; ks_2; ks_3; 0)\}$$

a je možno ho reprezentovat vektorem

$${}_{\infty}\mathbf{S} = \mathbf{s} = (ks_1; ks_2; ks_3; 0)$$

Množina všech vlastních bodů projektivní roviny (projektivního prostoru) splňuje všechny axiomy euklidovské geometrie, projektivní geometrie tak „umí“ všechno, co tradiční geometrie euklidovská. Díky nevlastním bodům však „umí“ něco navíc. Projektivní rovinu (prostor) můžeme tedy chápat jako euklidovskou rovinu (prostor) rozšířenou (rozšířený) o nevlastní body – proto je značíme  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$ . resp.  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$ .

Vlastní body projektivního prostoru lze chápat jako euklidovské (jsou to koncové body vektorů tvaru  $1a$ ), nevlastní body chápeme jako směry, jejich reprezentanty jako vektory daného směru. V syntetických konstrukcích máme k dispozici pouze euklidovskou rovinu resp. prostor. Vlastní body tedy chápeme tradičně euklidovsky, body nevlastní pak chápeme jako směry.

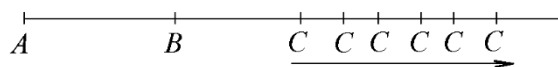
### 3.2 Dělicí poměr a dvojpoměr bodů

V závěru kapitoly 2.8 jsme konstatovali, že v euklidovském prostoru se velmi obtížně popisuje skládání zobrazení. Tento problém se značně zjednoduší v prostoru projektivním. Než však k němu přistoupíme, je třeba se seznámit s ústředním pojmem projektivní geometrie a tím je dvojpoměr bodů.

**1. DEFINICE - dělicí poměr vlastních bodů:** Dělicí poměr  $(A; B; C)$  tří různých kolineárních vlastních bodů  $A; B; C$  (v tomto pořadí) je číslo, pro které platí:

$$|(A; B; C)| = \frac{|AC|}{|BC|}; (A; B; C) > 0 \Leftrightarrow B \mu AC$$

K určení dělicího poměru v případě, že jeden bod je nevlastní, pomůže představa nevlastního bodu jako „bodu v nekonečnu“ (viz obr. 3.2.1). Např. dělicí poměr  $(A; B; \infty C)$  stanovíme touto úvahou: Pokud se bod  $C$  bude od bodů  $A; B$  vzdalovat, budou velikosti úseček  $AC$ ;  $BC$  růst. Rozdíl těchto velikostí bude sice stále stejný – na připojeném obrázku stále platí  $|AC| - |BC| = |AB|$  - ovšem podíl se bude měnit a blížit se k jedničce. Podobně bychom řešili zbylé dvě trojice. Je tedy přirozené definovat



**Obr. 3.2.1** K dělicímu poměru bodů, z nichž jeden je nevlastní

**2. DEFINICE - dělicí poměr bodů, z nichž jeden je nevlastní:**

$$(A; B; \infty C) = (\infty A; B; C) = 1; (A; \infty B; C) = 0$$

**3. PŘÍKLAD:** Je-li  $S$  střed úsečky  $AB$ , pak

$$\text{a) } (A; B; S) = (B; A; S) = -1 \quad \text{b) } (A; S; B) = (B; S; A) = 2 \quad \text{c) } (S; A; B) = (S; B; A) = \frac{1}{2}$$

**4. DEFINICE – dvojpoměr:** Necht'  $A; B; C; D$  jsou navzájem různé kolineární body (tj. body ležící na téže přímce). Dvojpoměrem  $(A; B; C; D)$  bodů  $A; B; C; D$  rozumíme číslo

$$(A; B; C; D) = \frac{(A; B; C)}{(A; B; D)}$$

V projektivní rovině a v projektivním prostoru nás budou nejvíce zajímat zobrazení, v nichž obrazem každé přímky je buď opět přímka, anebo bod. Takové zobrazení nazýváme projektivním zobrazením nebo také promítáním.

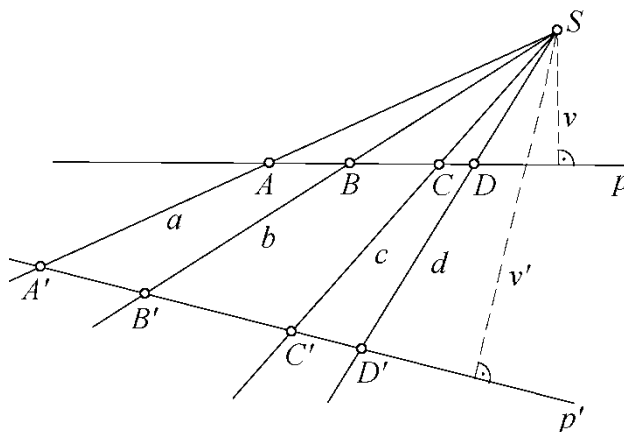
**5. DEFINICE – projektivní zobrazení (promítání)** je zobrazení, v němž obrazem přímky je opět přímka, anebo bod.

**6. DEFINICE – kolineární zobrazení** – je speciálním případem projektivního zobrazení. Je to zobrazení, které je projektivní a navíc prosté. Toto zobrazení tedy každou přímku zobrazuje na přímku (nemůže ji zobrazit na bod)

**7. DEFINICE – promítání přímky na přímku:** V projektivní rovině jsou dány přímky  $p; p'$  a bod  $S \notin p; p'$ . Zobrazení, které každému bodu  $A \in p$  přiřadí bod  $A' \in p' \cap SA$  nazýváme promítáním přímky  $p$  na přímku  $p'$  z bodu  $S$ . Bod  $S$  nazýváme střed promítání, Přímku  $SA$  nazýváme **promítací přímkou** bodu  $A$ . Promítání, jehož střed je vlastní, nazýváme **středové**, promítání s nevlastním středem **nazýváme rovnoběžné**.

**8. VĚTA Pappova:** Promítání přímky na přímku zachovává dvojpoměr bodů.

**Důkaz:** Jsou-li  $p; p'$  rovnoběžné nebo  $S$  nevlastní, je zřejmě zachován nejen dvojpoměr, ale i dělicí poměr. Předpokládejme tedy  $p \nparallel p'$  a  $S$  vlastní. Označme dle obrázku  $\sphericalangle ab$  odchylku přímek  $ab$ , podobně v ostatních případech. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat  $B\mu AC; C\mu BD$  (viz obr. 3.2.2) :



Obr. 3.2.2 K důkazu Pappovy věty

$$\begin{aligned}
 (A; B; C; D) &= \frac{(A; B; C)}{(A; B; D)} = \frac{\frac{|AC| \cdot v}{|BC| \cdot v}}{\frac{|AD| \cdot v}{|BD| \cdot v}} = \frac{\frac{2 \cdot S_{\Delta ACS}}{2 \cdot S_{\Delta BCS}}}{\frac{2 \cdot S_{\Delta ADS}}{2 \cdot S_{\Delta BDS}}} = \\
 &= \frac{|AS| \cdot |CS| \cdot \sin \sphericalangle ac}{|BS| \cdot |CS| \cdot \sin \sphericalangle bc} \cdot \frac{|BS| \cdot |DS| \cdot \sin \sphericalangle bd}{|AS| \cdot |DS| \cdot \sin \sphericalangle ad} = \\
 &= \frac{\sin \sphericalangle ac \cdot \sin \sphericalangle bd}{\sin \sphericalangle bc \cdot \sin \sphericalangle ad} = \frac{|A'S| \cdot |C'S| \cdot \sin \sphericalangle ac \cdot |B'S| \cdot |D'S| \cdot \sin \sphericalangle bd}{|B'S| \cdot |C'S| \cdot \sin \sphericalangle bc \cdot |A'S| \cdot |D'S| \cdot \sin \sphericalangle ad} = \frac{S_{\Delta A'C'S} \cdot S_{\Delta B'D'S}}{S_{\Delta B'C'S} \cdot S_{\Delta A'D'S}} = \\
 &= \frac{|A'C'| \cdot v'}{|B'C'| \cdot v'} \cdot \frac{|A'D'| \cdot v'}{|B'D'| \cdot v'} = \frac{(A'; B'; C')}{(A'; B'; D')} = (A'; B'; C'; D')
 \end{aligned}$$

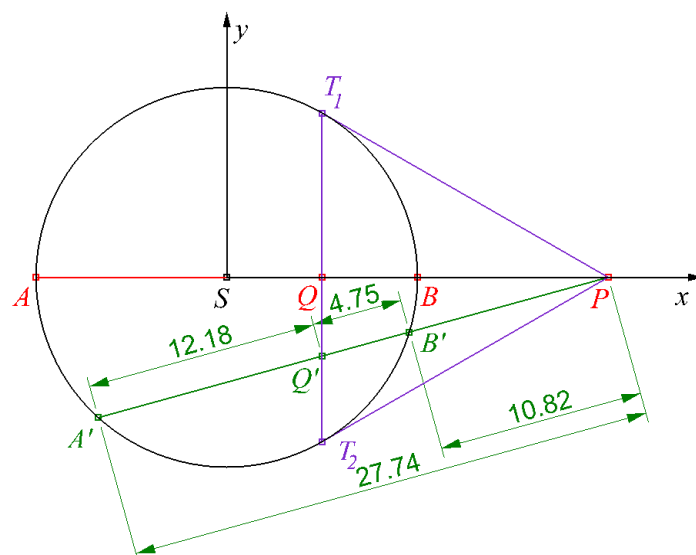
Důležitým důsledkem Pappovy věty je skutečnost, že každé kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr bodů.

**9. PŘÍKLAD:** Necht'  $A; B; C; D$  jsou po řadě obrazy čísel 0; 1; 2; 3 na číselné ose. Pak

$$(A; B; C; D) = \frac{(A; B; C)}{(A; B; D)} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \quad (A; C; B; D) = \frac{(A; C; B)}{(A; C; D)} = \frac{\frac{-1}{3}}{\frac{3}{1}} = -\frac{1}{3}$$

**10. PŘÍKLAD:** Necht'  $A; B; P; Q$  jsou po řadě obrazy čísel  $-1; 1; \frac{1}{2}; 2$  na číselné ose. Pak

$$(A; B; P; Q) = \frac{(A; B; P)}{(A; B; Q)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{3:1} = -1 \quad (A; B; Q; P) = \frac{(A; B; Q)}{(A; B; P)} = \frac{3:1}{\frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{2})} = -1$$



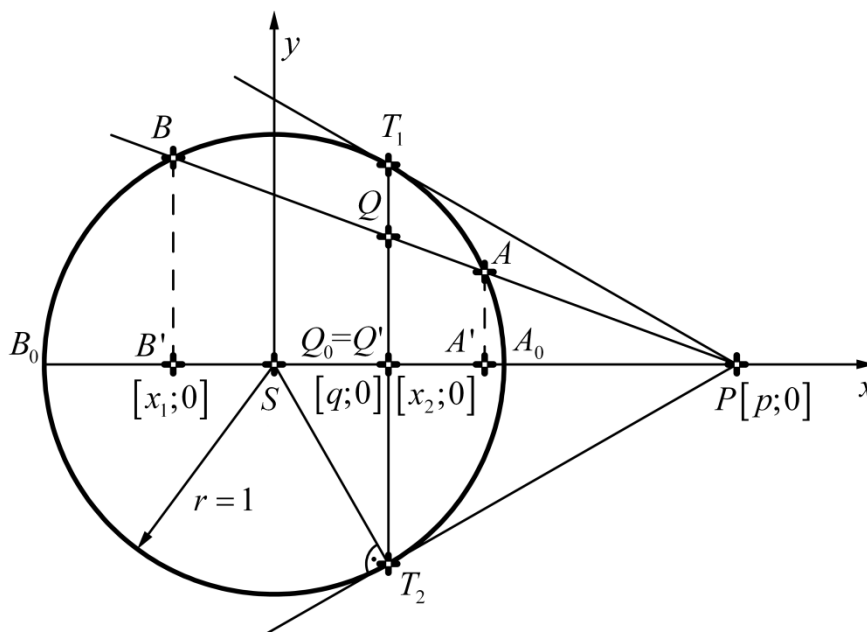
Obr. 3.2.3 Harmonická čtveřice bodů

Zadané body  $A; B; P; Q$  jsou sestrojeny na obr. 3. 2. 3. Nad průměrem  $AB$  je dále sestrojena kružnice a z bodu  $P$  k ní sestrojeny tečny. Bod  $Q$  pak leží v průsečíku přímek  $AB; T_1T_2$ . Dvojpoměr  $-1$  zjistíme i v případě, že body  $A; B$  leží na jiné sečně vedené z bodu  $P$ . Z kót na obrázku je zřejmé:

$$(A'; B'; P'; Q') = \frac{(A'; B'; P')}{(A'; B'; Q')} = \frac{\frac{27.74}{10.82}}{-\frac{12.18}{4.75}} = -1$$

Kóty, a proto i výsledek, jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa. Dokažme tuto vlastnost obecně (značení - viz obr.3.2.4. ).

Zvolme kartézskou souřadnou soustavu  $\langle O; \mathbf{i}; \mathbf{j} \rangle$  tak, že  $S = O$ ;  $P \in x = \langle O; \mathbf{i} \rangle$  a  $\|\mathbf{i}; \mathbf{j}\| = \|\mathbf{i}; \mathbf{j}\| = r$ .



Obr. 3.2.4 K důkazu harmonické čtveřice bodů (p5ehodit AB)

Dokažme nejdříve, že tvrzení platí pro sečnu procházející středem kružnice. Podle Euklidovy věty o odvěsně je  $p \cdot q = r^2$ . Dále je  $1 = r^2$ . Odečtením těchto dvou rovnic dostáváme  $pq - 1 = 0$ , takže

$$\begin{aligned}pq - 1 &= -pq + 1 \\pq + q - p - 1 &= -pq + q - p + 1 \\q(p + 1) - p - 1 &= -q(p - 1) - p + 1 \\q(p + 1) - (p + 1) &= -q(p - 1) - (p - 1) \\(q - 1)(p + 1) &= -(q + 1)(p - 1) \\\frac{(p + 1)(q - 1)}{(p - 1)(q + 1)} &= -1 \\\frac{|PA_0||Q_0B_0|}{|PB_0||Q_0A_0|} &= -1 \\(A_0; B_0; Q_0; P) &= -1\end{aligned}$$

Uvažujme nyní libovolnou sečnu. Body  $A; B; P; Q$  promítneme pravoúhlým promítáním na osu  $x$ , dostaneme průměty  $A'; B'; P'; Q'$ . Podle Pappovy věty je  $(A; B; P; Q) = (A'; B'; P'; Q')$ , stačí tedy dokázat, že  $(A'; B'; P'; Q') = -1$ . Kružnice má v naší souřadné soustavě rovnici  $x^2 + y^2 = 1$  a sečna  $y = k(x - p)$ . První souřadnice bodů  $A'; B'$  tedy dostaneme řešením soustavy těchto dvou rovnic. Dosazením druhé do první dostaneme po úpravě

$$(1 + k^2)x^2 - 2k^2px + k^2p^2 - 1 = 0$$

tedy

$$x_{1;2} = \frac{k^2p \pm M}{1 + k^2}; \quad \text{kde } M = \sqrt{k^2 - k^2p^2 + 1}$$

Protože

$$p - x_{1;2} = p - \frac{k^2p \pm M}{1 + k^2} = \frac{p \mp M}{1 + k^2}$$

a

$$q - x_{1;2} = \frac{1}{p} - x_{1;2} = \frac{1}{p} - \frac{k^2p \pm M}{1 + k^2} = \frac{1 + k^2 - k^2p \mp Mp}{p(1 + k^2)}$$

dostáváme pro dvojpoměr

$$(A'; B'; C'; D') = \frac{\frac{p - x_1}{p - x_2}}{\frac{q - x_1}{q - x_2}} = \frac{\frac{p - M}{p + M}}{\frac{1 + k^2 - k^2p - Mp}{1 + k^2 - k^2p + Mp}} = \frac{\frac{p - M}{p + M}}{\frac{M^2 - Mp}{M^2 + Mp}} = -1$$

Pro body, jejichž dvojpoměr je roven mínus jedné, zavedeme speciální název:

**11. DEFINICE - harmonická čtveřice, harmonicky sdružené body:** Čtyři kolineární body  $A; B; P; Q$ , pro které je  $(A; B; P; Q) = -1$ , nazýváme harmonická čtveřice. O bodech  $P; Q$  říkáme, že jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům  $A; B$ .

**12. DEFINICE – pól, polára, polárně sdružené body:** Nechť  $P$  je bod, ze kterého lze vést dvě tečny ke kružnici (obecně kuželosečce),  $T_1; T_2$  body dotyku těchto tečen,  $p = T_1T_2$   $Q\mu T_1T_2$ . Pak bod  $P$  nazýváme pólem kružnice (kuželosečky), přímkou  $p$  polárou a  $Q$  bod polárně sdružený s pólem  $P$ .

### 3.3 Zobrazení v ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$

**1. ZACHOVÁNÍ DĚLICÍHO POMĚRU:** Jak jsme konstatovali v závěru předchozí kapitoly, všechna kolineární zobrazení zachovávají dvojpoměr bodů. Mnohá z nich však zachovávají i dělicí poměr. Především jsou to shodná zobrazení, která zachovávají velikosti úseček. Dále jsou to zobrazení podobná, která jsou složena ze zobrazení shodných a ze stejnolehlosti. Zachování dělicího poměru vyplývá z vlastností podobných trojúhelníků.

Každé projektivní zobrazení v projektivní rovině lze popsat soustavou rovnic

$$\begin{pmatrix} k'x'_1 \\ k'x'_2 \\ k'\omega'_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ k\omega_X \end{pmatrix}; \quad k; k' \neq 0$$

V této rovnici vystupují libovolní reprezentanti bodů  $X; X'$  (čísla  $k; k'$  lze volit libovolně), budeme tedy volit většinou  $k = k' = 1$ , rovnice bude tedy tvaru

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \omega'_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \omega_X \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

kde  $\omega_X$  resp.  $\omega'_X$  je rovno jedné, nebo nule podle toho, zda bod  $X$  resp.  $X'$  je vlastní, nebo nevlastní.

Uvažujme tři různé kolineární vlastní body  $A; B; C$ . Podle definice dělicího poměru musí být  $(A; B; C) \neq 0; 1$ . Zobražíme-li tyto body na body  $A'; B'; C'$  zobrazením, které zachovává dělicí poměr, musí být rovněž  $(A'; B'; C') \neq 0; 1$ , což podle definice dělicího poměru znamená, že i body  $A'; B'; C'$  jsou navzájem různé a všechny vlastní. Zobrazení, které zachovává dělicí poměr, tedy zobrazuje vždy vlastní bod na vlastní bod. Jestliže tedy rovnice (1) je rovnicí takového zobrazení, musí platit

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To ovšem znamená, že musí být  $a_{31} = a_{32} = 0$  a  $a_{33} = 1$ . Kolineární zobrazení v euklidovské rovině lze tedy popsat projektivním zobrazením tvaru

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T \quad (3.3.2)$$

kde  $\mathbf{X}; \mathbf{X}'$  jsou standardní reprezentanti vlastních bodů  $X; X'$  projektivního prostoru. Tyto reprezentanty můžeme chápat jako polohové vektory bodů  $X; X'$  v euklidovském prostoru. Zobrazení, které zachovává dělicí poměr, nazýváme afinitou.

### 2. ZÁKLADNÍ ZOBRAZENÍ V ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$ :

Posunutí o vektor  $\mathbf{v}$ :

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}): \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{X}'^T = \mathbf{T}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X}^T$$

Otočení o úhel  $\alpha$  kolem počátku



$$\mathcal{R}(O; \alpha): \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{R}(O; \alpha) \cdot \mathbf{X}^T$$

(porovnejte tato vyjádření se zápisem stejných zobrazení v euklidovském prostoru – viz kpt. 2. 5.) Každé kolineární zobrazení je tak zcela určeno maticí typu  $3 \times 3$ . Uveďme v přehledu matice známých zobrazení v základním tvaru.

Označení	$S(x)$	$S(y)$	$S(O)$	$\mathcal{R}(O; \alpha)$
Název	Souměrnost podle osy $x$	Souměrnost podle osy $y$	Souměrnost podle počátku	Otočení kolem počátku o úhel $\alpha$

Matice

$$\mathbf{S}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}(y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}(O) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(O; \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Označení	$\mathcal{T}(\mathbf{v})$	$\mathcal{H}(O; \lambda)$
Název	Posunutí o vektor $\mathbf{v}$	Stejnolehlost se středem $O$ a koeficientem $\lambda$

Matice

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(O; \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3. SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ V  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$ :** Výhodou této reprezentace zobrazení je jednoduché skládání. Pokusme se najít matici osové souměrnosti podle přímky  $p(x=9)$ . Tento příklad jsme již řešili v euklidovském prostoru – „syntetický“ návod je stejný: musíme složit tři zobrazení: posunutí o vektor  $-\mathbf{v}$ , souměrnost podle osy  $y$  a posunutí o vektor  $\mathbf{v}$  (musíme skládat přesně v tomto pořadí – skládání zobrazení není komutativní). Tedy

libovolný bod  $X$  posuneme o vektor  $-\mathbf{v}$  do bodu  $X_1$ :  $\mathbf{X}_1^T = \mathbf{T}(-\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X}^T$   
bod  $X_1$  zobrazíme v souměrnosti podle  $y$  do bodu  $X_2$ :  $\mathbf{X}_2^T = \mathbf{S}(y) \cdot \mathbf{X}_1^T = \mathbf{S}(y) \cdot \mathbf{T}(-\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X}^T$   
bod  $X_2$  posuneme o vektor  $\mathbf{v}$  do bodu  $X'$ :  $\mathbf{X}'^T = \mathbf{T}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X}_2^T = \mathbf{T}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}(y) \cdot \mathbf{T}(-\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X}^T$ .

Všimněte si, že matice  $\mathbf{S}(p)$  takto složeného zobrazení vznikla vynásobením matic použitých zobrazení:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(p) &= \mathbf{T}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}(y) \cdot \mathbf{T}(-\mathbf{v}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2v_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Chceme-li zapsat pořadí, v jakém provádíme dílčí zobrazení, použijme operaci skládání, kterou známe z matematické analýzy, tedy

$$S(p) = \mathcal{T}(\mathbf{v}) \circ S(y) \circ \mathcal{T}(-\mathbf{v})$$

-  $\mathcal{T}(\mathbf{v})$  po  $S(y)$  po  $\mathcal{T}(-\mathbf{v})$  - zobrazení tedy provádíme v obráceném pořadí, než v jakém jsou zapsána (posunutí  $\mathcal{T}(\mathbf{v})$  je zapsáno jako první, ale prováděno je poslední). Násobení matic (3.3.3) je zapsáno stejně, provádíme ho tedy rovněž v obráceném pořadí. To je poněkud nepříjemné (zaměnit pořadí násobení matic samozřejmě nesmíme). Tato nepříjemnost se dá

obejít tím, že budeme všechny matice používat v transponované podobě. Rovnice (3.3.2) by pak byla tvaru

$$(x'_1 \ x'_2 \ 1) = (x_1 \ x_2 \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^T \quad (3.3.4)$$

a matice v transponované rovnici (3.3.3)

$$\mathbf{S}^T(p) = \mathbf{T}^T(-\mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}^T(y) \cdot \mathbf{T}^T(\mathbf{v})$$

bychom pak násobili v pořadí, v jakém zobrazení skutečně provádíme. Tvar rovnice (4) je však poněkud neobvyklý, rovněž indexy prvků v matici  $\mathbf{A}^T$  jsou obráceně než bývá zvykem. Proto budeme dále používat tvary rovnic (1) a (2).

**4. PŘÍKLAD:** Vypočtěme matici osové souměrnosti podle přímek  $r(y = x)$ ;  $s(y = -x)$

**Řešení:** Otočíme-li přímku  $r$  o  $-\frac{\pi}{4}$  kolem počátku, splyne s osou  $x$ . Pak lze použít osovou souměrnost s maticí  $\mathbf{S}(x)$  a nakonec použijeme otočení o  $\frac{\pi}{4}$ , abychom osu „vrátili do původní polohy“. První z hledaných matic je tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(r) &= \mathbf{R}\left(O; \frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{R}\left(O; -\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{R}\left(O; \frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{R}^{-1}\left(O; \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podobně pro druhý případ (proved'te výpočet!)

**5. PŘÍKLAD:** Sestrojme matici osové souměrnosti s obecnou osou.

**Řešení:** Případ osové souměrnosti s osou  $p \parallel y$  jsme již vyřešili – viz vztah (3.3.3). Zcela analogický výsledek bychom dostali v případě osy  $q \parallel x$  – zde by bylo  $\mathbf{S}(q) = \mathbf{T}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{T}(-\mathbf{v})$ . V případě že osa  $r$  není rovnoběžná ani s  $x$ , ani s  $y$ , pak je třeba započítat i otočení o úhel  $\alpha = \angle r x$ . Je-li tedy  $R \in r$  libovolný bod a  $\mathbf{r}$  jeho polohový vektor, je

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(r) &= \mathbf{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}(O; \alpha) \cdot \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{R}(O; -\alpha) \cdot \mathbf{T}(-\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}(O; \alpha) \cdot \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{R}^{-1}(O; \alpha) \cdot \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Vidíme, že analytické skládání zobrazení v projektivním prostoru spočívá v mechanickém násobení matic. Nemusíme-li tyto součiny počítat ručně, je toto skládání podstatně výhodnější než skládání v prostoru afinním. Násobení matic je totiž programátorsky zcela rutinní záležitost, proto jsou geometrická zobrazení v CAD systémech realizována právě pomocí operací s maticemi.

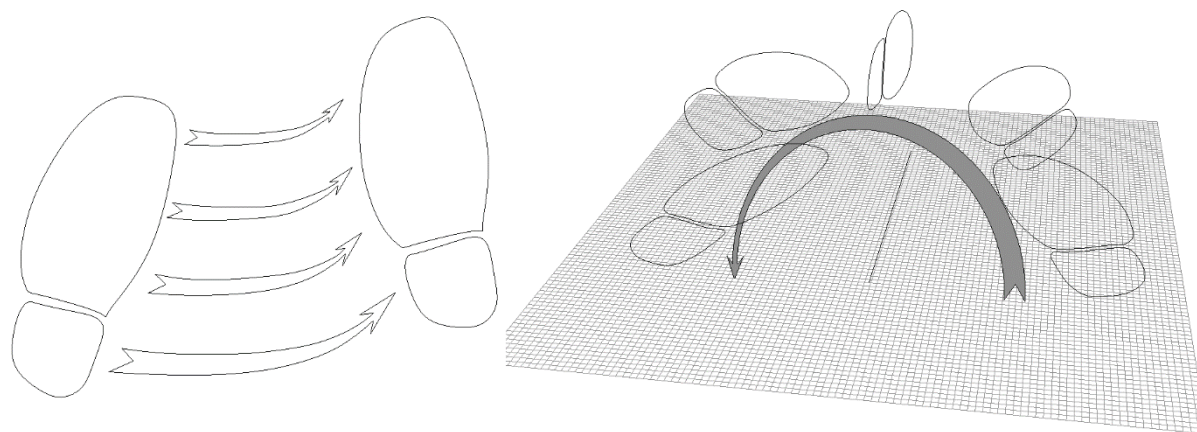
Lze ukázat, že matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je maticí shodného zobrazení v rovině právě tehdy, je-li submatice  $\mathbf{M}_{22}$  ortogonální, tj. jestliže platí  $\mathbf{M}_{22}\mathbf{M}_{22}^T = \mathbf{E}$ . Je zřejmé, že v tom případě je  $\det \mathbf{M} = \pm 1$ . Znaménko determinantu zde má přitom zajímavý geometrický význam. Když jsme se na základní škole začali seznamovat se shodnými zobrazeními, kreslili jsme shodné útvary na průsvitku, kterou jsme pak „přemisťovali“. V některých případech stačilo průsvitkou „jezdit“ (posouvání, otáčení), někdy bylo třeba průsvitku „převrátit naruby“ (osová souměrnost). Některé shodnosti v rovině lze modelovat „pohybem“ v rovině (přímé shodnosti), k některým je třeba buď osové souměrnosti nebo „pohybu“ v prostoru (nepřímé shodnosti).

Podobně v prostoru. Máme-li dvě levé boty stejného typu a stejné velikosti lze (alespoň myšlenkově) jednu na druhou „přemístit“ tak, že se kryjí. Jedná-li se však o standardní pár, pak z levé boty pravou pouhým „pohybem“ nevyrobíme. Proměna tak může být jen zdánlivá - potřebujeme k ní zrcadlo. Čistě matematicky bychom ji mohli provést „pohybem“ ve čtyřrozměrném prostoru. Podobná proměna skutečné boty z pravé na levou je matematicky sice možná, technicky ovšem neproveditelná - čtyřrozměrný prostor alespoň prozatím) v technické praxi k dispozici nemáme.

Matematický důvod rozdílů pravé a levé boty (i jejich dvojrozměrných stop) je následující.

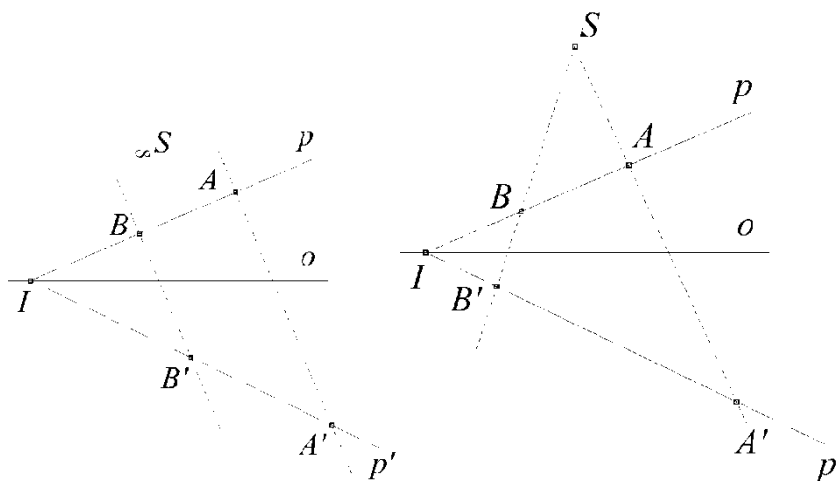


**Obr. 3. 3. 1:** Přímá a nepřímá shodnost v rovině

**6. PŘÍMÁ A NEPŘÍMÁ SHODNOST:** Shodnost, jejíž determinant je roven jedné (mínus jedné), nazýváme přímá (nepřímá).

Přímé shodnosti jsou tedy zobrazení, která lze složit z translací a rotací. Nepřímé shodnosti jsou shodnosti, při jejichž konstrukci je třeba použít osovou souměrnost.

**7. OSOVÁ AFINITA V ROVINĚ** (viz obr. 3. 3. 2 vlevo). Osovou afinitu v rovině lze určit řadou způsobů. Předpokládejme ten nejčastější, kdy je osová afinita určena osou a dvojicí odpovídajících si bodů. Určíme nejdříve matici  $\mathbf{A}_{x;\mathbf{P};\mathbf{P}'}$  osové afinity  $\mathcal{A}(x; \mathbf{P}; \mathbf{P}')$  s osou v ose  $x$ , která zobrazuje bod  $\mathbf{P} = (p_1; p_2; 1)$  na bod  $\mathbf{P}' = (p'_1; p'_2; 1)$ .



**Obr. 3.3.2:** Osová afinita a středová kolineace

V této afinitě je každý bod  $\mathbf{X} = (x; 0; 1)$  samodružný, tj. musí platit

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= a_{11}x + a_{13} \\ 0 &= a_{21}x + a_{23} \end{aligned}$$

Obě tyto rovnosti musí splňovat každé  $x \in \mathbb{R}$ , což je možné jen pro  $a_{11} = 1$ ;  $a_{13} = a_{21} = a_{23} = 0$ . Dále má být  $\mathcal{A}: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$ , takže

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} p'_1 &= p_1 + a_{12}p_2 \\ p'_2 &= a_{22}p_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_{12} &= \frac{p'_1 - p_1}{p_2} \\ a_{22} &= \frac{p'_2}{p_2} \end{aligned}$$

Zcela analogicky bychom postupovali v případě afinity  $\mathcal{A}(y; \mathbf{P}; \mathbf{P}')$ . Je tedy

$$\mathbf{A}(x; \mathbf{P}; \mathbf{P}') = \begin{pmatrix} 1 & \frac{p'_1 - p_1}{p_2} & 0 \\ 0 & \frac{p'_2}{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}(y; \mathbf{P}; \mathbf{P}') = \begin{pmatrix} \frac{p'_1}{p_1} & 0 & 0 \\ \frac{p'_2 - p_2}{p_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici afinity s osou v obecné poloze obdržíme vhodným složením těchto afinit s translacemi a rotacemi podobně jako v př. 5.

**8. STŘEDOVÁ KOLINEACE V ROVINĚ** (viz obr. 3.3.2 vpravo): Rovněž středovou kolineaci je možno určit řadou způsobů. „Uživatelsky nejpříjemnější“ je osa, střed kolineace a dvojice odpovídajících si bodů. Toto zadání je ovšem přeuročeno - střed a dvojice odpovídajících si bodů totiž musí ležet na jedné přímce, jednu ze souřadnic některého bodu by tedy bylo možno vynechat. Uvedme nejdříve opět matici  $\mathbf{K}(x; \mathbf{S}; \mathbf{P}; \mathbf{P}')$  středové kolineace  $\mathcal{K}(x; \mathbf{S}; \mathbf{P}; \mathbf{P}')$  s osou v ose  $x$  a středem  $\mathbf{S} = (0; s_2; 1)$  a dvojicí odpovídajících si bodů  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$ . Některý z těchto bodů může být nevlastní, předpokládejme však, že jsou oba vlastní, tj.  $\mathbf{P} = (p_1; p_2; 1)$ ;  $\mathbf{P}' = (p'_1; p'_2; 1)$ ;  $p_1; p'_1 \neq 0$ . Obrazem přímky  $p \parallel x$  je přímka  $p' \parallel x$ , takže je-li  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$ , je rovněž  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}'$ ; kde  $\mathbf{Q} = (0; p_2; 1)$ ;  $\mathbf{Q}' = (0; p'_2; 1)$ . Pozor! Matici  $\mathbf{K}_{x; \mathbf{S}; \mathbf{P}; \mathbf{P}'}$  musíme předpokládat ve tvaru (3.3.1), nikoliv (3.3.2) – obrazem vlastního bodu totiž nyní může být bod nevlastní a naopak. Navíc standardní reprezentant vlastního bodu nemusí být zobrazen do standardního reprezentanta.

Samodružné body na ose kolineace – např.  $(0; 0; 1)$ ;  $(1; 0; 1)$  – dávají

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k_{13} = k_{23} = 0; k_{33} = \omega_1;$$

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k_{11} = \omega_2; k_{21} = 0; k_{31} = \omega_2 - \omega_1.$$

Díky samodružnému středu máme

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_3 s_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 & k_{12} & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ \omega_2 - \omega_1 & k_{32} & \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k_{12} = 0; k_{22} = \omega_3; k_{32} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{s_2}$$

Dvojice  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$  odpovídajících si bodů dává

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \omega_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ \omega_2 - \omega_1 & \frac{\omega_3 - \omega_1}{s_2} & \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega_2 = p_1^{-1} \cdot p'_1 = \lambda; \omega_3 = p_2^{-1} \cdot p'_2;$$

kde  $\lambda = (P'; P; S)$ , a z  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}'$  máme

$$\begin{pmatrix} 0 \\ q'_2 \\ \omega_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & 0 \\ \omega_2 - \omega_1 & \frac{\omega_3 - \omega_1}{s_2} & \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega_1 = p_1^{-1} \cdot p'_1 = \lambda;$$

Tedy

$$\bar{\mathbf{K}}(x; \mathbf{S}; \mathbf{P}; \mathbf{P}') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & p_2^{-1} \cdot p'_2 & 0 \\ 0 & s_2^{-1}(p_2^{-1} \cdot p'_2 - \lambda) & \lambda \end{pmatrix}$$

Násobíme-li tuto matici libovolným nenulovým číslem, měníme pouze reprezentanty, na které bude tato matice zobrazovat, nikoliv body samotné. Matici středové kolineace tedy můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{K}(x; \mathbf{S}; \mathbf{P}; \mathbf{P}') = \frac{1}{\lambda} \bar{\mathbf{K}}(x; \mathbf{S}; \mathbf{P}; \mathbf{P}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2^{-1} \cdot p'_2 \cdot \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & s_2^{-1} \cdot (\lambda^{-1} \cdot p_2^{-1} \cdot p'_2 - 1) & 1 \end{pmatrix}$$

což po dosazení za  $\lambda$  dává

$$\mathbf{K}(x; \mathbf{S}; \mathbf{P}; \mathbf{P}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{kde } a = \frac{p_1 p'_2}{p'_1 p_2}; b = \frac{a - 1}{s_2} \quad (3.3.5)$$

Důležitou otázkou je, kdy středová kolineace zobrazuje vlastní body na nevlastní a naopak. Vlastní bod  $U$  bude zobrazen na nevlastní bod  $_{\infty}U'$  právě tehdy, když

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b u_2 = -1 \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{b} = \frac{s_2}{1 - a} \quad (3.3.6)$$

Poslední rovnice je tvaru  $u_2 = konst$ , což je rovnice přímky rovnoběžné s osou  $x$ , tj. s osou kolineace. Každý bod ležící na této přímce se zobrazí na nevlastní bod – tato přímka je tedy množinou všech vzorů nevlastních bodů a nazývá se **úběžnice vzorů**. Zobrazení nevlastního bodu  $_{\infty}V$  na vlastní bod  $V'$  převedeme na předchozí případ užitím inverzní kolineace, jejíž matice je maticí inverzní k matici (3.3.5), tj.:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -a^{-1}b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v'_2 = \frac{a}{b} \quad (3.3.7)$$

což je opět rovnice přímky rovnoběžné s osou  $x$ , tj. s osou kolineace. Každý bod ležící na této přímce je obrazem nevlastního bodu – tato přímka je tedy množinou všech obrazů nevlastních bodů a nazývá se **úběžnice obrazů**.

Matici kolineace se středem a osou v obecné poloze obdržíme opět vhodným složením těchto afinit s translacemi a rotacemi podobně jako v př. 5.

**9. PŘÍKLAD:** Stanovme matici středové kolineace s osou v ose  $x$  středem  $S = (0; 8; 1)$ ; která zobrazí bod  $P = (2; 4; 1)$  do bodu  $P' = (5; -2; 1)$ . Stanovme úběžnici vzorů a obrazů.

**Řešení:** Dosazením zadaných hodnot do (3.3.5) obdržíme

$$a = \frac{p_1 p'_2}{p'_1 p_2} = \frac{2 \cdot (-2)}{5 \cdot 4} = -\frac{2}{10}; \quad b = \frac{a - 1}{s_2} = \frac{-\frac{2}{10} - 1}{8} = -\frac{3}{20}$$

Tedy

$$K(x; S; P; P') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 1 \end{pmatrix}$$

Rovnice úběžnic jsou dle (3.3.6) a (3.3.7)

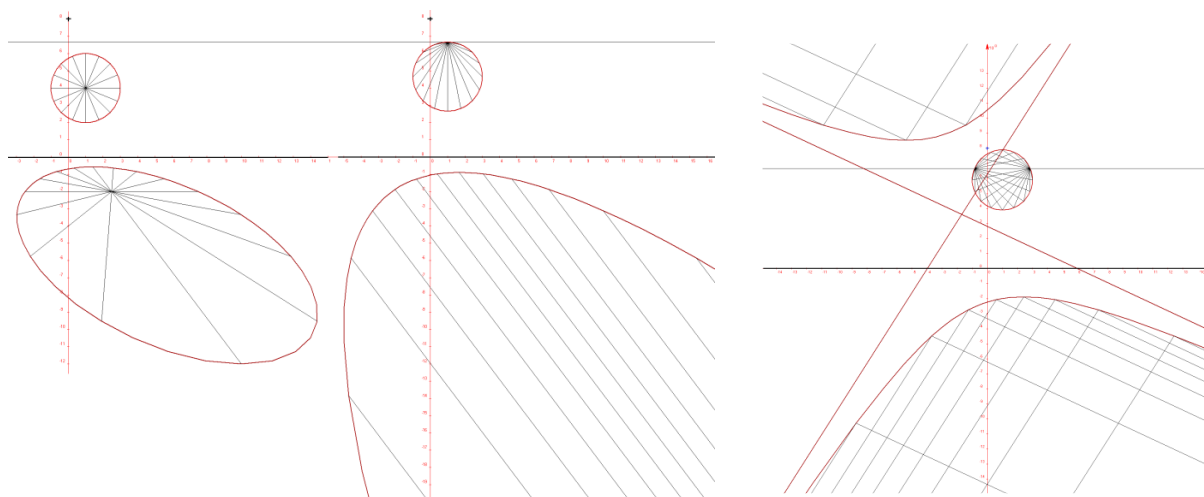
$$u_2 = \frac{s_2}{1 - a} = \frac{8}{1 - (-\frac{2}{10})} = \frac{20}{3}; \quad v'_2 = \frac{a}{b} = \frac{-\frac{2}{10}}{-\frac{3}{20}} = \frac{4}{3}$$

**10. PŘÍKLAD - pravidelný  $n$ -úhelník ve středové kolineaci:** Ve středové kolineaci z předchozího příkladu zobrazme pravidelný  $n$ -úhelník je-li  $S$  střed  $n$ -úhelníku;  $A_1$  jeho vrchol,  $A_1 A_2 \nparallel x$ ;  $A_1 A_n \nparallel x$

- a)  $S = (3; \frac{7}{3}; 1)$ ;  $A_1 = (3; \frac{13}{3}; 1)$ ;
- b)  $S = (3; \frac{14}{3}; 1)$ ;  $A_1 = (3; \frac{20}{3}; 1)$ ;
- c)  $S = (3; \frac{17}{3}; 1)$ ;  $A_1 = (3; \frac{23}{3}; 1)$ ;

**Poznámka:** Podle předchozího příkladu je úběžnicí přímka  $y = \frac{20}{3}$ .  $N$ -úhelník zadaný dle a) tedy úběžnice neprotíná. Dle zadání b) leží na úběžnici právě jeden bod (totiž zadaný bod  $A_1$ ). Ten se tedy zobrazí na nevlastní bod  $\infty A$ , obraz tedy bude mít právě jeden nevlastní bod. Dle zadání c) mnohoúhelník úběžnici protíná – průsečíky označme  $R; S$ . Ty se zobrazí na nevlastní body  $\infty R; \infty S$ . Tento obraz tedy bude mít právě dva nevlastní body.

**Řešení:** Necháme sestavit počítač. Vrcholy zobrazovaného šestnáctiúhelníku budou obrazy vrcholu  $A$  v rotacích  $\mathcal{R}_k(S; \alpha = \frac{2k\pi}{n})$ ;  $k = 1; 2; \dots; n - 1$ . Matice těchto rotací je tvaru  $\mathbf{R}(S; \alpha) = \mathbf{T}(-\mathbf{s}) \cdot \mathbf{R}(O; \alpha) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{s})$  - viz kpt. 3. 4. Takto získané vrcholy zobrazíme v kolineaci pomocí matice (4). Na obr. 3.3.3 vidíme řešení pro  $n = 64$ . Při takto velkém  $n$  již pravidelný  $n$ -úhelník vnímáme jako kružnici a její obrazy připomínají elipsu, parabolu a hyperbolu. Není to náhoda, obrazem kružnice ve středové kolineaci jsou skutečně kuželosečky. Ilustrujme v kpt. 4.8.

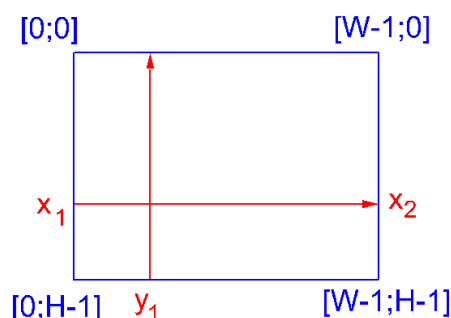


Obr. 3.3.3: Pravidelný 64-úhelník ve středové kolíneaci

### 3. 4 Uživatelská souřadná soustava v rovině

Ve většině programátorských prostředí máme k dispozici tzv. světovou či univerzální souřadnou soustavu (na obr. 3.4.1 vyznačena modře) – Počátek vlevo nahoře, první souřadnice vodorovná, druhá svislá, jednotkou na obou osách je strana pixelu. Na osách jsou tedy k dispozici intervaly  $\langle 0; W - 1 \rangle$  resp.  $\langle 0; H - 1 \rangle$ , kde  $W$  resp.  $H$  značí šířku (Width) resp. výšku (Height) výstupního okna v pixelech. Tato soustava však ve většině aplikací nevyhovuje a je třeba ji předefinovat. Při definici souřadné soustavy udáváme obvykle pozici počátku, směry souřadných os a jednotky na osách. To by však bylo v grafických aplikacích značně nepraktické. Uživatelsky příjemnější bude procedura, do které uživatel zadá potřebný interval na ose –  $\langle x_1; x_2 \rangle$ , potřebný interval na ose  $y$  –  $\langle y_1; y_2 \rangle$  (soustava vyznačena červeně). Potřebnou transformaci uživatelské (červené) soustavy do soustavy světové (modré) a naopak pak musí zvládnout grafický systém. Matici přechodu z uživatelské do světové soustavy sestrojíme tak, že

- Uživatelský počátek posuneme do světového
- Změníme měřítka v osách  $x$ ;  $y$
- Použijeme osovou souměrnost s osou  $x$  (je třeba obrátit směr osy  $y$ )



Obr. 3.4.1: Univerzální a uživatelská souřadná soustava v rovině

Matice musíme násobit v obráceném pořadí, tedy:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{W}{x_2 - x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H}{y_2 - y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & -1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{W}{x_2 - x_1} & 0 & \frac{x_1 W}{x_1 - x_2} \\ 0 & \frac{H}{y_2 - y_1} & \frac{y_2 H}{y_1 - y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici opačného přechodu ze soustavy uživatelské do světové pak získáme inverzí:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{W}{x_2 - x_1} & 0 & \frac{x_1 W}{x_1 - x_2} \\ 0 & \frac{H}{y_2 - y_1} & \frac{y_2 H}{y_1 - y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_1}{W} & 0 & x_1 \\ 0 & \frac{y_2 - y_1}{H} & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bod  $X$  s uživatelskými souřadnicemi  $\mathbf{X} = (x_1; x_2; 1)$  pak transformujeme do uživatelských souřadnic, tj. na bod  $\mathbf{X}' = (x'_1; x'_2; 1)$  pomocí rovnice  $\mathbf{X}'^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}^T$

### 3.5 Zobrazení v ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$

Podobně jako v projektivní rovině můžeme i v projektivním prostoru studovat nejrůznější zobrazení. Zaměříme se opět na zobrazení, která zachovávají dělicí poměr, tj. zobrazení, která zobrazují vlastní bod vždy na vlastní bod. Uvedme v přehledu nejdůležitější z nich.

Souměrnost podle roviny  $x = 0$

$$\mathbf{S}(x = 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle roviny  $y = 0$

$$\mathbf{S}(y = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle roviny  $z = 0$

$$\mathbf{S}(z = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle osy  $x$

$$\mathbf{S}(y = z = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle osy  $y$

$$\mathbf{S}(x = z = 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle osy  $z$

$$\mathbf{S}(x = y = 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souměrnost podle počátku

$$\mathbf{S}(O) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posunutí o vektor  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otáčení kolem osy  $x$

$$\mathbf{R}(x; \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otáčení kolem osy  $y$

Otáčení kolem osy  $z$

Stejnolehlost

$$\mathbf{R}(y; \alpha) =$$

$$\mathbf{R}(z; \alpha) =$$

$$\mathbf{H}(O; \lambda) =$$



$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skládání těchto zobrazení provádíme stejně jako v projektivní rovině - rovněž násobením matic v obráceném pořadí.

**1. PŘÍKLAD:** Určeme matici středové souměrnosti se středem v bodě  $\mathbf{S} = (s_1; s_2; s_3; 1)$

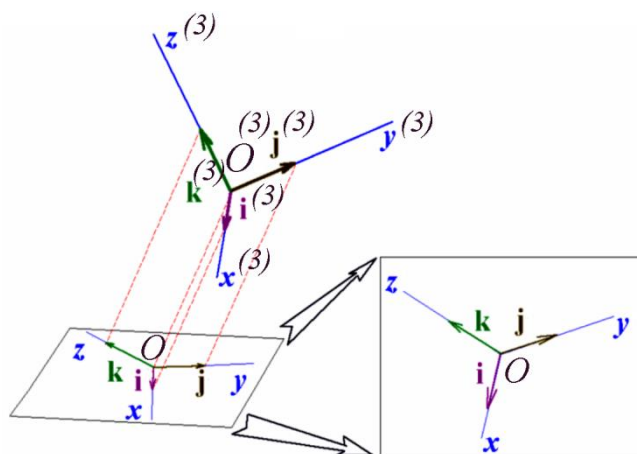
**Řešení:** Střed souměrnosti musíme nejdříve posunout do počátku, zde provést souměrnost podle počátku, a poté posunout „zpět“. Výsledná matice tedy bude tvaru

$$\mathbf{S}(\mathbf{S}) = \mathbf{T}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{S}(O) \cdot \mathbf{T}(-\mathbf{s}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & -1 & 0 & -s_2 \\ 0 & 0 & -1 & -s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3. 6 Promítání prostoru na rovinu

**1. PROMÍTÁNÍ S NEVLASTNÍM STŘEDEM:** k popisu technických objektů se používá kartézská souřadná soustava tak, že „významné“ přímky či úsečky objektu jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Chceme-li použít jen jeden průmět, měl by být pokud možno názorný, tj. měli bychom směr promítání volit tak aby se tyto přímky a úsečky nepromítaly do bodu. Rovněž „významné“ roviny (tj. roviny rovnoběžné se souřadnými rovinami) nebo jejich části by se neměly promítat do přímek nebo úseček. Každý technický objekt má těchto „významných“ přímek a rovin jen konečný (a relativně malý) počet, promítání i průmětů máme k dispozici vždy nekonečně mnoho. Je tedy zřejmé, že tomuto požadavku lze vždy vyhovět. Pokud tomu tak bude a budeme-li uvažovat jen rovnoběžné promítání a trojici nezáporných souřadných poloos, bude jejím průmětem trojice nesplývajících polopřímek se společným počátkem tak, jak je znázorněno na připojeném obrázku.



**Obr. 3.6.1:** Rovnoběžné promítání na rovinu

Vzniká přirozeně otázka, zda lze uvažovat i obráceně – zda ke každé trojici různých polopřímek v průmětně, které mají společný počátek, lze zvolit směr promítání tak, že tyto tři polopřímky jsou průmětem souřadných poloos nějaké kartézské souřadné soustavy. Na tuto

otázku odpověděla v roce 1853 kladně Pohlkeova věta. My se nyní budeme zabývat analytickým popisem tohoto promítání.

Podobně jako v kpt. 3.3 – viz rovnici (3.3.2) – lze promítání s nevlastním středem v prostoru zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Budeme-li promítat na rovinu  $x_3 = 0$ , bude navíc

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Odtud:

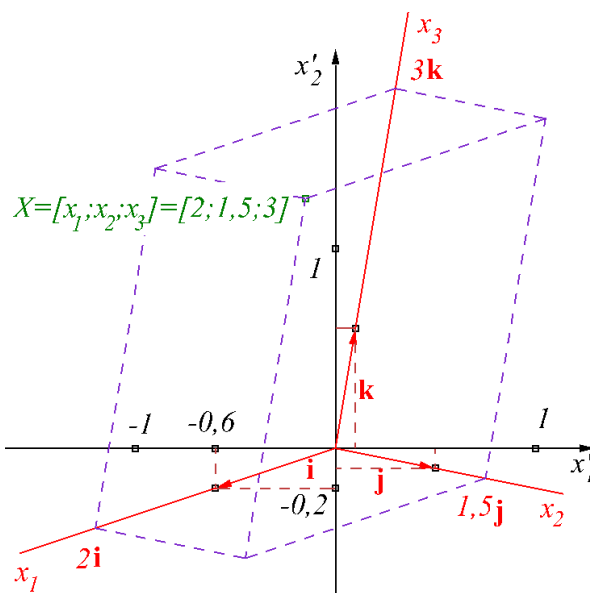
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tedy

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14} \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24} \end{aligned}$$

Geometrický význam jednotlivých koeficientů bude zřejmý z obr. 3.6.2 po přeznačení:

$$\begin{aligned} x'_1 &= i_1x_1 + j_1x_2 + k_1x_3 \\ x'_2 &= i_2x_1 + j_2x_2 + k_2x_3 \end{aligned}$$



**Obr. 3.6.2:** K analytickému vyjádření rovnoběžného promítání

Pro zjednodušení jsme volili  $a_{14} = a_{24} = 0$  - v tom případě splyne průmět  $O'$  počátku souřadné soustavy  $\langle O; \mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k} \rangle$  (na obr. 3.6.2 vyznačena červeně) s počátkem  $O'$  rovinné soustavy  $\langle O'; \mathbf{i}'; \mathbf{j}' \rangle$  (černá), kde  $(i_1; i_2); (j_1; j_2); (k_1; k_2)$  jsou souřadnice průmětů jednotkových vektorů  $\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}$  v soustavě  $\langle O'; \mathbf{i}'; \mathbf{j}' \rangle$ . Volbou těchto souřadnic volíme příslušné kosoúhlé promítání. Na našem obr. 3.6.2 je

$$\begin{aligned}x'_1 &= -0.6 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.1 \cdot x_3 \\x'_2 &= -0.2 \cdot x_1 + 0.1 \cdot x_2 + 0.6 \cdot x_3\end{aligned}$$

Všimněte si, že třetí řádek matice (1) tohoto zobrazení je nulový, matice tohoto zobrazení je tedy singulární. Je tomu tak proto, že promítání není prosté zobrazení (celá promítací přímka se totiž zobrazí do jediného bodu).

Podívejme se nyní na **pravoúhlé promítání**. Pro analytické zpracování je nejjednodušší pravoúhlé promítání do některé ze souřadnicových rovin, kde pouze nulujeme příslušnou souřadnici. Např. promítání do roviny  $z = 0$  (viz obr. 3.6.3) je určeno soustavou rovnic

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= x_2 \\x'_3 &= 0\end{aligned}$$

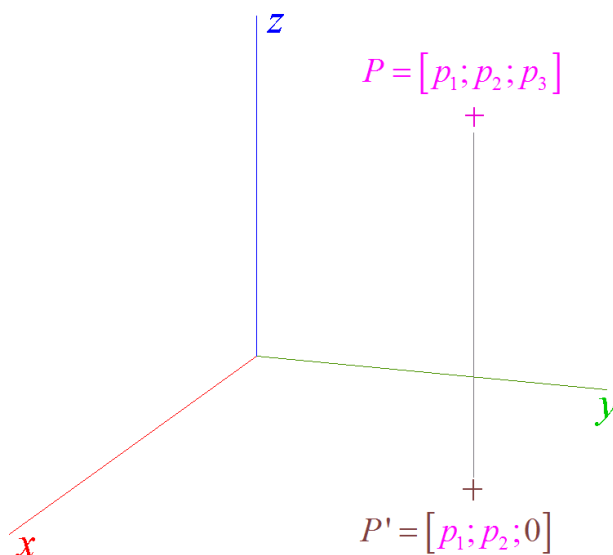
což přepsáno jako projektivní transformace:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}'^T = \mathbf{K}(z=0) \cdot \mathbf{X}^T$$

kde

$$\mathbf{K}(z=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice pravoúhlého promítání do roviny  $z = 0$ .



**Obr. 3.6.3:** Pravoúhlé promítání na rovinu  $z = 0$

Chceme-li promítat kolmo na rovinu v obecné poloze, je třeba buď zadat rovnici roviny, na kterou chceme kolmo promítat, anebo (což je pro CAD systémy přirozenější) směr „pohledu kamery“ do souřadné soustavy, např. pomocí horizontálního a vertikálního úhlu tak, jak je naznačeno na obr. 3.6.4. Pomocí dvou rotací pak tento směr ztotožníme s některou souřadnou osou provedeme kolmý průmět do příslušné průmětny a pomocí otočení o opačné úhly vrátíme kameře příslušný směr. Pokud budeme např. chtít použít výše uvedené promítání do

roviny  $z = 0$ , bude postup následující: Nejdříve otočíme kameru kolem osy  $z$  o úhel  $\omega_1 = -\alpha - \frac{\pi}{2}$ , aby pohled kamery byl kolmý na osu  $x$  (záporná znaménka proto, že otáčíme proti zadanému úhlu  $\alpha$ ). Matice otáčení je

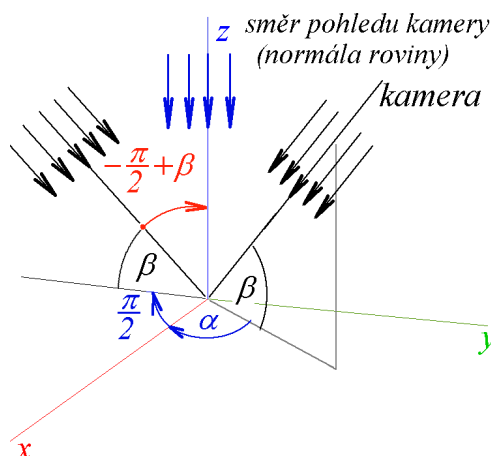
$$\mathbf{R}(z; \omega_1) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 & -\sin \omega_1 & 0 & 0 \\ \sin \omega_1 & \cos \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Následuje otočení o úhel  $\omega_2 = \beta - \frac{\pi}{2}$  kolem osy  $x$ :

$$\mathbf{R}(x; \omega_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_2 & -\sin \omega_2 & 0 \\ 0 & \sin \omega_2 & \cos \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní můžeme promítnout kolmo do roviny  $z = 0$ , tj. použít matici  $\mathbf{K}(z = 0)$ . Tyto matice násobíme v obráceném pořadí, takže matice  $\mathbf{P}$  našeho promítání je tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}(z = 0) \cdot \mathbf{R}(x; \omega_2) \cdot \mathbf{R}(z; \omega_1)$$



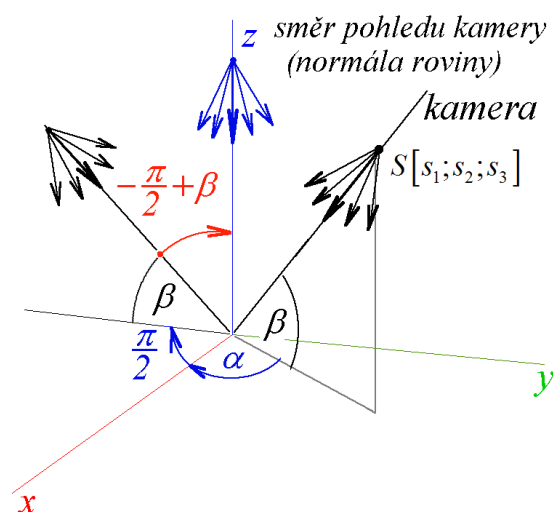
**Obr. 3.6.3:** Pravoúhlé promítání na rovinu v obecné poloze

Matici **středového promítání** sestrojíme podobným způsobem. Odvození matice středového promítání se středem  $S = (0; 0; s_3; 1)$  do roviny  $z = 0$  je již poněkud komplikovanější, uveďme tedy pouze výsledek:

$$\mathbf{C}(z = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s_3} & 1 \end{pmatrix}$$

Matici středového promítání na obecnou rovinu obdržíme analogicky jako v případě promítání rovnoběžného, je tedy

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}(z = 0) \cdot \mathbf{R}(x; \omega_2) \cdot \mathbf{R}(z; \omega_1)$$



**Obr. 3.6.4:** Středové promítání na rovinu v obecné poloze

## 4 Křivky

### 4.1 Definice křivky, plochy a (geometrického) tělesa

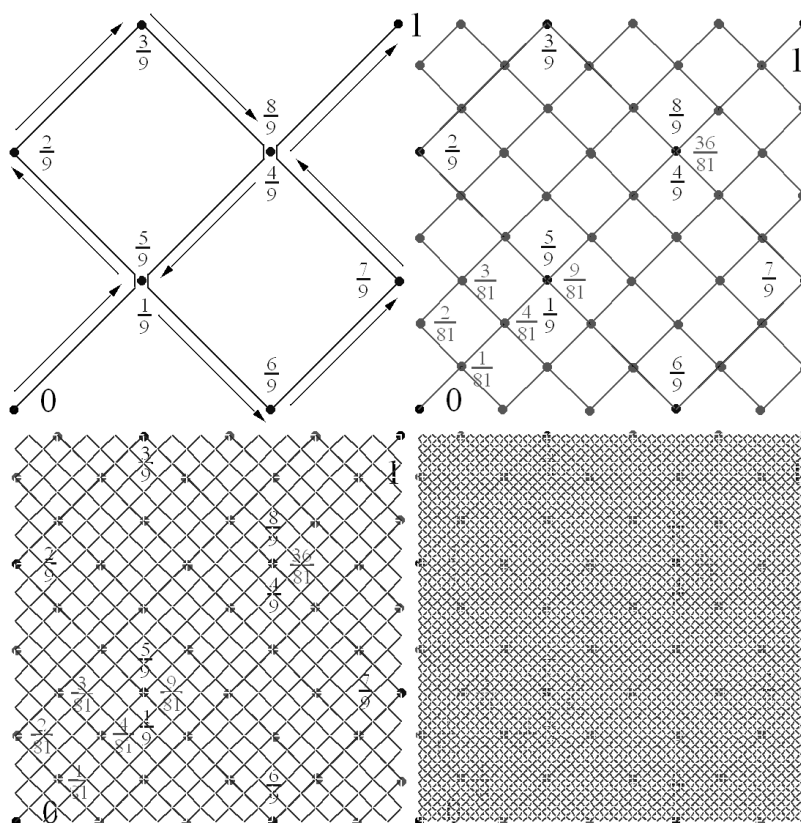
V kapitole 2. 4. jsme konstatovali, že zobrazení v euklidovské rovině je obecně dáno soustavou rovnic

$$x'_1 = f_1(x_1; x_2)$$

$$x'_2 = f_2(x_1; x_2)$$

přičemž jsou-li funkce  $f_1$ ;  $f_2$  spojité, je obrazem úsečky křivka. Tato definice pochází od **Camille Jordana** (1838 – 1922), ale po konstrukci **Giuseppe Peana** (1858 – 1932) ocitla ve velkých potížích.

**1. PŘÍKLAD – Peanova křivka:** Peano zobrazil surjektivně interval  $\langle 0; 1 \rangle$  na přímku a ukázal, že ve smyslu Jordanovy definice je křivkou i čtverec. Peanova konstrukce je patrná z obr. 4.1.1



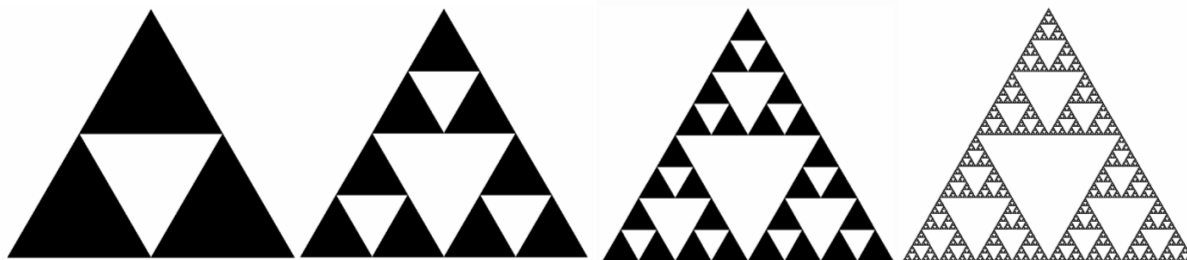
**Obr 4.1.1** Peanova konstrukce surjektivního zobrazení  $\langle 0; 1 \rangle \rightarrow \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$

Křivku si běžně představujeme jako jednorozměrný útvar, tj. útvar, u něhož měříme délku, plochu jako útvar dvojrozměrný, kterému měříme obsah, těleso jako útvar trojrozměrný, zde měříme objem. Nemá smysl např. dvojrozměrnému útvaru měřit délku (ta je vždy nekonečná), ani objem (ten je vždy nulový). Uvažujeme-li tedy pouze omezené útvary (tj. útvary, které jsou podmnožinou vhodného kruhu popř. koule), je vymezení pojmů křivka, plocha a těleso zdánlivě velmi jednoduché: Křivka je útvar, který má konečnou (a nenulovou) délku a nulový obsah i objem. Plocha je útvar, který má nekonečnou délku, konečný (a

nenulový) obsah a nulový objem. Těleso je útvar, který má nekonečnou délku i obsah a konečný (a nenulový) objem. Ani tato představa však neobstojí, jak svědčí následující příklad.

**2. PŘÍKLAD – Sierpiňského trojúhelník:** Sestrojme rovnostranný trojúhelník a vyjmeme z něj vnitřek trojúhelníka určeného středními příčkami. Ve zbývajících třech trojúhelnících provedme totéž a tímto způsobem pokračujeme do nekonečna. Obdržíme tak útvar zvaný Sierpiňského trojúhelník. Určeme jeho obsah.

**Řešení:** Označme obsah původního trojúhelníka  $S_0$  a určíme nejdříve obsah  $S'$  odebraných trojúhelníků.



Obr 4.1.2 Sierpiňského trojúhelník

Obsah trojúhelníka odebraného v prvním kroku:  $S_1 = \frac{1}{4}S_0$ .

Obsah trojúhelníků odebraných ve druhém kroku:  $S_2 = 3 \cdot \frac{1}{4}S_1 = \frac{3}{4^2}S_0$

Obsah trojúhelníků odebraných ve třetím kroku:  $S_3 = 3 \cdot \frac{1}{4}S_2 = \frac{3^2}{4^3}S_0$

Obsah trojúhelníků odebraných v  $n$ -tém kroku:  $S_n = 3 \cdot \frac{1}{4}S_{n-1} = \frac{3^{n-1}}{4^n}S_0$

Obsahy odebírané v jednotlivých krocích tedy tvoří geometrickou řadu a celkový obsah odebraných trojúhelníků je

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} S_0 = \frac{S_0}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{S_0}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = S_0$$

Obsah Sierpiňského trojúhelníka je tedy  $S = S_0 - S'$ . Podle naší předchozí úvahy se tedy zřejmě nejedná o útvar dvojrozměrný, ale jednorozměrný. Pokusme se tedy určit délku Sierpiňského „křivky“. Vyjdeme tedy z obvodu původního trojúhelníka, ke kterému budeme postupně přičítat obvody odebíraných trojúhelníků. Označme  $\ell_0$  obvod výchozího trojúhelníka.

Obvod prvního odebraného trojúhelníka je

$$\ell_1 = \frac{1}{2}\ell_0$$

Obvody trojúhelníků odebraných ve druhém kroku jsou

$$\ell_2 = \frac{3}{2}\ell_1 = \frac{3}{2^2}\ell_0$$

Obvody trojúhelníků odebraných ve třetím kroku jsou

$$\ell_3 = \frac{3}{2}\ell_2 = \frac{3^2}{2^3}\ell_0$$

Obvody trojúhelníků odebraných v  $n$ -tém kroku jsou

$$\ell_n = \frac{3}{2}\ell_{n-1} = \frac{3^{n-1}}{2^n}\ell_0$$

Celkový obvod je tedy součtem

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n} \ell_0 = \frac{\ell_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$$

neboť poslední geometrická řada diverguje.

Jednoduchou intuitivní úvahou, kterou jsme provedli v úvodu této kapitoly, tedy nelze rozhodnout, zda tato množina je křivkou, anebo plochou. Naše vymezení pojmů dimenze („počtu rozměrů“), křivka, plocha a těleso je třeba geometricky precizovat. Základem tohoto zpřesnění budou topologické pojmy otevřené množiny, uzávěru, souvislé množiny a pokrytí.

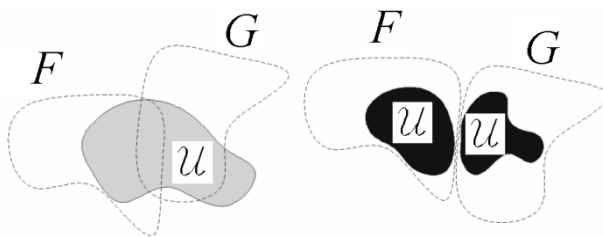
**3. DEFINICE –  $\varepsilon$ -okolí, vnitřní, vnější a hraniční bod, hranice:**  $\varepsilon$ -okolím bodu  $X$  v prostoru  $\mathcal{E}^n$  rozumíme množinu

$$O_\varepsilon(X) = \{P \in \mathcal{E}^n \mid |PX| < \varepsilon\}$$

Bod  $A$  se nazývá vnitřním bodem útvaru  $\mathcal{U}$  právě tehdy, když existuje  $O_\varepsilon(A)$  tak, že  $O_\varepsilon(A) \cap \mathcal{U} = O_\varepsilon(A)$ . Bod  $B$  se nazývá vnějším bodem útvaru  $\mathcal{U}$  právě tehdy, když existuje  $O_\varepsilon(B)$  tak, že  $O_\varepsilon(B) \cap \mathcal{U} = \emptyset$ . Bod  $C$  se nazývá hraničním bodem útvaru  $\mathcal{U}$  právě tehdy, když není ani vnitřním, ani vnějším bodem, tj. pro každé  $O_\varepsilon(C)$  je  $O_\varepsilon(C) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$  a současně  $O_\varepsilon(C) \cap \mathcal{U} \neq O_\varepsilon(C)$ . Množinu všech hraničních bodů nazýváme hranicí útvaru.

**4. DEFINICE – otevřená množina:** je množina, jejíž všechny body jsou vnitřní

**5. DEFINICE – souvislý útvar:** Geometrický útvar  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}^n$  nazveme souvislý právě tehdy, když pro každé dvě neprázdné otevřené množiny  $F, G$  takové, že  $\mathcal{U} \subseteq F \cup G$ ;  $\mathcal{U} \cap F \neq \emptyset$ ;  $\mathcal{U} \cap G \neq \emptyset$ , platí  $F \cap G \neq \emptyset$ . V opačném případě nazýváme útvar  $\mathcal{U}$  nesouvislý.



**Obr 4.1.3** Souvislý a nesouvislý útvar

Nyní budeme směřovat k pojmu dimenze.

**6. DEFINICE - pokrytí:** Uvažujme souvislý útvar  $\mathcal{U}$  a sestrojme okolí  $O_{\varepsilon_i}(X_i)$  některých jeho bodů  $X_1; X_2; \dots; X_n$  tak, že platí

$$\mathcal{U} \subseteq O_{\varepsilon_1}(X_1) \cup O_{\varepsilon_2}(X_2) \cup \dots \cup O_{\varepsilon_n}(X_n) = \bigcup_{i=1}^n O_{\varepsilon_i}(X_i)$$

Říkáme, že jsme sestrojili pokrytí útvaru  $\mathcal{U}$ . Použitých okolí může být i nekonečně mnoho, v tom případě píšeme

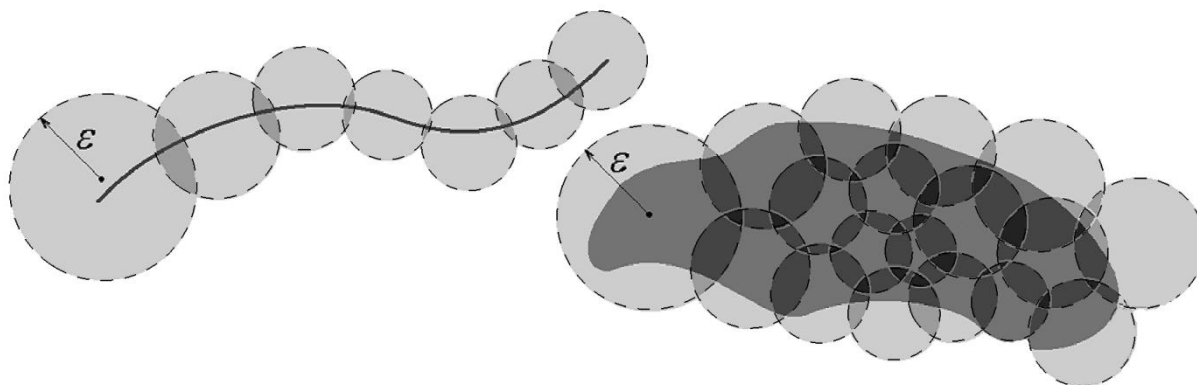
$$\mathcal{U} \subseteq O_{\varepsilon_1}(X_1) \cup O_{\varepsilon_2}(X_2) \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_{\varepsilon_i}(X_i)$$

Jestliže poloměr žádného použitého okolí není větší než  $\varepsilon$ , označujeme toto pokrytí jako  $\varepsilon$  - pokrytí.

**7. DEFINICE - topologická dimenze:** Geometrický útvar  $\mathcal{U}$  má (topologickou) dimenzi  $n$  právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje jeho  $\varepsilon$ -pokrytí tak, že každý bod útvaru  $\mathcal{U}$  je pokryt maximálně  $n + 1$  okolími.

Přívlastek topologická v tuto chvíli není třeba zdůrazňovat. Bude nutný až v kpt. 10, kde pojem dimenze ještě poněkud zobecníme. Definice křivky, plochy resp. tělesa je nyní už velmi jednoduchá:

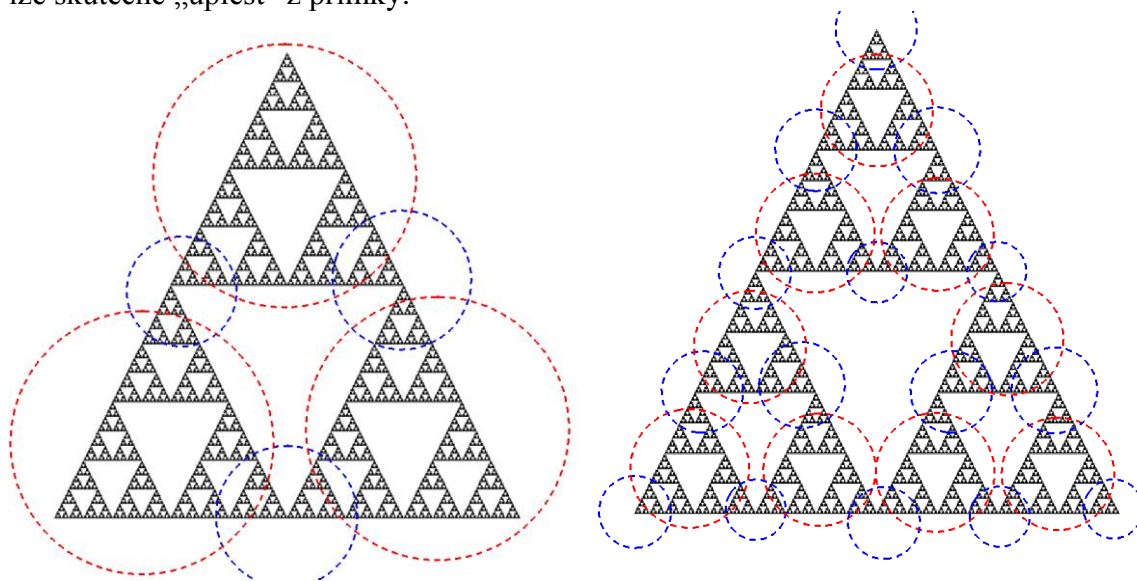




**Obr 4.1.4** Topologicky jednorozměrný (vlevo) a dvojrozměrný (vpravo) útvar

**8. DEFINICE - křivka, plocha, těleso:** Křivkou (plochou, tělesem) euklidovského prostoru  $\mathcal{E}^n$  rozumíme (topologicky) jednorozměrný (dvojrozměrný, trojrozměrný) souvislý útvar.

Vraťme se nyní k příkladu 1, kde jsme prozatím nebyli schopni rozhodnout, zda Sierpiňského trojúhelník je křivka, anebo plocha. Na obr. 4.1.5 je sestrojeno  $\varepsilon$  - pokrytí tohoto trojúhelníka, kde k pokrytí každého bodu stačí maximálně dvě okolí. Je zřejmé, že pokud jsme takto sestrojili  $\varepsilon$  - pokrytí pro nějaké  $\varepsilon$ , můžeme zcela analogicky sestavit i pokrytí pro  $\frac{\varepsilon}{2}$ ; (viz obrázek vpravo)  $\frac{\varepsilon}{2}$  atd., tedy pro každé  $\varepsilon > 0$ . Znamená to, že Sierpiňského trojúhelník je (topologicky) jednorozměrný - je to tedy křivka. Křivka je to, pravda, velmi „zašmodrchaná“ (v každém svém bodě má „uzel“), ale v př. 2 kpt. 13. 4 ukážeme, že Sierpiňského trojúhelník lze skutečně „uplést“ z přímky.



**Obr 4.1.5** Sierpiňského trojúhelník jako topologicky jednorozměrný útvar

Pro potřeby analytického popisu křivek, kdy je potřeba křivku popsat pomocí souřadnic jejích bodů, však definice 8 nestačí.

**2 DEFINICE – parametrizace křivky:** Nechť  $k \subset \mathcal{E}^n$  je křivka, pro kterou existuje spojitě surjektivní zobrazení  $\gamma: \langle a; b \rangle \rightarrow k$ . Pak křivku  $k$  nazýváme parametrizovatelnou, zobrazení  $\gamma$  nazýváme její parametrizací, každý prvek  $t \in \langle a; b \rangle$  nazýváme parametrem. Křivku  $k$  parametrizovanou parametrizací  $\gamma$  značíme podrobně  $\langle k; \gamma \rangle$ .

Pro potřeby matematické analýzy se ještě zavádí pojem orientovaná křivka. Je-li  $\langle k; \gamma \rangle$  parametrizovaná bijekcí  $\gamma$ , pak tato bijekce na křivce indukuje uspořádání bodů:

$$\forall A; B \in k: (A < B \Leftrightarrow [\gamma^{-1}(A) < \gamma^{-1}(B)])$$

Na množině všech bijektivních parametrizací téže křivky  $k$ , lze pak definovat ekvivalenci takto: dvě parametrizace  $\langle k; \gamma_1 \rangle; \langle k; \gamma_2 \rangle$  jsou ekvivalentní právě tehdy, když pro každé  $A; B \in k$  platí  $A <_{k_1} B \Leftrightarrow A <_{k_2} B$ . Orientací parametrizované křivky  $\langle k; \gamma \rangle$  pak nazveme jednu ze dvou tříd ekvivalence, do které parametrizovaná křivka patří.

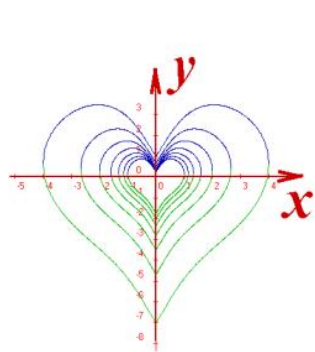
Orientaci křivek však v dalším textu potřebovat nebudeme a byla uvedena pouze pro úplnost.

## 4.2 Klasifikace křivek

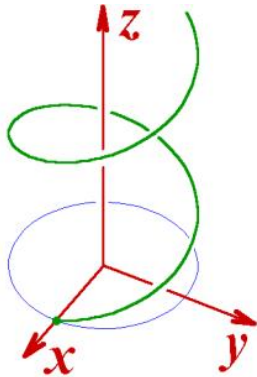
Křivky můžeme dělit podle dimenze prostoru, jehož jsou podmnožinou a podle možnosti analytického popisu, tj. možnosti stanovit obecné vztahy mezi souřadnicemi jednotlivých bodů křivky:

### podle dimenze prostoru

rovinné:

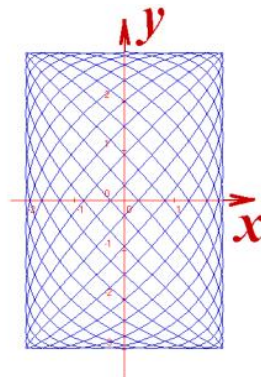


prostorové



### podle možnosti analytického popisu

analytické



grafické



$$f(x) =$$

$$\frac{1}{c} \cdot \left[ \frac{c^2 x^2 + |cx| - 6}{c^2 x^2 + |cx| + 6} \pm \sqrt{16 - c^2 x^2} \right] \quad \begin{matrix} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 2 \sin 15t \\ y = 3 \cos 11t \end{matrix}$$

???????

V této kapitole se budeme zabývat pouze analytickými křivkami, a to prozatím rovinnými.

## 4.3 Analytické určení křivky

Rovinnou křivku můžeme analyticky popsat několika způsoby.

**1. KŘIVKA JAKO GRAF FUNKCE:** Funkce jedné reálné proměnné je zobrazení  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subseteq \mathbb{R}$ , je definiční obor funkce. Grafem funkce rozumíme množinu

$$G(f) = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\}$$

Tímto grafem je velmi často křivka (např. grafy funkcí  $\sin x$ ;  $\ln x$ ) či více křivek (např.  $x^{-1}$ ;  $\ln|x|$ ).

**2. PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ KŘIVKY:** Jedná se o zadání křivky pomocí soustavy dvou popř. tří rovnic v nichž je souřadnice každého bodu křivky zapsána jako funkce reálné proměnné, kterou nazýváme parametr. Pro křivku v rovině tedy

$$\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix}; \quad t \in I \quad (4.3.1)$$

kde  $I$  je interval. Tyto rovnice nazýváme rovnice parametrické. Často se setkáváme s vyjádřením rovinné křivky v polární soustavě souřadné, a to ve tvaru

$$\rho = \varphi(t); \quad t \in I$$

kde  $t$  je orientovaný úhel, který svírá průvodič bodu s polární osou a  $r$  je vzdálenost bodu od počátku. Toto vyjádření ovšem snadno převedeme na vyjádření parametrické pomocí známých vztahů

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos t = \varphi(t) \cos t \\ y &= \rho \sin t = \psi(t) \sin t; \quad t \in I \end{aligned}$$

**3. OBECNÁ ROVNICE KŘIVKY:** Upravíme-li soustavu (4.3.1) na jedinou rovnici tak, že se v ní nebude parametr vyskytovat, dostaneme rovnici obecnou. Tomuto postupu říkáme vyloučení parametru. Upravíme-li naopak obecnou rovnici na rovnici o jedné neznámé pomocí substituce tak, že tato rovnice přejde v rovnost, je tato substituce parametrickými rovnicemi téže křivky. Tomuto postupu říkáme parametrizace. Tímto způsobem lze ovšem vyjádřit jen rovinné křivky. Vyloučením parametru z parametrických rovnic rovinné křivky dostaneme rovnici tvaru

$$f(x; y) = 0$$

Vyloučením parametru z parametrických rovnic prostorové křivky dostaneme vyjádření této křivky pomocí soustavy dvou rovnic

$$f(x; y; z) = 0; \quad g(x; y; z) = 0$$

Každá z těchto rovnic je rovnicí plochy v prostoru, prostorovou křivku tak dostáváme jako průsečnici těchto dvou ploch.

**3. PŘÍKLAD:** Parametrizujme obecné rovnice křivek

$$\text{a) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{b) } (x - m)^2 = 2p(y - n) \quad \text{c) } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Řešení:** a) položíme-li  $x = a \cos t$ ;  $y = b \sin t$  a dosadíme do obecné rovnice, obdržíme

$$\frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

což je rovnost, která platí pro každé  $t \in \mathbb{R}$ . Parametrické rovnice naší elipsy tedy jsou

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t; \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Parametrickými rovnicemi téže elipsy jsou samozřejmě všechny rovnice tvaru

$$\begin{aligned} x &= a \cos vt \\ y &= b \sin vt; \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

kde  $v$  je libovolná nenulová reálná konstanta. Chápeme-li parametr  $t$  v těchto rovnicích jako čas, konstanta  $v$  určuje rychlost pohybu a znaménko součinu  $vt$  jeho orientaci.

**b)** Z této rovnice lze vyjádřit  $y$ :  $y = \frac{1}{2p}(x - m)^2 + n$ . Parametrické rovnice tedy budou zřejmě tvaru

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \frac{1}{2p}(x - m)^2 + n; \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**c)** Při parametrizaci elipsy jsme využili známou vlastnost sinu a kosinu – goniometrickou jedničku. Pokud bychom chtěli stejný obrat použít u hyperboly, museli bychom najít dvě funkce, u nichž analogicky funguje ne součet, ale rozdíl čtverců, tj. dvě funkce  $f; g$  takové, že

pro každé  $t \in \mathbb{R}$  je  $f^2(t) - g^2(t) = 1$ . Pak bychom mohli položit  $x = a \cdot f(t); y = b \cdot g(t)$  a dosazením do rovnice hyperboly zcela analogicky:

$$\frac{(a \cdot f(t))^2}{a^2} + \frac{(b \cdot g(t))^2}{b^2} = 1 \Rightarrow f^2(t) - g^2(t) = 1$$

Je jen otázkou, zda takové funkce existují. Odpověď na tuto otázku je kladná. Položíme-li totiž

$$f(t) = \cos^{-1} t; \quad g(t) = \operatorname{tg} t$$

pak je skutečně

$$f^2(t) - g^2(t) = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1$$

takže příslušná parametrizace hyperboly je tvaru

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos^{-1} t; \\ y &= b \cdot \operatorname{tg} t \end{aligned}; t \in \langle 0; 2\pi \rangle - \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Jinou zajímavou možností je

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; \quad g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

pak je opět

$$f^2(t) - g^2(t) = \frac{1}{4} \cdot (e^t + e^{-t})^2 - \frac{1}{4} \cdot (e^t - e^{-t})^2 = \frac{1}{4} \cdot (e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}) = 1$$

Protože funkce  $f; g$  plní u hyperboly analogickou úlohu jako sinus a kosinus u elipsy, nazývají se v matematice hyperbolický sinus resp. hyperbolický kosinus a značí se

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Parametrizaci hyperboly pak dostáváme ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cosh t \\ y &= b \cdot \sinh t \end{aligned}; t \in \mathbb{R}$$

**4. PŘÍKLAD:** Kuželosečky v polárních souřadnicích: Lze dokázat, že množina bodů, které mají konstantní poměr  $\varepsilon$  vzdáleností od dané (řídící) přímky a daného bodu (ohniska), který na ní neleží, je kuželosečka.

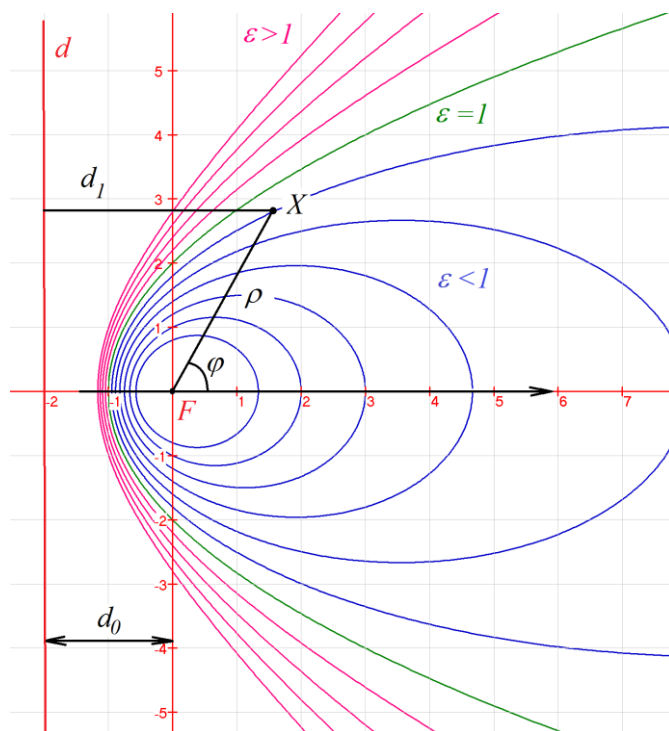
Na obr. 4.3.1 jsme polární osu ztotožnili s osou kuželoseček, počátek umístili do společného ohniska  $F$ . Dále máme označeno  $d_0 = d(Fd)$   $d_1 = d(Xd)$ ;  $\rho = d(XF)$ ; je tedy  $d_1 = d_0 + \rho \cdot \cos \varphi$ , takže

$$\varepsilon = \frac{\rho}{d_1} = \frac{\rho}{d_0 + \rho \cdot \cos \varphi}$$

Odtud dostáváme polární rovnici kuželosečky tvaru

$$\rho = f(\varphi) = \frac{d_0 \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (4.3.2)$$

přičemž pro  $\varepsilon < 1$  se jedná o elipsu, pro  $\varepsilon = 1$  o parabolu a pro  $\varepsilon > 1$  o hyperbolu.

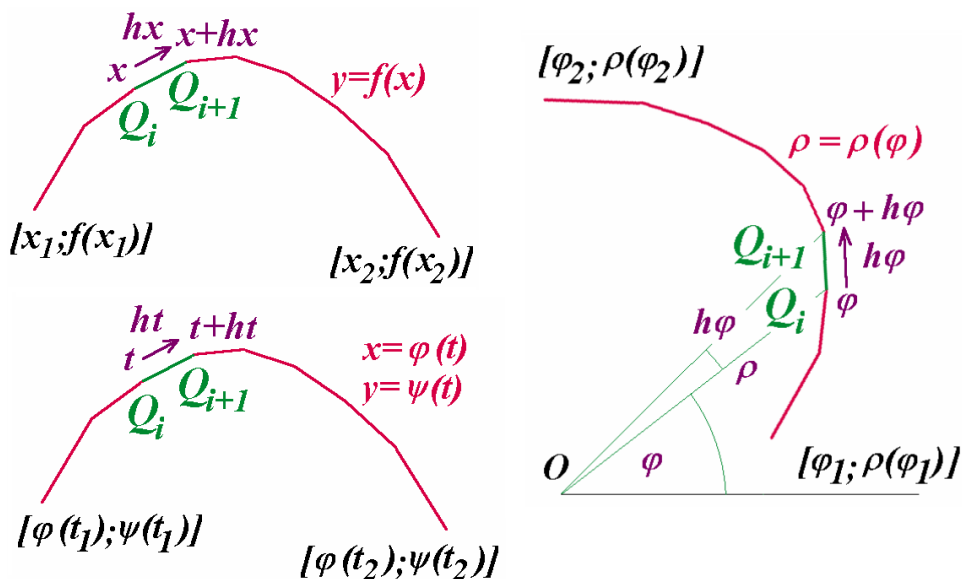


Obr. 4.3.1: Kuželosečky v polárních souřadnicích

#### 4. 4 Algoritmy konstrukce křivek

**1. GRAFY FUNKCÍ:** Je-li funkce po částech spojitá, je konstrukce jejího grafu poměrně jednoduchá. Interval spojitosti rozdělíme ekvidistantním dělením na subintervaly, kde graf interpolujeme úsečkou tak, jak je patrné z obr. 4.4.1 vlevo nahoře.

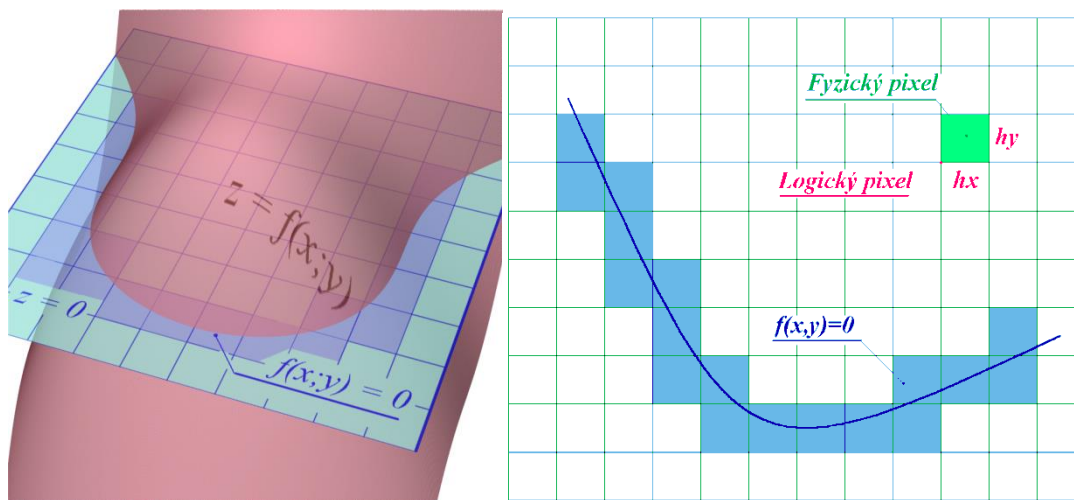
**2. KŘIVKY ZADANÉ PARAMETRICKY A POLÁRNĚ:** Postup je zcela analogický. Ekvidistantně tentokrát nedělíme interval  $\langle x_1; x_2 \rangle$  nezávisle proměnné, ale interval  $\langle t_1; t_2 \rangle$  parametru v případě parametrického zadání (obr. 4.4.1 vlevo dole), resp. interval  $\langle \varphi_1; \varphi_2 \rangle$  argumentu v případě vyjádření v polárních souřadnicích (obr. 4.4.1 vpravo).



Obr. 4.4.1: K algoritmu konstrukce grafu funkce a křivek zadaných parametricky, resp. v polárních souřadnicích

**3. KŘIVKY ZADANÉ ROVNICÍ  $f(x; y) = 0$ :** Nejjednodušší algoritmus pro sestrojování těchto křivek využívá rozdíl mezi fyzickými a logickými pixely (viz kpt. 1. 1 odst. 3, 4). Křivku  $f(x; y) = 0$  je možno vykreslit samozřejmě pouze fyzickými pixely (viz světle modrá „křivka“ na obr. 4.1.2). Každý takový pixel je však logicky obdélník o stranách  $h_x, h_y$  (reálná velikost stran závisí na rozměrech uživatelské kreslicí plochy). Je zřejmé, že fyzický pixel má být vykreslen právě tehdy, protíná-li křivka hranice tohoto pixelu. Je tedy třeba nastavit kroky  $h_x; h_y$  tak, aby logické obdélníky přesně pokrývaly fyzické pixely.

Kriteriem pro zobrazení fyzického pixelu jsou pak různá znaménka funkce  $z = f(x, y)$  alespoň ve dvou vrcholech obdélníka.



Obr. 4.4.1: K algoritmu konstrukce křivky  $f(x; y) = 0$ .

## 4. 5 Analytické modelování pohybu

**1. BODOVÁ FUNKCE:** Zatímco funkce jedné reálné proměnné je zobrazení  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subseteq \mathbb{R}$  je definiční obor funkce, rovinnou resp. prostorovou bodovou funkcí jedné reálné proměnné v euklidovském (projektivním) prostoru rozumíme zobrazení  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathcal{E}^2$  resp.  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathcal{E}^3$ , ( $\mathbf{f}: D \rightarrow {}_\infty\mathcal{E}^2$  resp.  $\mathbf{f}: D \rightarrow {}_\infty\mathcal{E}^3$ ) kde  $D \subseteq \mathbb{R}$  je definiční obor funkce. Proměnnou budeme značit  $t$  a nazýváme ji parametr. Hodnotou bodové funkce pro  $t \in D \subseteq \mathbb{R}$  je bod

$$Q(t) = [f_1(t); f_2(t)] \in \mathcal{E}^2 \quad \text{resp.} \quad Q(t) = [f_1(t); f_2(t); f_3(t)] \in \mathcal{E}^3$$

popř.

$$Q(t) = [k \cdot f_1(t); k \cdot f_2(t); k \cdot \omega] \in {}_\infty\mathcal{E}^2 \quad \text{resp.} \quad Q(t) = [k \cdot f_1(t); k \cdot f_2(t); k \cdot f_3(t); k \cdot \omega] \in {}_\infty\mathcal{E}^3$$

Každá hodnota parametru  $t$  určuje bod  $Q(t)$  jednoznačně. Vlastní body projektivního prostoru budeme reprezentovat standardními reprezentanty, tj. budeme psát

$$\mathbf{Q}(t) = (f_1(t); f_2(t); \omega) \in {}_\infty\mathcal{E}^2 \quad (4.5.1)$$

resp.

$$\mathbf{Q}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_2(t); \omega) \in {}_\infty\mathcal{E}^3 \quad (4.5.2)$$

kde  $\omega = 1$  resp.  $\omega = 0$  právě tehdy, když bod  $Q(t)$  je vlastní resp. nevlastní. Rovnice (4.5.1); (4.5.2) nazýváme bodové rovnice křivky  $\tilde{k}$ . Můžeme se rovněž setkat s tím, že vlastní bod  $\mathbf{Q}(t) = (q_1; q_2; 1) \in \mathcal{E}^2$  křivky  $\tilde{k}$  je reprezentován jeho polohovým vektorem

$${}_\infty\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) - \mathbf{0} = (q_1; q_2; 1) - (0; 0; 1) = (q_1; q_2; 0) \in {}_\infty\mathcal{E}^2$$

(v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$  analogicky). Rovnice (4.5.1) a (4.5.2) jsou pak tvaru

$$\mathbf{q}(t) = (f_1(t); f_2(t)) \in Z(\mathcal{E}^2)$$

resp.

$$\mathbf{q}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \in Z(\mathcal{E}^3)$$

Hovoříme pak o vektorových rovnicích křivky.

Obor hodnot bodové funkce (tj. množinu bodů, které jsou obrazem nějakého  $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ ) budeme nazývat grafem bodové funkce. Funkce  $f_1(t); f_2(t)$  popř.  $f_3(t)$  nazýváme **souřadnicové funkce**.

Lze ukázat, že pokud je definičním oborem bodové funkce interval (tj. souvislá podmnožina množiny  $\mathbb{R}$ ) a všechny souřadnicové funkce jsou spojité, pak grafem bodové funkce je křivka  $\tilde{k}$  v prostoru  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$  popř.  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$ . Říkáme pak, že křivka je určena bodovou funkcí.

Je-li  $D = \langle t_1; t_2 \rangle$ ; kde  $-\infty < t_1 < t_2 < \infty$ , pak bod  $\mathbf{T}_1 = (f_1(t_1); f_2(t_1); \omega(t_1))$  nazýváme počátečním a bod  $\mathbf{T}_2 = (f_1(t_2); f_2(t_2); \omega(t_2))$  koncovým bodem rovinné křivky. Pro prostorovou křivku analogicky.

**2. POZNÁMKA:** Protože nehrozí nedorozumění, mluvíme často jen o bodu  $t$  místo o bodu  $Q(t)$ .

**3. PŘÍKLAD:** Parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t; \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle \end{aligned}$$

je určena kružnice. Přepíšeme-li je do tvaru  $\mathbf{K}(t) = (\cos t; \sin t; 1)$ ,  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ , dostáváme kružnici jako rovinnou bodovou funkci. Parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t; \quad t \in \langle 0; 2k\pi \rangle; k \in \mathbb{Z} \\ z &= t \end{aligned}$$

je určeno  $k$  závitů cylindrické šroubovice. Tyto parametrické rovnice můžeme přepsat do tvaru prostorové bodové funkce  $\mathbf{S}(t) = (\cos t; \sin t; t; 1)$ ,  $t \in \langle 0; 2k\pi \rangle$ . Bodovou funkci tedy dostaneme z parametrických rovnic křivky jednoduše „přepisem“ do jednoho řádku.

Pokusme se nyní přesněji specifikovat, co budeme rozumět rovinným objektem a jeho pohybem. „Pohyb“ probíhá v čase, jeho „výsledkem“ musí být nová „poloha“ objektu, kterou lze z té původní získat přímoú shodností.

**4. POHYB BODU V ROVINĚ:** Podívejme se nejdříve na pohyb objektu, který fyzikové označují jako hmotný bod – tedy objektu zanedbatelných rozměrů. Pohyb probíhá v čase, který lze modelovat reálným číslem  $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$ . Pro každý časový okamžik musí být k dispozici přímá shodnost, která umožní ze znalosti počáteční polohy  $\mathbf{X} = (x_1; x_2; 1) \in {}_{\infty}\mathcal{E}^2$  získat aktuální polohu  $\mathbf{X}' = (x'_1; x'_2; 1) \in {}_{\infty}\mathcal{E}^2$ . Pohybem  $\mathcal{P}$  tedy bude množina zobrazení

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{tedy} \quad \mathbf{X}'^T = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{X}^T; \quad t \in I \quad (4.5.3)$$

kde prvky matice  $\mathbf{M}(t)$  jsou spojité funkce,  $I$  je interval a pro každé  $t \in I$  je matice  $\mathbf{M}(t)$  maticí přímé shodnosti.



**5. PŘÍKLAD:** Množina zobrazení

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0; 2k\pi \rangle \quad (4.5.4)$$

je množinou všech otočení bodu  $\mathbf{X} = (x_1; x_2; 1)$  o úhel  $t \in \langle 0; 2k\pi \rangle$  kolem počátku. Popisuje tedy pohyb libovolného vlastního bodu po kružnici se středem v počátku (přesněji řečeno jeho jednu otáčku).

**6. NEPROMĚNNÁ ROVINNÁ SOUSTAVA A JEJÍ POHYB:** Neproměnnou rovinnou soustavou  $\Sigma$  rozumíme libovolný geometrický rovinný útvar. Pohybem tohoto útvaru rozumíme množinu přímých shodností, kterou lze obecně zapsat ve tvaru

$$\Sigma'^T = \mathbf{M}(t) \cdot \Sigma^T$$

Pro každý bod  $\mathbf{X}$  útvaru  $\Sigma$  tak platí rovnice (4.5.3). Každý bod  $\mathbf{X} \in \Sigma$  je tedy zobrazován na body jisté křivky. Tuto křivku nazýváme **dráhou** příslušného bodu.

**7. PŘÍKLAD:** Podívejme se ještě jednou na rovnici (4.5.4) a vypočtěme dráhu bodu  $\mathbf{X} = (r; 0; 1)$ :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \langle 0; 2k\pi \rangle$$

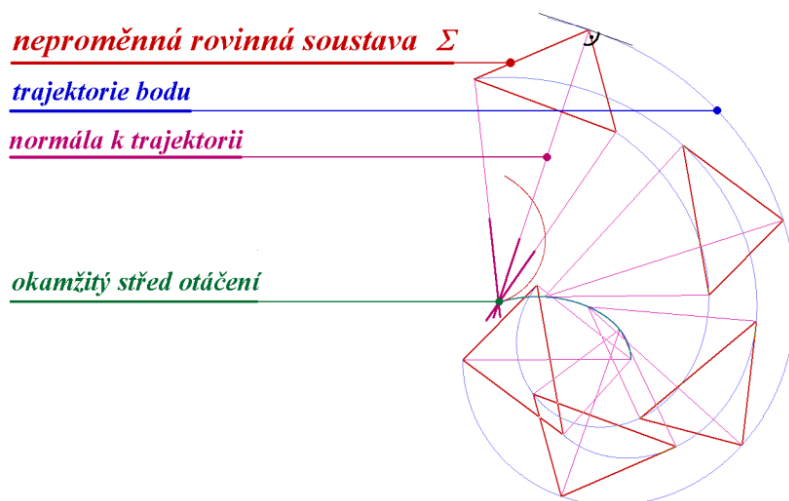
Porovnáním složek dostaneme parametrické rovnice kružnice, což nás asi nepřekvapí.

Pohyby v rovině lze, jak již bylo řečeno, sestavovat pomocí přímých shodností. Protože každá přímá shodnost se skládá z posunutí a otočení (viz kpt. 2.5. odst. 2), znamená to, že každou následující polohu pohybujícího se útvaru lze nalézt pomocí posunutí a otočení.

**5. OKAMŽITÝ STŘED OTÁČENÍ:** Normály trajektorií všech bodů soustavy v dané poloze procházejí jediným bodem – okamžitým středem otáčení.

Toto tvrzení platí i v případě, že se jedná o přímočarý pohyb. Trajektorie bodů soustavy jsou v tomto případě totiž vzájemně rovnoběžné přímky. Normály k nim jsou kolmice, které jsou rovněž vzájemně rovnoběžné – střed otáčení je v tomto případě nevlastní.

Známe-li tedy dráhy alespoň dvou bodů pohybujícího se útvaru, lze najít okamžitý střed otáčení, a to jako průsečík normál drah pohybujících se bodů. Na obr. 4.5.1 je tato skutečnost ilustrována pro pohybující se trojúhelník.



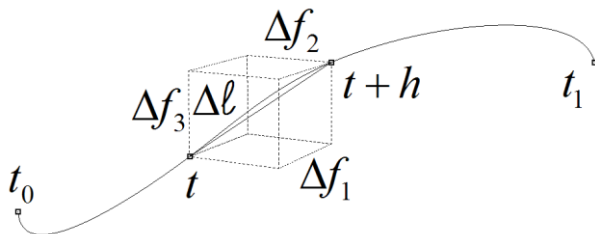
**Obr. 4.5.1:** Pohyb neproměnné rovinné soustavy



V následujícím textu budeme potřebovat pojem délka oblouku křivky, zopakujme tedy:

**6. DÉLKA ANALYTICKÉ KŘIVKY:** je přibližně rovna součtu délek oblouků  $\Delta \ell$  ohraničených body  $t; t + h_t$ , kde  $h_t > 0$ . Zřejmě platí

$$\Delta \ell \approx \sqrt{[\Delta f_1(t)]^2 + [\Delta f_2(t)]^2 + [\Delta f_3(t)]^2}$$



**Obr. 4.5.2:** K délce křivky

Jsou-li souřadnicové funkce diferencovatelné, můžeme přírůstky souřadnicových funkcí nahradit diferenciály, tj.

$$d\ell(t)(h) \approx \sqrt{[df_1(t)(h)]^2 + [df_2(t)(h)]^2 + [df_3(t)(h)]^2} \quad (4.5.5)$$

Z matematiky víme, že pro každou diferencovatelnou funkci  $f(x)$  je  $df(x)(h) = f'(x) \cdot h$ , výraz (4.5.5) má tedy tvar

$$\begin{aligned} \ell'(t) \cdot h &\approx \sqrt{[f'_1(t) \cdot h]^2 + [f'_2(t) \cdot h]^2 + [f'_3(t) \cdot h]^2} \\ \ell'(t) \cdot h &\approx \sqrt{[f'_1(t)]^2 + [f'_2(t)]^2 + [f'_3(t)]^2} h \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Pro  $h \rightarrow 0$ , je  $h = dt$  a vztah (4.5.6) přejde v rovnost, takže

$$\ell'(t)dt = \sqrt{[f'_1(t)]^2 + [f'_2(t)]^2 + [f'_3(t)]^2} dt$$

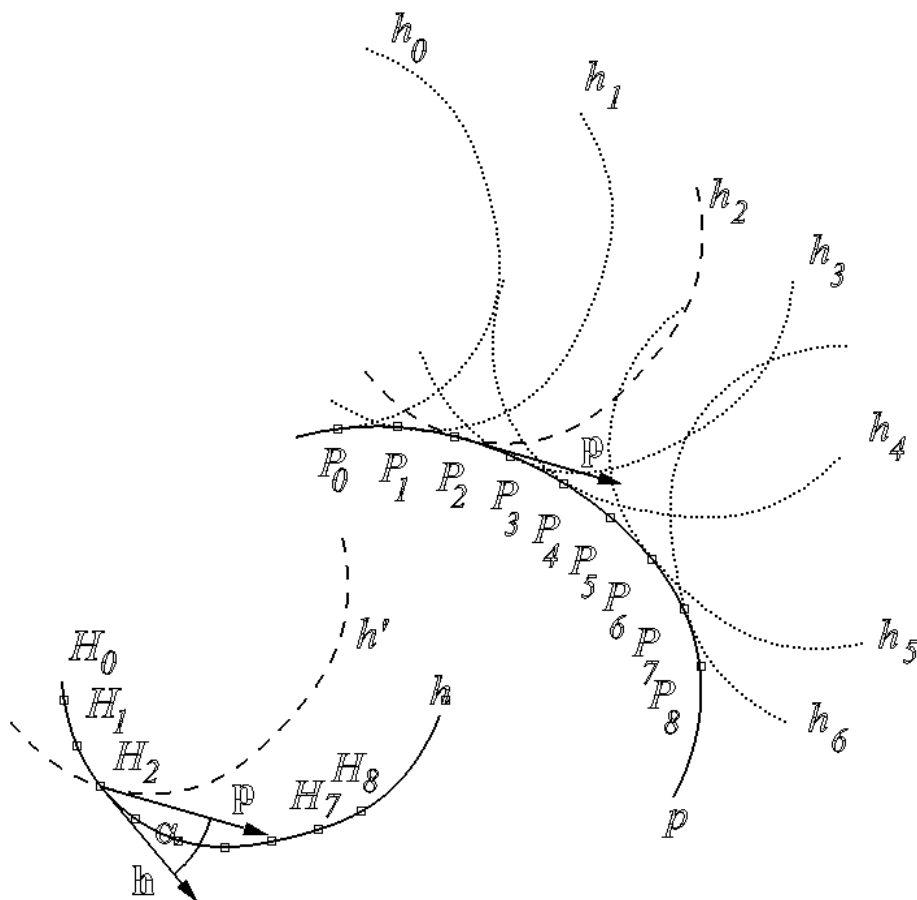
a délku křivky obdržíme zřejmě integrací

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \ell'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[f'_1(t)]^2 + [f'_2(t)]^2 + [f'_3(t)]^2} dt \quad (4.5.7)$$

**7. ODVALOVÁNÍ KŘIVKY PO KŘIVCE:** Uvažujme dvě rovinné křivky  $\mathbf{p}(t); \mathbf{h}(t)$ . Sestrojme posloupnost křivek  $\mathbf{h}_0(t); \mathbf{h}_1(t); \dots; \mathbf{h}_n(t)$ , a to následujícím způsobem: Na křivce  $\mathbf{p}(t)$  sestrojme posloupnost bodů  $P_0; P_1; \dots; P_n$  a na křivce  $\mathbf{h}(t)$  posloupnost  $H_0; H_1; \dots; H_n$  tak, aby pro každé  $i = 0; 1; \dots; n-1$  platilo  $\ell(P_i P_{i+1}) = \ell(H_i H_{i+1})$ , kde  $\ell(P_i P_{i+1})$  resp.  $\ell(H_i H_{i+1})$  je délka křivky  $\mathbf{p}^{(i)}(t) \subseteq \mathbf{p}(t)$  resp.  $\mathbf{h}^{(i)}(t) \subseteq \mathbf{h}(t)$  ohraničené body  $P_i; P_{i+1}$  resp.  $H_i; H_{i+1}$ . Křivku  $\mathbf{h}_i(t)$  pak sestrojíme následujícím způsobem: Křivku  $\mathbf{h}(t)$  zobrazíme v rotaci  $\mathcal{R}_i(H_i; \alpha_i)$ , kde úhel  $\alpha_i$  je roven úhlu směrových vektorů  ${}_{\infty}\mathbf{P}(P_i); {}_{\infty}\mathbf{H}(H_i)$  křivek  $\mathbf{p}(t); \mathbf{h}(t)$  v bodech  $P_i; H_i$  (na obr. 4.5.3 provedeno pro  $i = 2$ ). Křivku  $\bar{\mathbf{h}}(t)$ , kterou takto obdržíme, posuneme o vektor  $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{H_i P_i}$ . Pro  $i = 0; 1; \dots; n-1$  je tedy

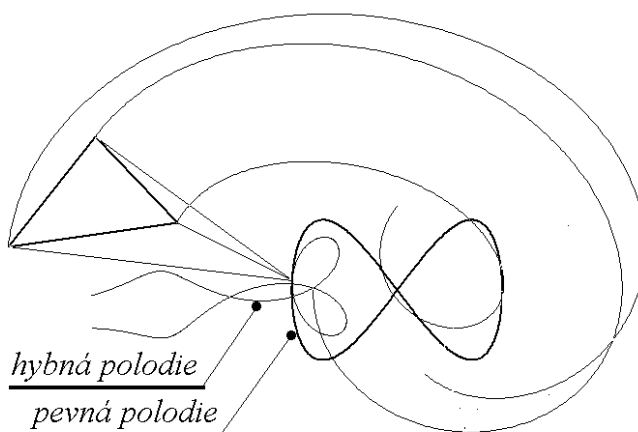
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \overrightarrow{H_i P_i}; \alpha_i = \angle({}_{\infty}\mathbf{P}(P_i); {}_{\infty}\mathbf{H}(H_i)) \\ Z_i &= \mathcal{T}_i(\mathbf{v}_i) \circ \mathcal{R}_i(H_i; \alpha_i) \\ Z_i: \mathbf{h}(t) &\rightarrow \bar{\mathbf{h}}_i(t) \end{aligned}$$

Křivky  $\mathbf{h}_i(t); \mathbf{h}(t)$  se nyní dotýkají (tj. mají společnou tečnu) v bodě  $P_i$ . Takto sestrojenou posloupnost křivek  $\mathbf{h}_0(t); \mathbf{h}_1(t); \dots; \mathbf{h}_n(t)$  nazýváme odvalováním křivky  $\mathbf{h}(t)$  po křivce  $\mathbf{p}(t)$ .



Obr. 4.5.3: Odvalování křivky po křivce

**8. PEVNÁ A HYBNÁ POLODIE:** Předpokládejme nyní, že známe dráhy dvou bodů pohybujících se soustavy  $\Sigma$ . Podle odstavce 5 můžeme pro každou polohu soustavy sestavit okamžitý střed otáčení. Množinou všech okamžitých středů otáčení soustavy při jejím rovinném pohybu je rovinná křivka  $\mathbf{p}(t)$ , kterou nazýváme **pevná polodie**. Sestrojíme soustavu  $\Sigma' = \Sigma \cup \mathbf{h}$  tak, že  $\mathbf{h}$  je množina všech bodů  $H_i$ , které se v jistém okamžiku stanou středem otáčení. Množina  $\mathbf{h}$  je křivka, kterou nazýváme **hybná polodie** (viz obr. 4.5.4).



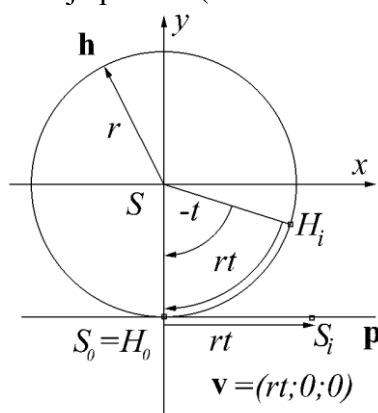
Obr. 4.5.4: Pevná a hybná polodie

Platí následující důležitá věta:

**9. VĚTA O POPISU ROVINNÉHO POHYBU, VRATNÝ POHYB:** Každý pohyb v rovině lze popsat odvalováním hybné polodii po polodii pevné. Pohyb  $\bar{\mathcal{P}}$ , který vznikne z pohybu  $\mathcal{P}$  záměnou polodií, nazýváme vratným pohybem k pohybu  $\mathcal{P}$ .

Pohyb  $\bar{\mathcal{P}}$  vratný k pohybu  $\mathcal{P}$  tedy získáme tak, že pevnou polodii pohybu  $\mathcal{P}$  necháme odvalovat po polodii hybné (zaměníme pevnou a hybnou polodii).

**10. CYKLOIDÁLNÍ POHYB:** je pohyb, jehož hybnou polodii je kružnice, pevnou polodii může být libovolná křivka. Trajektoriemi bodů pohybující se soustavy jsou křivky, které se nazývají **cykloidy**. Trajektorií bodu, který leží na hybné polodii, je prostá cykloida, trajektorií vnitřního (vnějšího) bodu kružnice je zkrácená (prodloužená) cykloida. Zde ukážeme speciální případ, kdy pevnou polodii je přímka (viz obr. 4.5.5).



Obr. 4.5.5: Cykloidální pohyb

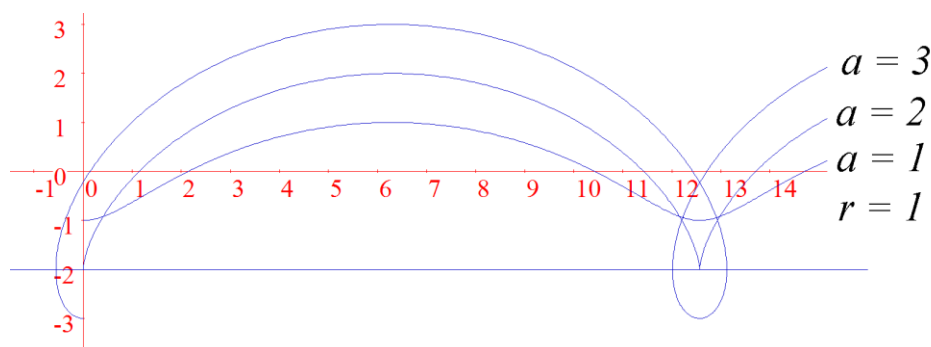
**Konstrukce:** Hybnou polodii (kružnici) a pevnou polodii (přímku) zvolíme tak, aby složení translace a rotace bylo co nejjednodušší. Tedy  $\mathbf{h} \equiv x^2 + y^2 = r^2 \equiv (r \cos t; r \sin t; 1)$ ;  $\mathbf{p} \equiv y = -r$ ; střed  $S$  kružnice v počátku (viz obr. 4.5.5). Valivý pohyb se skládá z rotace o úhel  $-t$  kolem počátku a posunutí o vektor  $\mathbf{v}$ . Velikost tohoto vektoru musí být rovna délce oblouku kružnice, příslušnému úhlu  $-t$ , tedy  $|\mathbf{v}| = |r \cdot t|$ . To znamená, že  $\mathbf{v} = (rt; 0; 0)$ . Matice tohoto pohybu je tedy

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}_{S;t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & rt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) & 0 \\ \sin(-t) & \cos(-t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & rt \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spojíme-li tedy s valící se kružnicí bod  $A = (0; -a; 1)$ , obdržíme jeho dráhu ve tvaru

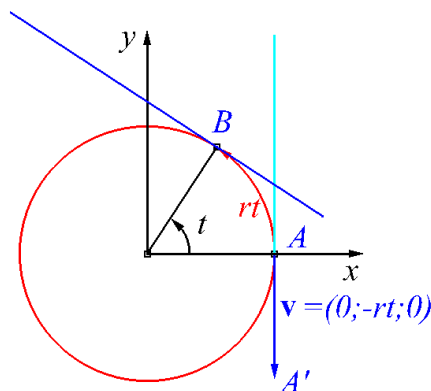
$$\mathbf{A}'^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & rt \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a'_1 &= -a \cdot \sin t + rt \\ a'_2 &= -a \cos t \end{aligned}$$

Je-li  $a = r$ , jedná se o prostou cykloidu (v tom případě je totiž  $A \in \mathbf{h}$ ), je-li  $a < r$  ( $a > r$ ), jedná se o zkrácenou (prodlouženou) cykloidu, neboť bod  $A$  leží uvnitř (vně)  $\mathbf{h}$  – viz obr. 4.4.6.



Obr. 4.5.6: Prostá, zkrácená a prodloužená cykloida

**11. EVOLVENTNÍ POHYB** je pohyb vratný k pohybu cykloidálnímu, tj. pohyb, jehož pevnou polodií  $\mathbf{p}$  je kružnice a hybnou polodií  $\mathbf{h}$  je libovolná křivka. My se omezíme na případ, kdy hybnou polodií je přímka. Trajektoriemi bodů pohybující se soustavy jsou křivky zvané **evolventy**. Přitom trajektorií bodu, který leží na přímce, je prostá evolventa, trajektorií bodu ležícího v polovině určené tečnou a normálovým vektorem křivky resp. vektorem opačným je prodloužená (zkrácená) evolventa. Opět ukážeme speciální případ, kdy pevnou polodií je kružnice.



Obr. 4.5.7: Evolventní pohyb

**Konstrukce:** Polodie opět zvolíme tak, aby složení translace a rotace bylo co nejjednodušší. Tedy  $\mathbf{p} \equiv x^2 + y^2 = r^2 \equiv (r \cos t; r \sin t; 1)$ ;  $\mathbf{h} \equiv y = -r$ ; střed  $S$  kružnice v počátku (viz obr. 4.5.6). Pohyb se skládá z posunutí o vektor  $\mathbf{v} = (0; v_2)$  a rotace o úhel  $t$  kolem počátku. Velikost vektoru musí být opět rovna délce oblouku kružnice, příslušnému úhlu  $t$ , tedy  $|\mathbf{v}| = |r \cdot t|$ , tj.  $\mathbf{v} = (0; -rt)$ . Matice tohoto pohybu je tedy

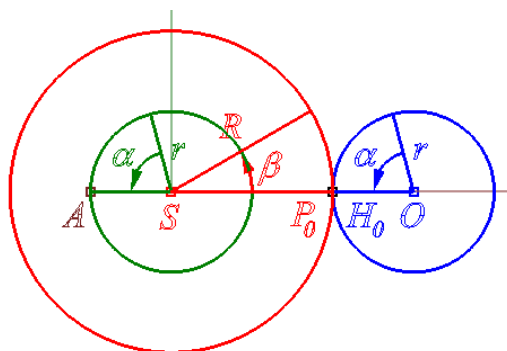
$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_{S;t} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -rt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & rt \sin t \\ \sin t & \cos t & -rt \cos t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spojíme-li valící se přímkou bod  $A = (a; 0; 1)$ , obdržíme jeho dráhu ve tvaru

$$\mathbf{A}'^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & rt \sin t \\ \sin t & \cos t & -rt \cos t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a'_1 &= a \cdot \cos t + rt \sin t \\ a'_2 &= a \sin t - rt \cos t \end{aligned}$$

Je-li  $a = r$ , jedná se o prostou evolventu, je-li  $a > r$  ( $a < r$ ), jedná se o prodlouženou (zkrácenou) evolventu. V případě  $a = 0$  dostáváme tzv. Archimedovu spirálu.

**12. EPICYKLOIDÁLNÍ POHYB** pevnou polodií  $\mathbf{p}$  i hybnou polodií  $\mathbf{h}$  jsou kružnice, přičemž jejich dotyk je vnější. Trajektorie tohoto pohybu se nazývají epicykloidy. Trajektorie středu  $O$  hybné polodie je kružnice soustředná s  $\mathbf{p}$ . Vnitřní (vnější) body hybné polodie  $\mathbf{h}$  opisují zkrácené (prodloužené) epicykloidy. Body kružnice  $\mathbf{h}$  vytvoří prostou epicykloidu.



Obr. 4.5.8: Epicykloidální pohyb

**Konstrukce:** Střed  $S$  pevné polodie  $\mathbf{p}$  umístíme do počátku. Oblouk hybné polodie  $\mathbf{h}_0$  příslušný jejímu středovému úhlu  $\alpha$  se odvalí po oblouku pevné polodie, který přísluší jejímu úhlu  $\beta$ . Polodii  $\mathbf{h}$  otočíme kolem počátku o úhel  $\alpha$ , střed takto otočené polodie  $\mathbf{h}$  posuneme o vektor  $\mathbf{v} = (R + r; 0; 0)$ , čímž ji zobrazíme na polodii  $\mathbf{h}_0$ . Tu je pak třeba otočit opět kolem počátku, tentokrát o úhel  $\beta$ . Matice epicykloidálního pohybu je tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{R}_{S;\beta} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}_{S;\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & R + r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & (R + r) \cos \beta \\ \sin \beta & \cos \beta & (R + r) \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha & (R + r) \cos \beta \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha & (R + r) \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & (R + r) \cos \beta \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & (R + r) \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ještě je třeba dořešit vztah mezi úhly  $\alpha; \beta$ . Ty musí být voleny tak, aby si délky příslušných oblouků byly rovny. Můžeme tedy položit např.  $\alpha = t$ , pak by bylo  $\beta = Rr^{-1}t$ . Volba  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$  pak znamená, že hybná polodie projede celý obvod pevné polodie. Opačná volba dává  $\beta = t$ ;  $\alpha = rR^{-1}t$ . Volba  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$  pak znamená, že hybná polodie provede jednu otáčku. Zvolme první možnost. Pak je

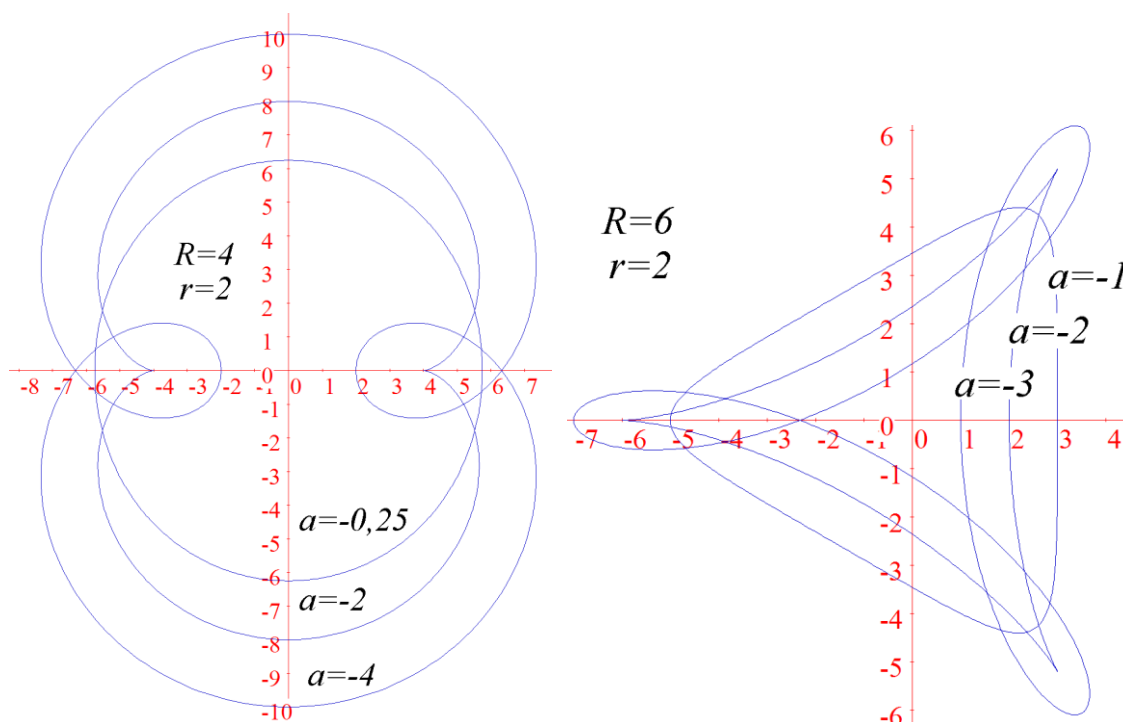
$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_{S;\beta} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}_{S;\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(Rr^{-1}t + t) & -\sin(Rr^{-1}t + t) & (R + r) \cos t \\ \sin(Rr^{-1}t + t) & \cos(Rr^{-1}t + t) & (R + r) \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spojíme-li s valicí se kružnicí bod  $A = (a; 0; 1)$ , obdržíme jeho dráhu ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'^T &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(Rr^{-1}t + t) & -\sin(Rr^{-1}t + t) & (R + r) \cos t \\ \sin(Rr^{-1}t + t) & \cos(Rr^{-1}t + t) & (R + r) \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &a'_1 = a \cos(Rr^{-1}t + t) + (R + r) \sin t \\ &a'_2 = a \sin(Rr^{-1}t + t) + (R + r) \cos t \end{aligned}$$

Je-li  $|a| = r$  jedná se o prostou epicykloidu, je-li  $|a| < r$  ( $|a| > r$ ), jedná se o zkrácenou (prodlouženou) epicykloidu (viz obr. 4.5.9 vlevo). Chceme-li valit bod  $A$  vyznačený na obr.

4.5.8, musíme volit  $a < 0$ . Prostá epicykloida, pro kterou je  $Rr^{-1} = 1$  ( $Rr^{-1} = 2$ ) se nazývá kardioida (nefroida).



**Obr. 4.5.9:** Prostá, prodloužená a zkrácená epicykloida (vlevo) a hypocykloida (vpravo)

**12. HYPOCYKLOIDÁLNÍ POHYB:** pevnou polodií  $\mathbf{p}$  i hybnou polodií  $\mathbf{h}$  jsou kružnice, přičemž jejich dotyk je vnitřní. Trajektorie tohoto pohybu se nazývají hypocykloidy. Trajektorie středu  $O$  hybné polodie je kružnice soustředná s  $\mathbf{p}$ . Vnitřní (vnější) body hybné polodie  $\mathbf{h}$  opisují zkrácené (prodloužené) hypocykloidy. Body kružnice  $\mathbf{h}$  vytvoří prostou hypocykloidu.

**Konstrukce hypocykloidy:** je zcela analogická konstrukci epicykloidy, a to jak synteticky, tak analyticky. Rozdíl je ve velikosti středné kružnic  $\mathbf{p}$ ;  $\mathbf{h}$  – u epicykloidy byla  $R + r$ , u hypocykloidy je to  $R - r$ . Dále je třeba mít na paměti, že pohyb bodu dotyku po pevné polodii se děje v opačném smyslu než v jakém se otáčí polodie hybná. V konstrukci je třeba změnit znaménko u jednoho z úhlů  $\alpha$ ;  $\beta$ . Matice hypocykloidálního pohybu je tedy

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(Rr^{-1}t - t) & -\sin(Rr^{-1}t - t) & (R - r) \cos t \\ \sin(Rr^{-1}t - t) & \cos(Rr^{-1}t - t) & -(R - r) \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

parametrické vyjádření pak obdržíme ve tvaru

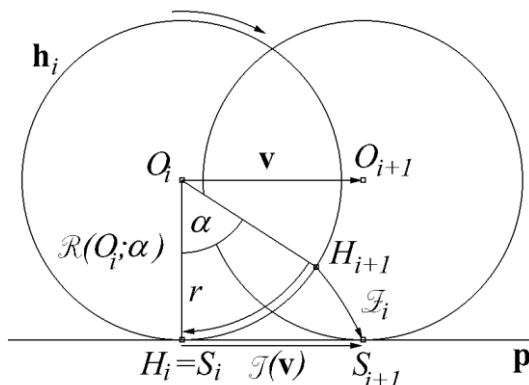
$$\mathbf{A}'^T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^T \Rightarrow \begin{aligned} a'_1 &= a \cos(Rr^{-1}t - t) + (R - r) \cos t \\ a'_2 &= a \sin(Rr^{-1}t - t) - (R - r) \sin t \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Je-li  $|a| = r$  jedná se o prostou hypocykloidu, je-li  $|a| < r$  ( $|a| > r$ ), jedná se o zkrácenou (prodlouženou) hypocykloidu (viz obr. 4.5.9 vpravo). Prostá hypocykloida, pro kterou je  $Rr^{-1} = 3$  (to je případ našeho obrázku) se nazývá Steinerova hypocykloida, pro  $Rr^{-1} = 4$  obdržíme asteroidu.

## 4. 6 Softwarové modelování pohybu

Při předchozím odvozování matic technických pohybů jsme byli limitováni ručními výpočty. Pohyby jsme skládali tak, aby násobení matic bylo pro ruční výpočty co možná nejjednodušší, a tak skládání epi- a hypocykliod bylo dosti krkolomné. Při strojovém zpracování se nemusíme ohlížet na pracnost mechanického počítání – to můžeme zcela přenechat počítači. Navíc můžeme sestrojovat valící se kružnice a přímky v pohybu, a to naprosto přirozeným způsobem.

Uvažujme znovu cykloidální pohyb. Naším cílem tentokrát nebude matice tohoto pohybu ani jeho parametrické rovnice. Cílem bude vymodelování valící se kružnice a znázornění dráhy některých jejích bodů. Celý pohyb v čase  $t \in \langle t_0; t_n \rangle$  rozložíme na snímky situací v okamžicích  $t_i$ ;  $i = 0; 1; \dots; n$ . Předpokládejme, že máme snímek v okamžiku  $t_i$  a potřebujeme sestrojit situaci v okamžiku následujícím (viz obr. 4.6.1). Hledáme tedy zobrazení  $Z_i$ , které zobrazí bod  $H_{i+1}$  na bod  $S_{i+1}$  a bod  $O_i$  na  $O_{i+1}$ . Zobrazení  $Z_i$  je tedy třeba složit z rotace  $\mathcal{R}(O_i; \alpha)$  a posunutí  $\mathcal{T}(\mathbf{v})$  o vektor  $\mathbf{v}$  – směrový vektor pevné polodie o velikosti  $|\mathbf{v}| = r\alpha$ . Matici posunutí máme k dispozici (viz kpt. 3.4.), rotaci však známe jen jako rotaci kolem počátku. Bod  $O_i$  počátkem není, rotaci kolem tohoto bodu musíme tedy složit.



Obr. 4.6.1: K modelování cykloidálního pohybu

Bod, který má rotovat kolem bodu  $O_i$ , je třeba nejdříve posunout tak, aby střed rotace splynul s počátkem, tj. posunout ho o vektor  $-\infty \mathbf{O}_i = -(o_1; o_2; 0)$ . Takto posunutý bod může rotovat kolem počátku o požadovaný úhel, poté je třeba celou situaci „posunout zpět“, tj. o vektor  $\infty \mathbf{O}_i = (o_1; o_2; 0)$ . Rotace  $\mathcal{R}(O_i; \alpha)$  tedy vznikne složením  $\mathcal{R}(O_i; \alpha) = \mathcal{T}(-\infty \mathbf{O}_i) \circ \mathcal{R}(0; \alpha) \circ \mathcal{T}(\infty \mathbf{O}_i)$  a její matice je tvaru  $\mathbf{R}_{O_i; \alpha} = \mathbf{T}_{-\infty \mathbf{O}_i} \cdot \mathbf{R}_{0; \alpha} \cdot \mathbf{T}_{\infty \mathbf{O}_i}$ . Příslušný krok  $C_i$  cykloidálního pohybu tedy dostaneme tak, že kružnici  $h_i$  otočíme kolem bodu  $O_i$  o úhel  $\alpha$ , a pak ji posuneme o vektor  $\mathbf{v}$ , tedy

$$C_i = \mathcal{T}(\mathbf{v}) \circ \mathcal{R}(O_i; \alpha)$$

Matice tohoto zobrazení je

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}_{O_i; \alpha} = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T}_{-\infty \mathbf{O}_i} \cdot \mathbf{R}_{0; \alpha} \cdot \mathbf{T}_{\infty \mathbf{O}_i}$$

Lze také kružnici  $h_i$  nejdříve posunout do kružnice  $h_{i+1}$  a tu pak rotovat o potřebný úhel, tedy

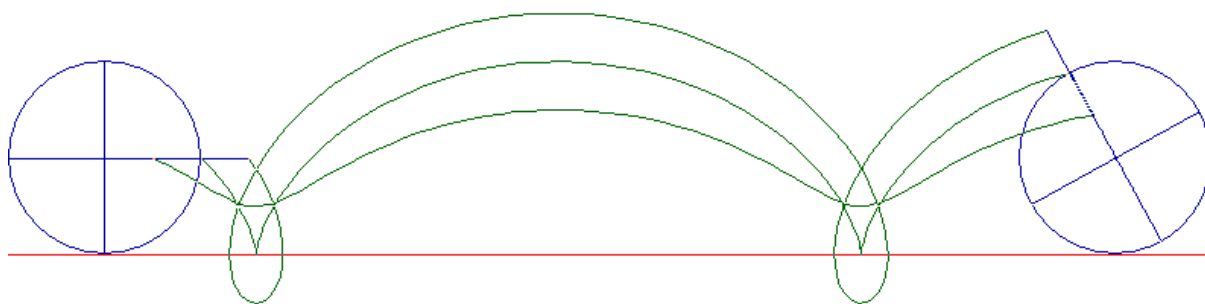
$$C_i = \mathcal{R}(O_{i+1}; \alpha) \circ \mathcal{T}(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{R}_{O_{i+1}; \alpha} = \mathbf{T}_{-\infty \mathbf{O}_{i+1}} \cdot \mathbf{R}_{0; \alpha} \cdot \mathbf{T}_{\infty \mathbf{O}_{i+1}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{v}}$$

**Pozor!** Neznamena to ovšem, že jsme prostě zaměnili pořadí posunutí a otočení! V prvním případě jsme totiž rotovali kolem bodu  $O_i$ , ve druhém kolem bodu  $O_{i+1}$

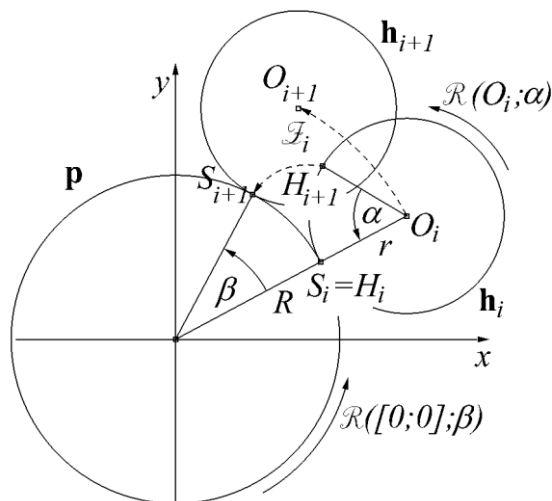
Takové řešení je samozřejmě pro ruční počítání neúnosné – jednak je třeba násobit čtyři matice, což je velmi pracné, ale hlavně matice potřebné v jednotlivých krocích jsou pro každý krok jiné (rotujeme totiž pokaždé kolem jiného středu). Pro každý krok je tedy třeba výpočet opakovat. Pro simulace na počítači je však naopak tento způsob skládání velmi výhodný – mechanické výpočty zde nepředstavují žádný problém (součin matic je programátorsky zcela rutinní záležitost) a „sestavování“ pohybů tímto „přirozeným“ způsobem je velmi výhodné.

Navíc umožňuje sestrojování drah pohybů nejrozumnějších bodů: zvolíme počáteční polohu  $A_0$ , poté jednoduše sestrojíme posloupnost  $A_{i+1} = \mathbf{C}_i \cdot A_i$ . Tímto způsobem jsme schopni sestrojit dráhu bodu  $A$ , aniž bychom explicitně znali její rovnici (ta je „skryta“ v maticích  $\mathbf{C}_i$ ). Navíc je možné sestrojit i „valící se“ kružnici. Aby bylo poznat, že se kružnice skutečně valí a nikoli jen posouvá, je dobré spojit s jejím obvodem nějakou pevnou a „viditelnou“ konstrukci, např. dva na sebe kolmé průměry. I k jejich sestrojení je možné využít výše uvedeného skládání zobrazení – zvolíme jeden bod na obvodu, který valíme s kružnicí, další body získáme v každém snímku otočením o úhel  $\frac{\pi}{2}$  kolem středu „aktuální“ kružnice (viz obr. 4.6.2).



**Obr. 4.6.2:** Softwarové modelování kružnice valící se po přímce

Zcela analogicky můžeme vymodelovat pohyb epicykloidální a hypocykloidální. Krok  $\mathcal{E}_i$  epicykloidálního pohybu složíme z rotace kolem středu  $O_i$  kružnice  $\mathbf{h}_i$  o úhel  $\alpha$  a z rotace kolem středu pevné polodie (který můžeme volit v počátku) o úhel  $\beta$ .



**Obr. 4.6.3:** K modelování epicykloidálního pohybu

Úhly  $\alpha$ ;  $\beta$  je třeba volit tak, aby délky odpovídajících si kruhových oblouků si byly rovny. Je tedy  $\mathcal{M}_i = \mathcal{R}(O; \beta) \circ \mathcal{R}(O_i; \alpha)$ , popř. podobně jako v předchozím případě  $\mathcal{M}_i = \mathcal{R}(O_{i+1}; \alpha) \circ \mathcal{R}(O; \beta)$ , matice tohoto kroku tedy je

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{R}_{O;\beta} \cdot \mathbf{R}_{O_i;\alpha} = \mathbf{R}_{O;\beta} \cdot \mathbf{T}_{-\infty O_i} \cdot \mathbf{R}_{O_i;\alpha} \cdot \mathbf{T}_{\infty O_i}$$

popř.



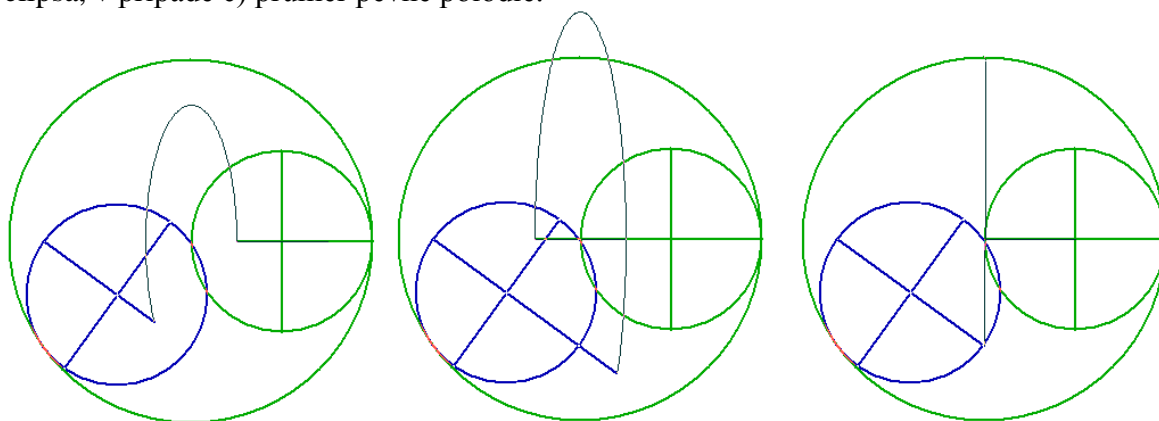
$$\mathbf{M}_i = \mathbf{R}_{O_{i+1};\alpha} \cdot \mathbf{R}_{O_i;\beta} = \mathbf{T}_{-\infty O_i} \cdot \mathbf{R}_{0;\alpha} \cdot \mathbf{T}_{\infty O_i} \cdot \mathbf{R}_{0;\beta}$$

U hypocykloidálního pohybu je situace analogická. Matici pohybu je sestavena naprosto stejně, jen střed hybné polodie je třeba volit s ohledem na vnitřní dotyk a u jednoho z úhlů  $\alpha$ ;  $\beta$  je třeba změnit znaménko.

**12. Příklad:** Stanovme dráhu hypocykloidálního pohybu, je-li  $R = 2 \cdot r$  a

$$\text{a) } a = -0.5 \cdot r \quad \text{b) } a = -1.5 \cdot r; \quad \text{c) } a = -r$$

**Řešení:** Vymodelujeme-li dráhu způsobem naznačeným v předchozím odstavci, dostaneme výstupy na obr. 4.6.4 a můžeme vyslovit hypotézu, že v případech a) b) je hledanou dráhou elipsa, v případě c) průměr pevné polodie.



**Obr. 4.6.4:** Dráhy hypocykloidálního pohybu dle zadání příkladu 12

Tyto hypotézy ověříme pomocí rovnic (4.5.7). Jsou-li parametrické rovnice hypocykloidy

$$\begin{aligned} a'_1 &= a \cos(Rr^{-1}t - t) + (R - r) \cos t \\ a'_2 &= a \sin(Rr^{-1}t - t) - (R - r) \sin t \end{aligned}$$

je v případě a)

$$\begin{aligned} a'_1 &= -0.5 \cdot r \cdot \cos(2rr^{-1}t - t) + (2r - r) \cos t = 0.5 \cdot r \cdot \cos t \\ a'_2 &= -0.5 \cdot r \cdot \sin(2rr^{-1}t - t) - (2r - r) \sin t = -1.5 \cdot r \cdot \sin t \end{aligned}$$

Jedná se o parametrické vyjádření elipsy s poloosami  $a = 1.5 \cdot r$ ;  $b = 0.5 \cdot r$

V případě b) zcela analogicky dostaneme  $(a'_1; a'_2) = (0.5r \cos t; -2.5r \sin t)$ .

V případě c) je

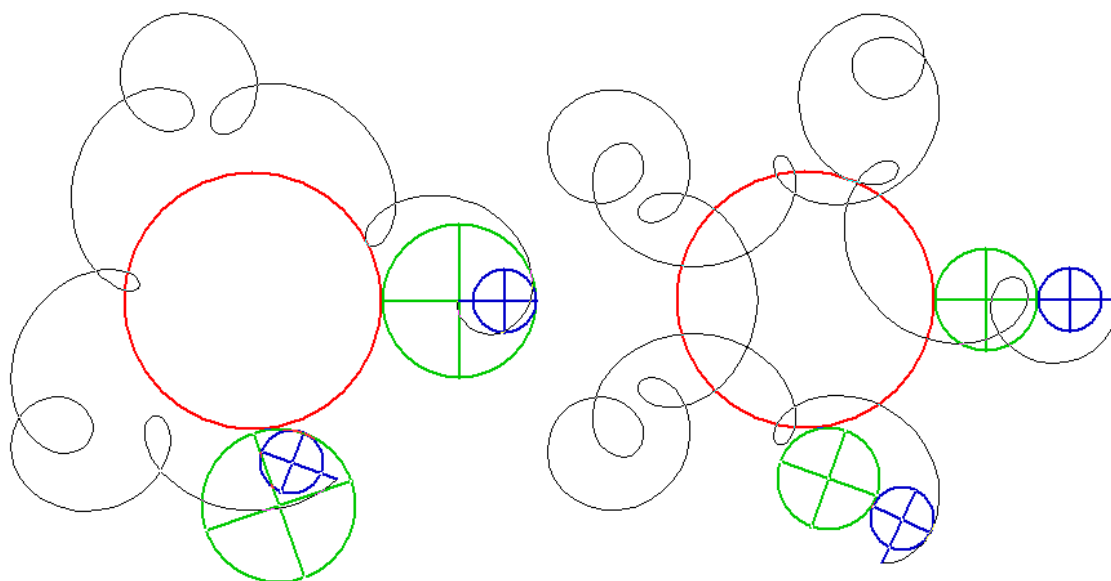
$$\begin{aligned} a'_1 &= -r \cdot \cos(2rr^{-1}t - t) + (2r - r) \cos t = 0 \\ a'_2 &= -r \cdot \sin(2rr^{-1}t - t) - (2r - r) \sin t = -2 \cdot r \cdot \sin t \end{aligned}$$

což je skutečně úsečka s krajními body  $A = [0; -2r]$  (pro  $t = \frac{\pi}{2}$ );  $B = [0; 2r]$  (pro  $t = \frac{3\pi}{2}$ );

Podobným způsobem můžeme modelovat i složitější pohyby tak, jak je demonstrováno na obr. 4.6.5.

## 4. 7 Softwarové modelování rychlosti

Jak již bylo naznačeno v kpt. 4.3., lze parametr v parametrickém vyjádření křivky chápat jako hodnotu závislou na čase a modelovat tak rychlost pohybu. Například v polárním vyjádření kuželosečky (4.3.2) je tímto parametrem určen úhel kladné poloosy  $x$  a průvodiče, tj. spojnice daného bodu s ohniskem (viz obr. 4.3.1). Konstantní přírůstek parametru tedy modeluje konstantní úhlovou rychlost pohybu po kuželosečce – pro elipsu viz obr. 4.7.1



**Obr. 4.6.5:** Skládání složitějších cykloidálních pohybů



**Obr. 4.7.1:** Konstantní úhlová rychlost pohybu po elipse a parabole podle (4.3.2)

Tento pohyb připomíná pohyb planety kolem Slunce či satelitu kolem Země, má však zásadní vadu. Konstantní úhlová rychlost zřejmě znamená různou rychlost obvodovou – ta je v tomto případě nejmenší ve vrcholu kuželosečky (v případě elipsy hlavní vrchol blíže ohnisku), tedy v periheliu či perigeu, a největší v nekonečnu (v případě elipsy ve druhém hlavním vrcholu - v afeliu či apogeu). Z fyziky však víme, že ve skutečnosti je tomu právě naopak. Souhlasu se

skutečností lze docílit změnou parametrizace. Pokusme se nejdříve o model konstantní obvodové rychlosti.

Konstantní obvodovou rychlost lze obecně zajistit tzv. parametrizací obloukem známou z diferenciální geometrie. Kuželosečku (4.3.2) vyjádříme v kartézských souřadnicích vektorovou rovnicí. Dostaneme

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t); p_2(t)) = \left( \frac{d_0 \varepsilon \cos t}{1 - \varepsilon \cos t}; \frac{d_0 \varepsilon \sin t}{1 - \varepsilon \cos t} \right) \quad (4.7.1)$$

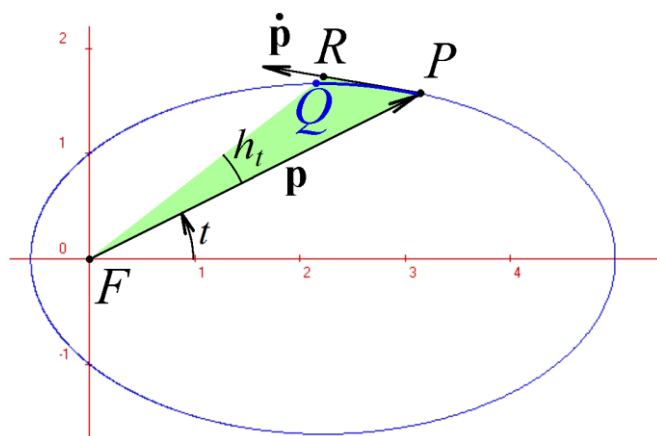
Tato rovnice vyjadřuje závislost polohového vektoru  $\mathbf{p}$  bodu  $P$  na velikosti úhlu  $t$  dle obr. 4.7.2. Vektor okamžité rychlosti v bodě  $P$  dostaneme derivací vektorové funkce  $\mathbf{p}$  (podle zvyklostí fyziků ji označíme tečkou):

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = (\dot{p}_1(t); \dot{p}_2(t)) \quad (4.7.2)$$

kde  $p_1(t); p_2(t)$  jsou dány rovnicí (4.7.1). Dráhu, kterou urazí bod  $P$  mezi úhly  $\varphi_1; \varphi_2$  dostaneme integrací velikosti rychlosti v příslušných mezích, tj.

$$s(t) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\dot{\mathbf{p}}(t); \dot{\mathbf{p}}(t))} dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[\dot{p}_1(t)]^2 + [\dot{p}_2(t)]^2} dt \quad (4.7.3)$$

- srovnejte vztahy (4.7.3) a (4.5.7).



**Obr. 4.7.2:** Ke konstantní obvodové rychlosti

V případech, kdy křivkou je kuželosečka, nelze přesnou hodnotu integrálu (4.7.3) získat pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Ovšem přibližné softwarové řešení není příliš složité. Zvolíme stálý krok dráhy – délku kuželosečkového oblouku  $PQ$ . Okamžitá rychlost v bodě  $P$  je určena derivací  $\dot{\mathbf{p}}$  jeho polohového vektoru  $\mathbf{p}$ . Tu můžeme určit analyticky, ale rovněž numericky, a to nejlépe pomocí tzv. první centrální diference. Podle (4.7.2) je tedy

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = (\dot{p}_1(t); \dot{p}_2(t))$$

kde dle (4.7.1) je

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= \frac{1}{2\Delta t} \cdot \left[ \frac{d_0 \varepsilon \cos(t + \Delta t)}{1 - \varepsilon \cos(t + \Delta t)} - \frac{d_0 \varepsilon \cos(t - \Delta t)}{1 - \varepsilon \cos(t - \Delta t)} \right] \\ \dot{p}_2(t) &= \frac{1}{2\Delta t} \cdot \left[ \frac{d_0 \varepsilon \sin(t + \Delta t)}{1 - \varepsilon \cos(t + \Delta t)} - \frac{d_0 \varepsilon \sin(t - \Delta t)}{1 - \varepsilon \cos(t - \Delta t)} \right] \end{aligned}$$

Diferenci  $\Delta t$  doporučujeme volit  $\Delta t \approx 10^{-5}$ .

Zvolený krok (délka  $d(PQ)$  kuželosečkového oblouku  $PQ$ ), který má mít stálou hodnotu, je pro malé kroky  $h_t$  (viz obr. 4.7.2) přibližně roven délce  $d(PR)$  úsečky  $PR$ , kde bod  $R$  stanovíme následovně:

$$R = P + \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\|\dot{\mathbf{p}}\|} \cdot d(PR) \approx P + \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\|\dot{\mathbf{p}}\|} \cdot d(PQ)$$

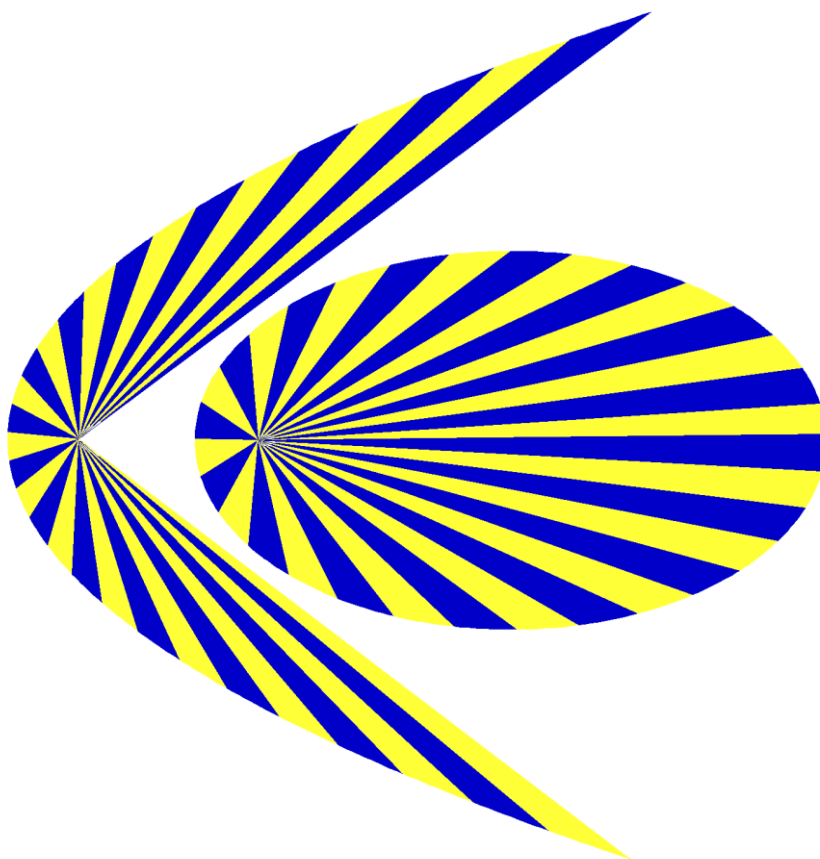
Ke konstrukci elipsy dle odst. 2 kpt. 4.4 a obr. 4.4.1 vpravo potřebujeme pro zvolený krok  $h_s = d(PQ) \approx d(PR)$  dráhy znát krok  $h_t$  úhlu průvodičů. Z trojúhelníka  $\Delta FPR$  máme

$$d^2(PR) \approx d^2(FP) + d^2(FR) - 2 \cdot d(FP) \cdot d(FR) \cdot \cos h_t$$

tedy

$$h_t \approx \arccos \frac{d^2(FP) + d^2(FR) - d^2(PR)}{2 \cdot d(FP) \cdot d(FR)}$$

Výsledek pro elipsu a parabolu si můžeme prohlédnout na obr. 4.7.3.



**Obr. 4.7.3:** Konstantní obvodová rychlost pohybu po elipse a parabole

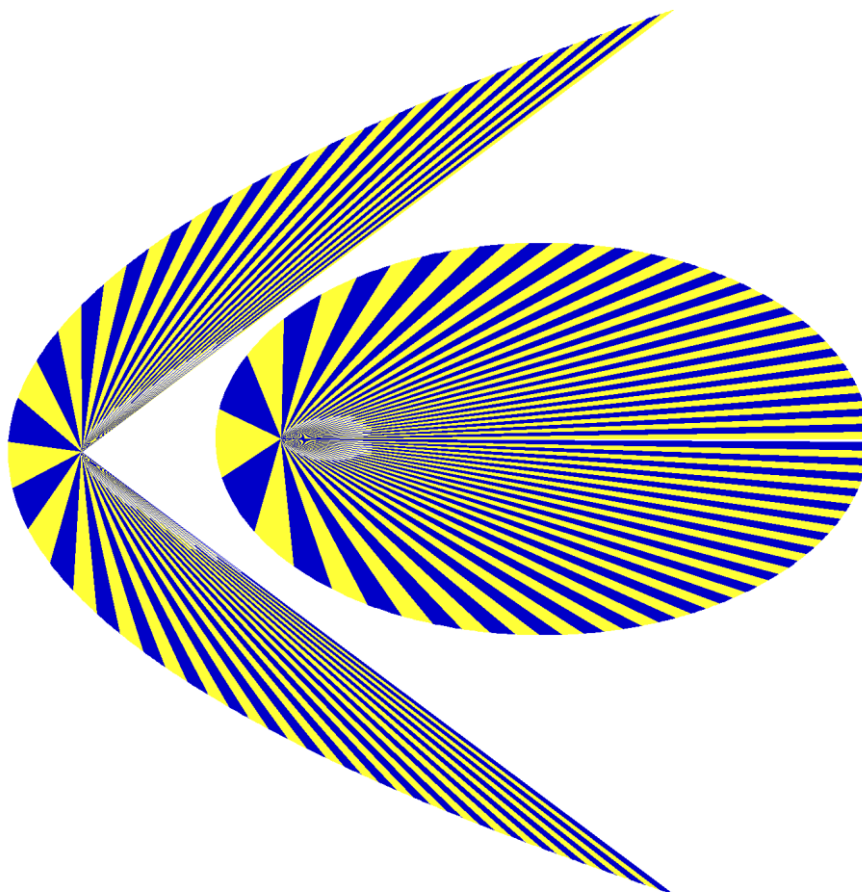
Pohyb planety kolem Slunce či satelitu kolem Země se však řídí druhým Keplerovým zákonem, podle kterého je konstantní nikoliv úhlová či obvodová rychlost, ale rychlost plošná, tj. průvodič má za stejnou časovou jednotku opsat stejnou plochu. Stálý tedy má být obsah trojúhelníka určeného vektory  $\mathbf{p}; \dot{\mathbf{p}}$  (viz obr. 4.7.2) tj. velikost vektoru  $\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}}$ . To vede na integrál

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\mathbf{p}(t) \times \dot{\mathbf{p}}(t)) \cdot (\mathbf{p}(t) \times \dot{\mathbf{p}}(t))} dt$$

Ani tento integrál nelze získat pomocí konečného počtu elementárních funkcí, ovšem přibližné softwarové řešení je v tomto případě analogické předchozímu případu a díky němu je již jednoduché. Jako konstantu tentokrát volíme obsah eliptické výseče  $FPQ$  (viz obr. 4.7.2). Ten je při malých úhlech průvodiče přibližně roven obsahu trojúhelníka  $\Delta FPR$ , požadovaný krok  $h_t$  úhlu průvodičů z toho již spočítáme velmi jednoduše:

$$S_{\Delta FPR} = \frac{1}{2} \cdot d(FP) \cdot d(FR) \cdot \sin h_t \Rightarrow h_t = \arcsin \frac{2 \cdot S_{\Delta FPR}}{d(FP) \cdot d(FR)}.$$

Výsledek pro elipsu a parabolu si můžeme prohlédnout na obr. 4.7.4.



**Obr. 4.7.4:** Konstantní plošná rychlost pohybu po elipse a parabole (dle 2. Keplerova zákona)

## 4. 8 Transformace křivek

V této kapitole si všimneme některých transformací, které známe z konstruktivní geometrie. Na tomto místě některé tyto transformace popíšeme analyticky. Bodovou rovnici  $\mathbf{K}'(t)$  obrazu křivky  $\mathbf{K}(t)$  ve zobrazení, které je určeno maticí  $\mathbf{M}$ , dostaneme jednoduchým násobením

$$\mathbf{K}'^T(t) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}^T(t)$$

**1. PŘÍKLAD – kružnice v osové afinitě:** Zobrazme kružnici  $\mathbf{K}(t) = (\cos t; \sin t; 1)$  v osové afinitě určené maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8.1)$$

**Řešení:**

$$\mathbf{K}'^T(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}^T(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ \frac{3}{2} \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parametrické rovnice křivky dostaneme volbou  $\mathbf{K}'(t) = (x; y; 1)$  a porovnáním složek:

$$\begin{aligned} x &= \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ y &= \frac{3}{2} \sin t \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

Tuto křivku můžeme sestavit algoritmem popsaným v kpt. 4.4. odst. 1. Je to rovnice elipsy, o čemž se můžeme přesvědčit vyloučením parametru:

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4y^2}{9}\right)} + \frac{1}{3}y \\ 3x - y &= \pm 3 \sqrt{\left(1 - \frac{4y^2}{9}\right)} \end{aligned}$$

po umocnění a úpravě

$$9x^2 - 6xy + 5y^2 - 9 = 0 \quad (4.8.3)$$

Tuto elipsu můžeme sestavit algoritmem popsaným v kpt. 4.4 odst. 3. Rovnice (4.8.3) popisuje stejnou množinu bodů jako rovnice (4.8.2). Výsledek je ilustrován na obr. 4.8.1 vlevo.

**2. PŘÍKLAD – kružnice ve středové kolíneaci:** Zobrazme kružnici  $\mathbf{E}(t) = \left(\frac{1}{2} \cos t; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t; 1\right)$  ve středové kolíneaci

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8.4)$$

**Řešení:** Zadaná kolíneace má osu v ose  $x$ , neboť se snadno přesvědčíme o tom, že každý bod  $\mathbf{A} = (x; 0; 1)$  je samodružný. Úběžnicí vzorů je přímka  $u_2 = 1$ , snadno se přesvědčíme o tom, že každý bod  $\mathbf{B} = (x; 1; 1)$  se zobrazí na nevlastní bod  ${}_{\infty}\mathbf{B} = \mathbf{b} = (x; 1; 0)$ . Zobrazme v této kolíneaci kružnici  $\mathbf{E}(t) = \left(\frac{1}{2} \cos t; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t; 1\right)$ . Na úběžnici leží jediný bod kružnice, a sice  $\mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0; 1; 1)$ , obraz této kružnice bude tedy mít jeden nevlastní bod. Pro  $t \neq \frac{\pi}{2}$  pak dostáváme

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos t \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos t \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix}$$

Abychom dostali rovnici křivky v  $\mathcal{E}^2$ , musíme její body reprezentovat standardními reprezentanty, tedy

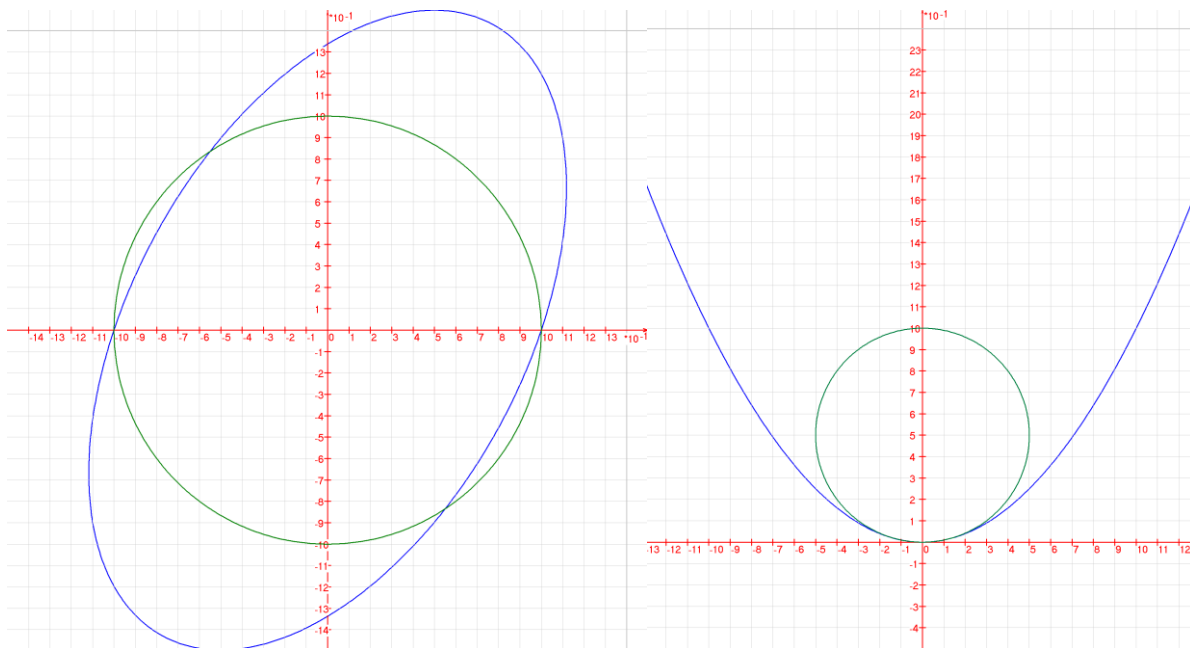
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2} \cos t}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin t} \\ \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{(1 - \sin t)} \cdot \frac{(1 + \sin t)}{(1 + \sin t)} \\ \frac{(1 + \sin t)}{(1 - \sin t)} \cdot \frac{(1 + \sin t)}{(1 + \sin t)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos t \cdot (1 + \sin t)}{\cos^2 t} \\ \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos^2 t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Porovnáním složek dostaneme parametrické rovnice

$$x = \frac{1 + \sin t}{\cos t}$$

$$y = \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos^2 t}$$

a jednoduchým vyloučením parametru rovnici paraboly  $y = x^2$ . Tato parabola má právě jeden nevlastní bod, tímto nevlastním bodem je směr její osy. Jestliže dále tuto parabolu zobrazíme v libovolné osově afinitě, dostaneme opět kuželosečku, která má právě jeden nevlastní bod (neboť každá afinita zachovává vlastní a nevlastní body – viz kpt. 3. 3. odst. 1). Touto kuželosečkou je tedy opět parabola – viz obr. 4.8.1 vpravo.



**Obr. 4.8.1:** Vlevo - kružnice v osově afinitě (4.8.1), vpravo kružnice ve středové kolineaci (4.8.4)

Zcela analogicky bychom mohli zvolit kružnici, která má s úběžnicí právě dva různé body. Jejím obrazem je tedy kuželosečka, která má dva nevlastní body. Touto křivkou je hyperbola, jejími nevlastními body jsou směry jejích asymptot.

Konečně v případě, kdy kružnice nemá s úběžnicí žádný společný bod, je jejím obrazem kuželosečka, která nemá žádný nevlastní bod, touto kuželosečkou je elipsa.

## 5 Reprezentace křivek v CAD systémech

Naprostá většina křivek a ploch, které se uživateli jeví jako velmi různorodé, je v moderních CAD systémech sestrojována zcela jednotným způsobem. Od úsečky přes kuželoščky až po složité ornamenty definované uživatelem, od čtverce přes kulovou plochu až po karoserii automobilu. V tomto textu se postupně nastíníme alespoň geometrické principy těchto konstrukcí.

### 5.1 Afinní kombinace bodů

V kapitole 2.7 jsme použili zápis

$$X = A + \mathbf{u} \quad (5.1.1)$$

a položili otázku si, zda můžeme zápis

$$\mathbf{u} = X - A \quad (5.1.2)$$

chápat jako rozdíl bodů afinního prostoru, jehož „výsledkem“ je vektor. Pokusme se nyní na tuto otázku odpovědět. Pokud bychom zápis  $X - A$  chápali skutečně jako rozdíl bodů, měl by existovat především součet těchto bodů, v afinní rovině tedy

$$X + A = [x_1; x_2] + [a_1; a_2] = \begin{cases} [x_1 + a_1; x_2 + a_2] \\ (x_1 + a_1; x_2 + a_2) \end{cases} \quad ?? \quad (5.1.3)$$

a také součet násobků (kombinace)

$$c_1 \cdot X + A = c_1 \cdot [x_1; x_2] + c_2 \cdot [a_1; a_2] = \begin{cases} [c_1 x_1 + c_2 a_1; c_1 x_2 + c_2 a_2] \\ (c_1 x_1 + c_2 a_1; c_1 x_2 + c_2 a_2) \end{cases} \quad ?? \quad (5.1.4)$$

Co by ovšem takovým součtem, popřípadě „kombinací“ bodů mělo být. Bod? Proč? Vektor? Z jakého důvodu? A jaký by to mělo geometrický smysl?

V kapitole 2.7 jsme definovali lineární kombinaci vektorů. V projektivním prostoru lze podobně definovat projektivní kombinaci bodů

**1. Projektivní kombinace bodů projektivního prostoru:** Bod  $V$  prostoru  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$  resp.  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$  nazveme projektivní kombinací bodů  $U_0; U_1; \dots; U_m$  právě tehdy, když pro každého reprezentanta  $V^*$  bodu  $V$  existují reprezentanti  $U_0^*; U_1^*; \dots; U_m^*$  bodů  $U_0; U_1; \dots; U_m$  takoví, že  $V^*$  je jejich lineární kombinací, tj. když existují  $c_i \in \mathbb{R}; i = 0; 1; \dots; m$  taková, že

$$V^* = c_0 U_0^* + c_1 U_1^* + \dots + c_m U_m^* \quad (5.1.4)$$

Projektivní kombinace bodů je tedy netriviální lineární kombinace jejich reprezentantů – reprezentanti  $U_0^*; U_1^*; \dots; U_m^*$  bodů  $U_0; U_1; \dots; U_m$  jsou ze své definice nenulové vektory a rovněž reprezentant  $V^*$  bodu  $V$  musí být nenulový. To znamená, že alespoň jedno  $c_i \in \mathbb{R}; i = 0; 1; \dots; m$  musí být nenulové.

Nyní by se mohlo zdát, že zápisy (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3) vysvětlíme pomocí projektivních kombinací bodů. Bohužel tomu tak není, a to ze dvou důvodů. Jednak si všimněte, že reprezentanti v předchozím odstavci jsou dle odst. 3. kpt. 3.1. označeni hvězdičkou, tj. nemusí jít o reprezentanty standardní. To znamená, že tyto reprezentanti obecně nemohou modelovat body afinního prostoru. Za druhé rozklad (5.1.1) není pro dané body jednoznačný.

Přesto budeme projektivní kombinace bodů používat k modelování geometrických útvarů v euklidovském prostoru. Ten totiž, jak již bylo řečeno, lze chápat jako množinu všech vlastních bodů projektivního prostoru. Aby toto naše modelování bylo úspěšné, je tedy třeba,



abychom používali jen takové projektivní kombinace, kde kombinací euklidovských reprezentantů je euklidovský reprezentant. V  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$  tedy musí být

$$(v_1; v_2; 1) = c_0(u_{01}; u_{02}; 1) + c_1(u_{11}; u_{12}; 1) + \dots + c_m(u_{m1}; u_{m2}; 1) \quad (5.1.5)$$

v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$  analogicky. Má-li ovšem platit (5.1.5), musí být

$$c_0 + c_1 + \dots + c_m = 1 \quad (5.1.6)$$

Operaci (5.1.5), která splňuje podmínku (5.1.6), budeme nazývat afinní kombinací bodů. Můžeme tedy definovat:

**2. Afinní kombinace bodů projektivního prostoru:** Vlastní bod  $K \in {}_{\infty}\mathcal{E}^n$  nazveme afinní kombinací vlastních bodů  $P_0; P_1; \dots; P_m \in {}_{\infty}\mathcal{E}^n$  právě tehdy, když jeho standardní reprezentant  $\mathbf{K}$  je lineární kombinací standardních reprezentantů bodů  $P_0; P_1; \dots; P_m$ , tj. když platí  $\mathbf{K} = c_0\mathbf{P}_0 + c_1\mathbf{P}_1 + \dots + c_m\mathbf{P}_m$  a současně (5.1.6).

Díky podmínce (5.1.6) můžeme afinní kombinaci zcela analogicky definovat i v afinním prostoru:

**3. Afinní kombinace bodů euklidovského prostoru:** Bod  $K \in \mathcal{E}^n$  euklidovského prostoru nazveme afinní kombinací bodů  $P_0; P_1; \dots; P_m \in \mathcal{E}^n$  právě tehdy, když pro polohové vektory  $\mathbf{k}; \mathbf{p}_0; \mathbf{p}_1; \dots; \mathbf{p}_m$  těchto bodů platí

$$\mathbf{k} = c_0\mathbf{p}_0 + c_1\mathbf{p}_1 + \dots + c_m\mathbf{p}_m; \quad c_0 + c_1 + \dots + c_m = 1$$

Zapisujeme

$$K = c_0P_0 + c_1P_1 + \dots + c_mP_m \quad (5.1.7)$$

V afinním prostoru tak nemá smysl pouze „operace“ (5.1.3). Operaci (5.1.1) odpovídá v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^n$  operace

$$\mathbf{X} = (x_1; x_2; \dots; x_n; 1) = (a_1; a_2; \dots; a_n; 1) + (u_1; u_2; \dots; u_n; 0) = \mathbf{A} + {}_{\infty}\mathbf{U} = \mathbf{A} + \mathbf{u} \quad (5.1.8)$$

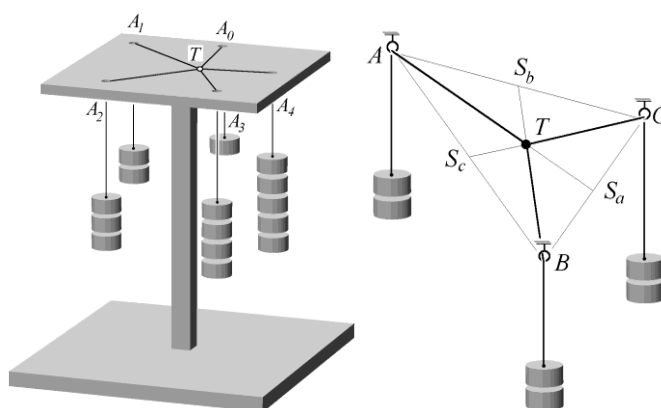
a operaci (5.1.2) operace

$$\mathbf{u} = {}_{\infty}\mathbf{U} = (u_1; u_2; \dots; u_n; 0) = (x_1; x_2; \dots; x_n; 1) - (a_1; a_2; \dots; a_n; 1) = \mathbf{X} - \mathbf{A} \quad (5.1.9)$$

Afinní kombinace bodů má však i zcela jasný geometrický i fyzikální význam. Například pro konkrétní hodnoty čísel  $0 < m_0; m_1; \dots; m_n < 1$  určuje afinní kombinace

$$T = m_0A_0 + m_1A_1 + \dots + m_nA_n$$

těžiště soustavy hmotných bodů  $A_0; A_1; \dots; A_n$  o hmotnostech  $m_0; m_1; \dots; m_n$ . Je-li navíc  $m_0; m_1; \dots; m_n$ , lze afinní kombinací určovat geometrické těžiště mnohoúhelníků – viz obr. 5.1.1.



**Obr. 5.1.1:** Fyzikální a geometrický význam afinní kombinace bodů

## 5.2 Řídicí body

Nyní se budeme zabývat dalším geometrickým významem afinní kombinace bodů, která má zásadní význam pro současné CAD systémy. Jsou-li  $A; B$  dva různé body v  $\mathcal{E}^2$  resp.  $\mathcal{E}^3$ , pak každá afinní kombinace

$$X = c_0 A + c_1 B; \quad c_0 + c_1 = 1$$

leží na přímce procházející body  $A; B$ , což znamená, že například rovnice

$$X(t) = (1 - t) \cdot A + t \cdot B; \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.2.1)$$

je rovnicí přímky procházející body  $A; B$ , pro  $t \in \langle 0; 1 \rangle$  úsečka s krajními body  $A; B$ . Pokud obecně v afinní kombinaci (5.1.7) použijeme místo konstant  $c_0; c_1; \dots; c_m$  spojité funkce  $c_0(t); c_1(t); \dots; c_m(t)$  takové, že pro každé  $t \in \mathbb{R}$  je  $c_0(t) + c_1(t) + \dots + c_m(t) = 1$ , tedy

$$K(t) = c_0(t) \cdot P_0 + c_1(t) \cdot P_1 + \dots + c_m(t) \cdot P_m \quad (5.2.2)$$

dostaneme rovnici křivky, jejíž konkrétní vlastnosti závisí na konkrétní volbě funkcí  $c_i(t)$ .

Použijeme-li v afinní kombinaci bodů v  $\mathcal{E}^3$  místo konstant  $c_0; c_1; \dots; c_m$  spojité funkce  $c_0(u, v); c_1(u, v); \dots; c_m(u, v)$  takové, že pro každé  $u, v \in \mathbb{R}$  je  $c_0(u, v) + c_1(u, v) + \dots + c_m(u, v) = 1$ , tedy

$$K(u, v) = c_0(u, v) \cdot P_0 + c_1(u, v) \cdot P_1 + \dots + c_m(u, v) \cdot P_m \quad (5.2.3)$$

dostaneme rovnici plochy, jejíž konkrétní vlastnosti opět závisí na konkrétní volbě funkcí  $c_i(u, v)$ .

Body  $P_0; P_1; \dots; P_m$  v rovnicích (5.2.2) (5.2.3) se nazývají řídicí body. V grafických systémech se využívají křivky a plochy, které mohou těmito body procházet, anebo také nemusí. Podle toho dělíme křivky a plochy na:

- a) interpolační** – procházejí všemi řídicími body  $P_0; P_1; \dots; P_n$
- b) aproximační** – neprocházejí všemi zadanými body  $P_0; P_1; \dots; P_n$

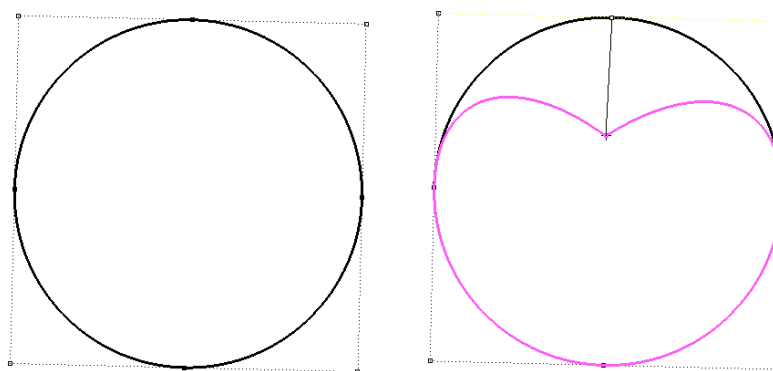
Funkcemi  $c_i(t)$  jsou polynomy, jejichž stupeň může uživatel volit uvnitř příkazu, či speciální racionální funkce. Nepoučenému uživateli jsou tyto funkce skryty, v tomto textu o některých z nich pojednáme dále.

Každá křivka generovaná CAD systémem může být afinní popř. projektivní kombinací řídicích bodů. Tímto způsobem jsou sestrojovány i běžně známé křivky např. kružnice elipsa atd. (včetně úsečky)

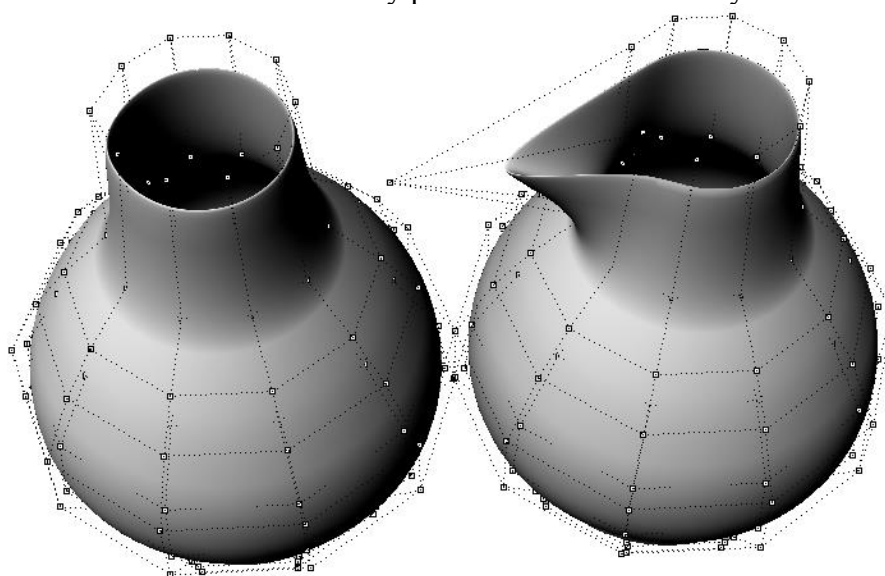
Například kružnice je afinní kombinací osmi řídicích bodů, které tvoří vrcholy a středy stran čtverce. Funkcemi  $c_0(t); c_1(t); \dots; c_m(t)$  jsou funkce „schopné generovat kruhové oblouky“ (podrobněji o nich pojednáme dále). Změnou polohy jediného řídicího bodu je pak uživatel schopen „předvídatelně měnit tvar“ velké části modelované křivky – viz obr. 5.2.1.

Podobně je tomu i u ploch. I funkce  $c_i(u, v)$  jsou polynomy či speciální racionální funkce (tentokrát dvou proměnných). Tímto způsobem jsou v Rhinoceros opět sestrojovány všechny plochy včetně „elementárních“ – např. kulová, válcová či kuželová plocha (včetně roviny). Změnou jednoho nebo několika málo řídicích bodů je pak možno dosáhnout požadované změny tvaru části plochy – viz obr. 5.2.2.

O některých takto generovaných plochách opět pojednáme dále v tomto textu.



**Obr. 5.2.1:** Modelování tvaru křivky pomocí řídících bodů v systému Rhinoceros



**Obr. 5.2.2:** Modelování tvaru plochy pomocí řídících bodů v systému Rhinoceros

### 5.3 Bézierovy křivky

Jak již bylo řečeno, drtivá většina křivek a ploch je v CAD systémech modelována jako afinní kombinace řídících bodů. Liší se od sebe vlastně jen počtem těchto bodů a tzv. bázovými funkcemi – tj. funkcemi, které fungují jako koeficienty příslušné afinní kombinace.

První takové křivky navrhl **Pierre Étienne Bézier** (1910 - 1999) pro firmu Renault. Odvodíme je způsobem, který navrhl **Paul de Casteljau** (nar. 1930) pro firmu Citroën

**1. Bézierova křivka 1. stupně:** Tuto křivku (úsečku) jsme vlastně již zmínili – viz (5.2.1). Nyní použijeme jen obvyklejší značení. V  $\mathcal{E}^2$  resp.  $\mathcal{E}^3$  tedy máme

$$Q^{(1)}(t) = (1 - t) \cdot P_0 + t \cdot P_1 \quad t \in \langle 0; 1 \rangle. \quad (5.3.1)$$

v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$  resp.  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$ , kde pracujeme se standardními reprezentanty vlastních bodů, pak

$$Q^{(1)}(t) = (1 - t) \cdot \mathbf{P}_0 + t \cdot \mathbf{P}_1 \quad t \in \langle 0; 1 \rangle. \quad (5.3.2)$$

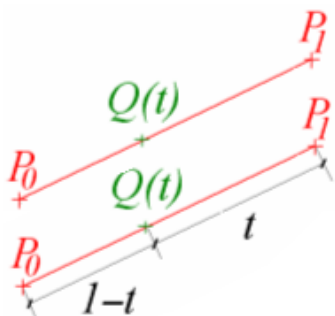
viz obr. (5.3.1) Všimněte si, že tyto zápisy jsou tvaru

$$Q^{(1)}(t) = B_0^{(1)}(t) \cdot \mathbf{P}_0 + B_1^{(1)}(t) \cdot \mathbf{P}_1; \text{ kde } B_0^{(1)}(t) = 1 - t; B_1^{(1)}(t) = t$$

Poznamenejme ještě, že zápisy křivek ve tvaru afinní kombinace vlastních řídicích bodů jsou jen jinou formou zápisu bodové funkce - rovnici (5.3.2) lze totiž v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$  přepsat do tvaru

$$\mathbf{Q}^{(1)}(t) = ((1-t) \cdot p_{01} + t \cdot p_{02}; (1-t) \cdot p_{11} + t \cdot p_{12}; 1),$$

kde  $p_{ij}$  značí  $j$ -tou souřadnici bodu  $\mathbf{P}_i$  (v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$  analogicky). Je vidět, že „afinní“ a „projektivní“ zápisy jsou podstatně úspornější a přehlednější, proto je u aproximačních křivek upřednostňujeme.



**Obr. 5.3.1.** Bézierova křivka 1. stupně

**2. Bézierova křivka 2. stupně:** Přidejme další řídicí bod a sestrojme tutéž afinní kombinaci bodů  $\mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2$ . Při značení dle obr. 5.3.2 obdržíme

$$\mathbf{A}(t) = (1-t) \cdot \mathbf{P}_0 + t \cdot \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{B}(t) = (1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + t \cdot \mathbf{P}_2$$

Dále sestrojme tutéž kombinaci bodů  $\mathbf{A}(t); \mathbf{B}(t)$ . Dostaneme

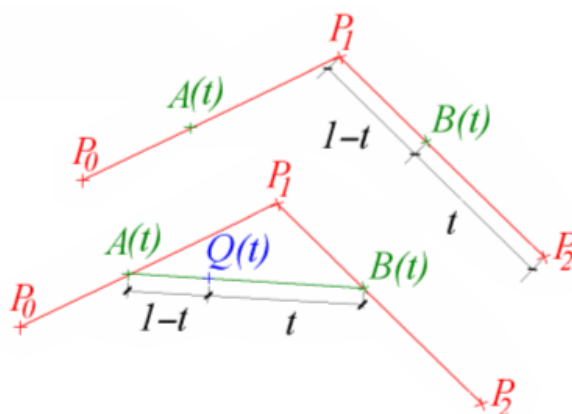
$$\mathbf{Q}^{(2)}(t) = (1-t) \cdot \mathbf{A}(t) + t \cdot \mathbf{B}(t)$$

Po dosazení

$$\mathbf{Q}^{(2)}(t) = (1-t) \cdot [(1-t) \cdot \mathbf{P}_0 + t \cdot \mathbf{P}_1] + t \cdot [(1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + t \cdot \mathbf{P}_2]$$

a úpravě

$$\mathbf{Q}^{(2)}(t) = (1-t)^2 \cdot \mathbf{P}_0 + 2t(1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + t^2 \cdot \mathbf{P}_2; t \in \langle 0; 1 \rangle \quad (5.3.3)$$



**Obr. 5.3.2.** Bézierova křivka 2. stupně

Podobně jako v předchozím případě i zde můžeme označit

$$B_0^{(2)}(t) = (1-t)^2; B_1^{(2)}(t) = 2t(1-t); B_2^{(2)}(t) = t^2$$

takže dostaneme

$$\mathbf{Q}^{(2)}(t) = B_0^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_0 + B_1^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_1 + B_2^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_2$$

Lze ukázat, že se jedná o oblouk paraboly (dokážeme v kpt. 5. 6). Všimněme si ještě geometrického významu řídicích bodů. Dosazením  $t = 0$  zjistíme, že křivka má počáteční

bod v bodě  $\mathbf{P}_0$ , pro  $t = 1$  dostáváme koncový bod v  $\mathbf{P}_2$ . Je tedy  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}^{(2)}(0)$ ;  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}^{(2)}(1)$ . Směrové vektory tečen v těchto bodech jsou dány derivacemi  $\mathbf{Q}'_+(0)$  resp.  $\mathbf{Q}'_-(1)$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}'(t) &= (-2) \cdot (1-t) \cdot \mathbf{P}_0 + (2-4t) \cdot \mathbf{P}_1 + 2t \cdot \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}'_+(0) &= -2 \cdot \mathbf{P}_0 + 2 \cdot \mathbf{P}_1 = 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ \mathbf{Q}'_-(1) &= -2 \cdot \mathbf{P}_1 + 2 \cdot \mathbf{P}_2 = 2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\end{aligned}$$

Rozdíl  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$  reprezentantů  $\mathbf{P}_1; \mathbf{P}_0$  vlastních bodů  $P_1; P_0$  však reprezentuje nevlastní bod přímky, která prochází těmito body – viz (5.1.9), v našem případě tedy směrový vektor tečny v bodě  $P_0$ . Pro bod  $P_1$  analogicky. Směrové vektory tečen v krajních bodech jsou tedy určeny reprezentanty  $\overrightarrow{P_0P_1}; \overrightarrow{P_2P_1}$ . Pokud bychom parametr  $t$  v (5.3.3) interpretovali jako čas (viz kpt. 4.7), bude rychlost v krajních bodech  $\mathbf{v}_0 = 2 \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$ ;  $\mathbf{v}_2 = 2 \cdot \overrightarrow{P_2P_1}$

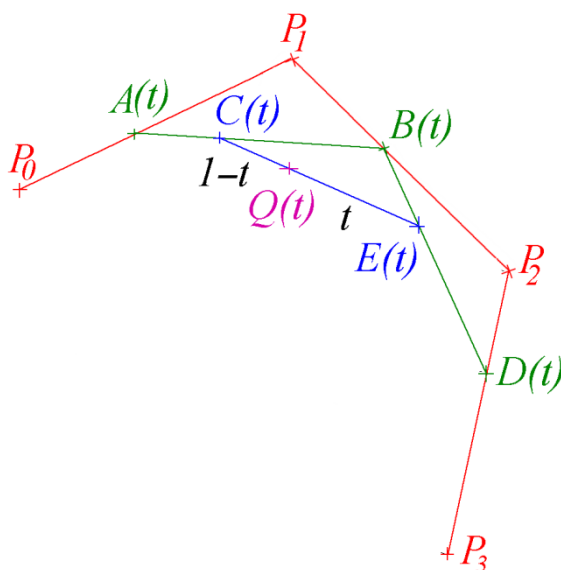
Protože pro každé  $t \in \mathbb{R}$  platí

$$B_0^{(2)}(t) + B_1^{(2)}(t) + B_2^{(2)}(t) = (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1$$

je každý bod takto získané křivky opět afinní kombinací řídicích bodů.

**3. Bézierova křivka 3. stupně:** Přidáním dalšího bodu a zopakováním předchozího postupu dostaneme (viz obr. 5.3.3):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t) &= (1-t) \cdot \mathbf{P}_0 + t \cdot \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{B}(t) &= (1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + t \cdot \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{C}(t) &= (1-t) \cdot \mathbf{A}(t) + t \cdot \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{D}(t) &= (1-t) \cdot \mathbf{P}_2 + t \cdot \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{E}(t) &= (1-t) \cdot \mathbf{B}(t) + t \cdot \mathbf{D}(t) \\ \mathbf{Q}(t) &= (1-t) \cdot \mathbf{C}(t) + t \cdot \mathbf{E}(t)\end{aligned}$$



**Obr. 5.3.3.** Bézierova křivka 3. stupně

Po postupném dosazení a úpravě dostaneme křivku ve tvaru

$$\mathbf{Q}^{(3)}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^{(3)}(t) \cdot \mathbf{P}_i \quad (5.3.4)$$

kde

$$B_0^{(3)}(t) = (1-t)^3; \quad B_1^{(3)}(t) = 3t(1-t)^2; \quad B_2^{(3)}(t) = 3t^2(1-t); \quad B_3^{(3)}(t) = t^3$$

Jedná se o křivku, která je určena dvojicí ( $\infty \mathcal{E}^2$ ) resp. trojicí ( $\infty \mathcal{E}^3$ ) parametrických rovnic, z nichž každá je třetího stupně. V  $\infty \mathcal{E}^3$  křivka již nemusí být rovinná. Zcela analogicky jako v předchozím případě lze dokázat, že prochází řídicími body  $\mathbf{P}_0$ ;  $\mathbf{P}_3$  a vektory  $\overrightarrow{P_0P_1}$ ;  $\overrightarrow{P_3P_2}$  jsou směrové vektory tečen v bodech  $\mathbf{P}_0$ ;  $\mathbf{P}_3$ . Rovněž se lze přesvědčit, že pro každé  $t \in \mathbb{R}$  opět platí

$$B_0^{(3)}(t) + B_1^{(3)}(t) + B_2^{(3)}(t) + B_3^{(3)}(t) = 1$$

**4. Bézierova křivka  $n$  tého stupně:** Výše uvedeným způsobem lze pokračovat dále. Pro řídicí body  $\mathbf{P}_0$ ;  $\mathbf{P}_1$ ; ...;  $\mathbf{P}_n$  bychom dostali křivku tvaru

$$\mathbf{Q}^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(t) \cdot \mathbf{P}_i; \quad t \in \langle 0; 1 \rangle; \quad (5.3.5)$$

kde

$$\mathbf{P}_i = \{\mathbf{P}_i\} \in \infty \mathcal{E}^3; \quad Q^{(n)}(t) = \{\mathbf{Q}^{(n)}(t)\} \in \infty \mathcal{E}^3$$

a

$$B_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}; \quad n \in \mathbb{N}; \quad (5.3.6)$$

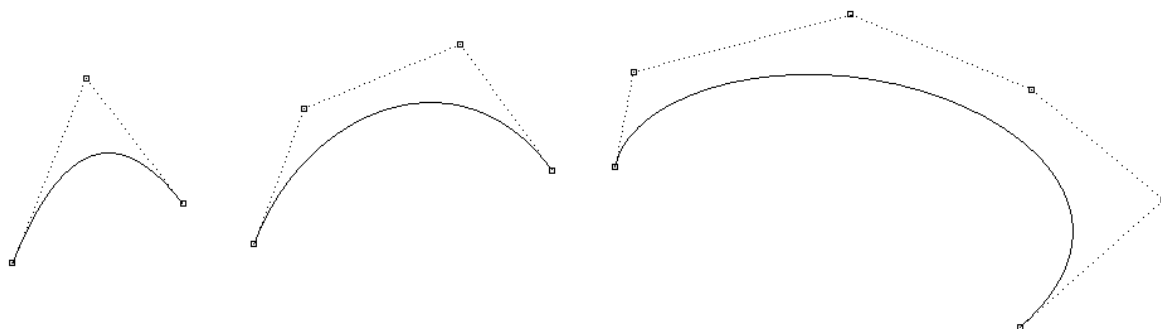
jsou tzv. Bernsteinovy polynomy. Lze ukázat, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je

$$\sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = 1,$$

projektivní kombinace (5.3.5) je tedy zároveň kombinací afinní. Má tedy reprezentaci i v euklidovském prostoru a lze psát

$$Q^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(t) \cdot P_i; \quad t \in \langle 0; 1 \rangle; \quad P_i; \quad Q^{(n)}(t) \in \mathcal{E}^3$$

Bézierovy křivky jsou v CAD systémech používány zcela běžně, bohužel často pod jinými názvy. Například v systému Rhinoceros jsou dostupné z menu **Křivka/Volný tvar/Řídicí body**. V příkazovém řádku je možno zadat stupeň křivky. Jak vyplývá z rovnice (5.3.5), při volbě stupně  $n$  je třeba zadat nejméně  $n + 1$  řídicích bodů. Vyzkoušejte si, že tímto způsobem lze obdržet i úsečku jako křivku zadanou dvěma řídicími body, které jsou pak krajní body úsečky (viz odst. 1). Na obr. je znázorněn jeden oblouk Bézierovy křivky stupně 2, 3, a 5. Zobrazení řídicích bodů je možné zapnout v panelu hlavních nástrojů.



**Obr. 5.3.4.** Bézierova křivka druhého, třetího a pátého stupně v systému Rhinoceros

## 5. 4 Některé další křivky

Jak již bylo řečeno, k sestrojení křivky ve tvaru afinní kombinace řídicích bodů, tj. ve tvaru (5.2.2) lze použít libovolné diferencovatelné funkce, které splňují podmínku

$$c_0(t) + c_1(t) + \dots + c_m(t) = 1$$

**1. Fergusonovy křivky** jsou interpolační kubické křivky, které se v CAD systémech zadávají dvěma řídicími body **A**; **B** a dvěma tečnými vektory  $\mathbf{v}_0$ ;  $\mathbf{v}_1$  v těchto bodech. Například v systému Rhinoceros ji najdeme jako „Handle Curve“ (v české lokalizaci jako „křivku pomocí manipulátorů“), což je ovšem dost matoucí (viz obr. 5.4.1). Bodová rovnice jakékoliv kubické křivky je obecně tvaru

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{D}t^3 + \mathbf{E}t^2 + \mathbf{F}t + \mathbf{G}, \quad (5.4.1)$$

její derivace

$$\mathbf{Q}'(t) = 3\mathbf{D}t^2 + 2\mathbf{E}t + \mathbf{F}$$

Pro  $t = 0$  máme

$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (5.4.2)$$

$$\mathbf{Q}'(0) = \mathbf{v}_0 \Rightarrow \mathbf{v}_0 = \mathbf{F} (= {}_\infty\mathbf{F}) \quad (5.4.3)$$

Pro  $t = 1$  pak

$$\mathbf{Q}(1) = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{A} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{D} + \mathbf{E}$$

$$\mathbf{Q}'(1) = \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = 3\mathbf{D} + 2\mathbf{E} + \mathbf{F} = 3\mathbf{D} + 2\mathbf{E} + \mathbf{v}_0$$

Řešením soustavy posledních dvou rovnic (případ  $t = 1$ ) s neznámými **D**; **E** dostáváme

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{E} = -3\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - 2\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1$$

Spolu s předchozím

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}_0$$

viz (5.4.1)

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}$$

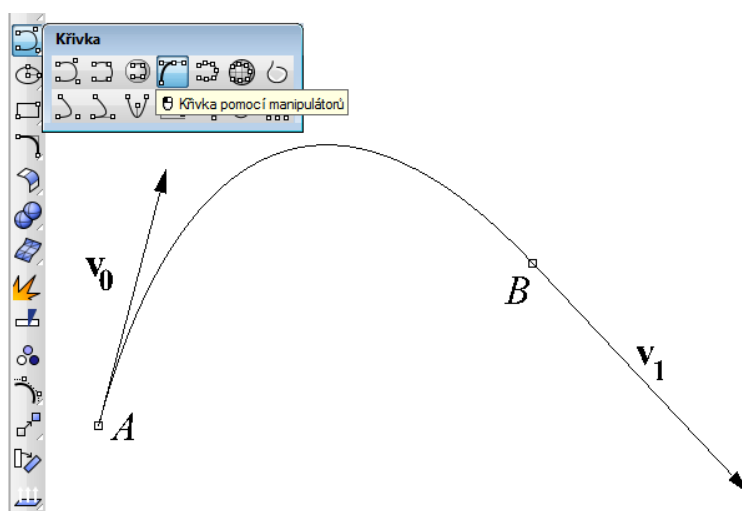
viz (5.4.2)

dosadíme do (5.3.5) a obdržíme

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{D}t^3 + \mathbf{E}t^2 + \mathbf{F}t + \mathbf{G} \\ &= (2\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)t^3 + (-3\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - 2\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1)t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{A} \end{aligned}$$

což po úpravě na tvar (5.1.4) dává

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= F_0(t) \cdot \mathbf{A} + F_1(t) \cdot \mathbf{B} + F_2(t) \cdot \mathbf{v}_0 + F_3(t) \cdot \mathbf{v}_1 \\ \text{kde} \quad F_0(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1; \quad F_1(t) = -2t^3 + 3t^2; \\ F_2(t) &= t^3 - 2t^2 + t; \quad F_3(t) = t^3 - t^2 \end{aligned} \quad (5.4.4)$$



**Obr. 5.4.1:** Fergusonova křivka v Rhinoceros

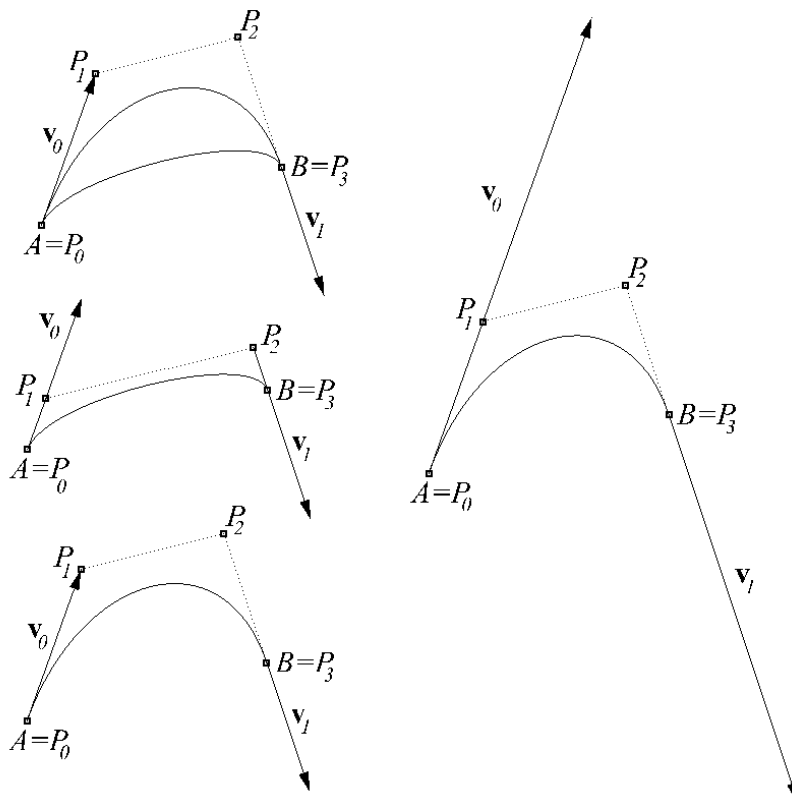
Mezi Fergusonovými křivkami (5.4.4) a Bézierovými křivkami (5.3.4) existuje těsná souvislost. Obě jsou třetího stupně, obě procházejí dvěma body, u obou známe tečnu

v počátečním a koncovém bodě. Přesto se nejedná o jednu a tutéž křivku. Jak ilustruje obr. 5.4.2, liší se zřejmě jenom velikostmi derivací („rychlostmi“) v počátečním a koncovém bodě. Místo (5.4.4) tedy uvažujme křivku

$$\mathbf{Q}(t) = F_0(t) \cdot \mathbf{A} + F_1(t) \cdot \mathbf{B} + k_2 \cdot F_2(t) \cdot \mathbf{v}_0 + k_3 \cdot F_3(t) \cdot \mathbf{v}_1 \quad (5.4.5)$$

a určíme konstanty  $k_2; k_3$  tak, aby křivka (5.4.5) byla Bézierovou kubikou.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= F_0(t) \cdot \mathbf{P}_0 + F_1(t) \cdot \mathbf{P}_3 + k_2 \cdot F_2(t) \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + k_3 \cdot F_3(t) \cdot (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \\ \mathbf{Q}(t) &= [F_0(t) - k_2 \cdot F_2(t)] \cdot \mathbf{P}_0 + k_2 \cdot F_2(t) \cdot \mathbf{P}_1 - k_3 \cdot F_3(t) \cdot \mathbf{P}_2 + [F_1(t) + k_3 \cdot F_3(t)] \cdot \mathbf{P}_3 \\ k_2 \cdot F_2(t) &= B_1^{(3)}(t) \Rightarrow k_2 \cdot (t^3 - 2t^2 + t) = 3t(1-t)^2 \Rightarrow k_2 = 3 \\ -k_3 \cdot F_3(t) &= B_2^{(3)}(t) \Rightarrow -k_3 \cdot (t^3 - t^2) = 3t^2(1-t) \Rightarrow k_3 = 3 \end{aligned}$$



**Obr. 5.4.2:** Vztah Fergusonovy křivky a Bézierovy kubiky

Bézierova kubika určená body  $P_0; P_1; P_2; P_3$  tedy definuje jinou množinu bodů než Fergusonova křivka určená body  $A = P_0; B = P_3$  a vektory  $\mathbf{v}_0 = P_1 - P_0; \mathbf{v}_1 = P_3 - P_2$  (viz obr. 5.4.2 vlevo nahoře). Pokud chceme tímto dvojím způsobem definovat stejnou množinu bodů, je třeba buď na třetinu zkrátit úsečky  $P_0P_1; P_2P_3$  v polygonu Bézierovy kubiky (obr. 5.4.2 vlevo uprostřed), anebo třikrát prodloužit vektory  $\mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1$  v zadání Fergusonovy křivky (obr. 5.4.2 vpravo). V CAD systémech je tato disproporce často řešena jednoduchou modifikací Fergusonovy křivky, kdy místo rovnice (5.4.4) je použita rovnice

$$\mathbf{Q}(t) = F_0(t) \cdot \mathbf{A} + F_1(t) \cdot \mathbf{B} + 3 \cdot F_2(t) \cdot \mathbf{v}_0 + 3 \cdot F_3(t) \cdot \mathbf{v}_1 \quad (5.4.6)$$

Pro  $A = P_0; B = P_3; \mathbf{v}_0 = P_1 - P_0; \mathbf{v}_1 = P_3 - P_2$  pak křivky (5.4.4) a (5.4.6) splynou (viz obr. 5.4.2 vlevo dole).

Poznamenejme ještě, že pro každé  $t \in \mathbb{R}$  je  $F_0(t) + F_1(t) = 1$ , tj. křivka (5.4.4) resp. (5.4.6) je tvaru

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{v}(t)$$

kde bod  $F$  je afinní kombinací bodů  $A; B$  a vektor  $\mathbf{v}$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{v}_0; \mathbf{v}_1$ .



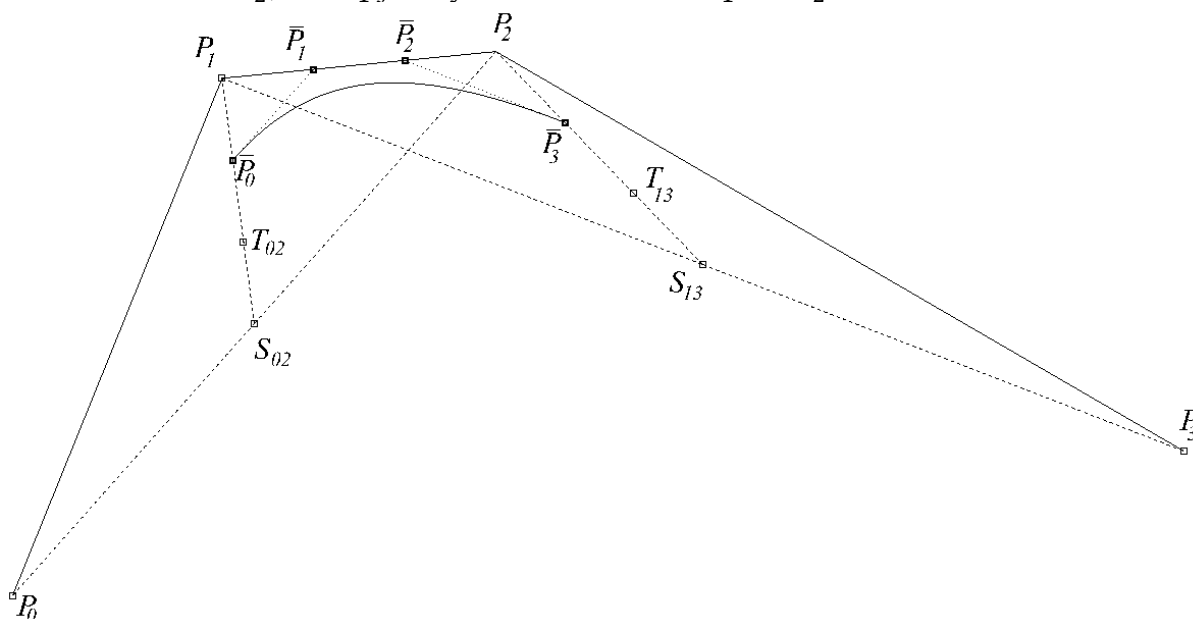
**2. Coonsovy křivky** jsou opět afinními kombinacemi čtyř řídicích bodů. Uvažujme Bézierovu kubiku

$$Q^{(3)}(t) = (1-t)^3 \cdot \bar{P}_0 + 3t(1-t)^2 \cdot \bar{P}_1 + 3t^2(1-t) \cdot \bar{P}_2 + t^3 \cdot \bar{P}_3 \quad (5.4.7)$$

jejíž řídicí body jsme opatřili proužkem. Tyto body vyjádříme jako afinní kombinace bodů  $P_0; P_1; P_2; P_3$ , a to následovně:

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 &= \frac{1}{6}(P_0 + 4P_1 + P_2); \quad \bar{P}_1 = \frac{1}{3}(2P_1 + P_2); \\ \bar{P}_2 &= \frac{1}{3}(2P_2 + P_3); \quad \bar{P}_3 = \frac{1}{6}(P_1 + 4P_2 + P_3) \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Promysleme nejdříve vzájemnou polohu bodů  $P_0; P_1; P_2; P_3; \bar{P}_0; \bar{P}_1; \bar{P}_2; \bar{P}_3$ . Pomůže nám v tom fyzikální představa těžiště soustavy hmotných bodů, kterou jsme použili v kpt. 5.1 (viz obr. 5.1.1 vlevo). Bod  $\bar{P}_0$  je fyzikálním těžištěm soustavy tří hmotných bodů s celkovou hmotností jedna, přičemž body  $P_0; P_2$  mají hmotnost stejnou a bod  $P_1$  čtyřikrát větší. Těžištěm soustavy  $P_0; P_2$  je tedy střed  $S_{02}$  úsečky  $P_0P_2$  kde působí poloviční hmotnost bodu  $P_1$  (viz obr. 5.4.3). Těžiště  $\bar{P}_0$  soustavy  $P_0; P_1; P_2$  leží tedy na úsečce  $S_{1,2}P_1$  ve třetině její délky, ovšem nikoliv blíže středu  $S_{02}$  (tam je těžiště  $T_{02}$  trojúhelníka  $\Delta P_0P_1P_2$ ), ale blíže bodu  $P_1$ . Jedná se o tzv. antitěžiště trojúhelníku  $\Delta P_0P_1P_2$ . Podobně bod  $\bar{P}_3$  je antitěžištěm  $\Delta P_1P_2P_3$ . Bod  $\bar{P}_1$  je těžištěm soustavy hmotných bodů  $P_1; P_2$  nachází se tedy na úsečce  $P_1P_2$  bod  $P_1$  má dvakrát větší hmotnost než bod  $P_2$ ; bod  $\bar{P}_1$  je tedy dvakrát blíže bodu  $P_1$  než  $P_2$ .



**Obr. 5.4.3:** Vztah Coonsovy křivky a Bézierovy kubiky

Vyjádříme-li nyní křivku (5.4.7) jako afinní kombinaci bodů  $P_0; P_1; P_2; P_3$  – viz (5.4.8), pak po dosazení, roznásobení a úpravě dostaneme:

$$Q(t) = \frac{1}{6} \cdot [C_0(t) \cdot P_0 + C_1(t) \cdot P_1 + C_2(t) \cdot P_2 + C_3(t) \cdot P_3]$$

kde

$$C_0(t) = (1-t)^3; \quad C_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 1; \quad C_2(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1; \quad C_3(t) = t^3$$

V některých CAD systémech nejsou Coonsovy křivky uživateli přímo k dispozici, jsou však používány skrytě. Například v Rhinoceros při napojování křivek v nabídce **Křivka/Nástroje pro úpravu křivek/Navázat**. Umožňují totiž snadné navazování s hladkostí  $G^{(2)}$  (viz následující kapitola).

## 5.5 Bázové funkce, prostory funkcí a křivky

V kapitole 2.7 jsme uvedli definici vektorového prostoru a některých souvisejících pojmů (např. báze, dimenze apod.). Vektorové prostory tvoří rovněž mnohé množiny funkcí. Například množina  $C^0\langle 0; 1 \rangle$  funkcí spojitých na intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ ; množina  $C^n\langle 0; 1 \rangle$  funkcí, které jsou na intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$  spojitě i se svými derivacemi až do řádu  $n$ . Vektorové prostory tvoří rovněž množiny křivek uvedené v předchozích kapitolách. Například Bézierovy úsečky v rovině tvoří dvojrozměrný podprostor prostoru  $C^0\langle 0; 1 \rangle$  nad tělesem  $\mathbb{R}^2$  (rovinné křivky) resp.  $\mathbb{R}^3$  (prostorové křivky). Bází tohoto podprostoru je množina funkcí  $\{t; 1 - t\}$ . Funkce  $t; 1 - t$  jsou lineárně nezávislé, protože funkce  $t$  není lineární kombinací funkce  $1 - t$  a ani naopak  $1 - t$  není lineární kombinací  $t$ . Funkce  $t; 1 - t$  jsou bázovými funkcemi. Podobně Bézierovy křivky druhého, třetího resp.  $n$ -tého stupně tvoří dvoj-, troj- resp.  $n$ -rozměrný podprostor prostoru  $C^0\langle 0; 1 \rangle$  nad tělesem  $\mathbb{R}^2$  (rovinné křivky) resp.  $\mathbb{R}^3$  (prostorové křivky). Bázovými funkcemi jsou Bernsteinovy polynomy  $B^{(2)}; B^{(3)}$ ; resp.  $B^{(n)}$ . Lineární závislost či nezávislost těchto polynomů (a obecně jakýchkoliv funkcí) se podle definice 3 kpt. 2.7 ověřuje obtížně, k těmto účelům se proto většinou používá následující věta:

**Lineární závislost a nezávislost funkcí:** Funkce  $f_0(t); f_1(t); \dots; f_n(t) \in C^n$  jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jejich wronskián je nenulový, tj. když platí

$$\begin{vmatrix} f_0(t) & f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_0'(t) & f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^{(n)}(t) & f_1^{(n)}(t) & \dots & f_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

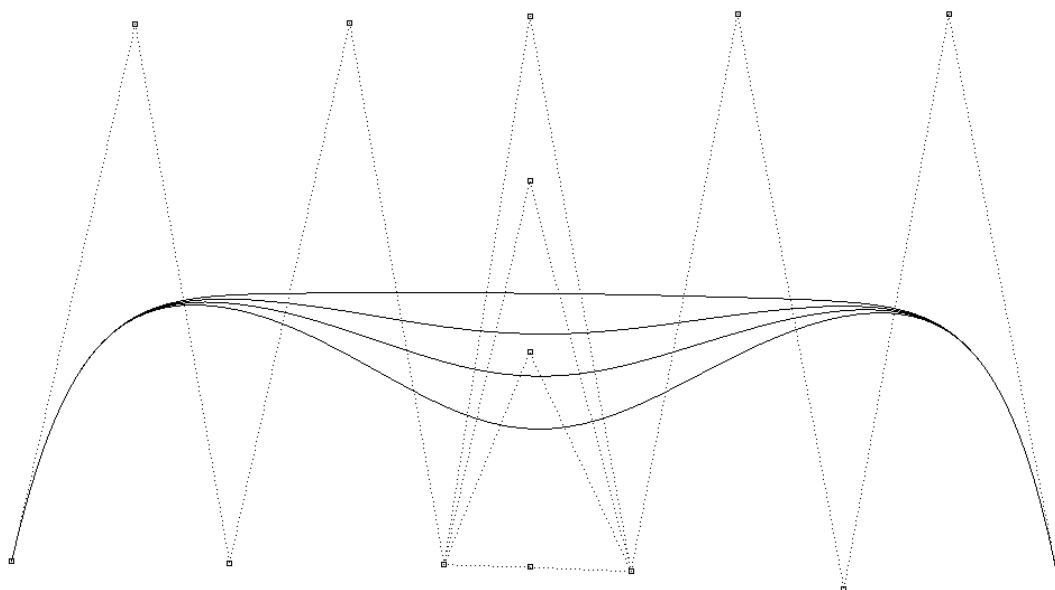
Jako příklad uveďme Bernsteinovy polynomy druhého stupně:

$$\begin{vmatrix} 1 - 2t + t^2 & 2t - 2t^2 & t^2 \\ 2t - 2 & 2 - 4t & 2t \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = t^2 \begin{vmatrix} 2t - 2 & 2 - 4t \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 2t \begin{vmatrix} 1 - 2t + t^2 & 2t - 2t^2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \\ + 2 \begin{vmatrix} 1 - 2t + t^2 & 2t - 2t^2 \\ 2t - 2 & 2 - 4t \end{vmatrix} = 4t^2 + 8t^2 + 8t + 2t^2 - 4t + 2 = 14t^2 + 4t + 2 \neq 0$$

## 5.6 Aproximace po částech, splajny

V kapitole 4. 3. jsme vyjádřili Bézierovy křivky zcela obecného stupně  $n \in \mathbb{N}$ . Aproximační křivky vyšších stupňů se však používají zřídka. Vezměme kupříkladu Bézierovu křivku 10. stupně. Je určena řídicími body  $P_0; P_1; \dots; P_{10}$  a při změně byt' jen jednoho jediného z nich se změní celá křivka – viz obr. 5.5.1. Pro každé  $0 < t < 1$  je tedy  $\mathbf{Q}(t) \neq \bar{\mathbf{Q}}(t)$ , kde  $\mathbf{Q}$  je bodová funkce křivky před a  $\bar{\mathbf{Q}}$  je bodová funkce po změně řídicího bodu. Říkáme, že tato křivka není lokálně kontrolovatelná.

Při konstrukci složitějších křivek se proto používá většinou **aproximace po částech**. Znamená to, že pro řídicí body  $P_0; P_1; \dots; P_m$  nebudeme sestavovat jeden Bézierův oblouk stupně  $m$ , ale raději např. dva oblouky stupně  $n < m$ ;  $m - n - 1$ , první určený body  $P_0; P_1; \dots; P_n$ ; druhý určený body  $P_{n+1}; P_{n+2}; \dots; P_m$ . K tomu je ovšem třeba tyto dva oblouky vhodně spojit. Spojitost může být dvojího druhu a různého stupně. Dříve než se jí budeme zabývat, je třeba uvést dva důležité pojmy



**Obr. 5.6.1:** Změna jednoho řídicího bodu Bézierovy křivky 10. stupně

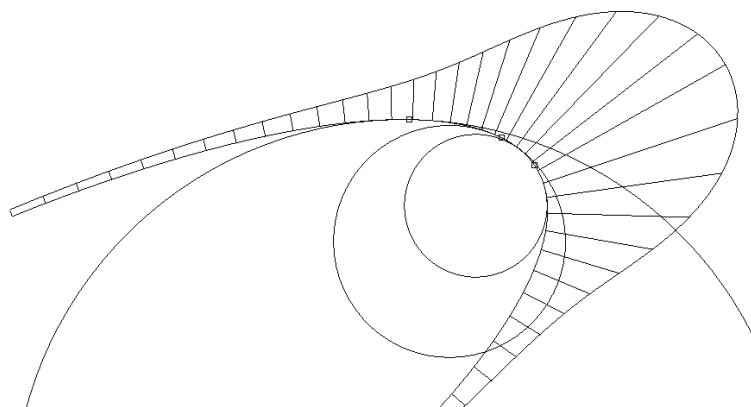
**1. Křivost a oskulační kružnice:** Křivostí křivky  $\mathbf{Q}$  v bodě  $t_0$  rozumíme číslo

$$\kappa(t_0) = \frac{|\mathbf{Q}'(t_0) \times \mathbf{Q}''(t_0)|}{|\mathbf{Q}'(t_0)|^3}$$

Oskulační kružnice (rovinné) křivky  $\mathbf{Q}$  v bodě  $t_0$  je kružnice  $\mathbf{K}$ , která má v bodě  $t_0$  stejnou první a druhou derivaci jako křivka  $\mathbf{Q}$ . V případě prostorové křivky je ještě třeba specifikovat, v jaké rovině tato kružnice leží. Touto otázkou se v tomto textu zabývat nebudeme a přenecháme ji diferenciální geometrii. Zde dodejme, že poloměr  $r(t_0)$  této kružnice v bodě  $t_0$  je nepřímo úměrný křivosti v tomto bodě, tj.

$$r(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$$

Křivost a oskulační kružnice jsou důležitými parametry křivky, CAD systémy proto mají nástroje na jejich určování popř. grafickou reprezentaci. Na obr. 5.5.2 vidíme část elipsy, která je sestrojena v Rhinoceros, s několika oskulačními kružnicemi a se zapnutým grafem křivosti.

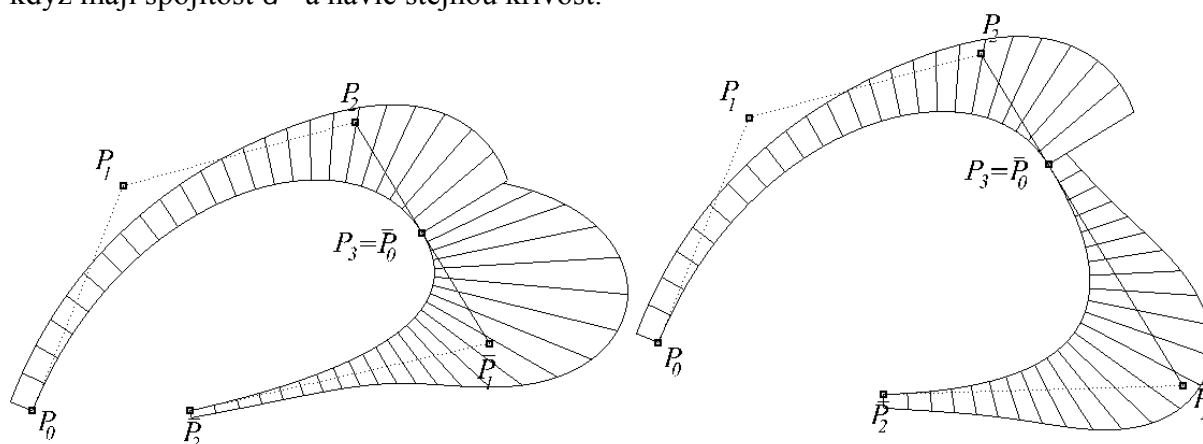


**Obr. 5.6.2:** Oskulační kružnice a graf křivosti v Rhinoceros

Nyní již ke spojitosti. Rozeznáváme spojitost analytickou (parametrickou) a geometrickou.

**2. Analytická (parametrická) spojitost:** Křivka  $\mathbf{Q}(t)$  je analyticky spojitá až do řádu  $n$  (je třídy  $C^n$ ) právě tehdy, když má ve všech bodech spojitě derivace až do řádu  $n$  (přitom derivací nultého řádu rozumíme původní bodovou funkci). Jestliže tedy v počítačové grafice spojujeme dva segmenty  $\mathbf{Q}(t); \bar{\mathbf{Q}}(t)$  a chceme dosáhnout spojitosti  $C^1$ , musí mít oba oblouky v bodě spojení stejný tečný vektor. V případě Béziových křivek stupně  $m; n$  musí tedy bod  $P_m = \bar{P}_0$ , ve kterém oblouky spojujeme, být středem úsečky určené předposledním řídicím bodem  $P_{m-1}$  křivky  $\mathbf{Q}(t)$  a druhým řídicím bodem  $\bar{P}_1$  křivky  $\bar{\mathbf{Q}}(t)$ . Na obr. 5.5.2 vlevo jsou takto spojeny křivky třetího a druhého stupně.

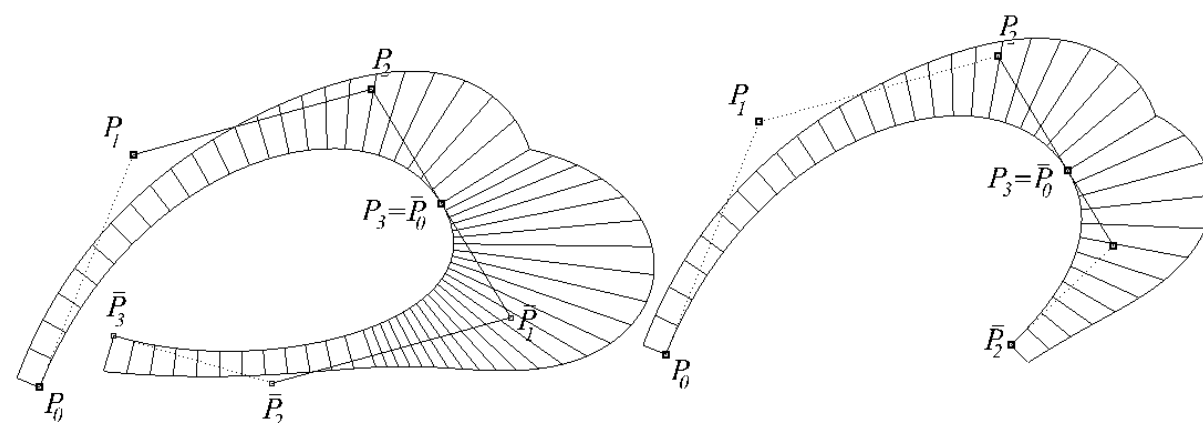
**3. Geometrická spojitost:** Křivka  $\mathbf{Q}(t)$  je geometricky spojitá  $G^0$  právě tehdy, když je spojitá – tj. spojitosti  $C^0$  a  $G^0$  jsou ekvivalentní. Křivka  $\mathbf{Q}(t)$  je geometricky spojitá  $G^1$  právě tehdy, když pro vektor  $\mathbf{Q}'_-(t)$  polotečny zleva a vektor  $\mathbf{Q}'_+(t)$  polotečny zprava platí  $\mathbf{Q}'_+(t) = k \cdot \mathbf{Q}'_-(t); k > 0$ . Na obr. 5.5.2 vpravo jsou takto spojeny Béziové křivky třetího a druhého stupně, kdy  $k = 2$ . Dva segmenty  $\mathbf{Q}(t); \bar{\mathbf{Q}}(t)$  mají v bodě spojení spojitost  $G^2$  právě tehdy, když mají spojitost  $G^1$  a navíc stejnou křivost.



**Obr. 5.6.2:** Béziové křivky třetího a druhého stupně, spojitost  $C^1$  (vlevo) a  $G^1$  (vpravo)

Z obr. 5.2.2 je zřejmé, že jak spojení  $C^1$ , tak spojení  $G^1$  implikuje společnou tečnu, ani  $C^1$ , ani  $G^1$  však nezaručuje spojitou změnu křivosti. Spojení  $C^1$  je většinou „hladší“ – skok v křivosti je většinou menší. Jak ovšem plyne z odst. 3, spojitou změnu křivosti lze zajistit i bez spojitosti  $C^2$  a dokonce i bez  $C^1$ . Spojitou změnu křivosti můžeme zajistit spojitostí  $G^2$ . Rozdíl spojitosti  $C^2$  a  $G^2$  ilustruje obr. 5.5.3.

V praxi je většinou snazší zaručit geometrickou spojitost než spojitost analytickou. Proto se spojitostí v CAD systémech většinou rozumí spojitost geometrická. Při navazování křivek bývá nazývána poziční ( $G^0$ ), tečná ( $G^1$ ) a křivostní ( $G^2$ ).



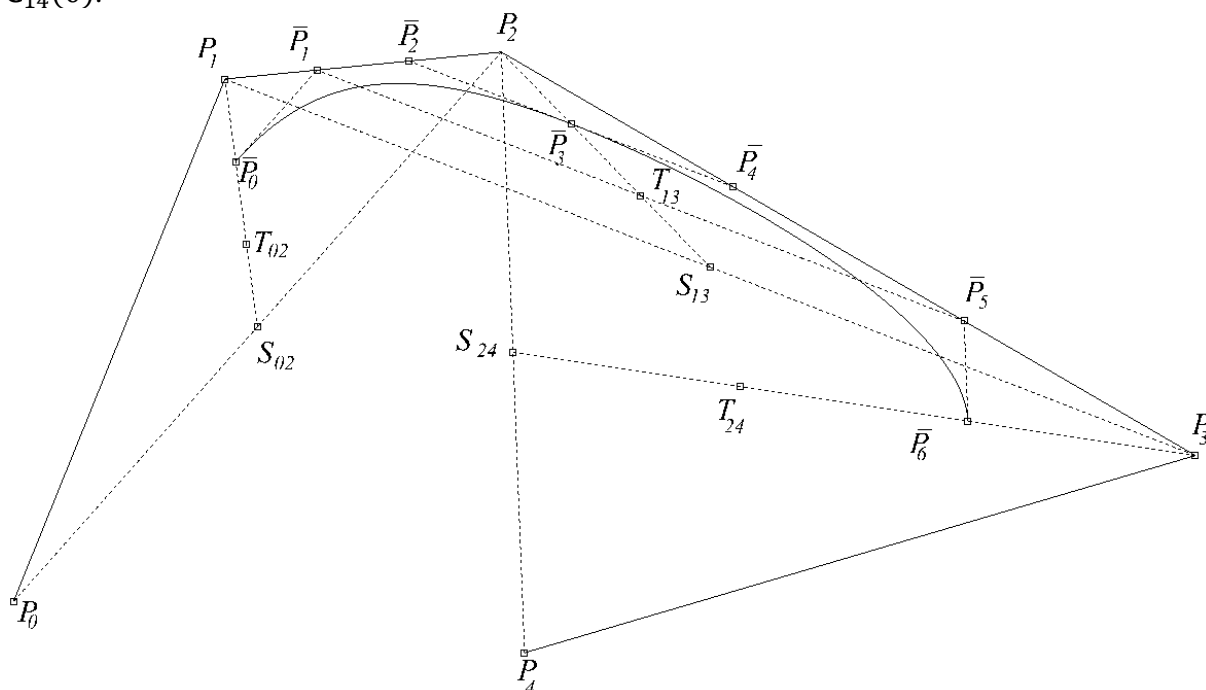
**Obr. 5.6.3:** Spojení Béziových křivek se spojitostí  $C^2$  (vlevo) a  $G^2$  (vpravo)

Pomocí vhodného spojování vhodných Bézierových křivek byly v 80. letech minulého století definovány standardy vektorových počítačových fontů. V r. 1984 fonty Adobe Type1, které jsou definovány pomocí Bézierových kubik, koncem 80 let pak konkurenční True Type, která jsou podporována operačními systémy Windows a GNU/Linux. True Type má oproti Adobe Type1 rychlejší rastrování, které probíhá na úrovni operačního systému, daní za tuto rychlost je dvojnásobná velikost souborů oproti Adobe Type1. V současné době se prosazuje standard Open Type, který spojuje výhody předchozích standardů a je podporován operačními systémy Windows, Mac OS X a Linux.

Obecně můžeme u křivek  $n$ -tého stupně požadovat spojitost až do stupně  $n - 1$ . Dospíváme tak k pojmu splajn křivky.

**4. Splajn křivka, B-splajn křivka:** Splajn křivkou  $n$ -tého stupně rozumíme křivku, která vznikla spojením konečného počtu aproximačních popř. interpolačních oblouků  $n$ -tého stupně tak, že výsledná křivka má ve všech bodech spojitost  $C^{n-1}$ . „Konečným počtem oblouků“ je samozřejmě i jeden oblouk, znamená to, že i jednotlivé oblouky (např. Bézierovy, Fergusonovy, Coonsovy atd.) mohou být splajn křivkami. Při konstrukci splajn křivek se většinou používají lineárně nezávislé (bázové) funkce (viz předchozí kapitola). Takové splajn křivky potom označujeme jako B-splajn křivky nebo stručně B-splajny.

**5. Coonsův B-splajn:** Uvažujme Coonsovu kubiku  $C_{03}(t)$  určenou řídicími body  $P_0; P_1; P_2; P_3$  a sestrojme další Coonsovu kubiku  $C_{14}(t)$  s řídicími body  $P_1; P_2; P_3; P_4$  (tj. jako první tři řídicí body použijeme poslední tři body prvního segmentu a teprve poslední řídicí bod zvolíme). Je zřejmé, že výslednou křivku můžeme chápat jako dvě Bézierovy kubiky, z nichž první má řídicí body  $\bar{P}_0; \bar{P}_1; \bar{P}_2; \bar{P}_3$  a druhá  $\bar{P}_3; \bar{P}_4; \bar{P}_5; \bar{P}_6$  (viz obr. 5.4.4). Lze snadno ukázat, že bod  $\bar{P}_3$  je středem úsečky  $\bar{P}_2\bar{P}_4$ , což v bodě  $\bar{P}_3$  indikuje spojitost  $C^1$ . V tomto bodě je však dokonce spojitost  $C^2$ , jak ukážeme výpočtem druhé derivace v bodě  $\bar{P}_3 = C_{03}(1) = C_{14}(0)$ .



**Obr. 5.6.4:** Coonsův B-splajn sestavení navázáním dvou Coonsových kubik

$$C_0(t) = (1 - t)^3 \Rightarrow C'_0(t) = -3(1 - t)^2 \Rightarrow C''_0(t) = 6(1 - t)$$

$$C_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 1 \Rightarrow C'_1(t) = 9t^2 - 12t \Rightarrow C''_1(t) = 18t - 12$$

$$C_2(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1 \Rightarrow C'_2(t) = -9t^2 + 6t + 3 \Rightarrow C''_2(t) = -18t + 6$$

$$C_3(t) = t^3 \Rightarrow C'_3(t) = 3t^2 \Rightarrow C''_3(t) = 6t$$

$$C''_{03}(t) = \frac{1}{6}[\mathbf{P}_0 \cdot (6 - 6t) + \mathbf{P}_1 \cdot (18t - 12) + \mathbf{P}_2 \cdot (-18t + 6) + \mathbf{P}_3 \cdot 6t]$$

$$C''_{03-}(1) = \mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

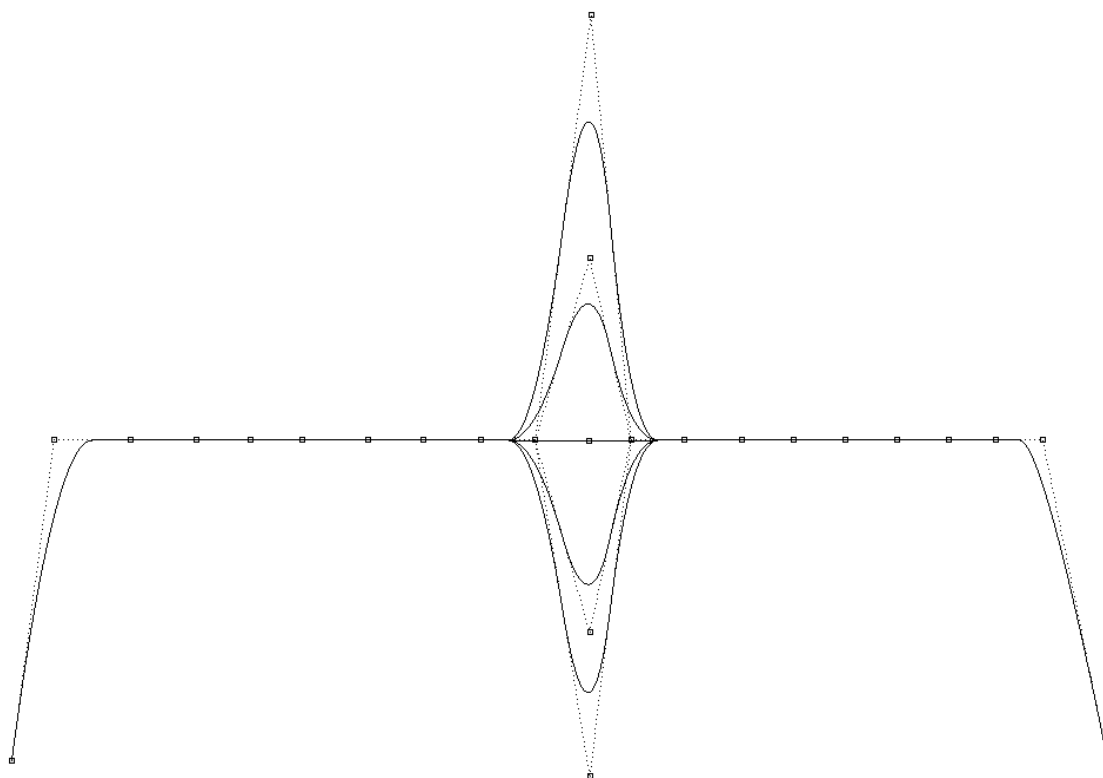
Podobně

$$C''_{14+}(t) = \frac{1}{6}[\mathbf{P}_1 \cdot (6 - 6t) + \mathbf{P}_2 \cdot (18t - 12) + \mathbf{P}_3 \cdot (-18t + 6) + \mathbf{P}_4 \cdot 6t]$$

$$C''_{14+}(0) = \mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

Máme tedy  $C''_{03-}(1) = C''_{14+}(0)$ , takže v bodě  $\bar{P}_3$ , kde jsou oba segmenty spojeny, je druhá derivace zleva rovna druhé derivaci zprava. V bodě  $\bar{P}_3$  tedy existuje (oboustranná) druhá derivace. Druhá derivace je tedy v tomto bodě spojitá, křivka je třetího stupně a má spojitost  $C^2$ , podle definice je to tedy kubický splajn. Lze ukázat, že funkce  $C_0(t)$ ;  $C_1(t)$ ;  $C_2(t)$ ;  $C_3(t)$  jsou lineárně nezávislé, jedná se tedy o B-splajn.

**6. Lokální kontrolovatelnost:** Křivka, která vznikla aproximací po částech, tj. napojením několika oblouků nižších stupňů, se oproti křivkám vyšších stupňů vyznačuje tzv. lokální kontrolovatelností. Změna jednoho řídicího bodu takové křivky totiž nemusí mít vliv na konstrukci celé křivky. U těchto křivek ovlivňuje maximálně tři její sousední oblouky.



**Obr. 5.6.5:** Lokálně kontrolovatelná křivka vzniklá spojením několika segmentů nízkých stupňů.

## 5. 7 B-splajny

Jak již bylo řečeno, splajny, k jejichž konstrukci je použito výhradně bázových funkcí nazýváme **bázové splajny**, krátce **B-splajny**. B-splajny jsou všechny samostatné Bézierovy, Fergusonovy i Coonsovy oblouky. B-splajny mohou být konstruovány i spojováním těchto

oblouků, u Bézierových a Fergusonových křivek je však potřeba splnit poměrně komplikované podmínky. Uživatelsky nejpříjemnější je z tohoto hlediska Coonsova křivka, kdy uživatel zadá první oblouk čtyřmi body a každým dalším bodem definuje další hladce navázaný oblouk, neboť konstrukční procedura tento bod chápe jako poslední bod řídicího polygonu, jehož první tři body automaticky převezme z předchozího oblouku.

Všechny předchozí postupy lze zobecnit, a to postupem, který objevili nezávisle na sobě M. Cox a C. de Boor v roce 1972. Je to postup obecného výpočtu B-splajn bází, tj. množin funkcí, které jsou v afinní kombinaci (5.2.2) označeny  $c_i(t)$ . Zároveň je možno obecně řešit „napojování oblouků“, a to pomocí tzv. uzlového vektoru a parametru  $t$ ; jehož hodnota již nemusí být omezena intervalem  $\langle 0; 1 \rangle$

**1. Uzlovým vektorem** rozumíme uspořádanou  $m + 1$ -tici  $\mathbf{t} = (t_0; t_1; \dots; t_m)$ ; jejíž složky neklesají, tj.  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$ .

**2. B-splajn bází stupně nula** nad uzlovým vektorem  $\mathbf{t} = (t_0; t_1; \dots; t_m)$  rozumíme množinu funkcí  $\{N_0^{(0)}(t); N_1^{(0)}(t); \dots; N_{m-1}^{(0)}(t)\}$ , kde

$$N_i^{(0)}(t) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t \in \langle t_i; t_{i+1} \rangle \\ 0 & \Leftrightarrow t \notin \langle t_i; t_{i+1} \rangle \end{cases}; \quad i = 0; 1; \dots; m-1; \quad \stackrel{def}{\langle a; a \rangle} := \emptyset$$

**3. B-splajn bází stupně  $k$ ;  $1 \leq k \leq m-1$**  nad uzlovým vektorem  $(t_0; t_1; \dots; t_m)$  rozumíme množinu funkcí  $\{N_0^{(k)}(t); N_1^{(k)}(t); \dots; N_{m-k-1}^{(k)}(t)\}$ , kde

$$N_i^{(k)}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{(k-1)}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{(k-1)}(t); \quad i = 0; 1; \dots; m-k-1; \quad \stackrel{def}{\frac{a}{0}} := 0$$

**4. Příklad:** Najdeme všechny B-splajn funkce stupně  $k = 2$  nad uzlovým vektorem  $\mathbf{t} = (0; 0; 0; 1; 1; 1)$ .

B-splajn báze je definovaná rekurzivně, je tedy třeba nejdříve určit bázi stupně nula a jedna. Stupeň nula:

$$\begin{aligned} N_0^{(0)}(t) &= \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t \in \langle t_0; t_1 \rangle = \langle 0; 0 \rangle = \emptyset \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \Rightarrow N_0^{(0)}(t) = 0 \\ N_1^{(0)}(t) &= \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t \in \langle t_1; t_2 \rangle = \langle 0; 0 \rangle = \emptyset \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \Rightarrow N_1^{(0)}(t) = 0 \\ N_2^{(0)}(t) &= \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t \in \langle t_1; t_2 \rangle = \langle 0; 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \\ N_3^{(0)}(t) &= N_4^{(0)}(t) = \left( \text{viz } N_0^{(0)}; N_1^{(0)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Stupeň jedna:

$$\begin{aligned} N_0^{(1)}(t) &= \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} N_0^{(0)}(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} N_1^{(0)}(t) = \left( \frac{a}{0} \stackrel{def}{:=} 0 \right) = 0 \\ N_1^{(1)}(t) &= \underbrace{\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} N_1^{(0)}(t)}_{0/0} + \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} N_2^{(0)}(t) = t_3 - t = 1 - t \\ N_2^{(1)}(t) &= \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} N_2^{(0)}(t) + \underbrace{\frac{t_4 - t}{t_4 - t_3} N_3^{(0)}(t)}_{0/0} = t - t_2 = t \end{aligned}$$

$$N_3^{(1)}(t) = \underbrace{\frac{t-t_3}{t_4-t_3} N_3^{(0)}(t)}_{0/0} + \underbrace{\frac{t_5-t}{t_5-t_4} N_4^{(0)}(t)}_{0/0} = 0$$

Stupeň dva:

$$\begin{aligned} N_0^{(2)}(t) &= \underbrace{\frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_0^{(1)}(t)}_{0/0} + \underbrace{\frac{\overbrace{t_3-t}^{1-t}}{t_3-t_1} N_1^{(1)}(t)}_1 = (1-t)^2 \\ N_1^{(2)}(t) &= \underbrace{\frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_1^{(1)}(t)}_1 \underbrace{1-t}_{1-t} + \underbrace{\frac{t_4-t}{t_4-t_2} N_2^{(1)}(t)}_1 \underbrace{t}_t = 2t(1-t) \\ N_2^{(2)}(t) &= \underbrace{\frac{t-t_2}{t_4-t_2} N_2^{(1)}(t)}_1 \underbrace{t}_t + \underbrace{\frac{t_5-t}{t_5-t_3} N_3^{(1)}(t)}_1 \underbrace{0}_0 = t^2 \end{aligned}$$

B-splajn funkce stupně  $k = 2$  nad uzlovým vektorem  $\mathbf{t} = (0; 0; 0; 1; 1; 1)$  tedy jsou

$$N_0^{(2)}(t) = (1-t)^2; \quad N_1^{(2)}(t) = 2t(1-t); \quad N_2^{(2)}(t) = t^2$$

Všimněte si, že jsou to Bernsteinovy polynomy 2. stupně. Není to náhoda, lze dokázat, že Bernsteinovy polynomy  $B_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  jsou B-splajn funkce  $N_i^{(n)}(t)$  nad uzlovým vektorem  $\mathbf{t} = \left( \underbrace{0; 0; \dots; 0}_{(n+1) \times}, \underbrace{1; 1; \dots; 1}_{(n+1) \times} \right)$ .

**5. B-splajn křivky v euklidovském prostoru:** Lze dokázat, že pro všechny B-splajn funkce sestrojené podle odstavců 2 a 3 platí:

$$(\forall m; k \in \mathbb{N})(\forall t \in \mathbb{R}) \left( k \leq m-1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{m-1} N_i^{(k)}(t) = 1 \right)$$

tj. lze je vyjádřit v afinním prostoru jako afinní kombinaci řídicích bodů  $P_i$ , tj.

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{m-1} N_i^{(k)}(t) \cdot P_i$$

**6. Uniformní a neuniformní B-splajny:** Jestliže v uzlovém vektoru  $\mathbf{t} = (t_0; t_1; \dots; t_m)$  pro každé  $i = 0; 1; \dots; m-1$  platí  $t_{i+1} - t_i = konst.$ , nazýváme příslušný B-splajn uniformní, v opačném případě se jedná o splajn neuniformní. Uniformní B-splajny nejsou téměř vůbec používány, lze ukázat, že všechny jejich báze funkce se liší pouze posunutím, tj. všechny jsou tvaru  $N_i^{(n)}(t) = N_0^{(n)}(t - i \cdot \Delta t)$

## 5. 8 NURBS křivky

Příjemnou vlastností B-splajn křivek je jejich invariantnost vůči afinním transformacím. Pokud chceme zobrazit B-splajn v nějakém afinním zobrazení, nemusíme zobrazovat bod po bodu celou křivku. Stačí zobrazit pouze její řídicí polygon a poté sestrojít splajn určený tímto novým polygonem. Nedostatkem je, že tyto křivky nejsou invariantní vůči projektivním transformacím, což je nepříjemné v případě, je-li v geometrickém modeláři použito středové promítání. Jejich vážným nedostatkem je nemožnost přesného modelování kuželosečkových oblouků. Tyto nedostatky překonávají tzv. NURBS křivky (**N**on **U**niform **R**ational **B**-**S**pline)



**1. Definice NURBS křivky:** Necht'  $\mathbf{P}_0; \mathbf{P}_1; \dots; \mathbf{P}_{m-1}$  jsou standardní reprezentanti bodů projektivního prostoru,  $N_0^{(k)}(t); N_1^{(k)}(t); \dots; N_{m-1}^{(k)}(t)$  jsou B-splajn funkce. NURBS křivkou rozumíme množinu bodů, jejichž reprezentanti jsou tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^*(t) &= \omega_0 N_0^{(k)}(t) \cdot \mathbf{P}_0 + \omega_1 N_1^{(k)}(t) \cdot \mathbf{P}_1 + \dots + \omega_{m-1} N_{m-1}^{(k)}(t) \cdot \mathbf{P}_{m-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t) \cdot \mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

Koeficienty  $\omega_0; \omega_1; \dots; \omega_{m-1}$  nazýváme váhy bodů  $\mathbf{P}_0; \mathbf{P}_1; \dots; \mathbf{P}_{m-1}$ . Vektor  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_0; \omega_1; \dots; \omega_{m-1})$  nazýváme váhovým vektorem.

Zdůrazněme, že alespoň jedna váha  $\omega_i$  musí být nenulová (nulový vektor totiž nemůže reprezentovat bod v projektivním prostoru). Dále si všimněme, že projektivní kombinací (5.6.1) standardních reprezentantů již nemusí být standardní reprezentant.

**2. Příklad:** Pomocí Bernsteinových polynomů sestrojme NURBS křivku 2. stupně s váhami

- a)  $\omega_0 = 1; \omega_1 = \frac{1}{2}; \omega_2 = 1$     d)  $\omega_0 = 2; \omega_1 = 4; \omega_2 = 2$   
b)  $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$     e)  $\omega_0 = 10; \omega_1 = 20; \omega_2 = 10$   
c)  $\omega_0 = 1; \omega_1 = 2; \omega_2 = 1$     f)  $\omega_0 = -1; \omega_1 = -2; \omega_2 = -1$

**Řešení:** Všechny křivky budou zřejmě tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^*(t) &= \omega_0 N_0^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_0 + \omega_1 N_1^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_1 + \omega_2 N_2^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_{m-1} = \\ &= \omega_0 \cdot (1-t)^2 \cdot \mathbf{P}_0 + \omega_1 \cdot 2t(1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + \omega_2 \cdot t^2 \cdot \mathbf{P}_{m-1} \end{aligned}$$

tedy

- a)  $\mathbf{Q}^*(t) = (1-t)^2 \cdot \mathbf{P}_0 + t(1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + t^2 \cdot \mathbf{P}_{m-1}$   
b)  $\mathbf{Q}(t) = (1-t)^2 \cdot \mathbf{P}_0 + 2t(1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + t^2 \cdot \mathbf{P}_{m-1}$   
c)  $\mathbf{Q}^*(t) = (1-t)^2 \cdot \mathbf{P}_0 + 4t(1-t) \cdot \mathbf{P}_1 + t^2 \cdot \mathbf{P}_{m-1}$   
atd.

Všimněme si, že v případě b) probíhá funkce  $\mathbf{Q}(t)$  standardní reprezentanty – dostáváme B-splajn (v našem případě Bézierovu křivku). Je tomu tak vždy, když pro každé  $i$  je  $\omega_i = 1$ . B-splajn dostaneme dokonce i v případě, kdy je pouze  $\omega_i = \omega_j$  pro každé  $i; j$  (i když v tomto případě  $\mathbf{Q}^*(t)$  nejsou standardní reprezentanti. Abychom pochopili, proč tomu tak je, je třeba se zamyslet nad geometrickým významem vah a s tím související otázkou, proč se tyto křivky nazývají racionální, když ani v rovnici (5.6.1), ani ve speciálních případech příkladu 2 žádné lomené výrazy nejsou.

Rovnice (5.8.1) vyjadřuje NURBS křivky v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^n$ . Lze je ovšem vyjádřit v  $\mathcal{E}^n$ ?

**3. NURBS křivka v euklidovském prostoru:** Přepíšeme-li rovnici (5.8.1) do souřadnic v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^2$ , máme

$$\left( q_1^*(t); q_2^*(t); \omega_q(t) \right) = \left( \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t) \cdot p_{i1}; \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t) \cdot p_{i2}; \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t) \cdot 1 \right)$$

Chceme-li tuto křivku vyjádřit v  $\mathcal{E}^2$  musíme bod  $\mathbf{Q}(t) \in {}_{\infty}\mathcal{E}^2$  reprezentovat jeho standardním reprezentantem, tedy

$$\left( q_1(t); q_2(t); 1 \right) = \left( \frac{q_1^*(t)}{\omega_q(t)}; \frac{q_2^*(t)}{\omega_q(t)}; 1 \right) = \left( \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t) \cdot p_{i1}}{\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t)}; \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t) \cdot p_{i2}}{\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t)}; 1 \right)$$

což lze zapsat jako afinní kombinaci

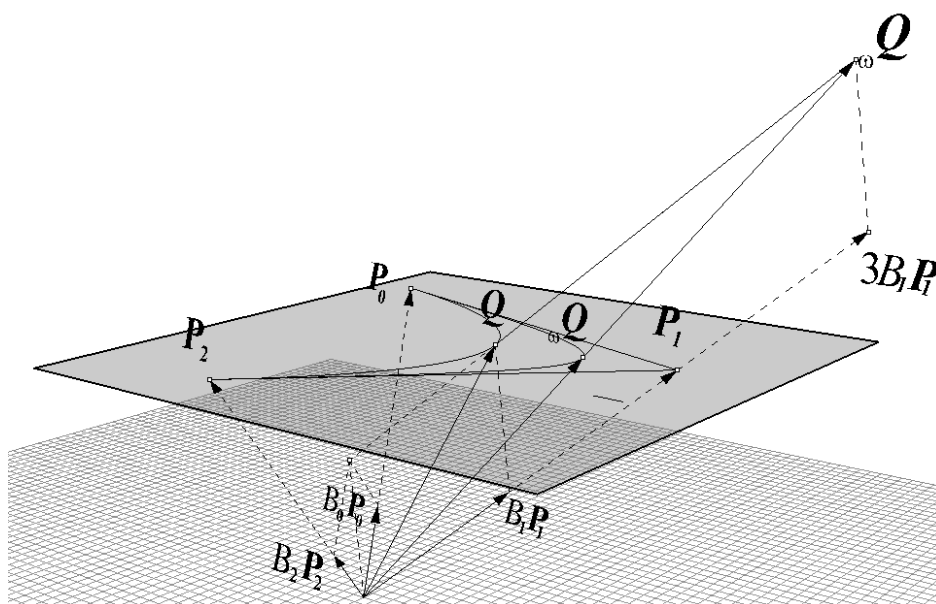
$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t) \cdot P_i}{\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i N_i^{(k)}(t)} \quad (5.8.2)$$

Odtud tedy přívlastek „rational“ v názvu těchto křivek. Poznamenejme, že NURBS křivky, kde B-splajn funkce v (5.8.2) jsou rovny Bernsteinovým polynomům, bývají nazývány racionální Bézierovy křivky.

#### 4. NURBS křivky mají tyto vlastnosti:

- Lze je vždy zadat tak, aby procházely prvním a posledním bodem řídicího polygonu.
- Jsou lokálně kontrolovatelné, tj. změna polohy, resp. váhy jednoho bodu má tedy vliv pouze na část křivky.
- Jsou invariantní vůči projektivním transformacím
- Umožňují přesné vyjádření kuželoseček (podrobněji ukážeme v následující kapitole)

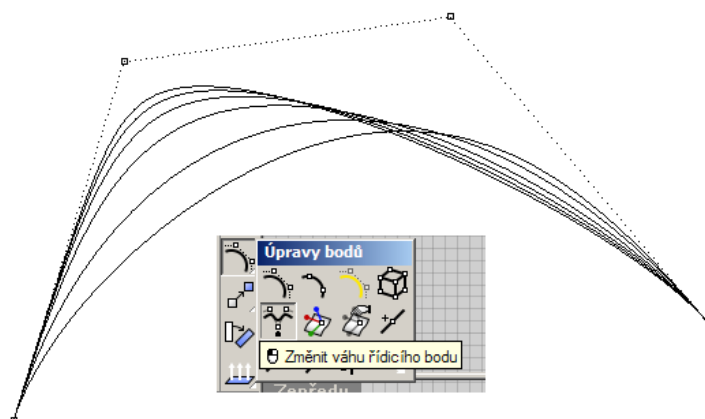
**5. Geometrický význam váhového vektoru** objasníme na případě rovinné B-splajn křivky 2. stupně. Každý bod B-splajn křivky vzniká jako kombinace  $B_0^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_0 + B_1^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_1 + B_2^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_2$  standardních reprezentantů řídicích bodů  $\mathbf{P}_0; \mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2$ . Díky tomu, že  $B_0^{(2)}(t) + B_1^{(2)}(t) + B_2^{(2)}(t) = 1$ , je tato kombinace afinní, tj. touto kombinací je opět standardní reprezentant. Váhy přiřazené jednotlivým řídicím bodům způsobí, že se z původní afinní kombinace reprezentantů stane pouze kombinace projektivní, tj. výslední reprezentanti křivky „opustí“ euklidovskou rovinu. Na obr. 5.8.1 máme kromě této křivky další křivku, kde jsme bodům  $\mathbf{P}_0; \mathbf{P}_2$  přiřadili váhy  $\omega_0 = \omega_2 = 1$  a bodu  $\mathbf{P}_1$  jsme přiřadili váhu  $\omega_1 = 3$ . Její vinou není součet  $B_0^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_0 + B_1^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_1 + B_2^{(2)}(t) \cdot \mathbf{P}_2$  standardním reprezentantem a opustil euklidovskou rovinu. Bod  ${}_{\omega}Q$ , který tento součet reprezentuje, se v projektivním prostoru zřejmě bude se vzrůstajícím  $\omega_1$  blížit bodu  $P_1$ . To znamená, že i jeho standardní reprezentant  ${}_{\omega}Q$  se bude blížit ke standardnímu reprezentantovi  $\mathbf{P}_1$  bodu  $P_1$ .



**Obr. 5.8.1:** Geometrický význam váhy bodu

NURBS křivky tak lze tvarovat nejen změnou řídicích bodů, ale i změnou jejich vah. V euklidovské rovině se to projeví tak, že se vzrůstající vahou se budou body křivky více blížit příslušnému řídicímu bodu. Naopak bude-li váha menší, křivka se od řídicího bodu vzdálí tak, jak ilustruje obr. 5.8.2.

**6. Poznámka:** Je zřejmé, že vynásobíme-li váhy libovolným číslem různým od nuly, křivka se nezmění. Vektory  $(\omega p_1; \omega p_2; \omega)$ ;  $(k\omega p_1; k\omega p_2; k\omega)$  jsou totiž reprezentanty téhož bodu. V příkladu 2 c) d) e) f) dostaneme tedy tytéž NURBS křivky – vyplývá to rovněž z (5.8.2).



**Obr. 5.8.1:** Změna váhy bodu v Rhinoceros

Změnu tvaru NURBS křivky pomocí vah ovšem nelze chápat jen takto intuitivně. Jak uvidíme v dalším textu, mají tyto změny hlubší geometrické souvislosti. K jejich objasnění provedeme několik přípravných úvah.

## 5.9 Kuželosečkové oblouky jako NURBS

**1.  $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$ :** Uvažujme parabolu  $y = x^2$ . Ta má bodovou rovnici  $(t; t^2; 1)$ . Z příkladu 2 kpt. 4. 8. víme, že tato křivka je obrazem kružnice  $(\cos t; \sin t; 1)$  ve středové kolíneaci

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Má jeden nevlastní bod  ${}_{\infty}\mathbf{B}$ , který je obrazem bodu  $\mathbf{E}(\frac{\pi}{2}) = (0; 1; 1)$ :

$${}_{\infty}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nevlastním bodem této paraboly je tedy směr její osy.

Vrchol paraboly označme  $\mathbf{A}$ . Z bodu  $\mathbf{P} = (0; -1; 1)$  vedme tečny  $\mathbf{t}_1; \mathbf{t}_2$  k této parabole, body dotyku jsou zřejmě  $\mathbf{T}_{1,2} = (0; -1; 1)$  a označme  $\mathbf{Q}$  střed úsečky  $\mathbf{T}_1; \mathbf{T}_2$ . Celou situaci můžeme nechat sestrojít počítač – osa paraboly má rovnici  $(0; t; 1)$ ; tečny  $\mathbf{t}_{1,2} = (t; \pm 2t - 1; 1)$ ; polára (viz. def. 12 kpt. 3.2.) pak  $\mathbf{p} = (t; 1; 1)$  – viz obr. 5.7.1 vlevo. Tutéž konstrukci jsme provedli v kpt. 3.2. pro kružnici (viz obr. 3.2.4), kde jsme dokázali, že  $(\mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{P}; \mathbf{Q}) = (\mathbf{P}; \mathbf{Q}; \mathbf{A}; \mathbf{B}) = -1$ . Parabola je projektivním obrazem kružnice, a protože projektivní zobrazení zachovává dvojpoměr, i v případě paraboly musí být

$$(\mathbf{P}; \mathbf{Q}; \mathbf{A}; {}_{\infty}\mathbf{B}) = -1 \Rightarrow \frac{(\mathbf{P}; \mathbf{Q}; \mathbf{A})}{(\mathbf{P}; \mathbf{Q}; {}_{\infty}\mathbf{B})} = \frac{(\mathbf{P}; \mathbf{Q}; \mathbf{A})}{1} = -1 \Rightarrow (\mathbf{P}; \mathbf{Q}; \mathbf{A}) = -1$$

To ovšem znamená, že bod  $\mathbf{A}$  je středem úsečky  $\mathbf{PQ}$ .

Zobrazme předchozí situaci v libovolné afinitě  $\mathcal{A}$ . Afinita zachovává incidenci i vlastní a nevlastní body, obraz  $\mathcal{A}({}_{\infty}\mathbf{B})$  nevlastního bodu  ${}_{\infty}\mathbf{B}$  je tedy opět nevlastní a určuje směr osy paraboly. Afinita dále zachovává dělicí poměr, proto také  $(\mathcal{A}(\mathbf{P}); \mathcal{A}(\mathbf{Q}); \mathcal{A}(\mathbf{A})) = -1$ , i zde

je tedy  $\mathcal{A}(A)$  středem úsečky  $\mathcal{A}(P)\mathcal{A}(Q)$ . Ilustrujme tuto skutečnost pro afinitu určenou maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

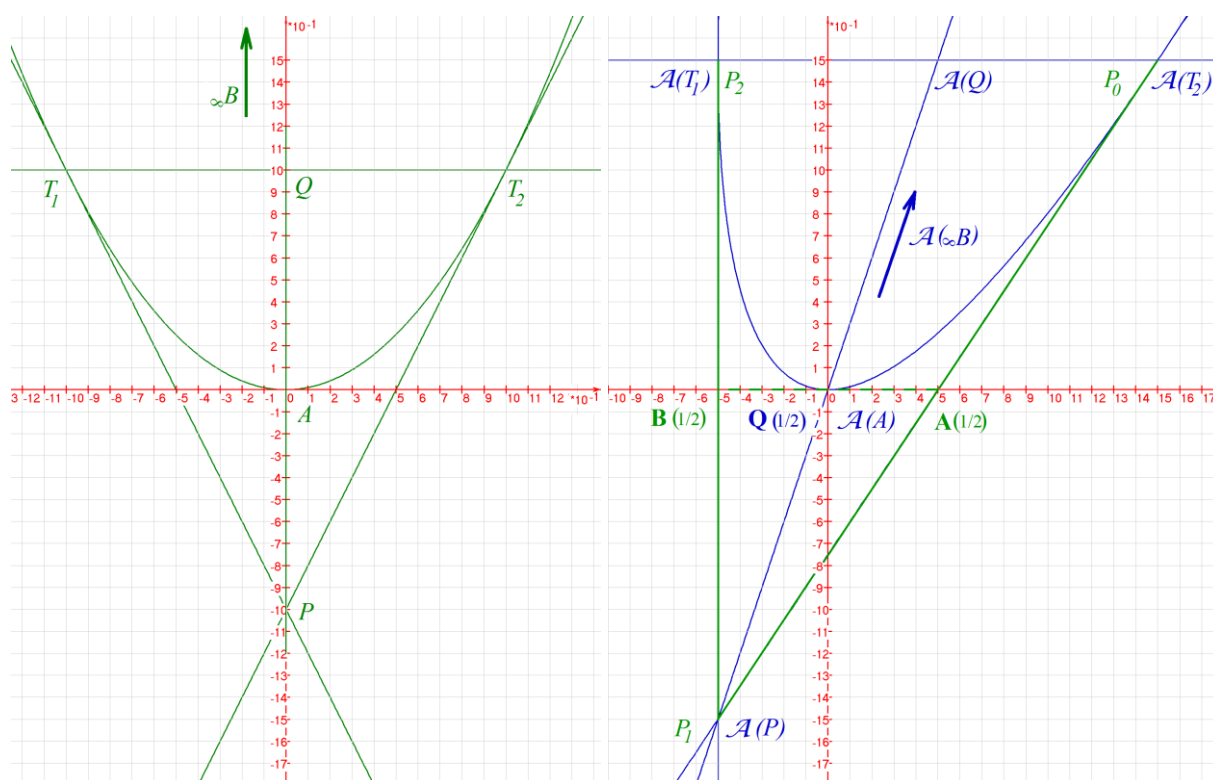
Obrazy jednotlivých množin bodů (paraboly, pólu, tečen a polár) dostaneme, když matici afinity vynásobíme zprava transponovanou bodovou rovnicí. Můžeme to provést najednou, tj. matici afinity  $\mathbf{A}$  vynásobit zprava maticí, jejíž sloupce tvoří bodové rovnice jednotlivých útvarů, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 & t & t \\ t^2 & t & \pm 2t - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t & t \pm t - \frac{1}{2} & t + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}t^2 & \frac{3}{2}t & \pm 3t - \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

kde sloupce v matici bodových rovnic jsou po řadě rovnice paraboly, její osy, tečen a polár. Příslušné útvary jsou sestrojeny na obr. 5.9.1 vpravo. Srovnáme-li tuto konstrukci s obr. 5.3.2, zjistíme, že jsme dostali Bézierovu křivku 2. stupně

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_1 \cdot 2t(1-t) + \mathbf{P}_2 t^2 \quad (5.9.1)$$

s řídicím polygonem  $P_0 = \mathcal{A}(T_2)$ ;  $P_1 = \mathcal{A}(P)$ ;  $P_2 = \mathcal{A}(T_1)$ . Bod  $\mathcal{A}(A)$  pak splývá s bodem  $\mathbf{Q}(t)$  Bézierovy křivky pro  $t = \frac{1}{2}$ .



**Obr. 5.9.1:** Parabola  $y = x^2$  s pólem  $P$  a harmonickou čtveřicí bodů  $A; B; P; Q$ ; (vlevo) a její obraz v afinitě  $\mathcal{A}$  (vpravo).

S odkazem na poznámku 6 kpt. 5. 6 dodejme, že každá rovnice

$$\mathbf{Q}(t) = \omega \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \omega \mathbf{P}_1 \cdot 2t(1-t) + \omega \mathbf{P}_2 t^2; \quad \omega \neq 0$$

určuje stejnou množinu bodů jako rovnice (5.7.1).

**2.  $\omega_0 = \omega_2 \neq \omega_1$ :** Z poznámky 6 kpt. 5.6 je opět zřejmé, že bez újmy na obecnosti můžeme položit  $\omega_0 = \omega_2 = 1$ ;  $\omega_1 = \omega \neq 1$ . Podívejme se ještě jednou na geometrický význam váhy  $\omega_1 \neq 1$  (obr. 5.6.1). Vážením přejde bod  $Q$  projektivního prostoru do bodu  ${}_{\omega}Q$ , jehož standardním reprezentantem je  ${}_{\omega}Q$ . V syntetickém modelu projektivní roviny dostaneme bod  ${}_{\omega}Q$  jako obraz bodu  $Q$  v kolineaci  $\mathcal{K}_1$  mezi rovinami  $P_0P_1P_2$ ;  $P_0{}_{\omega}QP_2$  se směrem  ${}_{\omega}Q^* - Q$  a bod  ${}_{\omega}Q$  jako obraz bodu  ${}_{\omega}Q$  v kolineaci  $\mathcal{K}_2$  mezi stejnými rovinami a směrem  ${}_{\omega}Q^* - {}_{\omega}Q$ . Obě tyto kolineace zachovávají dvojpoměr, jejich složení tedy opět zachovává dvojpoměr, parabolu z předchozího odstavce zobrazí tedy na kuželosečku. Zbývá rozhodnout, na kterou. Uvažujme tedy NURBS křivku tvaru

$$Q^*(t) = \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega(1-t)t P_1 + t^2 P_2}{(1-t)^2 + 2\omega(1-t)t + t^2}$$

a spočtěme bod  $Q^*\left(\frac{1}{2}\right)$ :

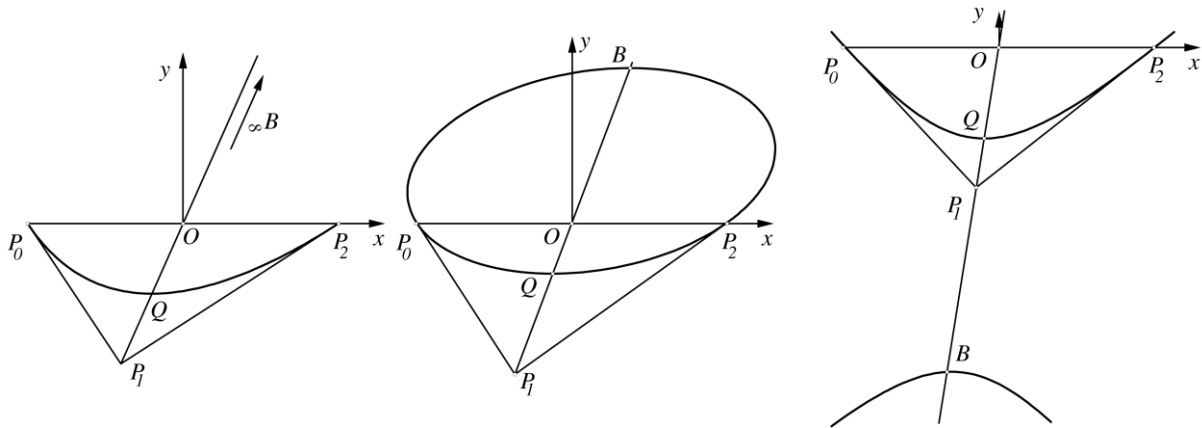
$$Q^*\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 P_0 + 2\omega\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} P_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\omega\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{P_0 + \omega P_1 + P_2}{1 + \omega}$$

Zapsáno pomocí polohových vektorů  $\overrightarrow{OQ}$ ;  $\overrightarrow{OP_0}$ ;  $\overrightarrow{OP_1}$ ;  $\overrightarrow{OP_2}$  bodů  $Q$ ;  $P_0$ ;  $P_1$ ;  $P_2$  v prostoru  $\mathcal{E}^2$  resp.  $\mathcal{E}^3$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OP_0} + \omega \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}}{1 + \omega}$$

Využijme afinní invariantnosti, tj. skutečnosti, že volbou jiných (vlastních) řídících bodů nezměníme počet nevlastních bodů kuželosečky (tj. eliptický oblouk zůstane eliptickým a hyperbolický hyperbolickým). Položme tedy  $\overrightarrow{OP_0} = (-1; 0) \in Z(\mathcal{E}^2)$ ;  $\overrightarrow{OP_2} = (1; 0) \in Z(\mathcal{E}^2)$ , pro  $Z(\mathcal{E}^3)$  analogicky – viz obr. 5.9.2. Dostáváme

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\omega}{1 + \omega} \overrightarrow{OP_1} \Rightarrow \frac{|OQ|}{|OP_1|} = \frac{\omega}{1 + \omega} \quad (5.9.2)$$



**Obr. 5.9.2:** Vliv váhy bodu:  $\omega = 1$  (vlevo);  $\omega < 1$  (uprostřed);  $\omega > 1$  (vpravo)

Je-li  $\omega < 1$ , pak

$$\omega < 1 \Rightarrow \frac{\omega}{1 + \omega} < \frac{1}{2} \Rightarrow |OQ| < |OP_1| \Rightarrow (P_1; O; Q) < -1$$

Označme  $B$  další průsečík secny  $OP_1$  s kuželosečkou. Pak

$$(P_1; O; Q; B) = \frac{(P_1; O; Q)}{(P_1; O; B)} = \underbrace{(P_1; O; Q)}_{< -1} \cdot \frac{|P_1O|}{|P_1B|} = -1 \Rightarrow \frac{|P_1O|}{|P_1B|} \in (0; 1) \Rightarrow |P_1O| < |P_1B|$$

Jedná se tedy o elipsu (viz obr. 5.9.2 uprostřed).

Je-li  $\omega > 1$ , pak

$$\omega > 1 \Rightarrow \frac{\omega}{1+\omega} > \frac{1}{2} \Rightarrow |OQ| > |OP_1| \Rightarrow -1 < (P_1; O; Q) < 0$$

$$(P_1; O; Q; B) = \frac{(P_1; O; Q)}{(P_1; O; B)} = \frac{(P_1; O; Q)}{\underset{\in(-1;0)}{(P_1; O; B)}} \cdot \frac{|P_1O|}{|P_1B|} = -1 \Rightarrow \frac{|P_1O|}{|P_1B|} > 1 \Rightarrow |P_1O| > |P_1B|$$

Jedná se tedy o elipsu (viz obr. 5.7.2 vpravo).

Můžeme tedy shrnout: Racionální Bézierova křivka 2. stupně s váhami  $\omega_0 = \omega_2$  je:

$\omega_1 < \omega_0 = \omega_2$ .

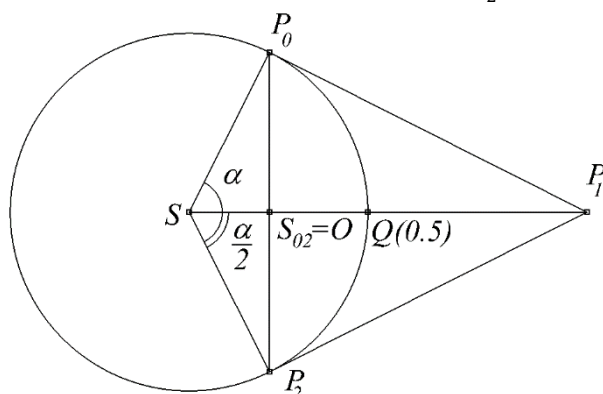
pro  $\omega_1 < \omega_0 = \omega_2$  eliptický oblouk;

pro  $\omega_1 = \omega_0 = \omega_2$  parabolický oblouk

pro  $\omega_1 > \omega_0 = \omega_2$  hyperbolický oblouk

**8. Kruhový oblouk a kružnice jako NURBS:** Kružnice je důležitý speciální případ elipsy. V CAD systémech je hojně používána, a to nejen sama o sobě, ale slouží k modelování celé řady těles. Podívejme se tedy na podmínky, za kterých eliptický oblouk z předchozího odstavce přejde v oblouk kruhový. V případě kruhového oblouku musí především být  $|P_1P_0| = |P_1P_2|$ . Umístíme počátek  $O$  souřadné soustavy do středu  $S_{02}$  úsečky  $P_0P_2$  (viz obr. 5.7.3) a dále položíme  $\omega_0 = \omega_2 = 1$ . Zbývá tedy najít  $\omega_1 = \omega$ . Podle (5.9.2) má být  $\frac{|OQ|}{|OP_1|} = \frac{\omega}{1+\omega}$ . Je-li kuželosečka kružnicí, lze délky  $|OQ|$ ,  $|OP_1|$  vyjádřit pomocí jejího poloměru a příslušného středového úhlu:

$$|OS| = r \cos \frac{\alpha}{2}; |SP_1| = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$



**Obr. 5.9.3:** Kruhový oblouk jako NURBS

Dále je

$$|OQ| = r - r \cos \frac{\alpha}{2}$$

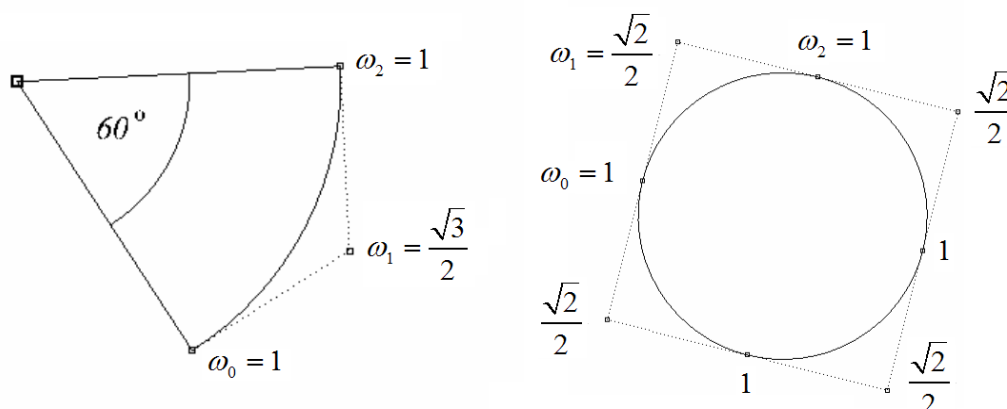
$$|OP_1| = |SP_1| - |OS| = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}} - r \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{r(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Pro poměr těchto vzdáleností tedy dostáváme:

$$\frac{\omega}{1+\omega} = \frac{|OQ|}{|OP_1|} = \frac{(r - r \cos \frac{\alpha}{2}) \cos \frac{\alpha}{2}}{r(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2})} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \omega = \cos \frac{\alpha}{2}$$

Kruhový oblouk se středovým úhlem  $\alpha$  tedy dostaneme volbou řídicích bodů  $P_0; P_1; P_2$  tak, aby  $|P_0P_1| = |P_1P_2|$ ;  $\angle P_0P_1P_2 = \pi - \alpha$  (proč?) a váhového vektoru  $\omega = (1; \cos \frac{\alpha}{2}; 1)$ . Speciálně pro čtvrtkružnici musejí řídicí body tvořit vrcholy rovnoramenného trojúhelníka a

váhový vektor je  $\omega = \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ . Celou kružnici pak obdržíme hladkým spojením čtyř takových oblouků, tj. použijeme celkem osm řídicích bodů, z nichž krajní body každého segmentu tvoří středy stran a prostřední body jeho vrcholy. Středů mají váhu  $\omega = 1$ , vrcholy váhu  $\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (popřípadě násobky těchto hodnot – viz opět poznámku 6 kpt. 5. 6). Snadno se o tom můžeme přesvědčit v **Rhinoceros**. Sestrojíme kruhový oblouk s libovolným středovým úhlem, zobrazme jeho řídicí body a zkontrolujeme jejich váhy. Dále sestrojíme kružnici (jakýmkoli způsobem), opět zobrazme její řídicí body a zkontrolujeme jejich váhy.



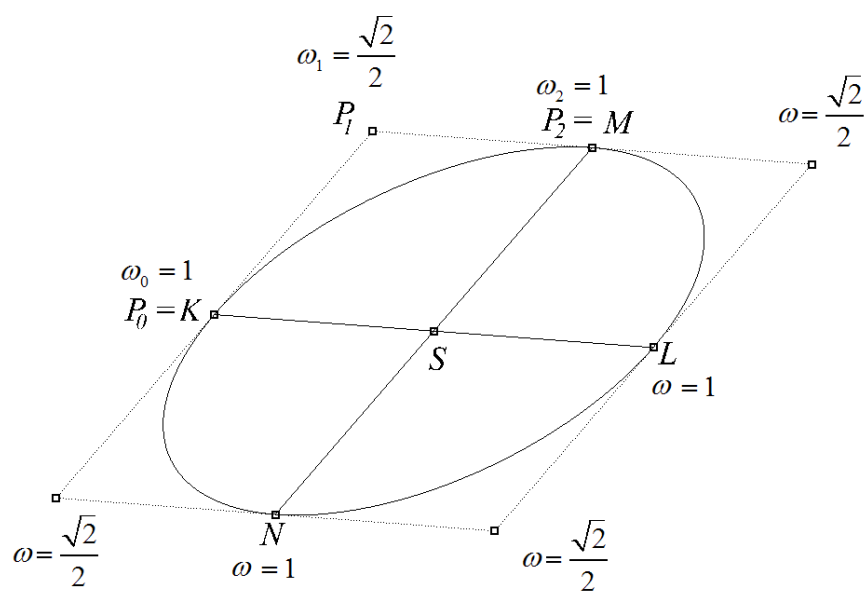
**Obr. 5.9.4:** Kruhový oblouk a kružnice jako NURBS

**9. Eliptický oblouk a elipsa jako NURBS:** NURBS křivky jsou invariantní vůči projektivním transformacím. Znamená to následující: Pro každé dvě NURBS křivky  $\mathbf{K}_1$ ;  $\mathbf{K}_2$  stupně  $n$  s týmiž báзовými funkcemi existuje projekční zobrazení  $\mathcal{P}$  takové, že  $\mathcal{P}: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ , tj. obrazem křivky  $\mathbf{K}_1$  je křivka  $\mathbf{K}_2$ , a to bez ohledu na použité váhy, či řídicí body. Vezmeme-li například libovolnou racionální Bézierovu křivku druhého stupně, jedná se vždy o oblouk kuželosečky. Použijeme-li váhy  $\omega_1 = \omega_0 = \omega_2$ , je křivka obloukem paraboly. Použijeme-li  $\omega_0 = \omega_2 \neq \omega_1$ , je křivka obloukem eliptickým nebo hyperbolickým. Přitom jak eliptický, tak hyperbolický oblouk lze obdržet jako obraz oblouku parabolického ve vhodném projektivním zobrazení.

Dále lze ukázat, že dvě NURBS křivky stupně  $n$  s týmiž báзовými funkcemi a navíc stejným váhovým vektorem  $\omega$ , jsou afinně invariantní, tj. pro dvě takové křivky  $\mathbf{K}_1$ ;  $\mathbf{K}_2$  vždy existuje afinní zobrazení  $\mathcal{A}$  takové, že  $\mathcal{A}: \mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$ , a to bez ohledu na použité řídicí body.

**10. Konstrukce elipsy ze sdružených průměrů v Rhinoceros.** Máme-li pravítkem a kružítkem sestrojit osy elipsy, známe-li její sdružené průměry, je možné použít Rytzovou konstrukci. Ocitneme-li se ve stejné situaci v Rhinoceros, máme k dispozici jednodušší cestu.

Pomocí příkazu **Kopírovat** aplikované na zadané sdružené průměry opíšeme hledané elipse rovnoběžník, jehož vrcholy spolu s koncovými body zadaných průměrů poslouží jako řídicí body čtyř Bézierových oblouků druhého stupně. Po sestrojení těchto oblouků změníme váhy ve vrcholech rovnoběžníka na hodnotu  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Takto vzniklé čtyři eliptické oblouky v případě potřeby sjednotíme příkazem **Spojit**



**Obr. 5.9.5:** Kontrukce elipsy ze sdružených průměrů (Rhinoceros)



## 6 Plochy

V kpt. 4. 1. jsme definovali plochu jako topologicky dvojrozměrný souvislý geometrický útvar. Stejně jako v případě křivek můžeme plochy dělit podle možností analytického popisu na plochy analytické a grafické. Výše uvedená definice plochy je sice velmi obecná, na druhé straně však neposkytuje návod, jak plochu popsat analyticky. Těmto otázkám se budeme věnovat v následujících kapitolách.

### 6.1 Analytické vyjádření plochy v $\mathcal{E}^3$ a ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$

**1 DEFINICE – parametrizace plochy:** Necht'  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  je souvislá otevřená množina  $Q \subset \mathcal{E}^3$  ( $Q \subset {}_{\infty}\mathcal{E}^3$ ) je plocha, pro kterou existuje spojitě surjektivní zobrazení  $\rho: \Omega \rightarrow \gamma$ . Pak plochu  $\gamma$  nazýváme parametrizovatelnou, zobrazení  $\rho$  nazýváme její parametrizací, složky  $u; v$  uspořádané dvojice  $[u; v] \in \Omega$  nazýváme parametry. Plochu  $Q$  parametrizovanou parametrizací  $\rho$  značíme podrobně  $\langle Q; \rho \rangle$ . Rovnici, která každému  $[u; v] \in \Omega$  přiřazuje bod  $\rho[u; v] = [x(u; v); y(u; v); z(u; v)] \in \mathcal{E}^3$ , nazýváme bodovou rovnicí plochy v  $\mathcal{E}^3$ . Rovnici, která každému  $[u; v] \in \Omega$  přiřazuje bod  $\rho[u; v] = (x(u; v); y(u; v); z(u; v); \omega(u; v)) \in {}_{\infty}\mathcal{E}^3$ , nazýváme bodovou rovnicí plochy v  ${}_{\infty}\mathcal{E}^3$ . Rovnice  $x = x(u; v); y = y(u; v); z = z(u; v)$  nazýváme v obou případech parametrickými rovnicemi plochy.

**2 DEFINICE – regulární a singulární body:** Necht'  $\langle Q; \rho \rangle$  je parametrizovatelná plocha. Bod  $\rho[u; v] = [x(u; v); y(u; v); z(u; v)]$  nazveme regulárním bodem plochy  $\langle Q; \rho \rangle$  právě tehdy, když

- Existuje okolí  $O[u; v]$ , na kterém je parametrizace je prostá.
- Funkce  $x(u; v); y(u; v); z(u; v)$  mají v bodě  $[u; v]$  spojitě parciální derivace až do 3. Řádu
- V bodě  $[u; v]$  je

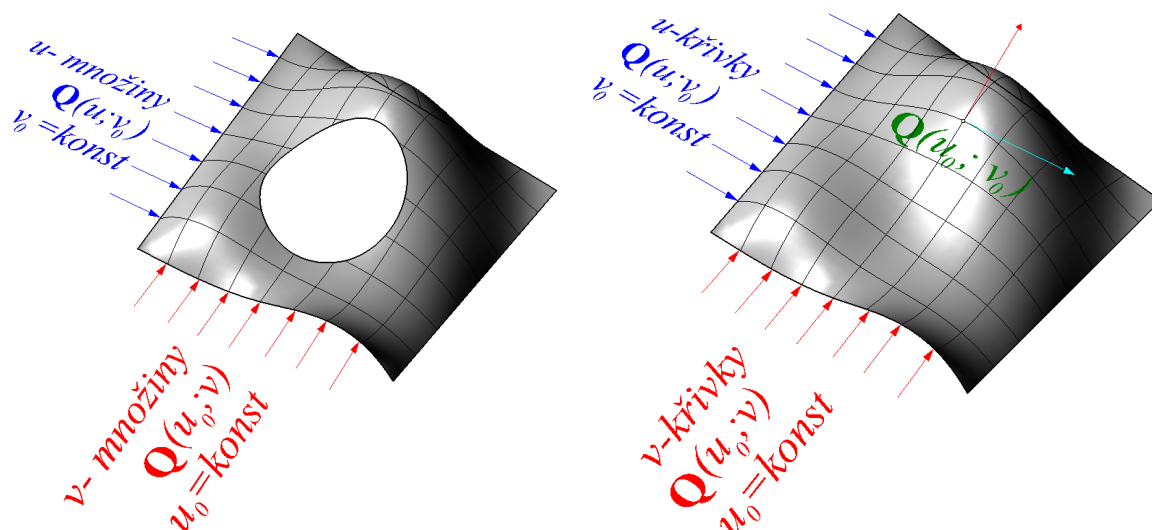
$$h \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

Bod, který není regulární, nazýváme singulární.

Je zřejmé, že plocha je jednoznačně určena svými parametrickými rovnicemi. Naopak ovšem může být tatáž plocha vyjádřena různými parametrickými rovnicemi. To má (mimo jiné) za následek, že případná singularita bodu může záviset na parametrickém vyjádření. Podle toho můžeme rozlišovat body nepodstatně singulární (tj. bod, který v jednom parametrickém vyjádření singulární je, ale v jiném není) a podstatně singulární (který je singulární v každém parametrickém vyjádření).

### 6.2 Křivky na ploše

Mějme  $[u_0; v_0] \in \Omega$  libovolný ale pevný bod oblasti  $\Omega$ , nad kterou je definována regulární plocha. Množinu bodů  $Q_u$ , pro které platí  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{Q}_u(u; v_0)$ , nazýváme  $u$ -množinou, množinu bodů  $Q_v$  plochy, pro které platí  $\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_v(u_0; v)$ , nazýváme  $v$ -množinou.  $u$ -množina ani  $v$ -množina nemusí být křivkou, může se „rozpadnout“ (viz obr. 6.2.1). Vždy však existuje (alespoň jednostranně) okolí  $O_\varepsilon[u_0; v_0]$  bodu  $[u_0; v_0]$ , ve kterém to křivka je.



**Obr. 6.2.1:**  $u$  -množiny a  $v$ -množiny (vlevo),  $u$  -křivky a  $v$ -křivky (vpravo)

Tečné vektory

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\partial \mathbf{Q}_u}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right); \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\partial \mathbf{Q}_v}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right) \quad (6.2.1)$$

$u$  -množin a  $v$ -množin jsou lineárně nezávislé.

**1. DEFINICE – křivka na ploše:** Necht'  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(u; v)$ ;  $[u; v] \in \Omega$  je dána regulární plocha a

$$u = u(t); v = v(t) \quad (6.2.2)$$

jsou dvě funkce s těmito vlastnostmi:

- jsou to reálné funkce reálné proměnné definované na společném intervalu  $(a; b)$
- ve všech bodech intervalu  $(a; b)$  jsou spojitě i se svými derivacemi alespoň prvního řádu
- v žádném bodě intervalu  $(a; b)$  nejsou funkce  $u'(t); v'(t)$  současně rovny nule
- dvěma různým bodům intervalu  $(a; b)$  přiřazují dva různé body oblasti  $\Omega$ .

Pak množinu všech bodů

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(u(t); v(t)); \quad t \in (a; b) \quad (6.2.3)$$

nazýváme křivkou na ploše. Rovnice (6.2.2) nazýváme (vnitřními parametrickými) rovnicemi křivky na ploše, rovnice (6.2.3) je její vektorovou rovnicí.

Derivujme rovnici (6.2.2):

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{du}{dt} + \left( \frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{dv}{dt}$$

Podle rovnice (6.2.11) je však

$$\left( \frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \mathbf{t}_1; \quad \left( \frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \mathbf{t}_2$$

takže pro každý tečný vektor platí:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{t}_1 \cdot \frac{du}{dt} + \mathbf{t}_2 \cdot \frac{dv}{dt} \quad (6.2.4)$$

Vektory  $\mathbf{t}_1; \mathbf{t}_2$  jsou lineárně nezávislé a  $\frac{du}{dt}; \frac{dv}{dt}$  nejsou v žádném bodě současně nulové, z čehož plyne, že tečný vektor  $\frac{dy}{dt}$  je v každém bodě nenulový. Tečný vektor  $\dot{\mathbf{y}} = \frac{dy}{dt}$  křivky na regulární ploše je v každém bodě nenulový, takže křivka na ploše je regulární křivka

Dále platí:

**2. VĚTA:** Množina bodů  $[u; v]$  regulární plochy, pro kterou platí  $g(u; v) = 0$ , kde  $g$  je funkce definovaná na oblasti  $\Omega$ , je zde spojitá i se svými prvními parciálními derivacemi, přičemž obě derivace nejsou nikde současně rovny nule, je křivkou na ploše.

**3. DEFINICE – křivka na ploše definovaná implicitně:** křivka z předcházející věty se nazývá křivka na ploše definovaná implicitně.

### 6.3 Explicitní a implicitní rovnice plochy

V definici plochy jsme použili parametrické rovnice. Plochu však můžeme definovat i pomocí rovnic explicitních a implicitních.

Mějme danu funkci

$$z = f(x; y); \quad [x; y] \in \Omega \quad (6.3.1)$$

definovanou na jisté oblasti  $\Omega$ , která je na této oblasti spojitá i se svými parciálními derivacemi až do třetího řádu. Pak množina všech bodů  $[x; y; f(x; y)] \in \mathcal{E}^3$  je regulární plocha. Rovnici (6.3.1) nazýváme explicitní rovnicí plochy. Je zřejmé, že plocha daná explicitní rovnicí, má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \quad [u; v] \in \Omega \quad (6.3.2)$$

Tyto rovnice splňují všechny předpoklady definice 1 kpt. 6.1. Předpokládejme nyní obráceně, že daná regulární plocha je definována parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \quad [u; v] \in \Omega$$

Tuto plochu nelze vždy vyjádřit explicitně, neboť tato plocha nemusí být grafem funkce dvou proměnných. Avšak pro každý bod  $[x; y; z] \in \mathcal{E}^3$  této plochy existuje okolí  $O_\varepsilon[x; y; z]$  tak, že plocha v tomto okolí grafem funkce dvou proměnných je. Je-li totiž

$$h \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

pak existuje čtvercová submatice, která má hodnotu dva. V okolí každého bodu lze tedy ze soustavy tří rovnic vybrat dvě, které lze vyřešit vzhledem k proměnným  $u; v$  (tyto proměnné lze „vyjádřit“) a dosazením do rovnice třetí dostaneme explicitní vyjádření.

Dále předpokládejme, že je dána funkce  $g(x; y; z)$  definovaná na trojrozměrné oblasti  $\Omega \in \mathcal{E}^3$  a je ve všech bodech spojitá i se svými parciálními derivacemi až do řádu tří. Nechť množina

$$M = \{[x; y; z] \in \mathcal{E}^3 | g(x; y; z) = 0\}$$

je neprázdná a v žádném bodě této množiny nejsou parciální derivace funkce  $g$  současně rovny nule. Pak množina  $M$  je regulární plochou a rovnice  $g(x; y; z) = 0$  jejím implicitním vyjádřením.

## 6.4 Algoritmy konstrukce ploch

**1. Konstrukce  $u, v$  křivek:** Algoritmicky nejjednodušším grafickým znázorněním ploch je konstrukce osnovy  $u$ -křivek a  $v$ -křivek. Každou  $u$ -křivku a  $v$ -křivku lze sestrojovat použitím algoritmů popsaných v kpt. 4. 4.

**2. Řešení viditelnosti:** Základním problémem při realistickém zobrazování prostorových útvarů je určit, které části objektu jsou viditelné a které zakryté. Existuje řada algoritmů, které tuto úlohu řeší. Jeden z nejrozšířenějších je tzv. malířův algoritmus (Painter's algorithm, Priority list). Princip spočívá v přímém vykreslování ploch, a to v pořadí od nejvzdálenějších po nejbližší vzhledem k pozorovateli. Bližší plochy překryjí vzdálenější a viditelnost je tak vyřešena přirozeným způsobem. Plochy se mohou překrývat dosti složitým způsobem. Někdy nelze jednoznačně rozhodnout, která plocha má být kreslena dříve a viditelnost je třeba řešit dosti složitými testy. Rozbor těchto situací přesahuje rámec tohoto textu a nebudeme se jimi zabývat.

Protože se zabýváme plochami vyjádřenými analyticky, stojíme v první řadě před úkolem, jak plochu rozdělit na jednotlivé části, jak ji segmentovat.

Předpokládejme nejdříve spojitou funkci  $z = f(x; y)$  definovanou na obdélníku  $\langle x_1; x_2 \rangle \times \langle y_1; y_2 \rangle \subset \mathcal{E}^2$ . Plochu budeme interpolovat segmenty, a to tak, že na osách zvolíme dělení pomocí kroků  $hx; hy$  a těmito kroky cyklujeme přes intervaly  $\langle x_1; x_2 \rangle, \langle y_1; y_2 \rangle$ .

Vrcholy segmentu mají pak souřadnice:

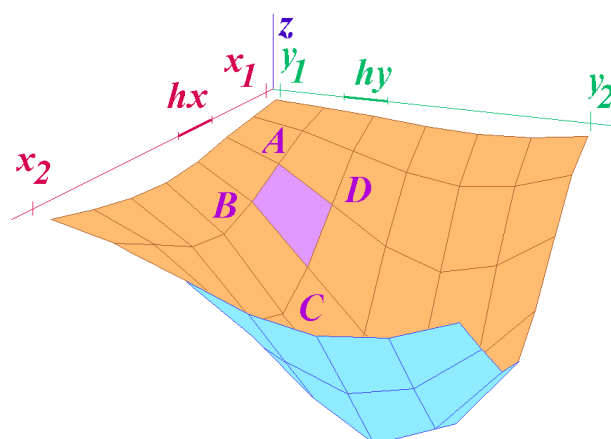
$$\begin{array}{llll} A = [a_1; a_2; a_3] & a_1 = x & a_2 = y & a_3 = f(x; y) \\ B = [b_1; b_2; b_3] & b_1 = x + hx & b_2 = y & b_3 = f(x + hx; y) \\ C = [c_1; c_2; c_3] & c_1 = x + hx & c_2 = y + hy & c_3 = f(x + hx; y + hy) \\ D = [d_1; d_2; d_3] & d_1 = x & d_2 = y + hy & d_3 = f(x; y + hy) \end{array}$$

Segmenty nejsou obecně rovinné, je proto třeba segment sestrojovat jako dva trojúhelníky, např.  $\triangle ABC; \triangle CDA$ .

Při konstrukci plochy zadané rovnicí  $z = f(x, y)$  není třeba zjišťovat vzdálenosti jednotlivých segmentů od pozorovatele, stačí na obou osách postupovat vhodným směrem. V případě, že se pozorovatel nachází v I. oktantu, je třeba postupovat souhlasně s orientací obou os – viz obr. 6.4.1.

Je-li plocha zadaná parametrickými rovnicemi  $x = \varphi(u; v); y = \psi(u; v); z = \tau(u; v)$ , kde  $u \in \langle u_1; u_2 \rangle, v \in \langle v_1; v_2 \rangle$  je situace při konstrukci segmentů je zcela analogická. Pomocí kroků  $hu; hv$  zvolíme dělení intervalů a těmito kroky opět cyklujeme přes intervaly  $\langle u_1; u_2 \rangle; \langle v_1; v_2 \rangle$ . Vrcholy jednotlivých segmentů mají tentokrát souřadnice:

$$\begin{array}{llll} A = [a_1; a_2; a_3] & a_1 = \varphi(u, v) & a_2 = \psi(u, v) & a_3 = \tau(u, v) \\ B = [b_1; b_2; b_3] & b_1 = \varphi(u + hu, v) & b_2 = \psi(u + hu, v) & b_3 = \tau(u + hu, v) \\ C = [c_1; c_2; c_3] & c_1 = \varphi(u + hu, v + hv) & c_2 = \psi(u + hu, v + hv) & c_3 = \tau(u + hu, v + hv) \\ D = [d_1; d_2; d_3] & d_1 = \varphi(u, v + hv) & d_2 = \psi(u, v + hv) & d_3 = \tau(u, v + hv) \end{array}$$

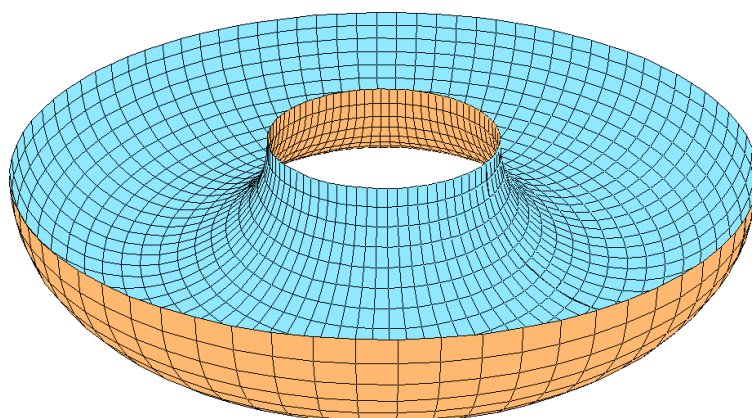


**Obr. 6.4.1:** Konstrukce plochy zadané explicitně

Před vlastním vykreslováním je třeba nejdříve spočítat všechny segmenty plochy a uspořádat je podle vzdálenosti od pozorovatele. Tento algoritmus je náročnější na paměť a jeho rychlost závisí na efektivnosti použitého třídícího algoritmu.

Na obr. 6.4.2 si můžeme prohlédnout takto sestavenou plochu s parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= (4 + 2 \cos u) \cos v \\ y &= (4 + 2 \cos u) \sin v; \quad [u; v] \in \langle \pi; 2\pi \rangle \times \langle 0; 2\pi \rangle \\ z &= 2 \sin u \end{aligned} \quad (6.4.1)$$



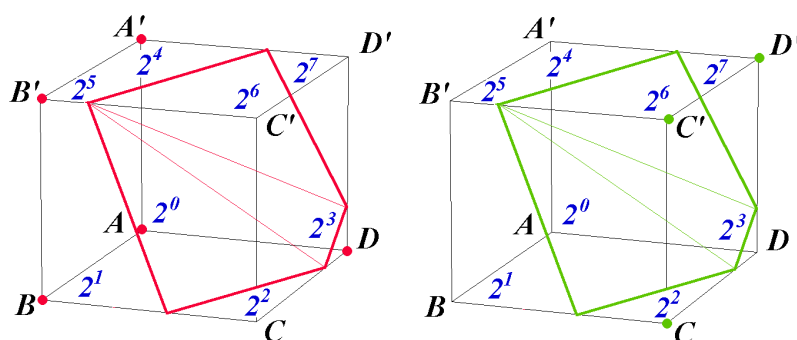
**Obr. 6.4.2:** Konstrukce plochy zadané parametricky

Rub a líc plochy je rozlišen pomocí její orientace. Normálový vektor v daném bodě je nahrazen normálou příslušného trojúhelníkového plátu, která je počítána vektorovým součinem. Tento algoritmus samozřejmě funguje pouze na dvojstranných plochách. Na plochách jednostranných nemá smysl rub a líc rozlišovat.

**3. Konstrukce ploch určených implicitně:** algoritmus konstrukce těchto ploch je trojrozměrným zobecněním algoritmu konstrukce implicitně zadaných křivek (viz kpt. 4. 4.). Zatímco rovinná křivka  $f(x; y) = 0$  byla podmnožinou obdélníka  $\langle x_1; x_2 \rangle \times \langle y_1; y_2 \rangle$ , který jsme rozdělili rovinnou sítí na množinu obdélníků - fyzických pixelů, plocha  $f(x; y; z) = 0$  je podmnožinou kváдру  $\langle x_1; x_2 \rangle \times \langle y_1; y_2 \rangle \times \langle z_1; z_2 \rangle$ , který rozdělíme prostorovou mřížkou na množinu kvádrů - fyzických voxelů  $ABCD A' B' C' D'$ , kde (viz obr. 6.4.3)

$$\begin{aligned} A &= [x; y; z] & B &= [x + hx; y; z] & C &= [x + hx; y + hy; z] & D &= [x; y + hy; z] \\ A &= [x; y; z + hz] & B &= [x + hx; y; z + hz] & C &= [x + hx; y + hy; z + hz] & D &= [x; y + hy; z + hz] \end{aligned}$$

Vrcholy kvádru postupně ohodnotíme hodnotami  $2^0; 2^1; 2^2; \dots; 2^7$ , a to právě tehdy, když v příslušném vrcholu je  $f(x, y, z) > 0$ , jinak vrcholu přiřadíme nulu. Celý kvádr tak může být ohodnocen hodnotami  $0, 1, \dots, 255$ . Z hlediska naší konstrukce je tedy celkem 256 možností, jak může plocha kvádr protínat. Kvádr na obrázku vlevo je ohodnocen číslem  $h_L = 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 59$ , kvádr vpravo pak číslem  $h_P = 2^2 + 2^6 + 2^7 = 196$ . Součet těchto ohodnocení je 255 a je zřejmé, že postup konstrukce bude v obou případech stejný - v obou případech je třeba hledat průsečíky na hranách  $BC, CD, DD', A'D', B'C'$  a nalezený řez pak interpolovat celkem třemi trojúhelníky. Ačkoli je tedy celkový počet případů, které je třeba řešit, dvě stě padesát čtyři (kvádry s ohodnoceními 0 resp. 255 plocha neprotíná), program stačí větvit „pouze“ na sto dvacet sedm větví. Hodnoty řezů je opět možno názorně vyjádřit ve dvojkové soustavě, popř. se pokusit o redukci větvení programu pomocí symetrií jednotlivých případů. Je-li např. ohodnocení vyjádřeno jako mocnina dvou (tj.  $h = 2^a$ ;  $a = 0; 1; \dots; 7$ ), znamená to, že  $f(x; y; z) > 0$  platí právě v jenom vrcholu a řezem je tedy jediný trojúhelník.



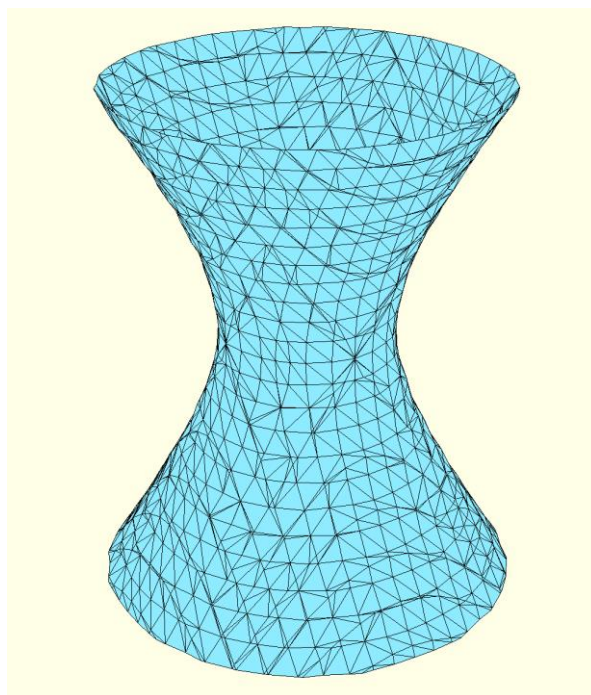
**Obr. 6.4.3:** Interpolace implicitně zadané plochy v elementárním kvádru (voxelu)

Vzhledem k tomu, co bylo řečeno výše, dostáváme trojúhelníkový řez rovněž pro  $h = 255 - 2^a$ ;  $a = 0; 1; \dots; 7$ . Všechny těchto šestnáct případů bychom tak mohli řešit jednou větví programu. Redukce počtu případů je ovšem možná pouze dalším ne zrovna jednoduchým programováním rozpoznávání symetrií a jejich převodem na jediný případ. Je tedy otázkou, zda by výsledný program byl jednodušší. V každém případě by však byl právě o toto rozpoznávání a tyto převody pomalejší.

Podobně jako v předchozím odstavci následuje třídění segmentů podle jejich vzdálenosti od pozorovatele a jejich vykreslení.

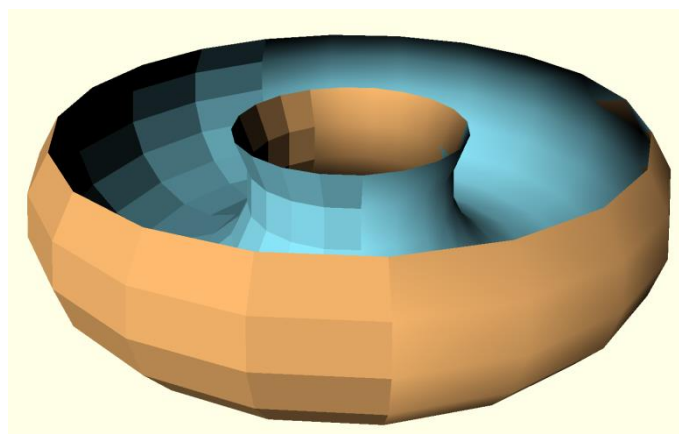
Na obr. 6. 4. 4 si můžeme prohlédnout takto sestrojenou plochu  $2x^2 + 2y^2 - z^2 - 4 = 0$  pro  $x; y; z \in \langle -2.5; 2.5 \rangle$ .

**4. Stínování:** Dalším krokem ke zlepšení vzhledu zobrazovaného objektu je stínování. Reálné předměty jsou vyrobeny z různého materiálu a jejich povrchy mají různý vzhled. Hovoříme-li o vzhledu povrchu, říkáme, že je červený, lesklý, drsný, průhledný atd. Tyto vlastnosti se vztahují vesměs k optickým vlastnostem povrchu, popř. celého tělesa. Dopadne-li světlo na povrch tělesa, je částečně pohlceno a částečně odraženo. Předpokládejme nejjednodušší případ, kdy je dokonale difuzní povrch přímo osvětlen jedním plošným zdrojem bílého světla. Barva v každém bodě je pak určena schopností plochy odrážet jednotlivé vlnové délky dopadajícího světla a její jas je přímo úměrný velikosti průmětu segmentu do roviny kolmé k dopadajícímu světelnému paprsku, tj. kosinu úhlu, který tento paprsek svírá s normálou.



**Obr. 6.4.4:** Konstrukce jednodílného hyperboloidu zadaného implicitně

Nejjednodušší metodou je **konstantní stínování**, které celý rovinný segment vyplní jedinou barvou určenou výše zmíněným kosinem. Toto stínování však často nežádoucím způsobem zvýrazňuje hrany mezi interpolačními pláty, které na sestrojované ploše nejsou – viz levá část „anuloidu“ na obr. 6.4.5. Existuje několik možností, jak tomu předejít. Zde stojíme v první řadě před úkolem určit přibližně směr normály hledané plochy ve společném vrcholu čtyř interpolujících segmentů - většinou ji nahrazujeme normalizovaným součtem normál těchto segmentů. Ve čtyřech vrcholech segmentu tak získáme obecně čtyři různé normály. Pak lze spočítat normálu v každém bodě segmentu bilineární interpolací těchto normál a podle normály přiřadit barvu (**interpolace normály**), anebo nejdříve spočítat barvu příslušnou normálám ve vrcholech a v jednotlivých bodech segmentu interpolovat barevné složky (**interpolace barvy**). Tyto metody jsou schopny nechtěné hrany mezi interpolujícími pláty skrýt (viz pravá část anuloidu na obr. 6.4.5.).

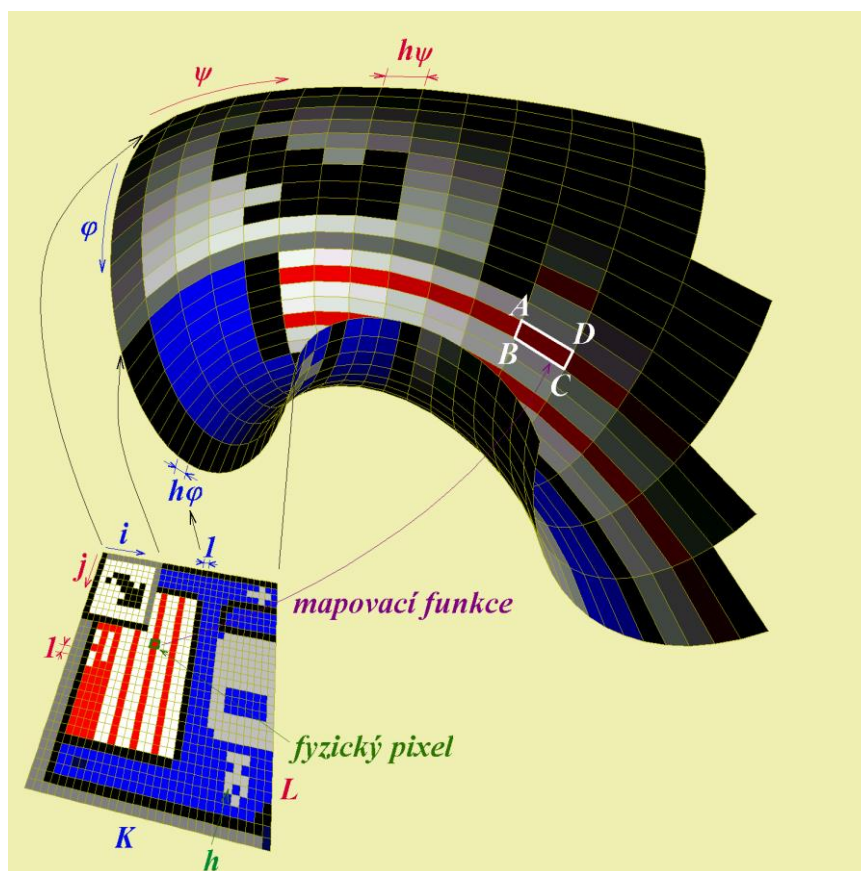


**Obr. 6.4.4:** Konstantní stínování (vlevo) a interpolace normály (vpravo).

**5. Textury:** Povrch reálných předmětů má málokdy konstantní barvu. Různobarevnost plochy vyjádříme nejlépe nanesením textury. Texturou rozumíme funkci, která přiřazuje bodům roviny hodnotu modulované veličiny, v našem případě barvy:  $\mathcal{T}: K \times L \rightarrow H$ , kde  $K; L; H \subset \mathbb{R}$



pro spojitý a  $K; L; H \subset \mathbb{N}$  pro diskrétní případ. Aplikaci této textury na povrch tělesa provedeme definováním tzv. mapovací funkce  $\mathcal{M}: K \times L \rightarrow P$ , která každému bodu z definičního oboru textury přiřadí bod  $A$  na povrchu  $P$  tělesa. Barva tohoto bodu je pak definována hodnotou textury  $h \in H$ . Definiční obor textury se skládá z fyzických pixelů, tj. logických čtverců o straně 1 (ve světových souřadnicích). Mapovací funkcí přiřadíme každému pixelu textury segment  $ABCD$  sestrojované plochy. Měla by být prostá, protože v programové realizaci potřebujeme většinou obrácený postup – dle parametrizace texturované plochy procházíme segment po segmentu a každému z nich přiřazujeme barvu z textury. Mapovací funkce není určena jednoznačně. Tvoří-li povrch tělesa jediná analytická plocha, je nejjednodušší volit jako mapovací funkci přímo parametrizaci plochy. Texturu můžeme definovat buď matematickým předpisem (nejčastěji u jednoduchých pravidelných textur), nebo tabulkou hodnot (nejlépe ve formě obrazu) – viz obr. 6.4.5.

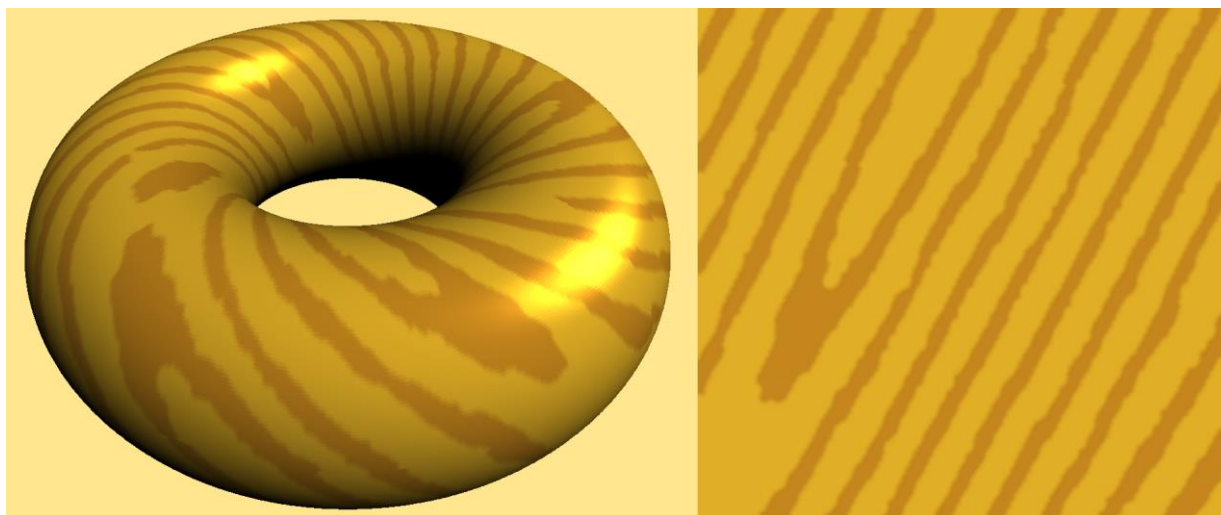


**Obr. 6.4.5:** Nanášení obecné textury na parametricky zadanou plochu

Nanášením obecných nepravidelných textur můžeme poměrně věrně imitovat materiál, ze kterého je těleso či plocha zhotovena. Na obr. 6.4.6. si můžeme prohlédnout anuloid z dubového dřeva.

**5. Osvětlovací modely:** Pokud by reálné rovinné optické rozhraní mělo mikroskopicky dokonalý povrch, pak by optický odraz a lom zachovával rovnoběžnost. Jinými slovy - pokud by na takové rozhraní dopadal rovnoběžný svazek paprsků, pak by odražený i lomený svazek byl opět rovnoběžný. Dokonale hladký povrch však žádný reálný předmět nemá. Není-li povrch dokonale hladký, pak normály tohoto povrchu mají různý směr, různé směry mají tedy i odražené a lomené paprsky. Nerovnosti povrchu mají fraktální charakter a vlastnosti odraženého i lomeného svazku lze popsat jen velmi přibližně. Funkci, která se tento charakter snaží popsat, nazýváme odrazovou resp. lomovou funkcí. Aplikaci této funkce v konkrétní situaci pak nazýváme osvětlovacím modelem.





K vyhodnocení odrazu a lomu světla lze přistupovat v podstatě dvojím způsobem:

**a) Fyzikální modely:** vycházejí z fyzikálních zákonů šíření světla a odraz od nerovného povrchu se snaží popsat pomocí popisu šíření energie. Tyto metody mohou poskytnout téměř dokonalé fotorealistické výstupy. Jsou však značně složité, časově velmi náročné a pro skutečné výpočty použitelné jen s velkými obtížemi.

**b) Empirické modely:** nemají přímý vztah k fyzikální podstatě šíření světla. Chápu složitý fyzikální děj jako černou skříňku a jeho výsledek se snaží více či méně jednoduše kvantifikovat. Nemohou poskytnout tak přesné a vizuálně přesvědčivé výsledky, jako modely fyzikální, jsou však značně jednodušší a aplikace, které jsou na nich založeny, jsou podstatně rychlejší. Jsou proto často používány.

Pokud by naopak měly normály povrchu díky jeho mikronerovnostem statisticky rovnoměrné rozložení, pak by tato plocha odrážela záření rovnoměrně do celého prostoru bez ohledu na směr dopadajícího světla. Takový odraz se nazývá difuzní. U reálných ploch není žádný odraz dokonale zrcadlový, ani dokonale difuzní. Za velmi přesný model zrcadlového odrazu však může sloužit odraz na vyleštěných kovech, za model difuzního odrazu může sloužit např. odraz na čerstvě napadlém sněhu nebo bílém papíře.

Nejjednodušší empirické osvětlovací modely vycházejí tedy z toho, že celková svítivost, přicházející z daného bodu k pozorovateli, je dána součtem lesklé (Specular  $I_S$ ) a difuzní (Diffuse  $I_D$ ) složky. Většinou se ještě započítává „rovnoměrný příspěvek okolního světla“ (Ambient  $I_A$ ). Okolí scény je fyzikálně řečeno kromě specifikovaných světelných zdrojů osvětleno ještě sférou, jejíž poloměr roste nade všechny meze a která je kosínovým zářičem. Řečeno jazykem počítačových grafiků - je to složka, která zabraňuje tomu, aby plochy odvrácené od světelných zdrojů, byly zobrazeny jako zcela černé. Celková svítivost je pak dána součtem

$$I = I_S + I_D + I_A$$

**Phongův model:** je historicky prvním a nejjednodušším empirickým osvětlovacím modelem. V tomto modelu je lesklá složka definována jako

$$I_S = \begin{cases} I_L \cdot r_S \cdot (\mathbf{v}; \mathbf{r})^h & \Leftrightarrow (\mathbf{v}; \mathbf{r}) \geq 0 \\ 0 & \Leftrightarrow (\mathbf{v}; \mathbf{r}) < 0 \end{cases}$$

kde  $I_L$  je svítivost dopadajícího paprsku,  $r_S$  je koeficient zrcadlového odrazu, který určuje míru zastoupení lesklé složky v odraženém světle. Koeficient  $h \geq 1$  udává „ostrost

zrcadlového odrazu“. Vektor  $\mathbf{v}$  je normovaný vektor definující směr pohledu pozorovatele,  $\mathbf{r}$  pak směr zrcadlového odrazu, tj. vektor symetrický s dopadajícím světelným paprskem  $\mathbf{l}$  podle normály  $\mathbf{n}$ . Platí  $\mathbf{r} = 2(\mathbf{n}; \mathbf{l})\mathbf{n} - \mathbf{l}$ . Je-li  $(\mathbf{v}; \mathbf{r}) < 0$ , nachází se pozorovatel na „odvrácené straně zpracovávané plochy“ a nemůže odraz vidět. Difuzní složka je dána vztahem:

$$I_D = \begin{cases} I_L \cdot r_d \cdot (\mathbf{n}; \mathbf{l}) \Leftrightarrow (\mathbf{n}; \mathbf{l}) \geq 0 \\ 0 \Leftrightarrow (\mathbf{n}; \mathbf{l}) < 0 \end{cases}$$

kde  $r_d$  je koeficient difuzního odrazu. V případě, že  $(\mathbf{n}; \mathbf{l}) < 0$  je povrch opět odvrácen od světla a odraz nemůže být vidět.

Celkovou svítivost bodu plochy, na který dopadá světlo z  $m$  světelných zdrojů pak počítáme jako

$$I = I_A + \sum_{k=1}^m (I_{D_k} + I_{S_k})$$

kde příspěvek okolního rozptýleného světla (tzv. ambientní složka) se přičítá jen jednou.

## 6.5 Metody generování ploch

Plochy v prostoru můžeme vytvářet v podstatě trojím způsobem.

**1. Geometrická transformace plochy:** Mějme plochu, která je určena bodovou rovnicí  $\mathbf{Q}(u, v) = (f_1(u, v); f_2(u, v); f_3(u, v); \omega(u, v))$ . Dále mějme matici  $\mathbf{M}(u, v)$  čtvrtého řádu, jejímiž prvky jsou spojité funkce  $m_{ij}(u, v)$ . Pak bodovou funkcí

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \mathbf{M}(u, v) \cdot \mathbf{Q}^T(u, v)$$

je určena opět plocha. Je-li plocha  $\mathbf{Q}(u, v)$  regulární, matice  $\mathbf{M}(u, v)$  regulární a její prvky  $m_{ij}(u, v)$  mají spojité parciální derivace, je plocha  $\bar{\mathbf{Q}}(u, v)$  rovněž regulární.

**2. Příklad:** Maticí

$$\mathbf{M}(u, v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\sqrt{1-u^2-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a plochou

$$\mathbf{Q}(u, v): \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 2\pi \rangle \rightarrow (u \cos v; u \sin v; 1; 1)$$

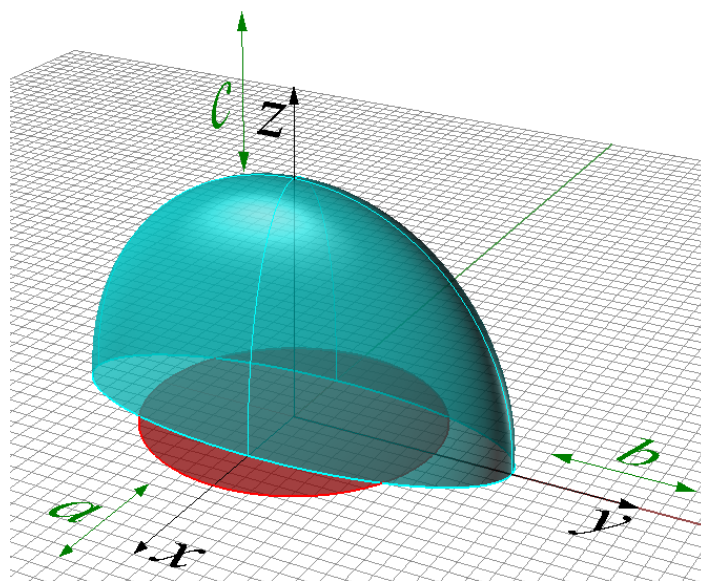
$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\sqrt{1-u^2-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au \cos v \\ bu \sin v \\ c\sqrt{1-u^2-v^2} \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{matrix} u \in \langle 0; 1 \rangle \\ v \in \langle 0; 2\pi \rangle \end{matrix}$$

Pro  $a = b = c = r$  je to polovina kulové plochy, v ostatních případech se jedná o elipsoid (viz obr. 6.5.1).

**3. Šablonování křivky:** Uvažujme křivku  $\mathbf{K}(u)$  a matici  $\mathbf{M}(v); v \in \langle v_1; v_2 \rangle$ , jejímiž prvky jsou spojité funkce  $m_{ij}(v)$ . Pak bodovou funkcí

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{K}^T(u)$$

je určena plocha. Křivku  $\mathbf{K}(u)$  nazýváme **šablonou**, popř. **řídící křivkou**, matici  $\mathbf{M}(v)$  je určena třída geometrických transformací řídící křivky – tzv. **generující princip**.



Obr. 6.5.1: Geometrická transformace plochy (k příkladu 2)

Je-li křivka  $\mathbf{K}(u)$  regulární, matice  $\mathbf{M}(v)$  regulární a její prvky  $m_{ij}(v)$  mají spojité derivace, je plocha  $\bar{\mathbf{Q}}(u, v)$  rovněž regulární.

Geometricky si tento způsob konstrukce plochy lze představit tak, že matice  $\mathbf{M}(v)$  popisuje změnu „tvaru“, velikosti a „polohy“ křivky  $\mathbf{K}(u)$  v čase  $v$ . Plocha je pak vytvořena všemi body, kterými křivka prochází v časech  $v \in \langle v_1; v_2 \rangle$ .

#### 4. Speciální typy ploch:

Podle šablony:

a) **Přímkové plochy:**  $\mathbf{K}(u)$  je přímka nebo část přímky. Přímkové plochy se dále dělí na rozvinutelné a nerozvinutelné (zborcené).

b) **Cyklické plochy:**  $\mathbf{K}(u)$  je kružnice nebo část kružnice

Podle generujícího principu:

a) **Kolineární a afinní plochy:**  $\mathbf{M}(v)$  je pro každé  $v \in \langle v_1; v_2 \rangle$  matice kolineace resp. afinity,

b) **Homotetické plochy:**  $\mathbf{M}(v)$  je pro každé  $v \in \langle v_1; v_2 \rangle$  matice stejnolehlosti.

c) **Translační plochy:**  $\mathbf{M}(v)$  je pro každé  $v \in \langle v_1; v_2 \rangle$  matice posunutí.

d) **Rotační plochy:**  $\mathbf{M}(v)$  je pro každé  $v \in \langle v_1; v_2 \rangle$  matice rotace.

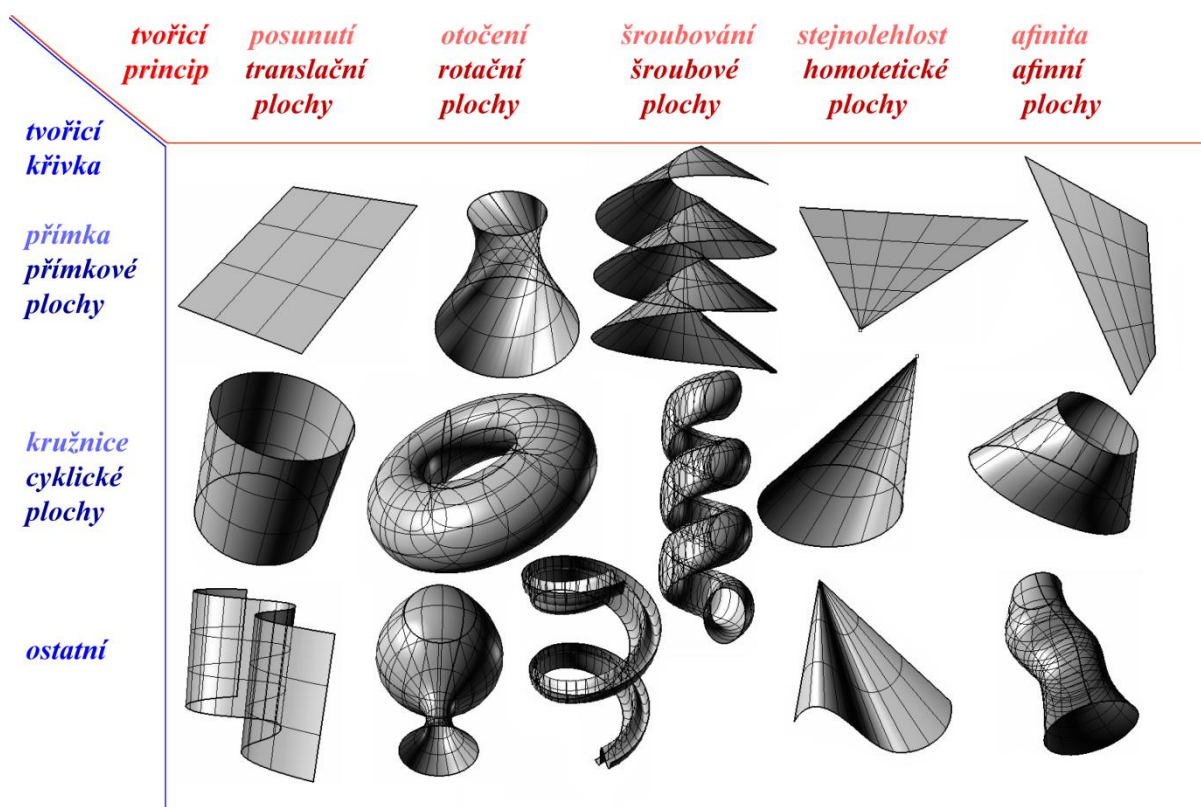
e) **Šroubové plochy:**  $\mathbf{M}(v)$  je pro každé  $v \in \langle v_1; v_2 \rangle$  matice shodnosti složené z rotace a posunutí ve směru kolmém na rovinu rotace.

Přehled ploch podle šablony a podle generujícího principu je na obr. 5.6.2.

**5. Příklad:** Bodovou funkcí  $\mathbf{U}(u) = (0; u; 2u; 1)$ ;  $u \in \langle 0; 1 \rangle$  je určena úsečka s krajními body  $A = \mathbf{U}(0) = (0; 0; 0; 1)$ ;  $B = \mathbf{U}(1) = (0; 1; 2; 1)$ . Úsečku necháme rotovat kolem osy  $z$  o úhel  $v \in \langle 0; 2\pi \rangle$ . Plocha

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 2u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 2u \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} u \in \langle 0; 1 \rangle \\ v \in \langle 0; 2\pi \rangle \end{matrix}$$

je pláštěm rotačního kužele s vrcholem v počátku, poloměrem podstavy  $r = 1$  a výškou  $z = 2$ . Jeho  $u$ -křivky jsou úsečky,  $v$ -křivky kružnice.



Obr. 6.5.2: Přehled ploch podle šablony a podle generujícího principu

**5. Příklad:** bodovou funkcí

$$\mathbf{K}(u) = (\cos u; \sin u; 2; 1); u \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

je určena kružnice ležící v rovině  $z = 2$  s poloměrem  $r = 1$ , matice

$$\mathbf{M}(v) = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad v \in \langle 0; 1 \rangle$$

je maticí všech stejnoolehlostí koeficientem  $v \in \langle 0; 1 \rangle$  (tyto stejnoolehlosti zmenšují) se středem v počátku souřadnicové soustavy, při  $v = 0$  je celá kružnice zobrazena do počátku. Kružnice  $\mathbf{K}(u)$  podrobená všem těmto stejnoolehlostem vytvoří cyklickou homotetickou plochu

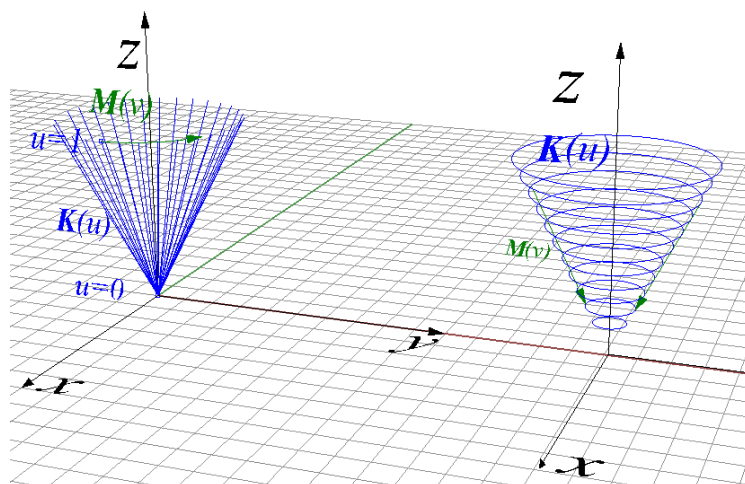
$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{K}^T(u) = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} u \in \langle 0; 2\pi \rangle \\ v \in \langle 0; 1 \rangle \end{matrix}$$

Je to plášť stejného rotačního kužele jako v předchozím případě s tím, že jeho  $u$ -křivky jsou kružnice,  $v$ -křivky pak úsečky (viz obr. 6.5.3).

**6. Příklad:** bodovou funkcí

$$\mathbf{K}(u) = (2\cos u + 4; 2\sin u; 0; 1); u \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

je určena kružnice se středem  $S = (4; 0; 0; 1)$  a poloměrem  $r = 2$ , která leží v rovině  $z = 0$ . Matice



**Obr. 6.5.3:** Plášť rotačního kužele jako přímková rotační plocha (vlevo) a cyklická homotetická plocha (vpravo).

$$\mathbf{M}(v) = \begin{pmatrix} \cos v & 0 & \sin v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad v \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

je matice rotací kolem osy  $y$ . Kružnice  $\mathbf{K}(u)$  vytvoří při těchto rotacích rotační cyklickou plochu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) &= \mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{K}^T(u) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos v & 0 & \sin v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 + 2 \cos u \\ 2 \sin u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4 + 2 \cos u) \cos v \\ 2 \sin u \\ (4 + 2 \cos u) \sin v \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u, v \in \langle 0; 2\pi \rangle \end{aligned}$$

Jedná se o anuloid, jehož část jsme sestrojili již na obr. 6.4.2.

**7. Příklad:** určíme rovnici rotační plochy vytvořené rotací přímky

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{A} + u\mathbf{s} = (1; 0; 0; 1) + u(0; 1; 1; 0) = (1; u; u; 1)$$

kolem přímky  $\mathbf{Z}(v) = \mathbf{O} + t\mathbf{r} = (0; 0; 0; 1) + t(0; 0; 1; 0) = (0; 0; t; 1)$

**Řešení:** Osou rotace je osa  $z$ , plocha tedy bude tvaru

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{K}^T(u) =$$

kde  $\mathbf{M}(v)$  je matice rotace kolem osy  $z$ . Tedy

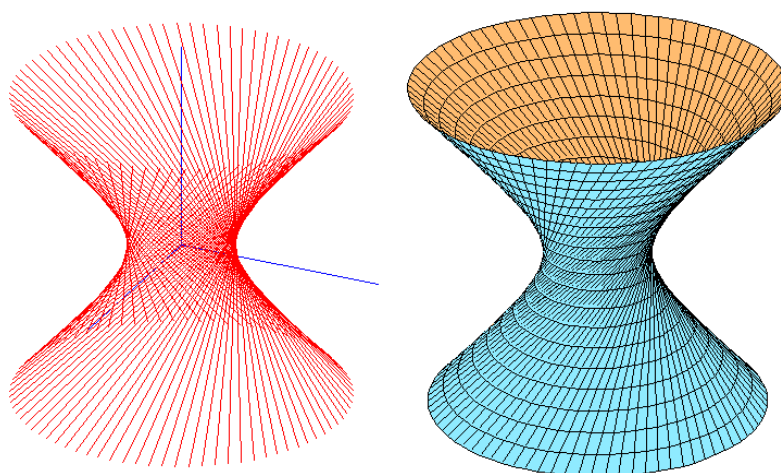
$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v - u \sin v \\ \sin v + u \cos v \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tuto plochu známe z matematiky. Přesvědčíme se o tom vyloučením parametrů z parametrických rovnic:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos v - u \sin v \\ y &= \sin v + u \cos v \\ z &= u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^2 &= \cos^2 v - 2u \cos v \sin v + u^2 \sin^2 v \\ y^2 &= \sin^2 v + 2u \cos v \sin v + u^2 \cos^2 v \\ z^2 &= u^2 \end{aligned} \quad \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \left. \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



Jedná se tedy o jednoduchý rotační hyperboloid.



**Obr. 6.5.4:** jednoduchý rotační hyperboloid z př. 7.

**8. Příklad:** Odvoďme rovnici a) osově cyklické šroubové plochy b) Archimedovy serpentiny.  
**Řešení:**

a) Osová cyklická šroubová plocha je plocha, která vzniká šroubováním kružnice, ležící v rovině procházející osou šroubovice. Šroubovice je dráhou šroubového pohybu, tj. pohybu složeného z rotace a posunutí ve směru kolmém na rovinu rotace. Mějme tedy rotaci kolem osy  $z$  a posunutí ve směru této osy. Matice takto daného pohybu je tedy

$$\mathbf{S}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v_0 v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v_0 v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.5.1)$$

kde  $v_0$  je tzv. redukovaná výška šroubovice, tj. posunutí ve směru osy  $z$ , které odpovídá rotaci o jeden radián. Uvažujme tedy šroubovici s osou  $v$  ose  $z$ , poloměrem  $R$  a redukovanou výškou  $v_0$ . Dále uvažujme kružnici se středem  $\mathbf{S} = (R; 0; 0; 1)$  a poloměrem  $r$ , která leží v rovině  $y = 0$ . Tato kružnice leží v rovině procházející osou šroubovice a je určena bodovou funkcí  $\mathbf{K}(u) = (R + r \cos u; 0; r \sin u; 1)$ . Hledaná plocha vznikne šroubováním této kružnice po dané šroubovici, tedy

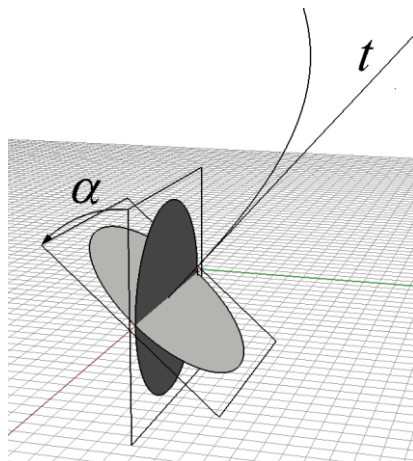
$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v_0 v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R + r \cos u \\ 0 \\ r \sin u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin u + v_0 v \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Archimedova serpentina je šroubová plocha, která vzniká šroubováním kružnice ležící v rovině kolmé na tečnu šroubovice. Uvažujme tedy situaci z případu a). Budeme opět šroubovat kružnici se středem  $\mathbf{S} = (R; 0; 0; 1)$  a poloměrem  $r$ , ta však tentokrát musí ležet v rovině kolmé na tečnu šroubovice. Směrový vektor  $\mathbf{s}$  tečny šroubovice v bodě  $\mathbf{A} = (R; 0; 0; 1)$  má složky  $\mathbf{s} = (0; r; v_0; 0)$ . Aby tedy kružnice  $\mathbf{K}(u)$  ležela v rovině kolmé na tečnu, je třeba ji otočit o úhel  $\alpha$  kolem osy  $x$  (viz obr. 6.5.5). Budeme tedy šroubovat kružnici

$$\mathbf{K}^T(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R + r \cos u \\ 0 \\ r \sin u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r \cos u \\ -r \sin u \sin \alpha \\ r \sin u \cos \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Q}}(u, v) &= \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v_0 v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R + r \cos u \\ -r \sin u \sin \alpha \\ r \sin u \cos \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v + r \sin u \sin v \sin \alpha \\ (R + r \cos u) \sin v - r \sin u \cos v \sin \alpha \\ r \sin u \cos \alpha + v_0 v \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



**Obr. 6.5.6:** K odvození rovnice Archimedovy serpentiny

Protože je zřejmé  $\sin \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{r^2 + v_0^2}}$ ;  $\cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + v_0^2}}$ ; dostáváme rovnici Archimedovy serpentiny tvaru

$$\bar{\mathbf{Q}}(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v + \frac{rv_0}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} \sin u \sin v \\ (R + r \cos u) \sin v - \frac{rv_0}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} \sin u \cos v \\ \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} \sin u \cos \alpha + v_0 v \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 6. 6 Rozvinutelnost ploch

**1. Izometrické zobrazení** mezi plochami  $\mathbf{Q}$ ;  $\bar{\mathbf{Q}}$  je zobrazení  $\rho: \mathbf{Q}(u; v) \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}(u; v)$ , které zachovává délky křivek na ploše.

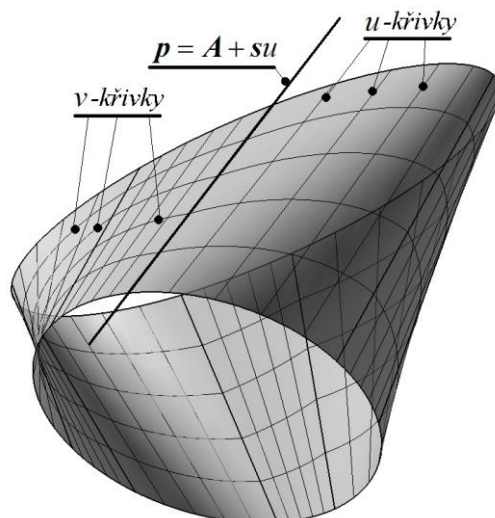
**2. Rozvinutelné a zborcené plochy:** Plochu, pro kterou existuje izometrické zobrazení do roviny, nazýváme **rozvinutelnou plochou**. Lze ukázat, že každá rozvinutelná plocha musí být nutně plochou přímkovou. Obrácená věta však neplatí – existují přímkové plochy, které rozvinutelné nejsou. Tyto plochy nazýváme **nerozvinutelné**, nebo také **zborcené**.

Položme si nyní otázku, jak určit, zda daná přímková plocha (např. viz obr. 6.6.1.) je rozvinutelná, anebo zborcená. Přímková plocha vzniká šablonováním (viz kpt. 6.5 odst. 4), kde šablonou je přímka - označme ji  $\mathbf{P}(u)$ . Tato plocha má proto rovnici tvaru

$$\bar{\mathbf{Q}}(u, v) = \mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{P}^T(u) = \mathbf{M}(v) \cdot (\mathbf{A}^T + u\mathbf{s}^T)$$

tedy

$$\bar{\mathbf{Q}}(u, v) = \underbrace{\mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{A}^T}_{\mathbf{f}(v)} + u \cdot \underbrace{\mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{s}^T}_{\mathbf{g}(v)} = \mathbf{f}(v) + u \cdot \mathbf{g}(v) \quad (6.6.1)$$



Obr. 6.6.1: K otázce rozvinutelnosti ploch

Položme si nyní otázku, jak určit, zda daná přímková plocha (např. viz obr. 6.6.1.) je rozvinutelná, anebo zborcená. Přímková plocha vzniká šablonováním (viz kpt. 6.5 odst. 4), kde šablonou je přímka - označme ji  $\mathbf{P}(u)$ . Tato plocha má proto rovnici tvaru

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{P}^T(u) = \mathbf{M}(v) \cdot (\mathbf{A}^T + u\mathbf{s}^T)$$

tedy

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \underbrace{\mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{A}^T}_{\mathbf{f}(v)} + u \cdot \underbrace{\mathbf{M}(v) \cdot \mathbf{s}^T}_{\mathbf{g}(v)} = \mathbf{f}(v) + u \cdot \mathbf{g}(v) \quad (6.6.1)$$

Směrové vektory tečných rovin jsou

$$\frac{\partial}{\partial u} \bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \mathbf{g}(v); \quad \frac{\partial}{\partial v} \bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \mathbf{f}'(v) + u \cdot \mathbf{g}'(v)$$

Položíme-li  $v = v_0 = \text{konst}$ , představují vektory  $\mathbf{g}(v_0)$ ,  $\mathbf{f}'(v_0)$ ;  $\mathbf{g}'(v_0)$  směrové vektory tečných rovin plochy v bodech tvořící přímky  $\mathbf{P}(u)$ . Jsou-li tyto vektory lineárně závislé, dotýká se tato rovina plochy podél celé tvořící přímky. Přímku  $\mathbf{P}(u)$  s touto vlastností nazýváme **torzální přímku** plochy. Jsou-li vektory lineárně nezávislé, tečná rovina se pro různé hodnoty parametru  $u$  kolem tvořící přímky „otáčí“ - říkáme, že tečné roviny tvoří svazek s osou  $\mathbf{P}(u)$ . V tom případě je přímka  $\mathbf{P}(u)$  **regulární přímku** plochy.

Lze ukázat, že přímková plocha je **rozvinutelná právě tehdy, jsou-li všechny její tvořící přímky torzální**.

**3. Příklad:** Zjistěme, zda jsou rozvinutelné následující plochy

- jednodílný rotační hyperboloid
- plocha tečen šroubovice
- $\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \left( \cos v + u \cos \frac{v}{2} \cos v; \sin v + u \cos \frac{v}{2} \sin v; u \sin \frac{v}{2}; 1 \right)$

**Řešení:**

a) Jednodílný rotační hyperboloid vzniká rotací přímky kolem osy, která je s touto osou mimoběžná. Volme po jednoduchost hyperboloid s osou v ose  $z$  a dále  $a = b = c = 1$ .

Tato plocha vznikne rotací přímky  $\mathbf{P}(u) = \mathbf{A} + u\mathbf{s} = (1; 0; 0; 1) + u(0; 1; 1; 0)$  kolem osy  $z$ , podle (6.6.1) má tedy rovnici



$$\bar{\mathbf{H}}(u, v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(v)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(v)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(v)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(v)} \cdot u$$

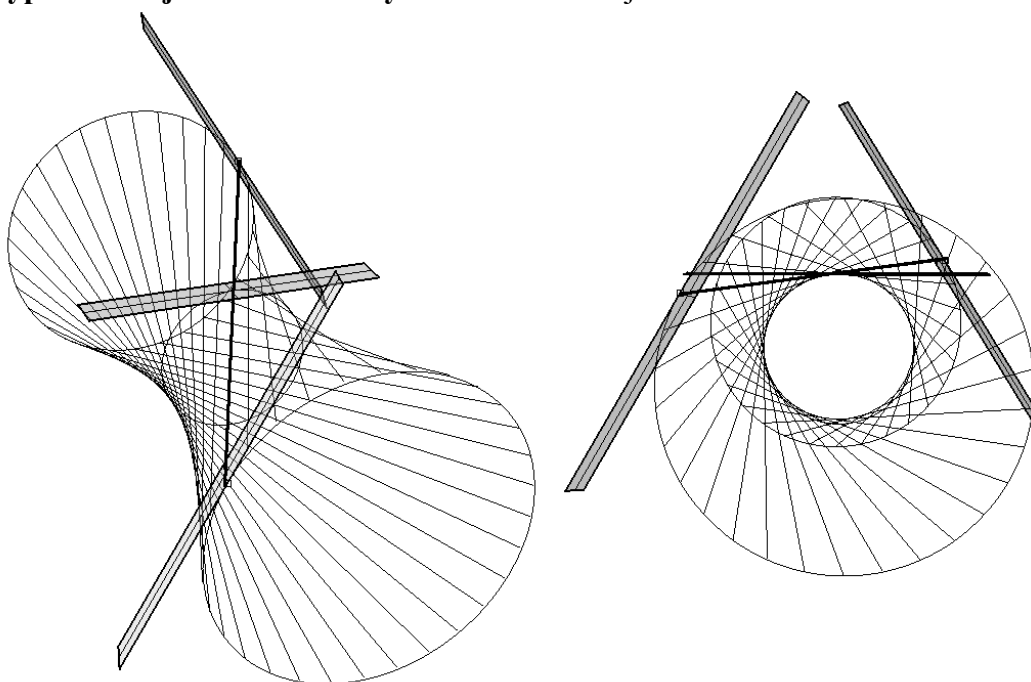
Je tedy

$$\mathbf{f}(v) = (\cos v; \sin v; 0; 1); \quad \mathbf{g}(v) = (-\sin v; \cos v; 0; 1)$$

Derivováním obdržíme

$$\mathbf{f}'(v) = (-\sin v; \cos v; 0; 0); \quad \mathbf{g}'(v) = (-\cos v; -\sin v; 0; 1)$$

Vektory  $\mathbf{g}(v); \mathbf{f}'(v); \mathbf{g}'(v)$  jsou **ortogonální** (můžeme se o tom přesvědčit např. výpočtem jejich skalárních součinů) a nemohou tedy být lineárně závislé. Tvořící přímky jsou tedy regulární. Stejný výsledek dostaneme pro libovolný jednodílný hyperboloid. **Jednodílný hyperboloid je nerozvinutelný.** Tato skutečnost je ilustrována na obr. 6.6.2.



**Obr. 6.6.2:** Nerozvinutelnost jednodílného hyperboloidu

**b)** Plocha tečen šroubovice vzniká šroubováním tečny šroubovice po této šroubovici. Volme pro jednoduchost osu šroubovice opět v ose  $z$  a dále  $r = v_0 = 1$ . Matice  $\mathbf{S}(v)$  šroubového pohybu – viz (6.5.1). Šroubujme např. bod  $\mathbf{A} = (1; 0; 0; 1)$ , tedy

$$\bar{\mathbf{S}}^T(v) = \mathbf{S}(v) \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

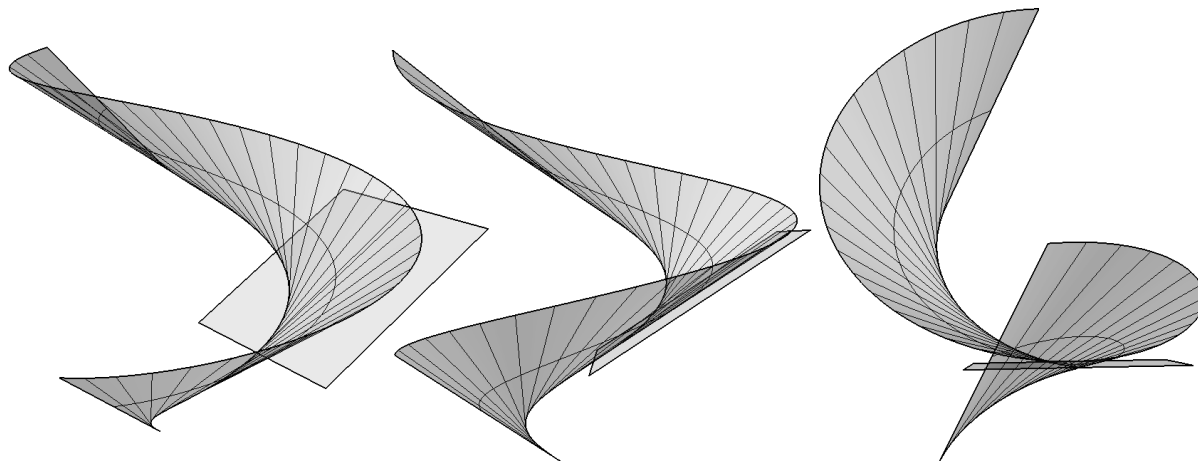
Šroubovat budeme tečnu v bodě  $\mathbf{A}$ , tedy přímku  $\mathbf{T}(u) = \mathbf{A} + \bar{\mathbf{S}}'(0) \cdot u$ . Protože  $\bar{\mathbf{S}}'(v) = (-\sin v; \cos v; 1; 0)$ , je  $\bar{\mathbf{S}}'(0) = (0; 1; 1; 0)$  a rovnice plochy je tedy dle (6.6.1) tvaru

$$\bar{\mathbf{T}}(u, v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(v)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(v)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(v)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(v)} \cdot u$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(v) &= (\cos v; \sin v; v; 1); & \mathbf{g}(v) &= (-\sin v; \cos v; 1; 0) \\ \mathbf{f}'(v) &= (-\sin v; \cos v; 1; 0); & \mathbf{g}'(v) &= (-\cos v; -\sin v; 0; 0) \end{aligned}$$

Vektory  $\mathbf{f}'(v)$ ;  $\mathbf{g}(v)$ ;  $\mathbf{g}'(v)$  jsou tentokrát lineárně závislé (dokonce je  $\mathbf{f}' = \mathbf{g}$ ). Analogický výsledek dostaneme pro plochu tečen libovolné šroubovice. **Plocha tečen šroubovice je rozvinutelná.** Je ilustrována na obr. 6.6.3.



**Obr. 6.6.3:** Plocha tečen šroubovice jako rozvinutelná plocha

c) Přepíšeme-li zadané parametrické rovnice do tvaru (6.6.1), obdržíme

$$\bar{\mathbf{M}}(u, v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & \cos \frac{v}{2} \cos v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos \frac{v}{2} \sin v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \frac{v}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(v)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & \cos \frac{v}{2} \cos v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos \frac{v}{2} \sin v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \frac{v}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(v)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(v) &= (\cos v; \sin v; 0; 1); \\ \mathbf{g}(v) &= (\cos \frac{v}{2} \cos v; \cos \frac{v}{2} \sin v; \sin \frac{v}{2}; 0) \\ \mathbf{f}'(v) &= (-\sin v; \cos v; 0; 0); \\ \mathbf{g}'(v) &= \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{v}{2} \cos v - \cos \frac{v}{2} \sin v; -\frac{1}{2} \sin \frac{v}{2} \sin v + \cos \frac{v}{2} \cos v; \frac{1}{2} \cos \frac{v}{2}; 0\right) \end{aligned}$$

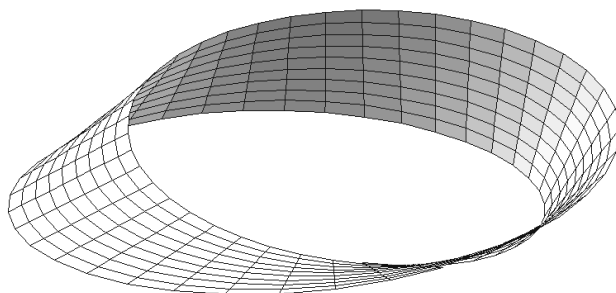
Položme např.  $v = 0$ . Pak je  $\mathbf{f}'(0) = (0; 1; 0; 0)$ ;  $\mathbf{g}(0) = (1; 0; 0; 0)$ ;  $\mathbf{g}'(0) = (0; 1; \frac{1}{2}; 0)$ . Tyto vektory jsou zřejmě lineárně nezávislé, můžeme se o tom přesvědčit jednoduchým výpočtem hodnoty matice

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{f}'(0) \\ \mathbf{g}'(0) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = 3$$

Pro  $v = 0$  dostáváme tedy regulární přímku  $\bar{\mathbf{M}}^T(u, 0)$ . To znamená, že všechny tvořící přímky plochy nejsou torzální a plocha tedy není rozvinutelná.

**Poznámka:** Výsledek příkladu 3c) je velmi zajímavý. Tato plocha je totiž známa jako Möbiův proužek (viz obr. 6.6.4), který si snadno můžeme vyrobit z úzkého proužku papíru tak, že slepíme jeho konce, když jsme předtím jeden z nich otočili o  $180^\circ$ . Tím je zároveň demonstrována jeho „řemeslná rozvinutelnost“ – jestliže totiž proužek opět rozlepíme, snadno

se z něj opět stane původní rovinný proužek. Tento trik je ovšem možný pouze díky pružnosti papíru a malé šířce proužku – překroucení okraje totiž nepatrně prodlouží vzdálenosti mezi body proužku. Čím je proužek širší, tím je prodloužení větší. Proto je s přibývajícím šířkou „překroucení“ stále obtížnější a při jisté šířce už nemožné.



Obr. 6.6.4: Möbiův proužek

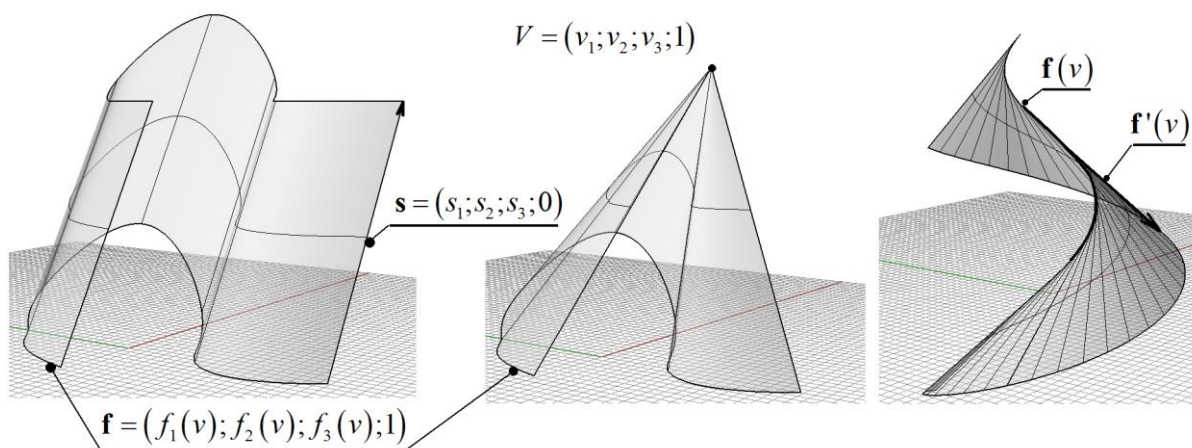
## 6. 7 Rozvinutelné plochy

Mezi rozvinutelné plochy patří:

a) *válcová plocha*

b) *kuželová plocha*

c) *plocha tečen  
prostorové křivky*



Obr. 6.6.1 Rozvinutelné plochy

**1. Válcové plochy:** Válcovou plochou rozumíme množinu všech bodů navzájem rovnoběžných přímek, které procházejí danou křivkou  $\mathbf{f}(v) = (f_1(v); f_2(v); f_3(v); 1)$ . Nejčastěji ji modelujeme translačním šablonováním, tj. posouváním řídicí křivky ve směru určeném společným směrovým vektorem  $\mathbf{s} = (s_1; s_2; s_3; 0)$  rovnoběžek, tedy

$$\mathbf{Q}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & s_1 u \\ 0 & 1 & 0 & s_2 u \\ 0 & 0 & 1 & s_3 u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(v) \\ f_2(v) \\ f_3(v) \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} u \in \langle u_1; u_2 \rangle \\ v \in \langle v_1; v_2 \rangle \end{matrix} \quad (6.6.1)$$

Jedná se tedy o plochu translační. Zároveň je to ovšem plocha přímková, neboť ji lze obdržet i šablonováním přímky, která protíná křivku  $\mathbf{f}$  v bodě  $v_0$  a má směrový vektor  $\mathbf{s}$ . Je totiž rovněž

$$\mathbf{Q}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & f_1(v) - f_1(v_0) \\ 0 & 1 & 0 & f_2(v) - f_2(v_0) \\ 0 & 0 & 1 & f_3(v) - f_3(v_0) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(v_0) + s_1 u \\ f_2(v_0) + s_2 u \\ f_3(v_0) + s_3 u \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} u \in \langle u_1; u_2 \rangle \\ v \in \langle v_1; v_2 \rangle \end{matrix}; \quad (6.6.2)$$

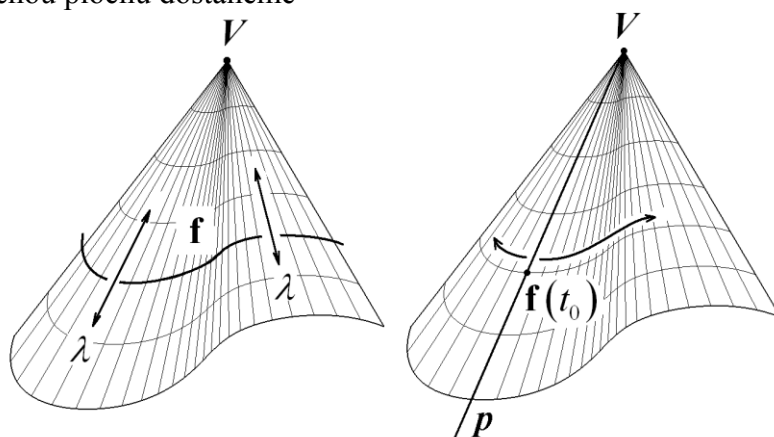
o čemž se můžeme přesvědčit roznásobením pravých stran vztahů (6.6.1), (6.6.2).

Je-li křivka  $\mathbf{f}$  rovinná a vektor  $\mathbf{s}$  leží v její rovině, je válcová plocha rovinným útvarem. V opačném případě se jedná o útvar prostorový. Je-li křivkou  $\mathbf{f}$  v rovnici (6.6.1) kružnice a vektor  $\mathbf{s}$  neleží v její rovině, dostáváme kružnicovou válcovou plochu, je-li  $\mathbf{s}$  navíc kolmý na rovinu této kružnice, jedná se o rotační válcovou plochu, neboť ji lze vytvořit rotací (viz následující kapitola). Každá válcová plocha je rozvinutelná.

**2. Kuželové plochy:** Kuželovou plochou rozumíme množinu všech bodů všech přímek, které procházejí danou křivkou  $\mathbf{f}(v) = (f_1(v); f_2(v); f_3(v); 1)$  a daným vlastním bodem  $V = (v_1; v_2; v_3; 1)$  (vrcholem kuželové plochy). Můžeme ji modelovat buď šablonováním, tj. zobrazováním řídicí křivky ve stejnolehlostech  $\mathcal{H}(V; \lambda)$ ;  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tedy

$$\mathbf{Q}(\lambda, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda \in \langle \lambda_1; \lambda_2 \rangle, t \in \langle t_1; t_2 \rangle$$

Jedná se tedy o plochu homotetickou, zároveň ovšem i přímkovou, neboť ji lze opět obdržet šablonováním přímky  $\mathbf{p}$ , která prochází tentokrát vrcholem  $\mathbf{V}$  a její další bod leží na křivce  $\mathbf{f}$ . Pro takto vytvořenou plochu dostaneme



**Obr. 6.6.2** Kuželová plocha jako plocha homotetická (vlevo) a přímková (vpravo)

$$\mathbf{Q}(u, v) = \mathbf{V}^T + (\mathbf{f}^T(v) - \mathbf{V}^T) \cdot u = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} f_1(v) \\ f_2(v) \\ f_3(v) \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot u$$

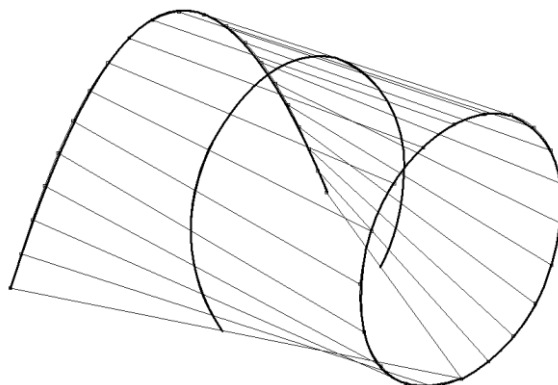
Rovněž každá kuželová plocha je rozvinutelná.

## 6.8 Zborčené plochy

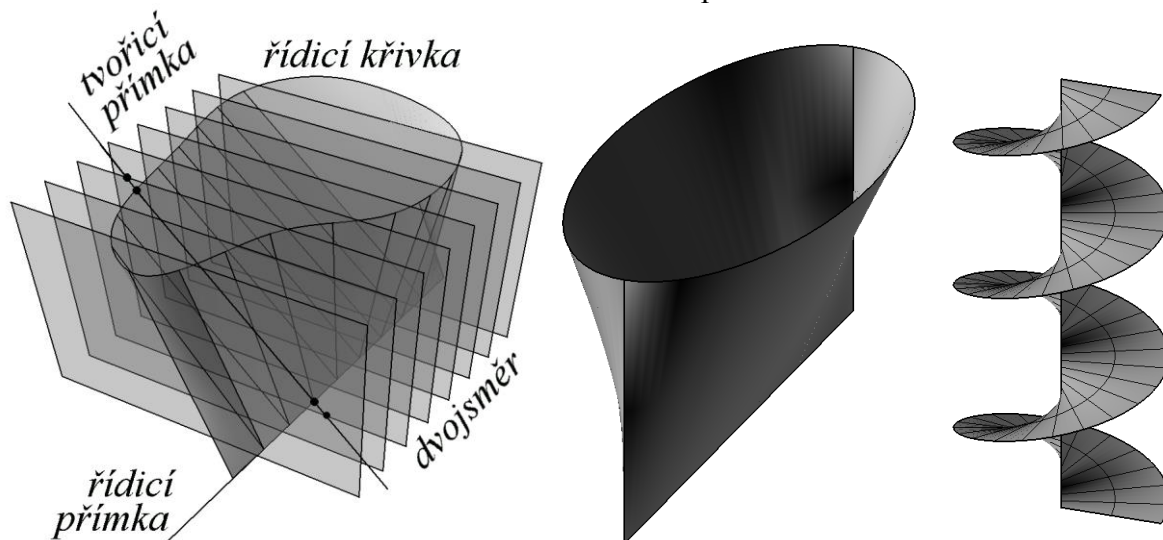
Zborcenou plochu vytvoří přímka, pohybující se po třech křivkách - tzv. **řídících křivkách**, které neleží na téže rozvinutelné ploše (viz obr. 6.8.1). Uvedme dva typy těchto ploch.

**1. Konoidy:** jsou zborčené plochy, kde dvě řídící křivky jsou přímky, přičemž jedna z nich je nevlastní. Nevlastní přímka je určena dvěma nevlastními body, které lze v euklidovském prostoru reprezentovat dvěma různými směry, tedy stejně jako množinu všech navzájem rovnoběžných rovin – všechny tyto roviny totiž procházejí právě touto nevlastní přímkou. Konoid lze tedy určit rovněž **řídící přímkou**, rovinou, se kterou budou rovnoběžné všechny tvořící přímky – **řídící rovinou**, a jednou **řídící křivkou**. Podle této řídící křivky hovoříme

pak o konoidu kruhovém, eliptickém, parabolickém atd. (viz obr. 6.8.2). Je-li navíc řídící rovina kolmá k řídící přímce, hovoříme o **konoidu přímém**. Jeden přímý konoid již známe – konoid šroubový. Jeho řídící křivka je šroubovice a řídící přímka je osa této šroubovice – je to pravoúhlá uzavřená šroubová plocha, kterou jsme uváděli v kpt. .11.3.



Obr. 6.8.1. Zborcená plocha



Obr. 6.8.2: Konoidy zleva: obecný, eliptický, šroubový

**2. Příklad:** Určeme rovnici přímého eliptického konoidu, s řídící přímkou  $\mathbf{P}(t) = (t; 0; 0; 1)$  a řídící elipsou  $\mathbf{E}(u) = (a \cos u; b \sin u; 3; 1)$ .

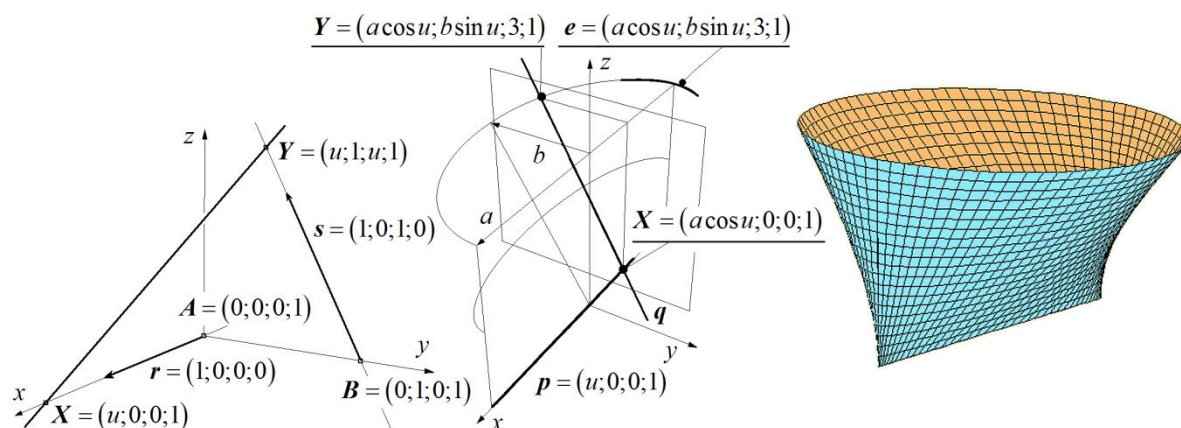
**Řešení:** Plochu vytvoří body všech přímek  $q = XY$  takových, že  $\mathbf{X} \in \mathbf{P}(t) \Rightarrow \mathbf{X} = (t; 0; 0; 1)$ ;  $\mathbf{Y} \in \mathbf{E}(u) \Rightarrow \mathbf{Y} = (a \cos u; b \sin u; 3; 1)$  – viz obr. 6.8.3. Přímka  $\mathbf{Q}$  procházející těmito body má rovnici  $\mathbf{Q} = \mathbf{X} + (\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot v$ . Protože se jedná o konoid přímý, musí být přímka  $\mathbf{Q}$  rovnoběžná s rovinou  $x = 0$ , což znamená, že její směrový vektor

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot v = [(a \cos u; b \sin u; 3; 1) - (t; 0; 0; 1)] \cdot v = (a \cos u - t; b \sin u; 3; 0) \cdot v$$

musí mít první složku nulovou, takže je  $a \cos u = t$ . Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(u, v) &= \mathbf{X}(t) + (\mathbf{Y}(u) - \mathbf{X}(t)) \cdot v = (t; 0; 0; 1) + (a \cos u - t; b \sin u; 3; 0) \cdot v = \\ &= (a \cos u; 0; 0; 1) + (0; b \sin u; 3; 0) \cdot v = (a \cos u; bv \sin u; 3v, 1) \end{aligned}$$

Druhým typem zborcených ploch, které zde uvedeme, jsou přímkové kvadriky. Jednodílným hyperboloidem jsme se již zabývali (viz př. 3 a kpt. 6.6.). Podívejme se ještě na jednu takovou plochu



Obr. 6.8.2: Přímý eliptický konoid

**3. Příklad:** Určeme množinu všech bodů všech přímek  $\mathbf{Q} = \mathbf{X} + (\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot v$ ; jestliže bod  $\mathbf{X}$  probíhá přímkou  $\mathbf{X}(u) = \mathbf{A} + u \cdot \mathbf{r} = (0; 0; 0; 1) + u \cdot (1; 0; 0; 0)$  a bod  $\mathbf{Y}$  přímkou  $\mathbf{Y}(u) = \mathbf{B} + u \cdot \mathbf{s} = (0; 1; 0; 1) + u \cdot (1; 0; 1; 0)$

**Řešení:** Zřejmě je  $\mathbf{X}(u) = (u; 0; 0; 1)$ ;  $\mathbf{Y}(u) = (u; 1; u; 1)$ , takže

$$\mathbf{Q}(u, v) = \mathbf{X}(u) + (\mathbf{Y}(u) - \mathbf{X}(u)) \cdot v = (u; 0; 0; 1) + ((u; 1; u; 1) - (u; 0; 0; 1)) \cdot v$$

tedy

$$\mathbf{Q}(u, v) = (u; v; uv; 1) \quad (6.8.1)$$

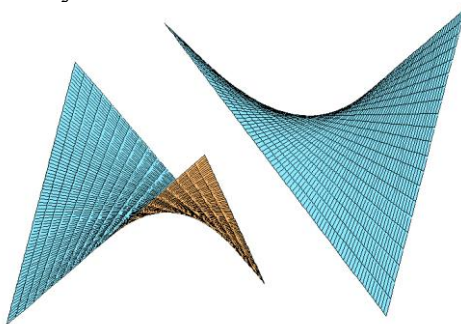
Rovněž tuto plochu známe již ze základního kurzu matematiky. Abychom se o tom přesvědčili, otočme ji nejdříve o  $\frac{\pi}{4}$  kolem osy z:

$$\bar{\mathbf{Q}}^T(u, v) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ uv \\ 1 \end{pmatrix}$$

zapišme parametrické rovnice a vylučme parametry  $u; v$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ z &= uv \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)^2 \\ y^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v)^2 \\ z &= uv \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2}u^2 - uv + \frac{1}{2}v^2 \\ y^2 &= \frac{1}{2}u^2 + uv + \frac{1}{2}v^2 \\ z &= uv \end{aligned} \right\} \Rightarrow II - I - 2III \Rightarrow y^2 - x^2 - 2z = 0$$

Jedná se tedy o hyperbolický paraboloid. Ten lze tedy vytvořit nejen šablonováním paraboly po parabole, ale jak ukazuje parametrizace (6.8.1) (i připojený obr. 6.8.3), jeho  $u$ -křivky i  $v$ -křivky mohou být přímky. Lze ho určit dvěma mimoběžkami a nevlastní přímkou, která neprochází jejich nevlastními body



Obr. 6.8.3: Hyperbolický paraboloid

## 6. 9 NURBS plochy

**1. Tenzorový součin  $u, v$  křivek:** Mějme dány báze funkce  $\mathbf{f} = (f_0(u); f_1(u); \dots; f_m(u))$ ;  $\mathbf{g} = (g_0(v); g_1(v); \dots; g_n(v))$  a matici  $\mathbf{M}(\omega_{ij}P_{ij})$  typu  $m \times n$ , jejímiž prvky jsou řídicí body opatřené vahami. Výraz

$$\mathbf{Q}^*(u, v) = (f_0(u); f_1(u); \dots; f_m(u)) \cdot \begin{pmatrix} \omega_{00}\mathbf{P}_{00} & \omega_{01}\mathbf{P}_{01} & \dots & \omega_{0n}\mathbf{P}_{0n} \\ \omega_{10}\mathbf{P}_{10} & \omega_{11}\mathbf{P}_{11} & \dots & \omega_{1n}\mathbf{P}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m0}\mathbf{P}_{m0} & \omega_{m1}\mathbf{P}_{m1} & \dots & \omega_{mn}\mathbf{P}_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0(v) \\ g_1(v) \\ \dots \\ g_n(v) \end{pmatrix}$$

nazýváme tenzorovým součinem křivek. Je to součin  $m + 1$   $u$ -křivek, jejichž rovnice jsou dány skalárním součinem řádku  $\mathbf{f} = (f_0(u); f_1(u); \dots; f_m(u))$  a  $j$ -tého sloupce matice  $\mathbf{M}(\omega_{ij}P_{ij})$ , a  $n + 1$   $v$ -křivek – skalárních součinů  $i$ -tého řádku matice  $\mathbf{M}(\omega_{ij}P_{ij})$  a sloupce  $\mathbf{g}^T = (g_0(v); g_1(v); \dots; g_n(v))^T$ .  $P_{ij}$ ;  $i = 0; 1; \dots; m$ ;  $j = 0; 1; \dots; n$ ; jsou body projektivního prostoru, které tvoří tzv. řídicí polygon. V praktických konstrukcích jsou řídicí body vždy vlastní.

**2. NURBS plochy** vznikají tenzorovým součinem NURBS křivek. Ve výrazu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* = \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T &= (f_0; f_1; \dots; f_m) \cdot \begin{pmatrix} \omega_{00}\mathbf{P}_{00} & \omega_{01}\mathbf{P}_{01} & \dots & \omega_{0n}\mathbf{P}_{0n} \\ \omega_{10}\mathbf{P}_{10} & \omega_{11}\mathbf{P}_{11} & \dots & \omega_{1n}\mathbf{P}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m0}\mathbf{P}_{m0} & \omega_{m1}\mathbf{P}_{m1} & \dots & \omega_{mn}\mathbf{P}_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} \mathbf{P}_{ij} \end{aligned}$$

označme  $\mathbf{P}_{ij} = (p_{ij1}; p_{ij2}; p_{ij3}; 1)$ . Pro bod  $Q$  pak dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* &= (q_1; q_2; q_3; q_4) = \\ &= \left( \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij1}; \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij2}; \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij3}; \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} \right) \end{aligned}$$

K vyjádření této plochy v euklidovském prostoru je třeba tento bod reprezentovat standardním reprezentantem, tedy

$$\mathbf{Q} = \left( \frac{q_1}{q_4}; \frac{q_2}{q_4}; \frac{q_3}{q_4}; 1 \right) = \left( \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij1}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}; \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij2}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}; \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij3}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}; 1 \right)$$

Vyjádření NURBS plochy v euklidovském prostoru je tedy tvaru

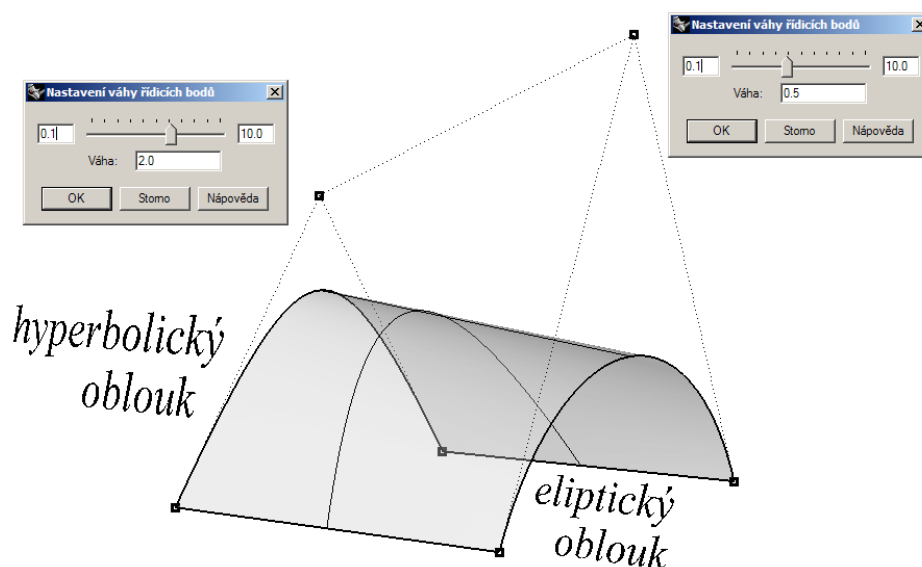
$$\begin{aligned} Q &= \left[ \frac{q_1}{q_4}; \frac{q_2}{q_4}; \frac{q_3}{q_4} \right] = \left[ \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij1}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}; \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij2}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}}; \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} p_{ij3}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}} \right] = \\ &= \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} [p_{ij1}; p_{ij2}; p_{ij3}]}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}} = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij} \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i g_j \omega_{ij}} \end{aligned}$$

**3. Příklad:** Mějme báze funkce  $N_1^{(1)}(u) = 1 - u$ ;  $N_2^{(1)}(u) = u$  stupně jedna (jejich kombinací je určena úsečka – viz př. 4 kpt. 5. 6) a báze funkce  $N_0^{(2)}(v) = (1 - v)^2$ ;  $N_1^{(2)}(v) = 2v(1 - v)$ ;  $N_2^{(2)}(v) = v^2$  stupně dva (jejich kombinací je určena kuželosečka (viz opět př. 4 kpt. 5. 6). Tenzorovým součinem



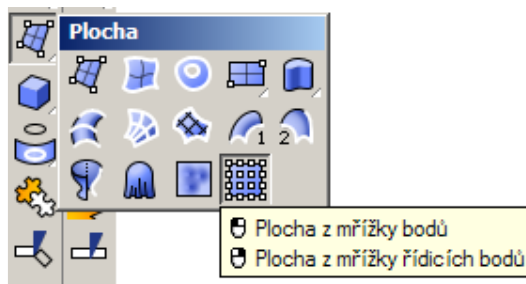
$$\mathbf{Q}^*(u, v) = (1-u; u) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & 2\mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \frac{1}{2}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-v)^2 \\ 2v(1-v) \\ v^2 \end{pmatrix}; \quad u, v \in \langle 0; 1 \rangle$$

je plocha, jejímiž  $u$ -křivkami jsou  $\mathbf{U}_1(u) = \mathbf{P}_{00}(1-u) + \mathbf{P}_{10}u$ ;  $\mathbf{U}_2(u) = 2\mathbf{P}_{01}(1-u) + \frac{1}{2}\mathbf{P}_{11}u$ ;  $\mathbf{U}_3(u) = \mathbf{P}_{02}(1-u) + \mathbf{P}_{12}u$  (což jsou úsečky) a  $v$ -křivkami jsou  $\mathbf{H}^*(v) = \mathbf{P}_{00}(1-v)^2 + 2\mathbf{P}_{01} \cdot 2v(1-v) + \mathbf{P}_{02}v^2$ ;  $\mathbf{E}^*(v) = \mathbf{P}_{10}(1-v)^2 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_{11} \cdot 2v(1-v) + \mathbf{P}_{12}v^2$ , tedy hyperbolický resp. eliptický oblouk – viz obr. 6.9.1.



Obr. 6.9.1: Plocha z příkladu 3

V **Rhinoceros** můžeme NURBS plochy definovat jako tenzorový součin z menu **Plocha/Mřížka bodů**, nebo pomocí ikony dle obr. 6.9.2. Systém vybízí k zadání řádků a sloupců bodů a stupně izokřivek. Plocha je vymodelována jako B-splajn plocha, tj. všechny řídicí body mají váhu  $\omega = 1$ . NURBS plochu obdržíme následnou změnou vah.



Obr. 6.9.2: Tenzorový součin NURBS křivek v Rhinoceros

**4. Příklad:** Určeme plochu danou tenzorovým součinem

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T = (f_0; f_1; f_2) \cdot \begin{pmatrix} \omega_{00}\mathbf{P}_{00} & \omega_{01}\mathbf{P}_{01} & \omega_{02}\mathbf{P}_{02} \\ \omega_{10}\mathbf{P}_{10} & \omega_{11}\mathbf{P}_{11} & \omega_{12}\mathbf{P}_{12} \\ \omega_{20}\mathbf{P}_{20} & \omega_{21}\mathbf{P}_{21} & \omega_{22}\mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \\ &= ((1-u)^2; 2u(1-u); u^2) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & 2\mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & 2\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & 2\mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-v)^2 \\ 2v(1-v) \\ v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



**Řešení:**  $u$ -křivky i  $v$ -křivky jsou kuželosečky. Trojice řídicích bodů ve sloupcích má vždy stejnou váhu,  $u$ -křivky jsou tedy paraboly. Pro trojice v řádku je  $\omega_0 = \omega_2 = 1$ ;  $\omega_1 = 2$ ;  $v$ -křivky jsou tedy hyperboly. Jedná se o hyperbolický paraboloid.

**5. Příklad:** Určeme plochu danou tenzorovým součinem

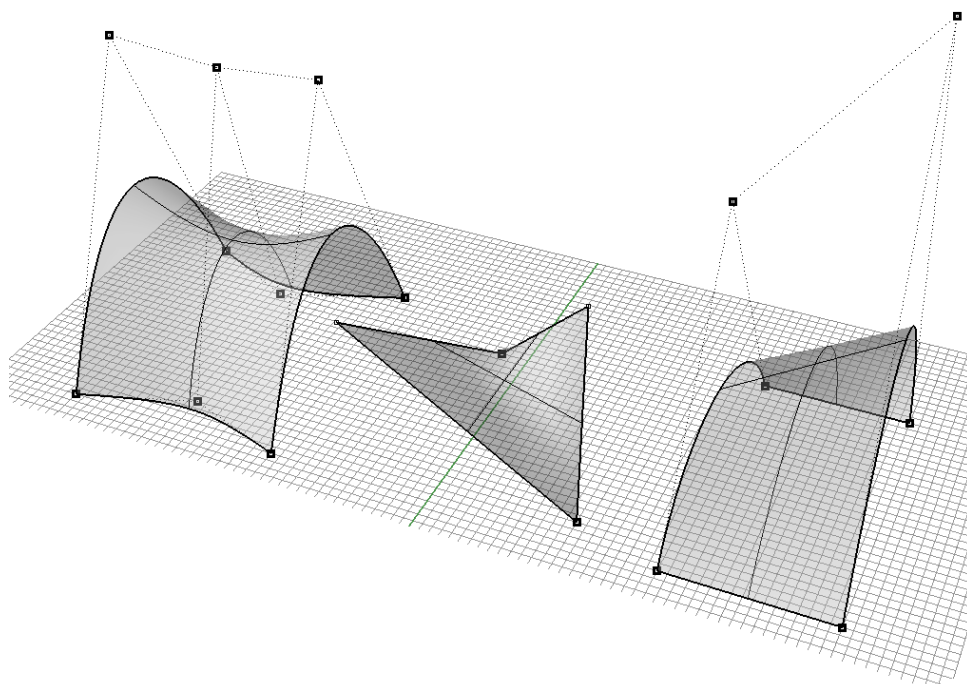
$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T = (f_0; f_1) \cdot \begin{pmatrix} \omega_{00} \mathbf{P}_{00} & \omega_{01} \mathbf{P}_{01} \\ \omega_{10} \mathbf{P}_{10} & \omega_{11} \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} = (1-u; u) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}$$

**Řešení:**  $u$ -křivky i  $v$ -křivky jsou přímky. Leží-li tedy řídicí body v jedné rovině, je plochou čtyřúhelník. Jestliže ne, jedná se o hyperbolický paraboloid.

**6. Příklad:** Určeme plochu danou tenzorovým součinem

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{f} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}^T = ((1-u)^2; 2u(1-u); u^2) \cdot \begin{pmatrix} 2\mathbf{P}_{00} & 2\mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \\ 2\mathbf{P}_{20} & 2\mathbf{P}_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}$$

**Řešení:**  $u$ -křivky jsou eliptické oblouky,  $v$ -křivky jsou přímky. Podle volby řídicích bodů tedy může jít např. o část válcové plochy (napojením čtyř těchto částí lze obdržet válcovou plochu), část kuželové plochy se stejnou možností, může jít i o jednodílný hyperboloid nebo i obecnější plochu.



**Obr. 6.9.3:** Plochy k příkladům (zleva): 4, 5, 6.

**13. Elementární plochy jako NURBS:** Elementární plochy (hranolová, jehlanová, válcová, kuželová a kulová) jsou v CAD systémech modelovány jako NURBS plochy. Plášť hranolu a jehlanu plochy dostaneme jako součiny  $n$ -úhelníka (podstavy) a úsečky (pobočné hrany).

**Plášť hranolu** je tvaru

$$\mathbf{H}(u, v) = \mathbf{f}_l \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}_n^T = \begin{pmatrix} N_0^{(1)}(u); N_1^{(1)}(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \dots & \mathbf{P}_{0n} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \dots & \mathbf{P}_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_0^{(1)}(v); N_1^{(1)}(v); \dots; N_n^{(1)}(v) \end{pmatrix}^T$$

kde  $N_0^{(1)}(u); N_1^{(1)}(u)$  resp.  $N_0^{(1)}(v); N_1^{(1)}(v); \dots; N_n^{(1)}(v)$  jsou Bernsteinovy polynomy stupně jedna. Body  $P_{00}; P_{01}; \dots; P_{0n}$  jsou vrcholy jedné podstavy, body  $P_{10}; P_{11}; \dots; P_{1n}$  jsou jejich obrazy v posunutí ve směru různoběžném s rovinou podstavy a určují vrcholy druhé podstavy. Součin

$$\mathbf{P}(v) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}_n^T(v) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \dots & \mathbf{P}_{0n} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \dots & \mathbf{P}_{1n} \end{pmatrix} \cdot \left( N_0^{(1)}(v); N_1^{(1)}(v); \dots; N_n^{(1)}(v) \right)^T$$

určuje podstavy a součin

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{f}_l(u) \cdot \mathbf{M} = \left( N_0^{(1)}(u); N_1^{(1)}(u) \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \dots & \mathbf{P}_{0n} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \dots & \mathbf{P}_{1n} \end{pmatrix}$$

pobočné hrany. Jsou-li body  $P_{10}; P_{11}; \dots; P_{1n}$  obrazem bodů  $P_{00}; P_{01}; \dots; P_{0n}$  v afinitě (stejnolehlosti, středové kolineaci), jedná se o hranol seříznutý rovinou (komolý jehlan, jehlan seříznutý rovinou).

**Plášť válce a kužele** dostaneme jako součiny kružnice (podstavy) a úsečky (strany). Plášť válce je tvaru

$$\mathbf{K}(u, v) = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}_8^T = \left( N_0^{(1)}(u); N_1^{(1)}(u) \right) \cdot \begin{pmatrix} \omega_{00}\mathbf{P}_{00} & \omega_{01}\mathbf{P}_{01} & \dots & \omega_{08}\mathbf{P}_{08} \\ \omega_{10}\mathbf{P}_{10} & \omega_{11}\mathbf{P}_{11} & \dots & \omega_{18}\mathbf{P}_{18} \end{pmatrix} \cdot \left( N_0^{(2)}(v); N_1^{(2)}(v); \dots; N_8^{(2)}(v) \right)^T$$

kde  $N_0^{(1)}(u); N_1^{(1)}(u)$  resp.  $N_0^{(2)}(v); N_1^{(2)}(v); \dots; N_8^{(2)}(v)$  jsou B-splajn funkce stupně jedna resp. dva a uzlový resp. váhový vektor je  $\mathbf{t} = (0; 1); \boldsymbol{\omega} = (1; 1)$  resp.  $\mathbf{t} = \left( 0; 0; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}; 1; 1; 1 \right); \boldsymbol{\omega} = \left( 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  Tvoří-li body  $P_{01}; P_{03}; P_{05}; P_{07}$  vrcholy čtverce a body  $P_{00}; P_{02}; P_{04}; P_{06}; P_{08} = P_{00}$  středy jeho stran, je těmito body určena podstavná kružnice. Jsou-li body  $P_{10}; P_{12}; \dots; P_{18}$  jejich obrazy v posunutí ve směru různoběžném s rovinou čtverce, pak součin

$$\mathbf{P}(v) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{f}_8^T = \begin{pmatrix} \omega_{00}\mathbf{P}_{00} & \omega_{01}\mathbf{P}_{01} & \dots & \omega_{08}\mathbf{P}_{08} \\ \omega_{10}\mathbf{P}_{10} & \omega_{11}\mathbf{P}_{11} & \dots & \omega_{18}\mathbf{P}_{18} \end{pmatrix} \cdot \left( N_0^{(2)}(v); N_1^{(2)}(v); \dots; N_8^{(2)}(v) \right)^T$$

určuje podstavy a součin

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{M} = \left( N_0^{(1)}(u); N_1^{(1)}(u) \right) \cdot \begin{pmatrix} \omega_{00}\mathbf{P}_{00} & \omega_{01}\mathbf{P}_{01} & \dots & \omega_{08}\mathbf{P}_{08} \\ \omega_{10}\mathbf{P}_{10} & \omega_{11}\mathbf{P}_{11} & \dots & \omega_{18}\mathbf{P}_{18} \end{pmatrix}$$

plášť. Řídící body válcové plochy tvoří klec šestnácti bodů. Řídící kružnice se dotýkají klece ve středech stran čtverce, tyto body mají váhu  $\omega = 1$ , vrcholy klece mají váhu  $\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (viz obr. 6.9.4).

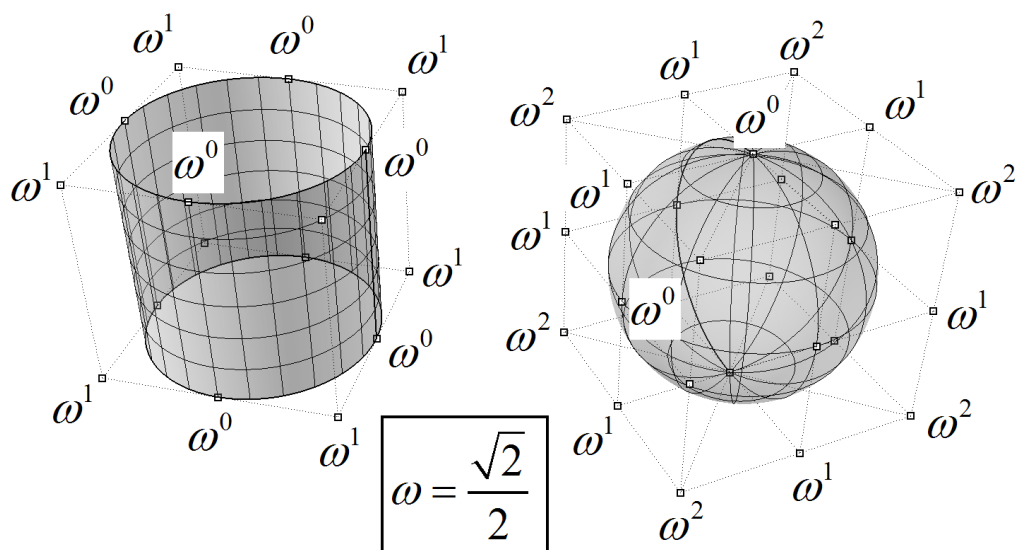
**Komolý kužel** obdržíme z válce změnou polohy osmi řídících bodů, které tvarují jednu z podstav. U **kužele** těchto osm bodů splývá ve vrchol, který má váhu  $\omega = 1$ .

**Kulová plocha:** Krychlová klec je tvořena dvaceti šesti body. Kulovou plochu dostaneme jako sjednocení osmi kulových plátů. Trojice řídících bodů, které určují jejich okraje, musejí tvarovat čtvrtkružnice, jejich váhy tedy musejí být v poměru  $\omega_0 : \omega_1 : \omega_2 = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1$ .

Označíme-li tedy  $\omega = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (tyto váhy mají středy hran krychlové klece), pak středy stěn mají váhy  $\omega^0 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^0 = 1$  a vrcholy  $\omega^2 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$ .

O tvarování elementárních ploch pomocí vah se můžeme přesvědčit v Rhinoceros. Řídící body těles, jejichž povrch je složen z více ploch (např. válec, kužel) nám však Rhinoceros

nezobrazí. Je třeba vytvořit jen jednu plochu, např. plášť válce pomocí kružnice a příkazu **Plocha/Vytáhnout křivku/Přímo**.



**Obr. 6.9.4:** Válcová a kulová plocha jako NURBS

## 7 Fraktály

Fraktální geometrie je rozvíjena zhruba od šedesátých let minulého století jako nástroj popisu chaotičnosti přírody. Geometrie se až do devatenáctého století zabývala „ideálními“ útvary, „dokonalost“ útvarů byla spatřována v jejich pravidelnosti. Čtverec nebyl speciálním případem obdélníka, ale naopak, obdélník byl nedokonalý čtverec. Koncem minulého a začátkem našeho století byla objevena celá řada konstrukcí podivných útvarů, které naprosto nezapadaly do těchto koncepcí a mnohými matematiky byly přijímány s odporem jako „matematická monstra“. S jedním z těchto „monster“ – Sierpiňského trojúhelníkem - jsme se seznámili již v př. 1 kpt. 1.4.

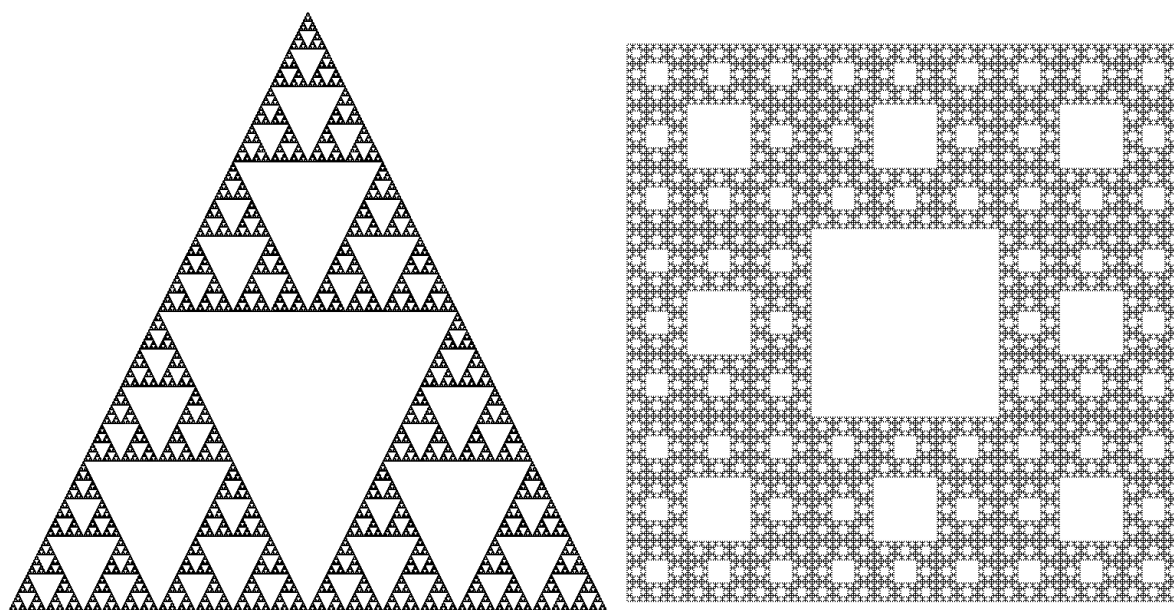
Tyto „čistě logické“ konstrukce se v době svého vzniku zdály na hony vzdálené jakékoli realitě. Teprve **B. B. Mandelbrot** počátkem 60. let ukázal, že logika vedla matematiky blíže ke skutečnosti, než sami tušili, a že jejich „matematická monstra“ jsou k popisu reálných jevů daleko vhodnější, než „ideální“ útvary. Svět přírody vždy obsahuje prvky chaotického chování. V sedmdesátých letech se vědci nejrozličnějších profesí (matematikové, biologové, chemici...) začali zajímat o popis souvislosti mezi nahodilými a chaotickými strukturami a první výsledky je vedly rovnou do světa přírody. Reálná hora není ani jehlan ani kužel, kmen stromu není ani zdaleka válec. Tabletka živočišného uhlí tvaru „válce“ s poloměrem podstavy 5 mm a výškou 4 mm má (údajně) povrch  $10 \text{ m}^2$  (!) V lidském hrudníku je „svinutá“ plocha větší, než tenisový kurt. Oběhová soustava lidského těla musí vměstnat do vymezeného objemu značně velkou plochu. Její fraktální struktura pracuje tak efektivně, že ve většině tkání není žádná buňka vzdálena od cévy více, než tři až čtyři buňky. Přesto cévy a krev zaujímají velmi malý objem (necelých 5% lidského těla). K jakému „klasickému“ geometrickému útvaru máme přirovnat takový blesk? Hory, řeky, mraky, galaxie, dráhy blesků, cévní a kořenové systémy, genetický kód - k popisu podobných struktur je třeba zcela nového pohledu, který se starému v ničem nepodobá. Vyžaduje zbavit se zvyku uvažovat o objektech a jevech v kategoriích délka, plocha a objem.

### 7. 1 Pojem fraktálu - motivace

Na tomto místě doporučujeme čtenáři, aby si zopakoval pojem **topologická dimenze** (viz kpt. 4. 1 def. 7) a v příkladu 1 připomeneme ještě jednou Sierpiňského trojúhelník z př. 2 kpt. 4.1.

U omezených geometrických útvarů (tj. útvarů, které lze pokrýt nějakou koulí) jsme zvyklí na to, že je možné je měřit, tj. určit jejich „velikost“ jako nenulový a konečný počet „jednotek“ velikosti. U jednorozměrných útvarů je touto „velikostí“ délka, u dvojrozměrných obsah, u trojrozměrných pak objem. Z běžné zkušenosti víme, že pokusy určit obsah či délku trojrozměrných útvarů vedou k nekonečným číslům, objem dvojrozměrného útvaru je nula, jeho délka je nekonečná. Objem či obsah jednorozměrného útvaru je nulový. Počet rozměrů (dimenze) omezeného geometrického útvaru je tedy z metrického hlediska dán tím, zda tento útvar má konečnou a nenulovou délku, obsah či objem, přičemž nenulová a konečná je právě jedna z těchto veličin.

**1. Příklad – Sierpiňského trojúhelník a čtverec:** Sestrojme rovnostranný trojúhelník a vyjmeme z něj vnitřek trojúhelníka určeného středními příčkami. Ve zbývajících třech trojúhelnících provedme totéž a tímto způsobem pokračujme do nekonečna. Pokud bychom analogickou konstrukci provedli se čtvercem (zde čtverec rozdělujeme vždy na devět shodných čtverců a vyjímáme vnitřek prostředního z nich), dostaneme Sierpiňského čtverec (viz obr. 7.1.1).



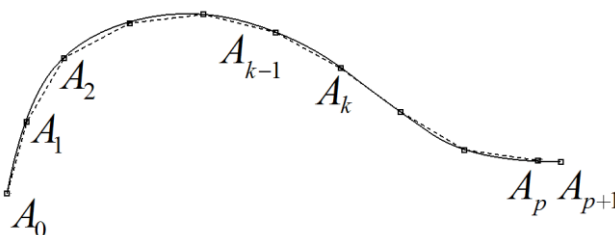
**Obr. 7.1.1:** Sierpiňského trojúhelník a Sierpiňského čtverec

Při programování takto se opakujících se konstrukcí se používají tzv. rekurzivní procedury, tj. procedury, které volají samy sebe. Nemohou se samozřejmě volat donekonečna, obvykle končí, až velikost útvaru, který se má sestrojovat, je menší než jeden pixel zobrazovacího zařízení.

V kpt. 1. 4 jsme zjistili, že Sierpiňského trojúhelník je z topologického hlediska křivka, totéž bychom zjistili i u Sierpiňského čtverce. Z „metrického“ hlediska to však není útvar jednorozměrný (má nekonečnou délku), ale ani dvojrozměrný (má nulový obsah). Tyto útvary tedy nelze „běžným způsobem“ měřit, tj. určit, který z nich je větší a který menší.

V technické praxi většinou pracujeme s křivkami jednoduchými (tj. křivkami, které neprotínají samy sebe), anebo se jedná alespoň o křivky po částech jednoduché, tj. křivky, které lze na neprotínající se křivky rozdělit. Sierpiňského trojúhelník a čtverec jsou křivky, které samy sebe protínají v každém bodě a nejsou tedy jednoduché ani po částech. Existují však i jednoduché ohraničené křivky s nekonečnou délkou. Než se s jednou z nich blíže seznámíme, upřesňeme pojem délky jednoduché křivky.

**2. Délka jednoduché křivky:** Délku jednoduché křivky přibližně určíme tak, že sestrojíme posloupnost bodů  $A_0; A_1; \dots; A_p; A_{p+1}$  ležících na křivce tak, že body  $A_0; A_{p+1}$  jsou krajní (v případě uzavřené křivky je  $A_0; A_{p+1}$  její libovolný bod), a platí  $|A_{k-1} A_k| = v$ ;  $k = 1; 2; \dots; p$ ;  $|A_p A_{p+1}| < v$ , přičemž připouštíme i  $A_p = A_{p+1}$ , tj.  $|A_p A_{p+1}| = 0$ . Za přibližnou délku křivky pak prohlásíme číslo  $\ell \approx (p + \frac{1}{2}) \cdot v \pm \frac{v}{2}$  (viz obr. 7.1.2).



**Obr. 7.1.2:** K délce jednoduché křivky

Je zřejmé, že čím menší bude  $v$ , tím se tento součet bude blížit číslu, které bychom měli prohlásit za délku křivky. Délkou jednoduché křivky bude tedy zřejmě limita

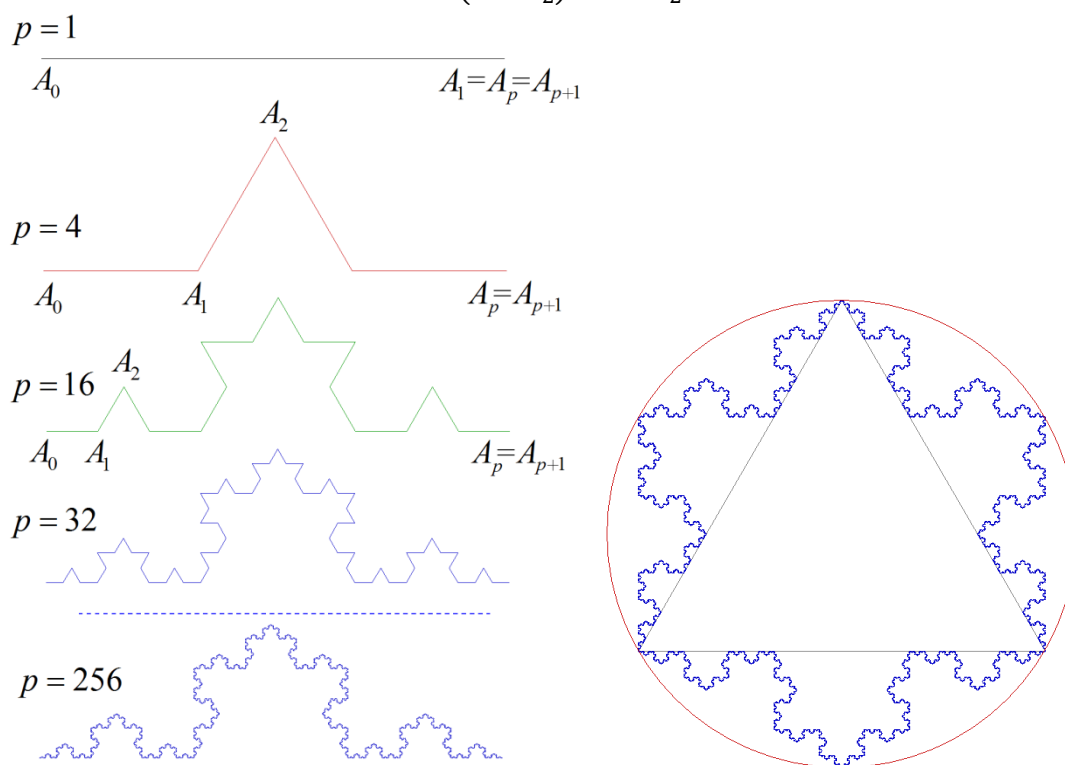
$$\ell = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot v \quad (7.1.1)$$

pokud tato limita existuje.

Takto zavedená délka křivky velmi dobře odpovídá běžné představě měření délky pomocí délkových jednotek – měřicími úsečkami jsou úsečky  $A_{k-1} A_k$ ,  $k = 1; 2; \dots; p$ .

**3. Příklad – Kochova křivka a Kochův ostrov:** Uvažujme úsečku, kterou rozdělíme na třetiny, nad prostřední třetinou sestrojíme rovnostranný trojúhelník a původní prostřední třetinu vyjme. Nad takto vzniklými čtyřmi úsečkami zopakujme tutéž konstrukci a takto pokračujme do nekonečna (viz obr. 7.1.3 vlevo). Je zřejmé, že úsečky vznikající v jednotlivých krocích mohou sloužit jako „měřicí úsečky“. Označíme-li  $v_n$  velikost měřicí úsečky v  $n$ -tém kroku a  $p_n$  jejich počet, je přibližná délka zjištěná v  $n$ -tém kroku

$$\ell_n \approx \left(p_n + \frac{1}{2}\right) \cdot v_n \pm \frac{v_n}{2}$$



**Obr. 7.1.3:** Kochova křivka a Kochův ostrov

Při tomto měření je navíc vždy  $A_p = A_{p+1}$ , takže nemusíme uvažovat toleranci a psát přímo

$$\ell_n = p_n \cdot v_n \quad (7.1.2)$$

Dále pro  $n > 1$  platí  $v_n = \frac{1}{3}v_{n-1} = 3^{-n+1}v_1$ ;  $p_n = 4p_{n-1} = 4^{n-1}p_1$ , takže

$$\ell = \lim p_n \cdot v_n = \lim 3^{-n+1}v_1 4^{n-1}p_1 = \infty$$

(neboť  $v_1 > 0$ ;  $p_1 > 0$ ). Útvar, který takto vznikl, je jednoduchá křivka. Je zřejmě ohraničená a přitom má nekonečnou délku. Ani tuto křivku tedy nelze rozumně změřit. Zopakujeme-li konstrukci Kochovy křivky nad třemi úsečkami, které tvoří strany rovnostranného

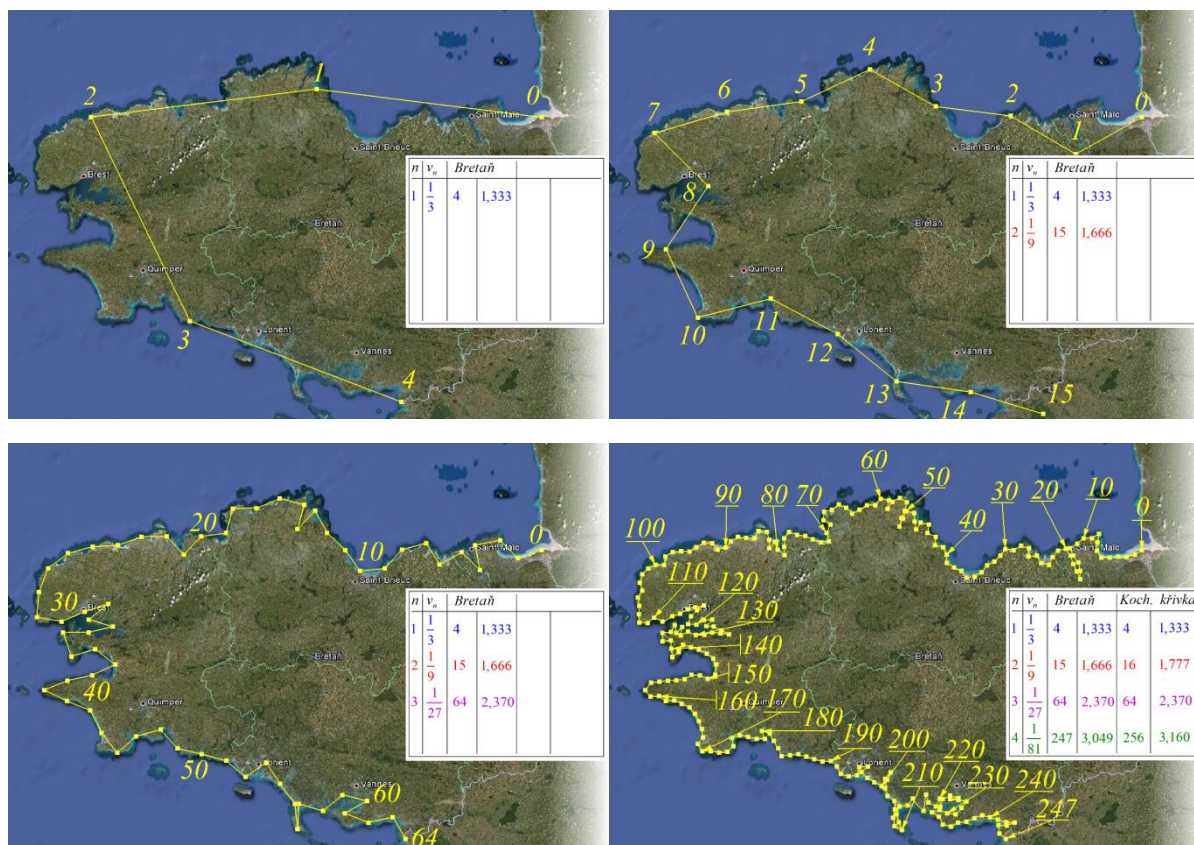


trojúhelníka, dostaneme tzv. Kochův ostrov, který má konečný obsah, ale jeho hranice má nekonečnou délku (viz obr. 7.1.3).

Později se ukázalo, že tyto „exotické“ vlastnosti mají nejen umělé geometrické konstrukce, ale i útvary, se kterými se setkáváme zcela běžně.

**4. Příklad - pobřeží Bretaně:** Pokusme se změřit délku pobřeží Bretaně, a to postupem uvedeným v odst. 1. Takto zavedená délka zřejmě nezávisí na volbě velikosti počáteční měřicí úsečky, pro názornost ji tedy zvolíme tak, že pro  $v_1$  bude  $p_1 = 4$ , tj. stejně jako pro Kochovu křivku.

Měření a délka pobřeží zjištěná těmito měřidly je na obr. 7.1.4. a v poslední tabulce je porovnávána s délkou Kochovy křivky. Je vidět, že se zmenšujícím se měřidlem se zjištěná délka pobřeží opět významně zvětšuje a limita  $\ell = \lim p_n \cdot v_n$  definující tuto délku bude zřejmě opět nevlastní. Na základě přesných měření v 50. letech minulého století dospěl **Lewis Fry Richardson** skutečně k závěru, že všechna pobřeží jsou stejně, a to nekonečně dlouhá.



**Obr. 7.1.3:** Měření délky pobřeží Bretaně

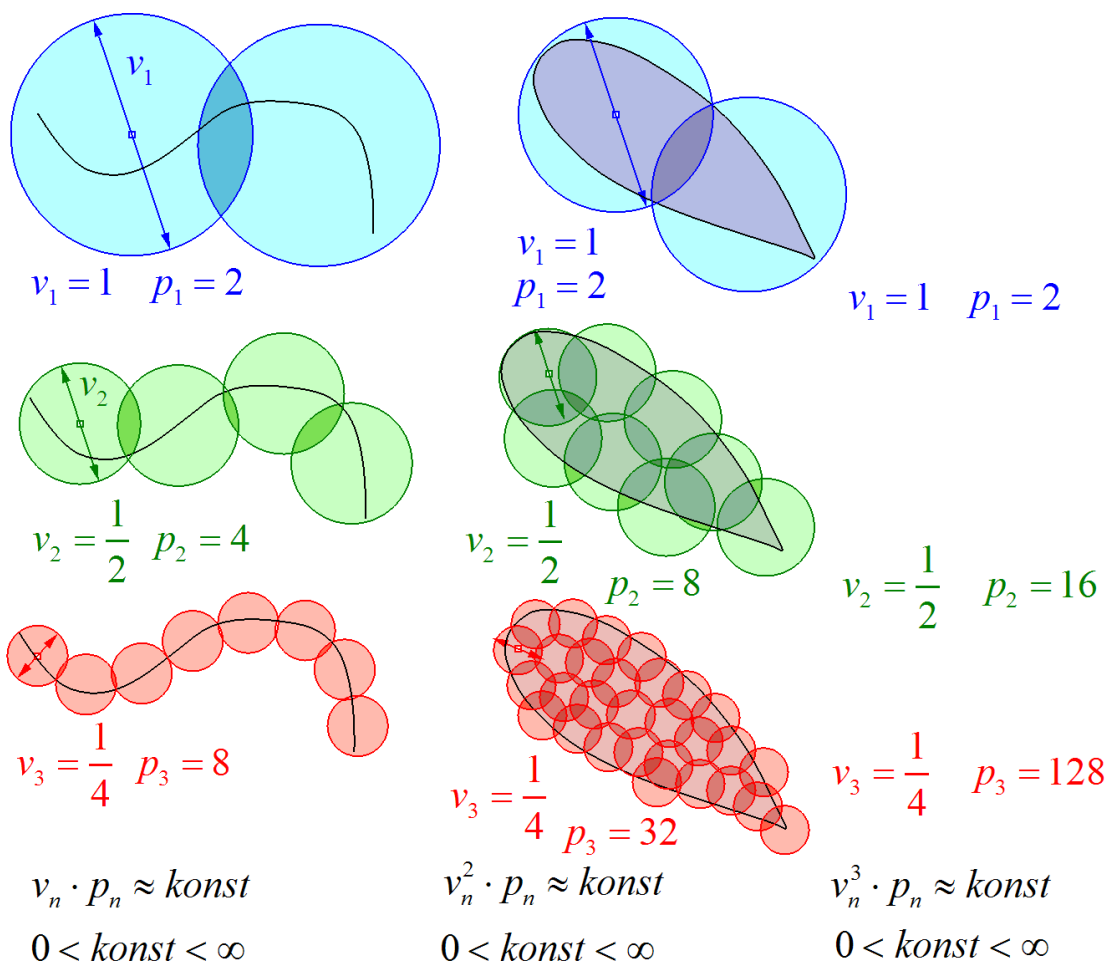
Pro porovnávání geometrických útvarů typu „větší – menší“ jsou tedy „velikosti v topologických dimenzích“ (tj. délka, obsah a objem) často příliš hrubými nástroji. Proto jsou zaváděny dimenze obecnější, ve kterých je možné porovnávat i takové útvary jako Sierpiňského trojúhelníky a čtverce, Kochovy křivky i pobřeží a „velikosti“ nejrůznějších přírodních útvarů. Nejstarší a nejobecnější je dimenze Hausdorffova (podle německého matematika Felixe Hausdorffa, který ji publikoval v r. 1919). Prozatím uvedeme definici poněkud speciálnější, kterou zobecníme v následující kapitole.

**5. Fraktální dimenze:** je zobecněním pojmu „počet rozměrů“. Na obr. 7.1.4 máme topologicky jednorozměrný a dvojrozměrný útvar, který postupně „co nejúsporněji“ pokrýváme shodnými kruhy. Zajímá nás, kolik kruhů bude potřeba, jestliže jejich průměr postupně zmenšujeme na polovinu, čtvrtinu atd. Ukazuje se, že u topologicky jednorozměrného útvaru platí, že s každým dvojnásobným zmenšením průměru potřebujeme zhruba dvakrát více kruhů. U topologicky dvojrozměrných útvarů s každým dvojnásobným zmenšením průměru potřebujeme zhruba čtyřikrát ( $2^2$ ) více kruhů. Pokud bychom provedli totéž s útvarem trojrozměrným, který bychom pokrývali koulemi, potřebovali bychom s každým dvojnásobným zmenšením průměru zhruba osmkrát ( $2^3$ ) více koulí. Je-li  $\{v_n\}$  klesající posloupnost průměrů použitých kruhů (koulí) a  $\{p_n\}$  posloupnost udávající počet kruhů (koulí) o průměru („velikosti“)  $v_n$  potřebných k pokrytí útvaru, pak pro  $D$ -rozměrný ohraničený útvar je skutečně

$$p_n \cdot v_n^D \approx \text{konst} \quad (7.1.3)$$

Dále existuje limita tohoto součinu a je

$$0 \leq \lim p_n \cdot v_n^D < \infty; \quad D = 1; 2; 3$$



**Obr. 7.1.4:** K motivaci fraktální dimenze

Požadavek „co nejúspornějšího“ pokrytí topologicky jednorozměrného útvaru zřejmě znamená, že je třeba kružnice (koule) pokládat tak, aby průsečíky s útvarem ležely na průměru, počet kruhů (koulí) vynásobený jejich počtem bude tedy přímo aproximovat délku křivky, tj.  $p_n \cdot v_n \approx \ell$  a



$$\ell = \lim p_n \cdot v_n^1$$

U topologicky jednorozměrného útvaru je dále zřejmé

$$\lim p_n \cdot v_n^2 = \lim p_n \cdot v_n^3 = 0$$

Pro topologicky dvojrozměrné útvary je výraz  $p_n \cdot v_n^2$  zřejmě roven součtu obsahů čtverců opsaných pokrývajícím kruhům. Protože se čtverce překrývají, tento výraz ani v limitě není roven obsahu útvaru. Protože však pro topologicky dvojrozměrný útvar platí

$$\lim p_n \cdot v_n^1 = \infty; \quad 0 < S < \lim p_n \cdot v_n^2 < \infty; \quad \lim p_n \cdot v_n^3 = 0$$

je tato limita vhodným „indikátorem dvojrozměrnosti“. Podobně v trojrozměrném případě (promyslete!). Tato úvaha nás vede k následující hypotéze:

**6. Hypotéza:** pro každý geometrický je buď

a) pro každé  $d > 0$ :  $\lim p_n \cdot v_n^d = 0$   
anebo

b) existuje  $D > 0$  tak, že

$$\alpha) 0 < \lim p_n \cdot v_n^D < \infty$$

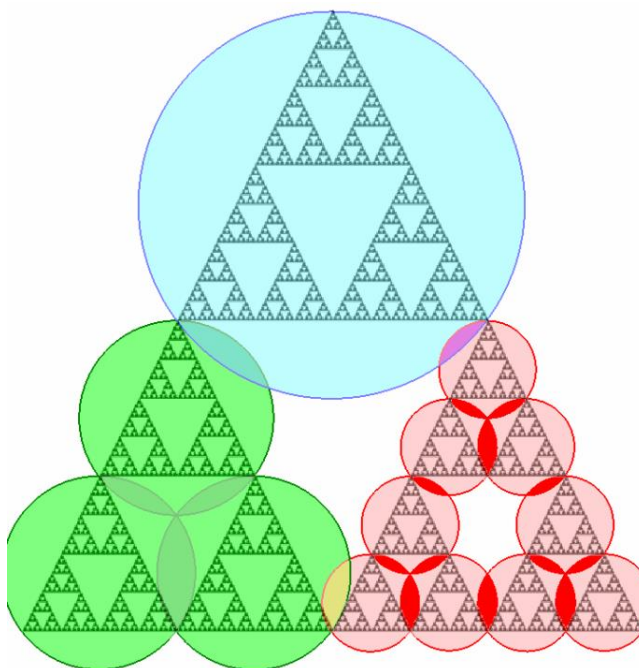
$$\beta) \text{ pro každé } d < D \text{ je } \lim p_n \cdot v_n^d = \infty$$

$$\gamma) \text{ pro každé } d > D \text{ je } \lim p_n \cdot v_n^d = 0$$

Pokud by tato hypotéza platila, pak bychom číslo  $D$  mohli prohlásit za fraktální dimenzi („počet rozměrů“) geometrického útvaru a číslo  $M = \lim p_n \cdot v_n^D$  za jeho míru – číslo, které umožňuje srovnávání útvarů typu větší – menší. Délka, obsah a objem útvaru by tedy byly jeho míry v dimenzi jedna, dvě resp. tři.

Na první pohled se může zdát, že bychom takto zavedli zbytečným pojem, protože fraktální dimenze topologicky jednorozměrného (dvojrozměrného, trojrozměrného) útvaru je jedna (dvě, tři). Pojem fraktální dimenze však zbytečný nebude, jak ilustruje následující příklad.

**7. Fraktální dimenze Sierpiňského trojúhelníka:** Podívejme se ještě jednou na Sierpiňského trojúhelník. Pro jednoduchost (bez újmy na obecnosti) můžeme předpokládat, že první kruh má průměr roven jedné polovině, tj.  $v_1 = 2^{-1}$ . K prvnímu pokrytí jsou potřeba tři takové kruhy, tj.  $p_1 = 3$ . Vždy, když zmenšíme průměry kruhů na polovinu, je k pokrytí třeba vždy trojnásobný počet kruhů tak, jak naznačuje obr. 7.1.5.



**Obr. 7.1.5.:** K fraktální dimenzi Sierpiňského trojúhelníku

Je tedy  $v_n = 2^{-n}$ ;  $p_n = 3^n$ . Protože je

$$\lim p_n \cdot v_n^1 = \lim 3^n \cdot 2^{-n} = \infty; \lim p_n \cdot v_n^2 = \lim 3^n \cdot 2^{-2n} = 0;$$

je délka trojúhelníka nekonečná a obsah nulový (to už jsme zjistili v př. 1 kpt. 4. 1 středoškolskými metodami). Nyní však předpokládáme, že musí existovat dimenze  $1 < D < 2$  taková, že limita pro tuto dimenzi je nenulová a konečná, tedy

$$0 < \lim p_n \cdot v_n^1 = \lim 3^n \cdot 2^{-n} < \infty$$

Pokusme se tuto dimenzi  $D$  najít. Označme  $D_n; M_n$  přibližnou hodnotu dimenze a míry zjištěnou v  $n$ -tém kroku, tedy

$$3^n \cdot 2^{-n \cdot D_n} = M_n$$

Logaritmování obdržíme

$$n \cdot \ln 3 - n \cdot D_n \cdot \ln 2 = \ln M_n$$

$$D_n = -\frac{\ln M_n}{n \cdot \ln 3} + \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$D = \lim D_n = \lim \left( -\frac{\ln M_n}{n \cdot \ln 3} + \frac{\ln 3}{\ln 2} \right) = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

(vzhledem k tomu, že  $0 < M_n < \infty$ )

Fraktální dimenze Sierpiňského trojúhelníka zavedená v odst. 5 by tedy byla neceločíselná (dokonce iracionální) a byla by rovna

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,584\,962 \dots$$

**8. Fraktální dimenze Sierpiňského čtverce a Kochovy křivky:** Při pokrývání Sierpiňského čtverce je výhodné zmenšovat průměry pokrývacích kruhů na třetinu, jejich počet tím zvýšíme osmkrát. Postupem zcela analogickým předchozímu dostaneme

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,892\,789 \dots$$

Konečně pro Kochovu křivku bychom dostali

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,261\,859 \dots$$

Tyto a řada podobných výsledků vedly k pojmu fraktálu, který zavedl **Benoit Mandelbrot** (1924 - 2010):

**9. Fraktál** je útvar, jehož fraktální dimenze je (ostře) větší než dimenze topologická.

Protože topologická dimenze Sierpiňského trojúhelníka a čtverce, jakož i Kochovy křivky je jedna, jsou tyto tři útvary příklady fraktálů. Fraktální dimenze je vhodnou mírou členitosti geometrického útvaru. Fraktální dimenze je tak „jemnějším nástrojem“ pro popis geometrických útvarů než dimenze topologická. „Nefraktální“ útvary (úsečka, kruh, válec...) mají fraktální dimenzi rovnou dimenzi topologické a považujeme je za „nečlenité“. Kochova křivka je členitá ( $D \approx 1,26$ ), členitější je ovšem Sierpiňského trojúhelník ( $D \approx 1,58$ ) a čtverec ( $D \approx 1,89$ ). Pobřeží Bretaně, které nám posloužilo jako motivační příklad (viz př. 4), je poměrně členité ( $D \approx 1,25$ ), pobřeží Severní Afriky je naopak téměř hladké ( $D \approx 1,02$ ). Velmi členité plochy (topologická dimenze dvě) pak představuje povrch lidského mozku ( $D \approx 2,79$ ) a plic ( $D \approx 2,97$ ).

Tato teorie by tedy jistě přinesla řadu zajímavých výsledků. Tak, jak byla dosud podána, je však bohužel nekorektní, jak svědčí následující příklad.

**10. Příklad:** Označme  $\mathcal{R} = \langle 0; 1 \rangle$ ;  $\mathcal{Q} = \langle 0; 1 \rangle \cap \mathbb{Q}$ ;  $\mathcal{I} = \langle 0; 1 \rangle - \mathbb{Q}$ . Množina  $\mathcal{R}$  je tedy „klasický“ interval  $\langle 0; 1 \rangle$ ; množina  $\mathcal{Q}$  „vybírá“ z tohoto intervalu pouze racionální čísla, množina  $\mathcal{I}$  pak čísla iracionální. Podle předchozích vzorů určíme jejich fraktální dimenzi.

**Řešení:** Zvolme  $v_n = \frac{1}{n}$ . Pak je pro každou z množin  $\mathcal{R}; \mathcal{Q}; \mathcal{I}$  zřejmě  $p_n = n$ . Pro každou z množin  $\mathcal{R}; \mathcal{Q}; \mathcal{I}$  je pak  $\lim p_n \cdot v_n^1 = 1$ , takže fraktální dimenze všech tří množin je  $D = 1$ . Míra všech tří množin v této dimenzi (tedy délka) je shodou okolností rovněž rovna jedné.

V čem je problém? Délka, obsah či objem by měly mít jednu základní vlastnost, kterou jsme zatím nezmiňovali – totiž aditivitu. Ta říká, že jsou-li dva útvary  $\mathcal{U}_1; \mathcal{U}_2$  disjunktní, pak délka (obsah, objem) jejich sjednocení je rovna součtu délek (obsahů, objemů) těchto dvou útvarů, tj.  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset \Rightarrow \mu^*(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) = \mu^*(\mathcal{U}_1) + \mu^*(\mathcal{U}_2)$ , kde  $\mu^*$  by mělo značit míru množiny (kterou nazýváme speciálně délka, obsah či objem podle dimenze příslušného útvaru). V našem příkladu máme  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{I} = \emptyset$ , přitom je  $\mu^*(\mathcal{Q} \cup \mathcal{I}) = \mu^*(\mathcal{R}) = 1$ , ale  $\mu^*(\mathcal{Q}) + \mu^*(\mathcal{I}) = 2$ . Naše předchozí úvahy je tedy třeba precizovat, což učiníme v následující kapitole.

## 7. 2 Míra a dimenze

**1 Definice -  $\sigma$  algebra:** Neprázdný systém  $S = \{S_i\}_{i \in I}$  podmnožin množiny  $M$  se nazývá  $\sigma$  algebra na množině  $M$  právě tehdy, když

$$a) S_i \in S \Rightarrow M - S_i \in S$$

$$b) \{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq S \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \in S$$

**2 Definice – vnější míra a míra na  $\sigma$  algebře:** Necht'  $S$  je  $\sigma$  algebra a  $\mu^*: S \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazení takové, že

$$a) \forall A \in S: \mu^*(A) \geq 0$$

$$b) \mu^*(\emptyset) = 0$$

$$c) \text{ jsou – li } S_i \in S \text{ po dvou disjunktní, pak } \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S_i)$$

Je-li v bodě c) vždy rovnost, pak vnější míru  $\mu^*$  nazýváme mírou a značíme  $\mu$ .

**3 Definice –  $\mu^*$ -měřitelná množina:** Necht'  $\mu^*$  je vnější míra. Množina  $A \in S$  se nazývá  $\mu^*$ -měřitelná právě tehdy, když pro každou množinu  $T \in S$  platí

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T - A) \quad (7.2.1)$$

**4. Příklad:** Vrátime-li se k příkladu 9 předchozí kapitoly, pak  $\mu^*$  by mělo značit míru, je to však jen vnější míra. Položíme-li totiž  $M = \mathcal{R}$ ;  $S = \{\mathcal{Q}; I; \mathcal{R}; \emptyset\}$ , pak  $S$  je podle definice 1  $\sigma$  algebra na množině  $M = \mathcal{R}$ . Označme nyní  $S_1 = \mathcal{Q}$ ;  $S_2 = I$  a pro  $i > 2$  pak  $S_i = \emptyset$ . Pak náš systém  $S = \{S_i\}_{i \in I}$  splňuje v definici 2 pouze nerovnost, nikoliv však rovnost. To má za následek další problém: Označíme-li  $T = \mathcal{R}$ ;  $A = \mathcal{Q}$ , narazíme na problém, který jsme zmínili již v závěru minulé kapitoly – v definici 3 totiž je

$$\begin{aligned} \mu^*(T) &= \mu^*(\mathcal{R}) = 1 \\ \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T - A) &= \mu^*(\mathcal{Q}) + \mu^*(I) = 2 \end{aligned}$$

takže není splněn vztah (7.2.1). Množiny  $\mathcal{Q} = \langle 0; 1 \rangle \cap \mathbb{Q}$ ;  $I = \langle 0; 1 \rangle - \mathbb{Q}$  jsou vnější mírou  $\mu^*$  z předchozí kapitoly neměřitelné.

**5 Definice – průměr množiny:** Necht'  $(M; \varrho)$  je metrický prostor. Průměrem množiny  $A$  rozumíme číslo  $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} \varrho(x, y)$ .

**6 Definice – hustá množina, separabilní metrický prostor:** Množina  $A$  je hustá v metrickém prostoru  $(M; \varrho)$  právě tehdy, když  $\bar{A} = M$ , tj. jejím uzávěrem (viz def. 4 kpt. 4.1) je celá množina  $M$ . Metrický prostor  $(M; \varrho)$  nazýváme separabilní právě tehdy, když v něm existuje hustá podmnožina.

**7 Hausdorffova a mřížková vnější míra:** Necht'  $(M; \varrho)$  je separabilní metrický prostor, na kterém definujeme tyto množinové funkce:

$$*H_n^{(s)}(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^s \mid \text{diam } A_{nk} \leq \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.7.2)$$

resp.

$$*G_n^{(s)}(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^s \mid \text{diam } A_{nk} = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.7.3)$$

kde  $I$  je nejvýše spočetná indexová množina. Lze ukázat, že množinové funkce

$$\begin{aligned} *H^{(s)}(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} *H_n^{(s)}(A) \\ *G^{(s)}(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} *G_n^{(s)}(A) \end{aligned}$$

jsou vnější míry na množině  $2^M$  všech podmnožin množiny  $M$  a jejich restrikce  $H^{(s)}(A)$ ;  $G^{(s)}(A)$  na množiny měřitelné vnějšími mírami  $*H^{(s)}(A)$ ;  $*G^{(s)}(A)$  jsou mírami na  $2^M$ . Vnější míru  $*H^{(s)}$  resp. míru  $H^{(s)}$  nazýváme  $s$ -dimenzionální („zjednodušenou“) vnější Hausdorffovou mírou resp. („zjednodušenou“) Hausdorffovou mírou, vnější míru  $*G^{(s)}$  resp. míru  $G^{(s)}$  nazýváme  $s$ -dimenzionální vnější mřížkovou mírou resp. mřížkovou mírou.

Množinu měřitelnou  $H^{(s)}$  mírou resp.  $G^{(s)}$  mírou budeme nazývat  $H$ -měřitelnou resp.  $G$ -měřitelnou.

Přívlastek „zjednodušená“ prozatím není podstatný a budeme ho zatím vynechávat. Vrátime se k němu v odst. 10.

Jak je vidět ze (2.7.2) a (2.7.3) mřížková míra je speciálním případem Hausdorffovy míry. To znamená, že je-li množina  $G$ -měřitelná, pak je  $H$ -měřitelná. Obrácená věta však neplatí. Vraťme se nyní k př. 4, kde jsme ukázali, že množiny  $\mathcal{Q} = \langle 0; 1 \rangle \cap \mathbb{Q}$ ;  $\mathcal{I} = \langle 0; 1 \rangle - \mathbb{Q}$  nejsou  $G$ -měřitelné, a ukažme, že jsou  $H$ -měřitelné. Měřili jsme délku těchto množin, tj. jejich míru v dimenzi jedna.

Uvažujme tedy množinu  $\mathcal{Q} = \langle 0; 1 \rangle \cap \mathbb{Q}$ . Tato množina je spočetná, lze ji tedy zapsat jako posloupnost  $\mathcal{Q} = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Položme nyní

$$A_{nk} = \langle q_k - 2^{-k \cdot n}; q_k + 2^{-n \cdot k} \rangle$$

Protože pro každé  $k \in \mathbb{N}$  je  $\{q_k\} \subset A_{nk}$ , máme

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{k \in I} \{q_k\} \subset \bigcup_{k \in I} \langle q_k - 2^{-k \cdot n}; q_k + 2^{-n \cdot k} \rangle = \bigcup_{k \in I} A_{nk}$$

Protože

$$\text{diam } A_{nk} = \text{diam } \langle q_k - 2^{-k \cdot n}; q_k + 2^{-n \cdot k} \rangle = 2^{1-k \cdot n} \leq \frac{1}{n}$$

je

$$*H^{(1)}(\mathcal{Q}) = \inf_{\mathcal{Q} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \sum_{k \in I} \text{diam } A_{nk} = \inf_{\mathcal{Q} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \sum_{k \in I} 2^{1-k \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$$

Již v předchozí kapitole jsme zjistili, že  $*G^{(1)}(\mathcal{R}) = *G^{(1)}\langle 0; 1 \rangle = 1$  (zde uvedená „fraktální míra“ je totiž zřejmě vnější mřížková míra), podobně  $*G^{(1)}(\mathcal{I}) = 1$  a dále víme, že  $*G^{(1)}(\mathcal{R}) = *H^{(1)}(\mathcal{R})$ ;  $*G^{(1)}(\mathcal{I}) = *H^{(1)}(\mathcal{I})$ . Je tedy

$$*H^{(1)}(\mathcal{R}) = 1; *H^{(1)}(\mathcal{I}) = 1; *H^{(1)}(\mathcal{Q}) = 0 \Rightarrow *H^{(1)}(\mathcal{R}) = *H^{(1)}(\mathcal{Q}) + *H^{(1)}(\mathcal{I})$$

Množiny  $\mathcal{Q}$ ;  $\mathcal{I}$ ;  $\mathcal{R}$  tedy splňují podmínku měřitelnosti (7.2.1). Tuto podmínku lze ověřit zcela obecně, tj. pro každou u množin  $\mathcal{Q}$ ;  $\mathcal{I}$ ;  $\mathcal{R}$  lze použít libovolnou „testovací“ množinu  $T \subseteq \mathbb{R}$ . Všechny tyto množiny jsou tedy  $H$ -měřitelné.  $G$ -měřitelná je pouze množina  $\mathcal{R} = \langle 0; 1 \rangle$ .

Nyní se dá dokázat tvrzení, které jsme v předchozí kapitole označili jako hypotézu 6, s tím, že je třeba ho vyslovit pro  $H$ -měřitelné resp.  $G$ -měřitelné množiny. Uvedeme bez důkazu. Tato věta následně opravňuje ke korektní definici  $H$ -dimenze resp.  $G$ -dimenze:

**8 Věta - Hausdorffova a mřížková dimenze:** Pro každou  $H$ -měřitelnou resp.  $G$ -měřitelnou množinu  $A$  platí buď

a) pro každé  $d > 0$  je  $H^{(d)}(A) = 0$  resp.  $G^{(d)}(A) = 0$   
anebo

b) existuje  $D > 0$  tak, že

$$\alpha) 0 < H^{(D)}(A) < \infty \text{ resp. } 0 < G^{(D)}(A) < \infty$$

$$\beta) \text{ pro každé } d < D \text{ je } H^{(d)}(A) = \infty \text{ resp. } G^{(d)}(A) = \infty$$

$$\gamma) \text{ pro každé } d > D \text{ je } H^{(d)}(A) = 0 \text{ resp. } G^{(d)}(A) = 0$$

Číslo  $D$  pak nazýváme Hausdorffovou resp. mřížkovou dimenzí množiny  $A$  ( $H$ -dimenzí resp.  $G$ -dimenzí). V případě a) klademe  $D = 0$ . V literatuře se většinou uvádí následující definice:

**9 Definice - Hausdorffova a mřížková dimenze:**  $H$ -dimenzí  $D_H(A)$  resp.  $G$ -dimenzí  $D_G(A)$   $H$ -měřitelné resp.  $G$ -měřitelné množiny  $A$  rozumíme číslo

$$D_H(A) = \sup\{d \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} \mid H^{(d)}(A) = \infty\} = \inf\{d \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} \mid H^{(d)}(A) = 0\}$$

$$D_G(A) = \sup\{d \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} \mid G^{(d)}(A) = \infty\} = \inf\{d \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} \mid G^{(d)}(A) = 0\}$$

Nyní můžeme upřesnit definici fraktálu:

**10 Definice - fraktál:** Fraktálem rozumíme množinu, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než dimenze topologická.

Kromě Hausdorffovy a mřížkové dimenze existuje mnoho dalších definic dimenzí, které připouštějí neceločíselné hodnoty. V literatuře bývají označovány jako dimenze fraktální.

**11 Hausdorffova míra:** Vraťme se nyní k výrazu (2.7.2), který jsme v odst 7 nazvali „zjednodušenou“ mírou. Hodnota tohoto výrazu stačí k určení dimenze, neboť pro  $s = 1; 2; 3$  již splňuje obecné požadavky kladené na délku, obsah a objem. Má-li však být skutečně roven běžně chápané délce, obsahu či objemu, je třeba ho modifikovat. Pro  $s = 1$  je sice skutečně roven délce měřené křivky, pro  $s = 2$  však není roven běžně chápanému obsahu a pro  $s = 3$  není roven objemu. Infimum sice zaručuje, že pokrývajicí kruhy či koule se nepřekrývají, výraz  $(\text{diam } A_{nk})^2$  však není roven obsahu kruhu ale opsaného čtverce (viz obr. 7.2.1), výraz  $(\text{diam } A_{nk})^3$  není roven objemu koule, ale jí opsané krychle. Je-li tedy množinou  $A$  kruh, je  $H^{(2)}(A) \frac{4}{\pi}$  násobek hledaného obsahu;  $H^{(3)}(A)$  pak  $\frac{6}{\pi}$  násobek hledaného objemu. Aby výraz  $H^{(2)}(A)$  určoval běžně chápaný obsah a  $H^{(3)}(A)$  běžně chápaný objem je třeba míru  $H^{(s)}$  násobit vhodnou funkcí  $\alpha(s)$ , jejíž funkční hodnoty jsou  $\alpha(1) = 1$ ;  $\alpha(2) = \frac{\pi}{4}$  a  $\alpha(3) = \frac{\pi}{6}$ . Touto funkcí je funkce

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2^s \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} \quad (2.7.4)$$

kde

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (2.7.5)$$

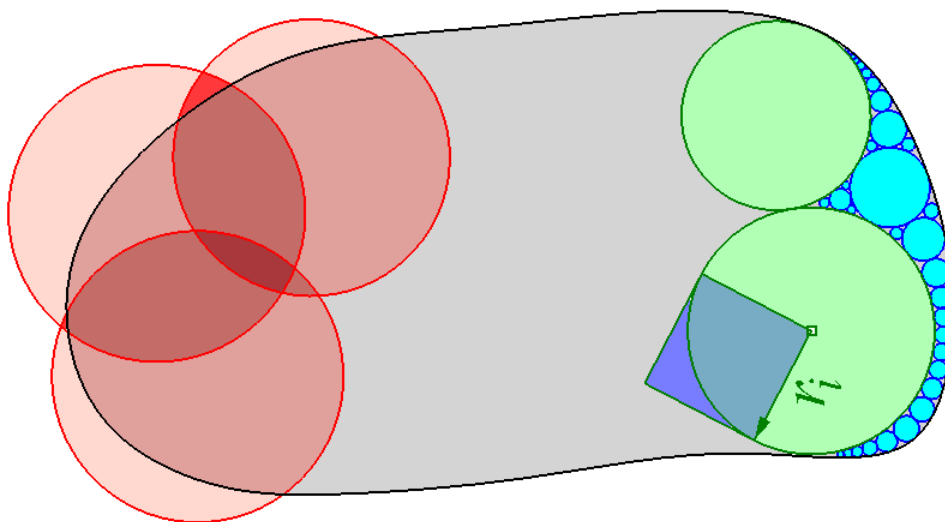
je tzv. gama funkce. Je to vyšší transcendentní funkce, tj. funkce, jejíž hodnoty až na výjimky nelze určit metodami, které známe ze základního kurzu matematiky. Existují však tabulky jejích funkčních hodnot i různé kalkulátory, které jsou schopny tyto hodnoty určit. Zde uveďme jen ty, které jsou potřeba k určování měř v celočíselných dimenzích:

$$s = 1: \quad \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$s = 2: \quad \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \Gamma(2.5) = 1$$

$$s = 3: \quad \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \Gamma(3.5) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

Výraz (2.7.2) korigovaný funkcí  $\alpha(s)$  je pak již pro  $s = 1; 2; 3$  roven délce, obsahu a objemu útvaru a poskytuje i „velikost“ (míru) útvarů i v neceločíselných dimenzích.



Obr. 7.2.1: K Hausdorffově míře

Hausdorffovou mírou útvaru  $\mathcal{U}$  v dimenzi  $s$  rozumíme tedy hodnotu výrazu

$$H^{(s)}(A) = \alpha(s) \cdot \inf_{A \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^s \mid \text{diam } A_{nk} \leq \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.7.6)$$

kde funkce  $\alpha(s)$  je určena rovnicemi (2.7.4) a (2.7.5).

**11 Příklad:** Určete Hausdorffovu míru kruhu a koule.

**Řešení:** Infimální (v tomto případě dokonce minimální) pokrytí kruhu resp. koule o poloměru  $r$  je jediný kruh resp. koule o poloměru  $r$ . Dimenze kruhu je  $D = 2$ , koule  $D = 3$ . Je tedy

Kruh:

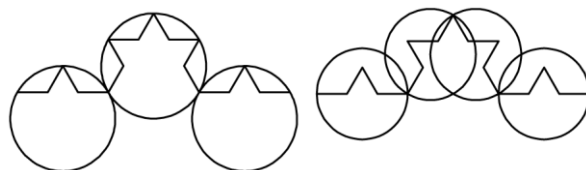
$$H^{(2)}(\mathcal{K}) = \alpha(2) \cdot \inf_{\mathcal{K} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^2 \dots \right\} = \frac{\pi^{\frac{2}{2}}}{2^2 \cdot \Gamma\left(\frac{2}{2} + 1\right)} \cdot (2r)^2 = \pi r^2$$

Koule:

$$H^{(3)}(\mathcal{K}) = \alpha(3) \cdot \inf_{\mathcal{K} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^3 \dots \right\} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} \cdot (2r)^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

**4. Příklad:** Odhadněme Hausdorffovu míru Kochovy křivky, jejíž koncové body mají vzdálenost  $1m$ .

**Řešení:** Nabízejí se dvě možnosti, jak vytvořit pokrytí – buď tak, že v první iteraci budou tři kruhy opsané rovnostrannému trojúhelníku se stranou  $\frac{1}{3}$ , tj. kruhy s průměrem  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  (viz obr. 7.2.2 vlevo), anebo čtyři kruhy s průměrem  $\frac{1}{3}$  (obr. 7.2.2 vpravo). Obsah pokrytí je v prvním případě  $\frac{9\pi}{144}$ , ve druhém  $\frac{\pi}{9}$ . Můžeme tedy předpokládat, že infimální pokrytí je první z nich.



Obr. 7.2.2: K Hausdorffově míře Kochovy křivky

V každé další aproximaci klesne průměr kruhů na třetinu a jejich počet vzroste čtyřikrát. Kruhy se nepřekrývají, je tedy

$$H^{(D)}(\mathcal{K}) = \alpha(D) \cdot \inf_{\mathcal{K} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^D \dots \right\} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{2^D \cdot \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}^D}{6^D} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{Dn}} =$$

$$= \frac{3 \cdot \pi^{\frac{\ln 4}{2 \ln 3}}}{\Gamma\left(\frac{\ln 4}{2 \ln 3} + 1\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^{\frac{\ln 4}{\ln 3}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n \cdot \ln 4}}{e^{n \cdot \ln 4}} \approx \frac{3^{1,892\,78\dots} \cdot \pi^{0,630\,92\dots}}{12^{1,261\,85\dots} \cdot \Gamma(0,630\,92\dots)} \approx 0,503\,72\dots$$

Jak je vidět, výpočet Hausdorffovy míry je velmi komplikovaný už i u velmi jednoduchých útvarů. U všech „nefraktálních“ množin jsou však míry  $H^{(1)}$ ;  $H^{(2)}$  a  $H^{(3)}$  rovny jejich délce, obsahu resp. objemu. Na pracné výpočty Hausdorffových měr jsme tak odkázáni jen u fraktálů. U nich však ke srovnání větší-menší stačí dimenze, takže míra nemá praktický význam.

### 7. 3 Box Counting

Výhodou Hausdorffovy dimenze je skutečnost, že je velmi obecná, a tedy použitelná na velmi širokou třídu množin. Nevýhodou této obecnosti je však velmi obtížný výpočet. Proto existuje řada dalších dimenzí, které jsou jednodušší a vhodné pro počítačové zpracování. Jednu z nich jsme již uvedli – jedná se o dimenzi **mřížkovou**. Její softwarová implementace je následující:

V definičním vztahu pro mřížkovou míru (2.7.3) použijeme čtvercovou (Čebyševovu) metriku (viz kpt. 2. 3 a obr. 2.3.2). Čebyševovské kruhy resp. koule jsou euklidovské čtverce či krychle, průměrem čebyševovských kruhů či koulí je strana čtverce resp. hrana krychle. Abychom zjistili infimální pokrytí, které vyžaduje vztah (2.7.3), bereme do sjednocení  $\bigcup_k A_{nk}$  jen ty čtverce resp. krychle  $A_{nk}$ , pro které je  $A_{nk} \cap A \neq \emptyset$ . V softwarových implementacích můžeme pracovat vždy jen s konečnými množinami, takto sestrojený systém  $\{A_{nk}\}$  je tedy vždy konečný. Počet prvků tohoto systému pro konkrétní  $n \in \mathbb{N}$  označme  $p_n$ . Ze vztahu (2.7.3) tak obdržíme

$$*G_n^{(D)}(A) \approx \sum_{i=1}^{p_n} (\text{diam } A_{nk})^D = \sum_{i=1}^{p_n} \left(\frac{1}{n}\right)^D = p_n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^D$$

tedy

$$*G_n^{(D)}(A) \approx p_n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^D \quad (7.3.1)$$

Dospěli jsme ke stejnému vztahu jako (7.1.3) v kpt. 7. 1. “Velikostí” pokrývajících množiny je zde velikost strany čtverce (hrany krychle)  $\frac{1}{n}$ , konstantou, která v (7.1.3) nebyla blíže specifikována, je hodnota vnější mřížkové míry. Ze (7.1.3) dostaneme

$$p_n \approx *G_n^{(D)}(A) \cdot n^D$$

Logaritmováním máme

$$\ln p_n \approx D \cdot \ln n + \ln *G_n^{(D)}(A) \quad (7.3.2)$$

Je to (přibližně) lineární závislost

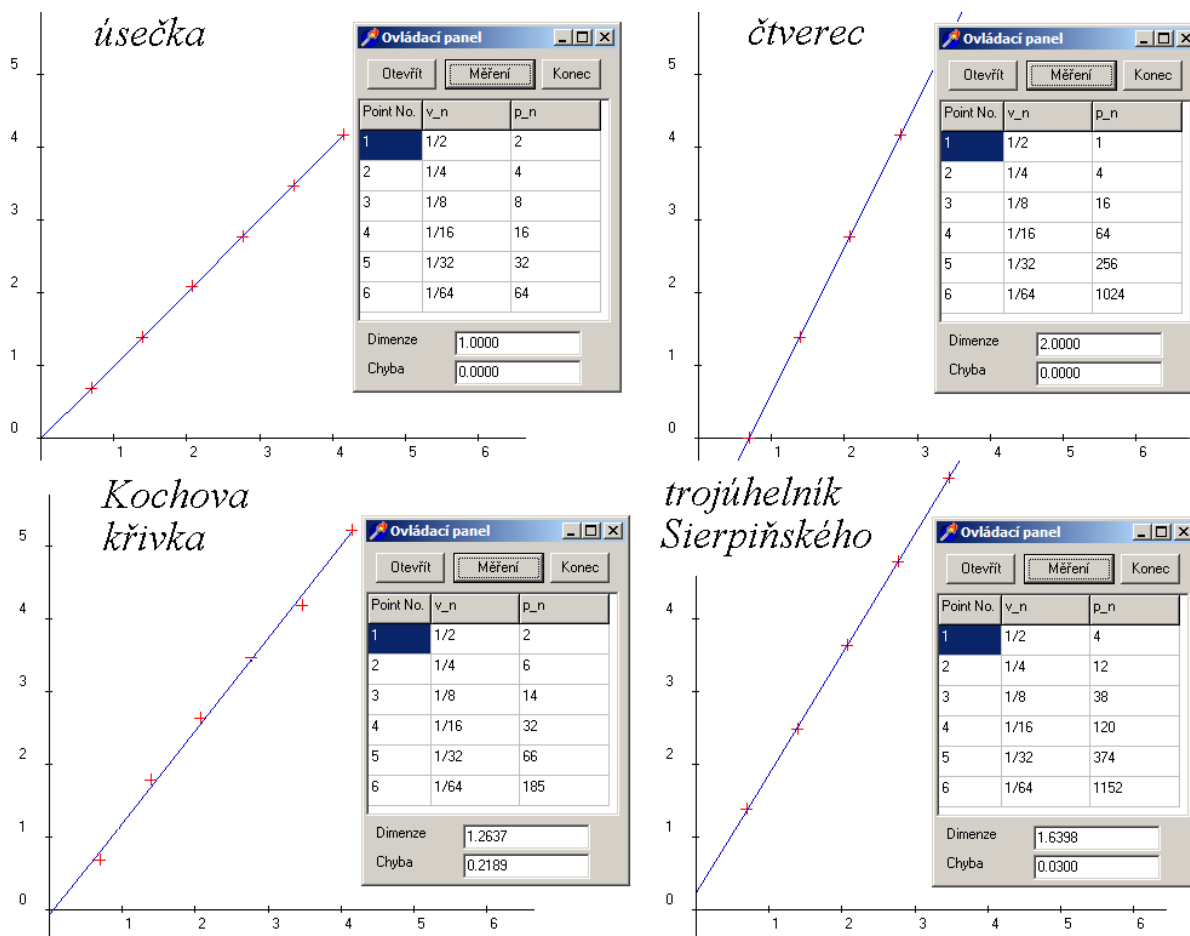
$$y_n \approx k \cdot x_n + q$$

kde  $x_n$  je měnící se velikost čtvercové mřížky,  $y_n$  je dáno měnícím se počtem pokrývajících čtverců. Z jednotlivých měření tedy dostaneme body  $P_n = [x_n; y_n]$ , kterými je třeba proložit



přímku metodou nejmenších čtverců. Její směrnici je hledaná dimenze. Hodnota aditivní konstanty  $q$  souvisí s mírou měřené množiny.

Na připojených obrázcích si můžete prohlédnout některé výsledky. Měřené útvary byly vygenerovány na obrázku s rozlišením 1024×1024. U úsečky a čtverce program zaznamenal přesně lineární resp. kvadratickou závislost mezi celkovým počtem čtverců a čtverců potřebných k pokrytí. Přímka tedy prochází přesně zadanými body a dimenze těchto útvarů vychází zcela přesně. U složitějších útvarů dává tento nejjednodušší algoritmus výsledky pouze přibližné, přesnost měření závisí do značné míry na kvalitě vygenerovaného obrázku a jeho vzájemné poloze s pokrývací sítí.



**Obr. 7.3.1:** Měření dimenze metodou Box-Counting

Z výrazu (7.3.2) můžeme vyjádřit dimenzi

$$D \approx \frac{\ln p_n}{\ln n} - \frac{\ln *G_n^{(D)}(A)}{\ln n}$$

a přechodem k limitě obdržíme

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln p_n}{\ln n} - \frac{\ln *G_n^{(D)}(A)}{\ln n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln p_n}{\ln n}$$

Tato limita je v literatuře známá jako box counting dimenze.

## 7.4 Soběpodobnost a soběpříbuznost

Sierpiňského trojúhelník, čtverec i Kochova křivka mají ještě jednu zajímavou vlastnost, která je znázorněna na obr. 7.4.1. Sierpiňského trojúhelník vznikne sjednocením tří „zmenšených kopií“ sebe sama. Přesněji řečeno: zobrazíme-li tento útvar ve stejnolehlostech se středy ve vrcholech výchozího trojúhelníka s koeficientem  $\frac{1}{2}$  a tyto obrazy sjednotíme, dostaneme původní útvar. Podobnou vlastnost mají i Sierpiňského čtverec a Kochova křivka.

**1. Definice - soběpodobnost:** Útvar  $\mathcal{U}$  je soběpodobný právě tehdy, když existují podobná zobrazení  $Z_i$ ;  $i = 1; 2; \dots; p$  taková, že

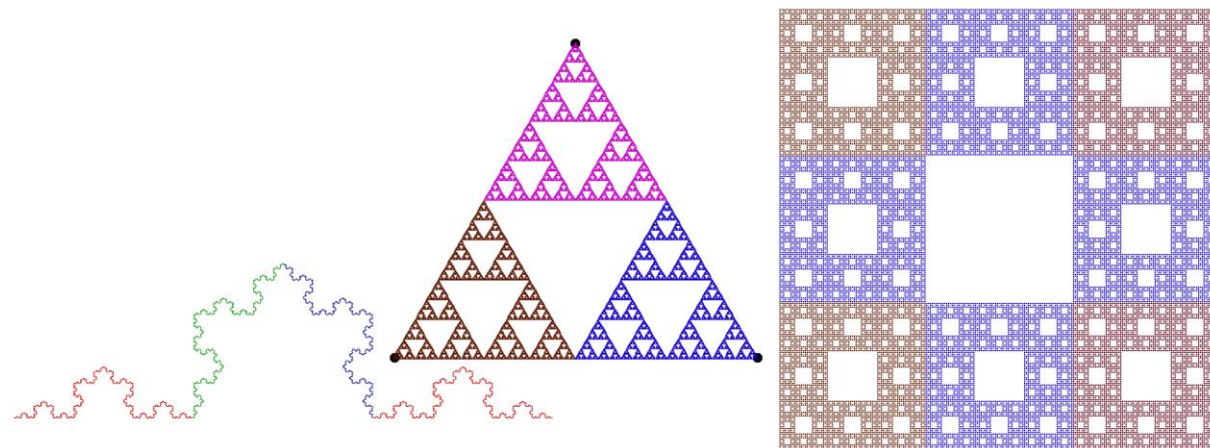
$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^p Z_i(\mathcal{U}) \quad (7.4.1)$$

Soběpodobný je například trojúhelník Sierpiňského. Zde jsou podobnými zobrazeními  $Z_i$  stejnolehlosti se středy ve vrcholech trojúhelníka a společným koeficientem  $\lambda = \frac{1}{2}$ , tedy např.

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{Z}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pro  $\Delta ABC: A[0; 0]; B[2; 0]; C[2; \sqrt{3}]$

Soběpodobná je i Kochova křivka (zde jsou to dvě stejnolehlosti a dvě obecnější podobná zobrazení složená ze stejnolehlosti a rotace). Soběpodobné jsou i mnohé útvary, které nejsou fraktály („obyčejný“ trojúhelník a čtverec, rovnoběžník apod.).



Obr. 7.4.1: Soběpodobnost

**2. Hausdorffova dimenze soběpodobných množin:** Zajímavý je vztah mezi soběpodobností a Hausdorffovou dimenzí. Podle definice je Hausdorffova dimenze je rovna  $D > 0$  právě tehdy, když

$$0 < H^{(D)}(\mathcal{U}) = \alpha(D) \inf_{\mathcal{U} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^D \dots \right\} < \infty$$

Jsou-li nyní  $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_p$  koeficienty „tvořících“ podobných zobrazení  $Z_i$  ze (7.4.1), pak

$$H^{(D)}(\mathcal{U}) = \alpha(D) \inf_{\mathcal{U} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{i=1}^p (\lambda_i \cdot \text{diam } \mathcal{U})^D \dots \right\} = \underbrace{\alpha(D) \inf_{\mathcal{U} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} (\text{diam } \mathcal{U})^D}_{H^{(D)}(\mathcal{U})} \sum_{i=1}^p \lambda_i^D$$

Tedy

$$H^{(D)}(\mathcal{U}) = H^{(D)}(\mathcal{U}) \cdot \sum_{i=1}^p \lambda_i^D$$

$$\lambda_1^D + \lambda_2^D + \dots + \lambda_p^D = 1 \quad (7.4.2)$$

V případech, kdy  $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_p$  jsou různá čísla, lze rovnici (7.4.2) řešit numericky. V případě, že  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$ , je

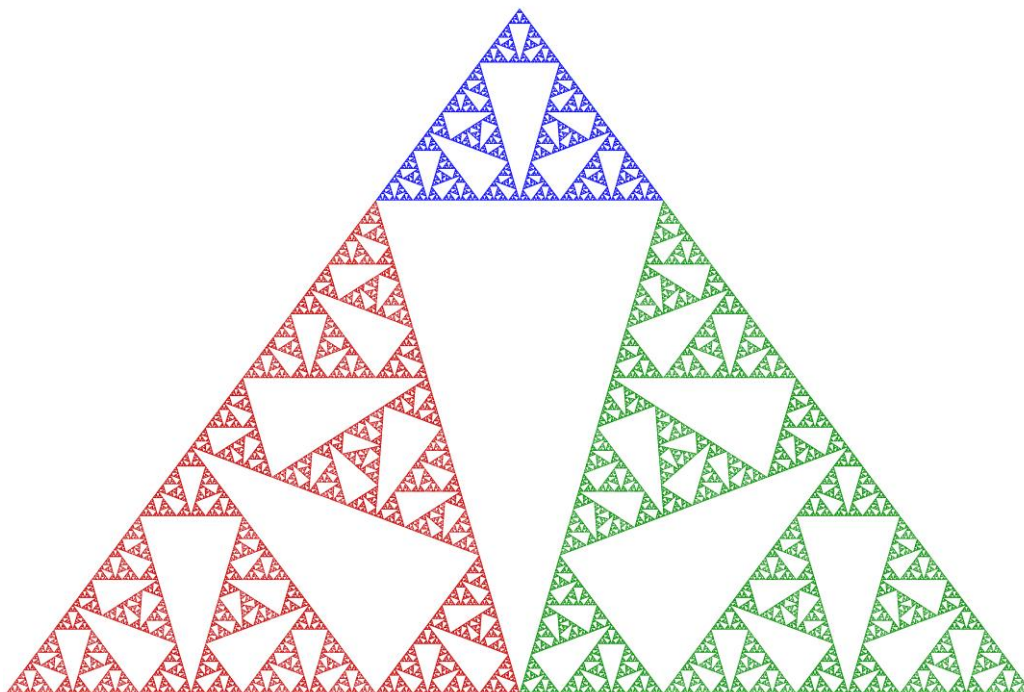
$$\lambda_1^D + \lambda_2^D + \dots + \lambda_p^D = p \cdot \lambda^D = 1 \Rightarrow D = \frac{\ln p}{\ln \frac{1}{\lambda}} \quad (7.4.3)$$

Např. Sierpinského trojúhelník je sjednocením tří svých kopií ( $p = 3$ ) zmenšených na polovinu ( $\frac{1}{\lambda} = 2$ ), dle (7.4.3) je dimenze tedy  $D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ . U Sierpinského čtverce je  $p = 8$ ;  $\frac{1}{\lambda} = 3$ ; tedy  $D = \frac{\ln 8}{\ln 3}$ . Kochova křivka:  $p = 4$ ;  $\frac{1}{\lambda} = 3$ ; tedy  $D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ . „Obyčejný“ čtverec je sjednocením např. čtyř kopií zmenšených na polovinu ( $D = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$ ) nebo devíti kopií zmenšených na třetinu ( $D = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2$ ). „Obyčejný“ trojúhelník  $p = 4$ ;  $\frac{1}{\lambda} = 2$  nebo  $p = 16$ ;  $\frac{1}{\lambda} = 4$ , tedy opět  $D = 2$ . Promyslete pro úsečku!

**3. Příklad:** Určeme Hausdorffovu dimenzi fraktálního trojúhelníku určeného zobrazeními  $\mathcal{T}_1$ ;  $\mathcal{T}_2$ ;  $\mathcal{T}_3$  s maticemi

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0 \\ 0.48 & -0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.48 & 0.64 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} -0.28 & 0 & 0.64 \\ 0 & 0.28 & 0.48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(viz obr. 7.4.2).



**Obr. 7.4.2:** Fraktální trojúhelník k příkladu 3.

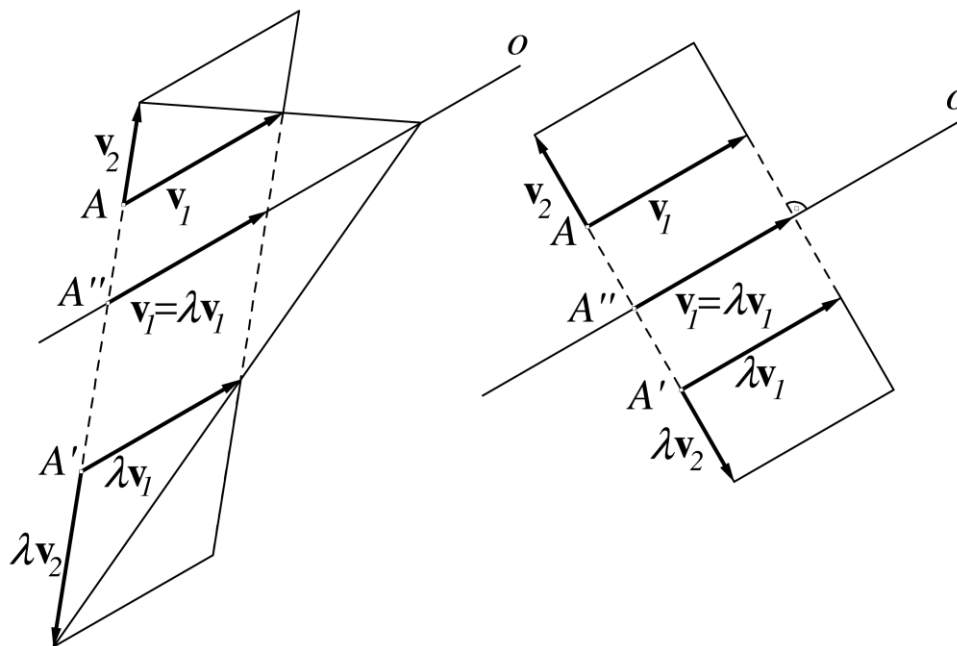
**Řešení:** S dosavadními znalostmi máme dvě možnosti, jak úlohu řešit. Za prvé trojúhelník naskenovat z obr. 7.4.2 měřit dimenzi na naskenovaném obraze metodou box counting z předchozí kapitoly. Výsledek by však zřejmě byl značně nepřesný. Stejná myšlenka by

vedla k přesnějšímu výsledku, kdybychom uměli zadaný trojúhelník sestavit – ani to však prozatím neumíme. Druhou možností je využití soběpodobnosti a vztahů (7.4.2) a (7.4.3). Nejdříve je však třeba zodpovědět dvě otázky – zda je daný trojúhelník soběpodobný, a pokud ano, jaké jsou hodnoty  $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ .

Je tedy třeba identifikovat složky složených geometrických zobrazení daných maticemi  $\mathbf{T}_1; \mathbf{T}_2; \mathbf{T}_3$ . Je to úloha inverzní k příkladům, které jsme řešili v kpt. 3.3., 3.6. a 4.5.

Aby daná matice byla maticí podobnosti, nesmí to být matice středové kolineace s vlastním středem. Ve všech našich třech případech má kolineace střed nevlastní – zaručuje to třetí řádek matic  $\mathbf{T}_1; \mathbf{T}_2; \mathbf{T}_3$ . Ve všech třech případech se tedy jedná o afinní zobrazení. Z hlediska jeho analýzy jsou nejdůležitější tzv. samodružné útvary, tj. útvary, které se daným zobrazením zobrazují samy na sebe. Například samodružné body zobrazení  $\mathbf{T}_3$  bychom zjistili řešením maticové rovnice  $\mathbf{X}^T = \mathbf{T}_3 \mathbf{X}^T$ . V našem případě bude ale důležitější identifikovat osu a směr afinity (a v případě osy stačí rovněž jen její směr). Není tedy třeba uvažovat posunutí, Stačí tedy pracovat pouze v zaměření  $Z(\mathcal{E}^2)$  euklidovské roviny  $\mathcal{E}^2$ , což je vektorový prostor. Naše tři afinní zobrazení se tak redukují na lineární zobrazení vektorového prostoru určené submaticemi druhého řádu sestavenými z prvních dvou sloupců resp. řádků matic  $\mathbf{T}_1; \mathbf{T}_2; \mathbf{T}_3$ , označme je  $\bar{\mathbf{T}}_1; \bar{\mathbf{T}}_2; \bar{\mathbf{T}}_3$ .

Afinitu  $\mathcal{A}: A \rightarrow A'$ , která nás v každém ze tří složených zobrazení zajímá, charakterizují dva parametry: samodružné směry a tzv. charakteristika afinity, což je dělicí poměr  $(A; A'; A'')$ , kde  $A'' \in AA' \cap o$  (viz obr. 7.4.3).



**Obr. 7.4.3:** Samodružné směry (vlastní čísla a vlastní vektory) v osově afinitě a souměrnosti

Z obr. 7.4.3 je například zřejmé, že afinita zachovává vektory určující směr afinity – jsou to samodružné vektory. Pro zobrazení  $\mathbf{T}_1$  bychom samodružný vektor  $\mathbf{v}$  získali řešením rovnice  $\mathbf{v}^T = \bar{\mathbf{T}}_1 \mathbf{v}^T$ . Naše afinita je však pouze jednou složkou složeného zobrazení a může být složena například se stejnoolehlostí, která vektor  $\mathbf{v}^T$  následně zvětší či zmenší na jeho násobek  $\lambda \cdot \mathbf{v}^T$ . Navíc je třeba najít nikoli samodružný vektor, ale samodružný směr, který, jak víme, je možné reprezentovat libovolným nenulovým násobkem kteréhokoliv směrového vektoru. Řešíme tedy rovnici

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \mathbf{v}^T &= \bar{\mathbf{T}}_1 \mathbf{v}^T \\ \bar{\mathbf{T}}_1 \mathbf{u}^T - \lambda \cdot \mathbf{v}^T &= \mathbf{o}^T \\ (\bar{\mathbf{T}}_1 - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}^T &= \mathbf{o}^T\end{aligned}\quad (7.4.4)$$

Číslo  $\lambda$ , které vyhovuje této rovnici, se nazývá vlastní číslo matice  $\mathbf{T}_1$ , vektor  $\mathbf{v}$  je vlastní vektor. Vektor  $\mathbf{v}$  identifikuje samodružný směr zobrazení, číslo  $\lambda$  udává kontrakci či dilataci v příslušném samodružném směru. Rovnice (7.4.4) má zřejmě vždy řešení – totiž  $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ . Toto (tzv. triviální) řešení ovšem nepřispěje k řešení našeho problému, protože nulový vektor není vektorem směrovým. Musíme tedy hledat nenulové řešení. To existuje právě tehdy, když determinant soustavy je roven nule, tedy

$$\det(\bar{\mathbf{T}}_1 - \lambda \cdot \mathbf{E}) = |\bar{\mathbf{T}}_1 - \lambda \cdot \mathbf{E}| = 0 \quad (7.4.5)$$

Jedná se o tzv. **charakteristickou rovnici zobrazení**. V našem konkrétním případě dostáváme:

$$\left| \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 \\ 0.48 & -0.36 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0.36 - \lambda & 0.48 \\ 0.48 & -0.36 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Odtud

$$\lambda_{1;2} = \pm 0.6$$

Již nyní tedy můžeme říci, že složené zobrazení  $\mathcal{T}_1$  obsahuje obecnou osovou afinitu nebo osovou souměrnost a stejnoolehlost s koeficientem 0.6. Samotná afinita či souměrnost má totiž alespoň kladné vlastní číslo rovno jedné (viz obr. 7.4.3). O dalším rozhodneme po výpočtu vlastních vektorů. Ty získáme dosazením vlastních čísel do rovnice (7.4.4):

Vlastní vektor  $\mathbf{v}_1$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda_1 = +0.6$ :

$$\begin{aligned}(\bar{\mathbf{T}}_1 - \lambda_1 \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}_1^T &= \mathbf{o}^T \\ \left( \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 \\ 0.48 & -0.36 \end{pmatrix} - 0.6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.36 - 0.6 & 0.48 \\ 0.48 & -0.36 - 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení (hledáme totiž směr) – můžeme vybrat libovolného nenulového reprezentanta. Volme tedy např.  $\mathbf{v}_1 = (2; 1)$ . Tento vektor určuje směr osy (proč?).

Pro vlastní číslo  $\lambda_2 = -0.6$  dostáváme zcela analogicky  $\mathbf{v}_2 = (-1; 2)$ . Tento vektor určuje směr afinity (proč?).

Vektory  $\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2$  jsou ortogonální a mají stejnou velikost, znamená to, že tato afinita je osovou souměrností. Zobrazení  $\mathcal{T}_1$  je tedy složeno z osové souměrnosti se směrem osy  $\mathbf{v}_1 = (2; 1)$ , dále ze stejnoolehlosti s koeficientem 0.6 a z posunutí. Vektor posunutí, ani přesné umístění osy souměrnosti či středu stejnoolehlosti není pro řešení našeho problému podstatné. I z informacemi, které máme, můžeme totiž konstatovat, že zobrazení  $\mathcal{T}_1$  převede daný trojúhelník na jeho kopii zmenšenou koeficientem 0.6.

Zopakujeme-li celý postup pro zobrazení  $\mathcal{T}_2$ , dostaneme  $\lambda'_{1;2} = \pm 0.6$ ;  $\mathbf{v}'_1 = (-2; 1)$ ;  $\mathbf{v}'_2 = (1; 2)$ . Opět se tedy jedná o podobnost s koeficientem 0.6. Konečně pro zobrazení  $\mathcal{T}_3$  vychází  $\lambda''_{1;2} = \pm 0.28$ ;  $\mathbf{v}''_1 = (0; 1)$ ;  $\mathbf{v}''_2 = (1; 0)$  – podobnost, tentokrát s koeficientem 0.28.

Naše výsledky jsou ilustrovány na obr. 7.4.4. Náš trojúhelník je tedy soběpodobný – skládá se ze dvou kopií zmenšených na 0.6 a jedné kopie zmenšené na 0.28. Dle (7.4.2) máme tedy pro jeho dimenzi rovnici

$$0.6^D + 0.6^D + 0.28^D = 1$$

jejímž (numerickým) řešením dostaneme  $D = 1.622\ 339 \dots$

**Obr. 7.4.4:** Zmenšené kopie fraktálního trojúhelníka z obr. 7.4.3

**2. Soběpříbuznost (self-affinity):** je zobecněním soběpodobnosti. Soběpříbuzným útvarům nazýváme útvar, který je sjednocením konečného počtu svých vlastních obrazů v afinních zobrazeních, jejichž modul je menší než jedna. Útvar  $\mathcal{U}$  je soběpříbuzný právě tehdy, když existují afinity  $Z_i$ ;  $i = 1; 2; \dots; p$  taková, že

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^p Z_i(\mathcal{U}) \quad (7.4.4)$$

Afinní zobrazení nemusí být podobností. Může to být speciálně 2D-scaling, tj. zobrazení, které „zkracuje“ ve směrech souřadných os v různých poměrech. Takto je často soběpříbuznost (úzce a nesprávně) dokonce definována. Soběpříbuzný útvar tedy není sjednocením svých zmenšených kopií, díky konečnému počtu afinit však v útvaru můžeme vypořizovat donekonečna se opakující části, které se svým tvarem příliš neliší a lidské oko je schopno je identifikovat jako stále se opakující motivy. Fraktál na obr. 7.4.2 vlevo je sjednocením pěti svých kopií v afinitách určených maticemi

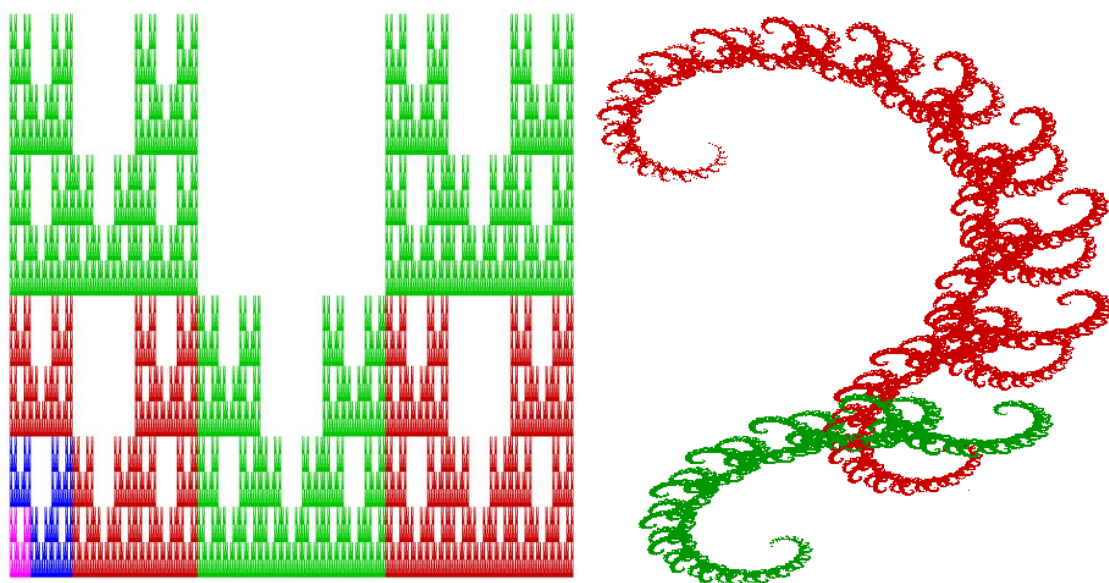
$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{M}_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afinity zkracují jeho kopie ve směru osy  $x$  třikrát, zatímco ve směru osy  $y$  jen dvakrát. Celý fraktál je vepsán do čtverce, zatímco jeho zelené a červené kopie mají poměr stran  $x:y = 2:3$ , modrá kopie už  $x:y = 4:9$ ; růžová  $x:y = 8:27$  atd. Fraktál na obr. 7.4.2 vpravo je sjednocením dvou svých obrazů v afinitách určených maticemi

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 & 3 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{M}_{12} = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.4 & 8 \\ 0.3 & -0.3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Právě soběpříbuznost je typická prakticky pro všechny přírodní útvary od vesmíru jako celku přes strukturu listu a tvar mraků či krajiny pokračujíc až po větvení žil v organismech. Fraktál na obr. 7.4.1 nám při troše fantazie může připomínat mořského koníka. Fraktály na obr. 7.5.5 už asi fantazii nevyžadují vůbec. Byly vytvořeny metodou, o které pojednáme v následující kapitole.



Obr. 7.4.1: Soběpříbuznost

Předtím ovšem prostudujeme ještě jednu záležitost. Opět zde totiž máme zajímavý vztah mezi soběpříbuzností a Hausdorffovou dimenzí. Jsou-li zobrazení  $Z_i$  v (7.4.4) afinity, pak každá z nich je určena maticí

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}$$

Matice je pouze třetího řádu – nepracujeme totiž v projektivním, ale v euklidovském prostoru, kde je každá afinita tvaru  $X'^T = \mathbf{Z} \cdot X^T + \mathbf{v}^T$ ; kde  $X = [x_1; x_2; x_3]$ ;  $X' = [x'_1; x'_2; x'_3]$  a  $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$  je vektor posunutí, který nemá na míru vliv, a proto ho nebudeme dále uvažovat.

Využijeme opět čtvercové metriky a budeme tedy měřený útvar  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}^2$  pokrývat čtverci resp. útvar  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}^3$  krychlemi, pak se každý čtverec resp. krychle zobrazí do rovnoběžníku resp. do rovnoběžnostěnu. Proto se při stanovení změny míry jakéhokoliv útvaru v  $\mathcal{E}^2$  resp.  $\mathcal{E}^3$  stačí omezit na zobrazení rovnoběžníků resp. rovnoběžnostěnů. Předpokládejme, že rovnoběžnostěn v  $\mathcal{E}^3$  je určen trojicí lineárně nezávislých vektorů  $\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}$ . Ty se v afinitě  $Z_i$  zobrazí na vektory

$$\mathbf{a}'^T = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{a}^T; \quad \mathbf{b}'^T = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{b}^T; \quad \mathbf{c}'^T = \mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{c}^T$$

nebo

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Z}_i^T; \quad \mathbf{b}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Z}_i^T; \quad \mathbf{c}' = \mathbf{c} \cdot \mathbf{Z}_i^T$$

tedy

$$(a'_1; a'_2; a'_3) = (a_1; a_2; a_3) \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} = ((\mathbf{a}; \mathbf{z}_1); (\mathbf{a}; \mathbf{z}_2); (\mathbf{a}; \mathbf{z}_3)) \quad (7.4.5)$$

kde  $\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3$  značí první, druhý resp. třetí sloupec matice  $\mathbf{Z}_i^T$ . Podobně

$$(b'_1; b'_2; b'_3) = ((\mathbf{b}; \mathbf{z}_1); (\mathbf{b}; \mathbf{z}_2); (\mathbf{b}; \mathbf{z}_3)) \quad (7.4.6)$$

$$(c'_1; c'_2; c'_3) = ((\mathbf{c}; \mathbf{z}_1); (\mathbf{c}; \mathbf{z}_2); (\mathbf{c}; \mathbf{z}_3)) \quad (7.4.7)$$

Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory  $\mathbf{a}'; \mathbf{b}'; \mathbf{c}'$  je, jak známo, v  $\mathcal{E}^3$  dán jejich smíšeným součinem, takže z rovnic (7.4.5), (7.4.6) a (7.4.7) máme



$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}; \mathbf{z}_1) & (\mathbf{a}; \mathbf{z}_2) & (\mathbf{a}; \mathbf{z}_3) \\ (\mathbf{b}; \mathbf{z}_1) & (\mathbf{b}; \mathbf{z}_2) & (\mathbf{b}; \mathbf{z}_3) \\ (\mathbf{c}; \mathbf{z}_1) & (\mathbf{c}; \mathbf{z}_2) & (\mathbf{c}; \mathbf{z}_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{11} & z_{21} & z_{31} \\ z_{12} & z_{22} & z_{32} \\ z_{13} & z_{23} & z_{33} \end{vmatrix}$$

tedy

$$V(\mathbf{a}'; \mathbf{b}'; \mathbf{c}') = \det \mathbf{Z}_i^T \cdot V(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}) = \det \mathbf{Z}_i \cdot V(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c})$$

Pro obsah rovnoběžníku určeného vektory  $\mathbf{a}'; \mathbf{b}'$  v  $\mathcal{E}^2$  bychom dostali analogicky

$$S(\mathbf{a}'; \mathbf{b}'; \mathbf{c}') = \det \mathbf{Z}_i \cdot S(\mathbf{a}; \mathbf{b})$$

Průměr krychle (čtverce) stejného objemu (obsahu) ve čtvercové metrice je

$$\text{diam } A'_{nk} = \sqrt[3]{\det \mathbf{Z}_i \cdot V(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c})} = \sqrt[3]{\det \mathbf{Z}_i} \cdot \text{diam } A_{nk} \quad \text{v } \mathcal{E}^3$$

resp.

$$\text{diam } A'_{nk} = \sqrt{\det \mathbf{Z}_i \cdot S(\mathbf{a}; \mathbf{b})} = \sqrt{\det \mathbf{Z}_i} \cdot \text{diam } A_{nk} \quad \text{v } \mathcal{E}^2$$

Pro vnější míru soběpříbuzného fraktálu  $\mathcal{U}$  vytvořeného sjednocením  $p$  kopií sama sebe sestrojených v afinitách určených maticemi  $\mathbf{Z}_i$ ;  $i = 1; 2; \dots; p$  tedy dostáváme v  $\mathcal{E}^2$

$$\begin{aligned} H^{(D)}(\mathcal{U}) &= \alpha(D) \inf_{\mathcal{U} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\text{diam } A'_{nk})^D \dots \right\} = \\ &= \alpha(D) \inf_{\mathcal{U} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{k \in I} (\sqrt{\det \mathbf{Z}_i} \cdot \text{diam } A_{nk})^D \dots \right\} = \\ &= \alpha(D) \inf_{\mathcal{U} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \left\{ \sum_{i=1}^p \left[ (\sqrt{\det \mathbf{Z}_i})^D \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^D \right] \dots \right\} = \\ &= \underbrace{\alpha(D) \inf_{\mathcal{U} \subseteq \bigcup_k A_{nk}} \sum_{k \in I} (\text{diam } A_{nk})^D}_{H^{(D)}(\mathcal{U})} \sum_{i=1}^p (\sqrt{\det \mathbf{Z}_i})^D = H^{(D)}(\mathcal{U}) \sum_{i=1}^p (\sqrt{\det \mathbf{Z}_i})^D \end{aligned}$$

tedy

$$H^{(D)}(\mathcal{U}) = H^{(D)}(\mathcal{U}) \sum_{i=1}^p (\sqrt{\det \mathbf{Z}_i})^D$$

Odtud

$$\sum_{i=1}^p (\sqrt{\det \mathbf{Z}_i})^D = 1 \quad (7.4.8)$$

V  $\mathcal{E}^3$  pak analogicky

$$\sum_{i=1}^p (\sqrt[3]{\det \mathbf{Z}_i})^D = 1 \quad (7.4.9)$$

Rovnice (7.4.8), (7.4.9) s neznámou dimenzí řešíme numericky. Determinanty matic  $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_5$  určujících soběpříbuzný fraktál na obr. 7.4.1 vlevo jsou  $\det \mathbf{M}_i = \frac{1}{6}$ ; pro dimenzi tohoto fraktálu tedy podle (7.4.8) dostáváme



$$\sum_{i=1}^5 (\sqrt{\det \mathbf{M}_i})^D = 1 \Rightarrow 5 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^D = 1 \Rightarrow D = 2 \cdot \frac{\ln 5}{\ln 6} \approx 1.796\,488 \dots$$

Pro fraktál na obr. 7.4.1 vpravo máme

$$(\sqrt{\det \mathbf{M}_{11}})^D + (\sqrt{\det \mathbf{M}_{12}})^D = 1 \Rightarrow (\sqrt{0.73})^D + (\sqrt{21})^D = 1 \Rightarrow D \approx 1.796\,161 \dots$$

## 7.5 Iterační systémy

**1. Obecná iterační metoda:** se používá při hledání přibližného řešení rovnic tvaru  $x = g(x)$ . Spočívá v tom, že počáteční aproximace (startovací bod)  $x_0$  se dosadí do pravé strany, čímž obdržíme první aproximaci tvaru  $x_1 = g(x_0)$ . Tento postup se neustále opakuje, takže obecně je  $x_{k+1} = g(x_k)$ . Například v rovnici  $x = -\frac{1}{6}(x^2 + 5)$  zvolme  $x_0 = 0$ , pak je

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{6}(x_0^2 + 5) = -\frac{1}{6}(0^2 + 5) = -\frac{5}{6} = -0,833\,33 \dots \\ x_2 &= -\frac{1}{6}(x_1^2 + 5) = -\frac{1}{6}\left(\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + 5\right) = -0,949\,07 \dots \\ x_3 &= -\frac{1}{6}(x_2^2 + 5) = -\frac{1}{6}\left(\left(-0,949\,07 \dots\right)^2 + 5\right) = -0,983\,45 \dots \\ x_4 &= -\frac{1}{6}(x_3^2 + 5) = -\frac{1}{6}\left(\left(-0,983\,45 \dots\right)^2 + 5\right) = -0,994\,53 \dots \end{aligned}$$

atd. Přitom přesné řešení rovnice je  $x = -1$  (jak se můžeme snadno přesvědčit dosazením). Tato metoda ovšem funguje (konverguje) pouze za předpokladu, že rovnice  $x = g(x)$  definuje kontraktivní zobrazení.

**2. Iterační systém:** je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ x_2 &= f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ &\dots \\ x_n &= f_n(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

a studium podmínek, za kterých systém konverguje, je obecně velmi složité. Moderní výpočetní technika však umožňuje iterační procesy efektně vizualizovat.

**3. Juliovy množiny:** Jsou množiny všech startovacích bodů, ze kterých iterační proces systému (7.5.1) konverguje. Množiny nesou jméno francouzského matematika **Gastona Maurice Julia** (1893 – 1978), který zkoumal konvergenční procesy rovnic tvaru  $z = z^2 + C$  v oboru komplexních čísel. Tuto rovnici lze přepsat do tvaru

$$z_1 + z_2 \cdot i = (z_1 + z_2 \cdot i)^2 + c_1 + c_2 \cdot i; \quad z_1; z_2; c_1; c_2 \in \mathbb{R}$$

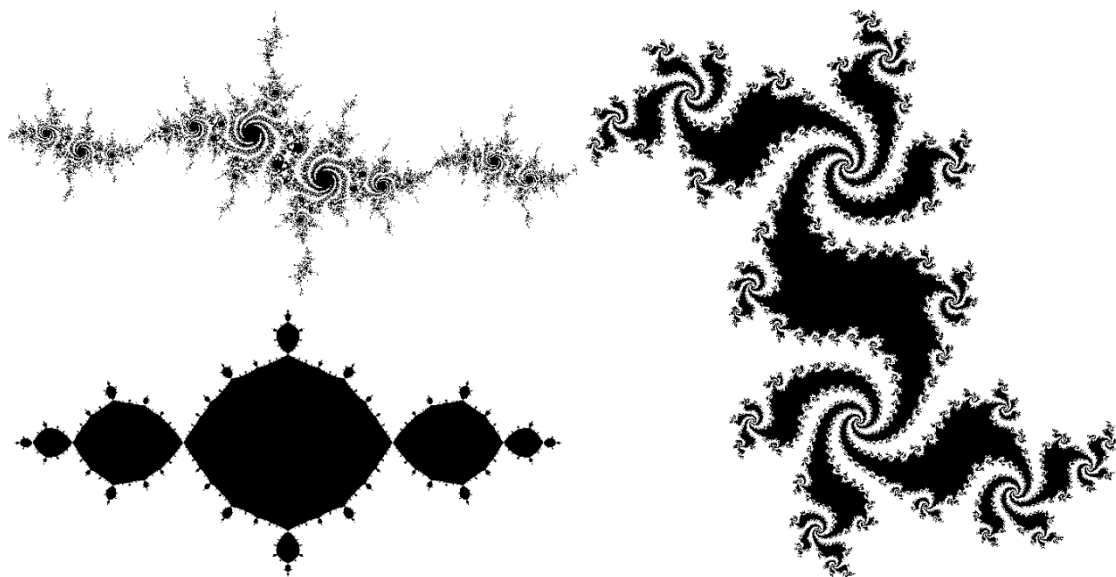
Porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1^2 - z_2^2 + c_1 \\ z_2 &= 2z_1z_2 + c_2 \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

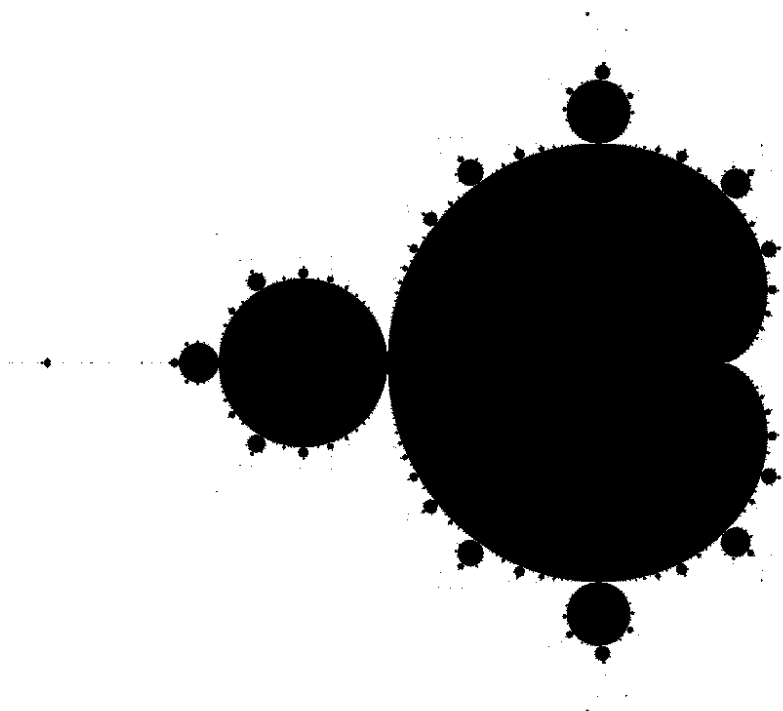
tedy speciální tvar soustavy (7.5.1). Pro každé komplexní číslo  $C$  dostáváme jinou soustavu (7.5.2), tedy jinou Juliovu množinu. Na obr. (7.5.1) jsou Juliovy množiny pro  $C = -1.2 + 0.154i$ ;  $C = -1 + 0i$  a  $C = 0.24 + 0.54i$ .

**4. Mandelbrotovy množiny:** Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) se zabýval problémem, pro která  $C$  je Juliova množina souvislá, a sestrojil tímto způsobem množinu, která dnes nese jeho

jméno. Zatímco k rovnici  $z = z^2 + C$  existuje nekonečně mnoho Juliových množin, Mandelbrotova množina této rovnice je generována jen jedna (viz obr. 7.5.2).



**Obr. 7.5.1:** Juliovy množiny rovnice  $z = z^2 + C$  pro různá  $C \in \mathbb{C}$



**Obr. 7.5.2:** Mandelbrotova množina rovnice  $z = z^2 + C$

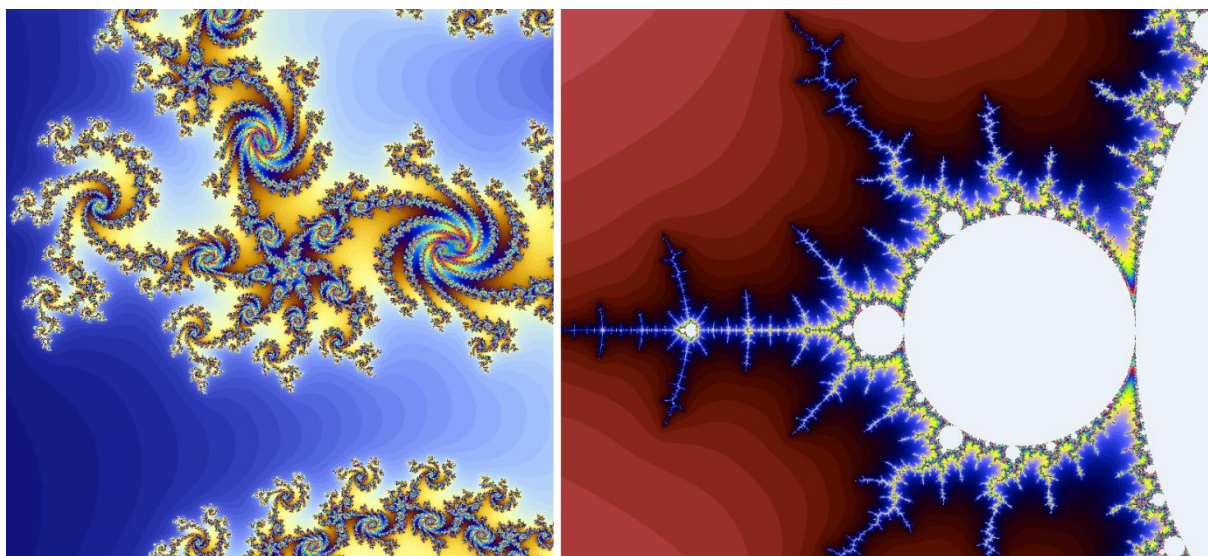
Přesto je množné číslo v úvodu tohoto odstavce oprávněné – podobným způsobem lze totiž použít i jiné rovnice. Na obr. 7.5.3 je Mandelbrotova množina rovnice  $z = \cos z + C$ . Množina rovnice  $z = z^2 + C$  je souměrná podle reálné osy, množina  $z = \cos z + C$  je navíc díky (komplexnímu) kosinu „periodická“.

Hranice Juliových resp. Mandelbrotových množin patří k „nejčlenitějším“ množinám. Jsou to křivky – mají topologickou dimenzi jedna, jsou však členitější než Sierpiňského čtverec – Hausdorffova dimenze Mandelbrotova množiny je dvě.

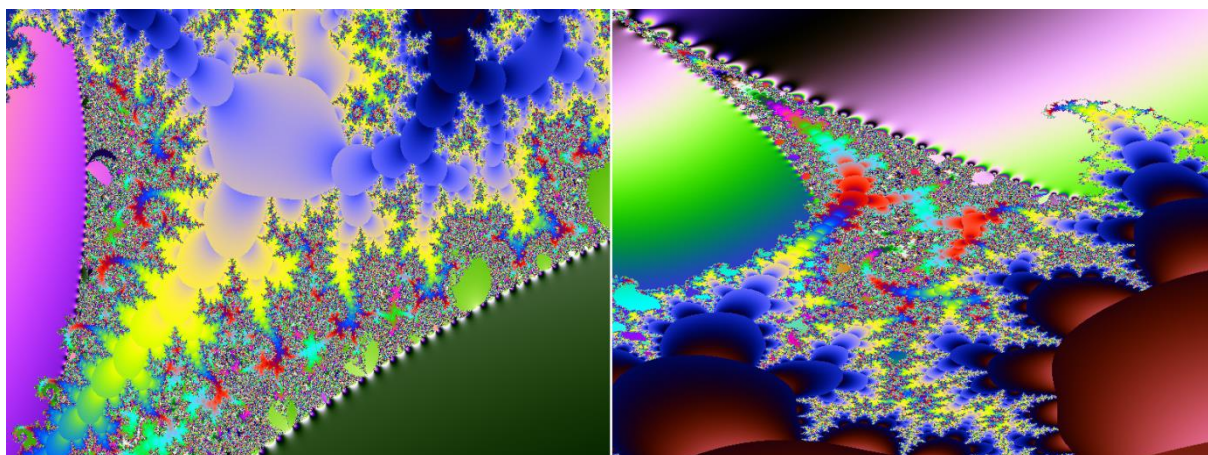


**Obr. 7.5.2:** Mandelbrotova množina rovnice  $z = \cos z + C$

**5. Obarvovací algoritmy** – při vykreslování Juliových a Mandelbrotových množin se používají nejrůznější obarvovací algoritmy. Ten nejjednodušší (**Escape algorithm**) obarvuje každý pixel, který do množiny nepatří, podle rychlosti, s jakou je tato skutečnost zjištěna. Jednou z mnoha dalších možností jsou např. **normalizované iterace** – barva je volena podle vzdálenosti posledních dvou zjištěných iterací. Byly to právě barevné Juliovy a Mandelbrotovy množiny, které podstatně přispěly k popularizaci fraktální geometrie.



**Obr. 7.5.3:** Detail Juliovy a Mandelbrotovy množiny – obarveno Escape algoritmem



**Obr. 7.5.4:** Detail Mandelbrotovy množiny rovnice  $z = \sin z + C$  (vlevo) a  $z = \cos z + C$  (vpravo), obarveno Normalized Iteration algoritmem

**6. Iterační systémy funkcí (IFS)** – iterační systémy definované soustavou (7.5.1) podrobují každý bod transformacím, které obecně nezobrazují přímku na přímku. Je-li však soustava (7.5.1) lineární, definuje projektivní zobrazení, které lze definovat maticí. Jsou tedy definovány konečným počtem projektivních zobrazení, kterými v každém kroku prochází startovací bod. Je-li např. tento systém tvořen třemi stejnolehlostmi se středy ve třech nekolineárních bodech a s koeficienty 0.5, pak startovací bod vytvoří Sierpiňského trojúhelník. Na obr. 7.5.5 si můžeme prohlédnout množiny vytvořené systémy určenými maticemi

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.05 & 0 \\ -0.05 & 0.83 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

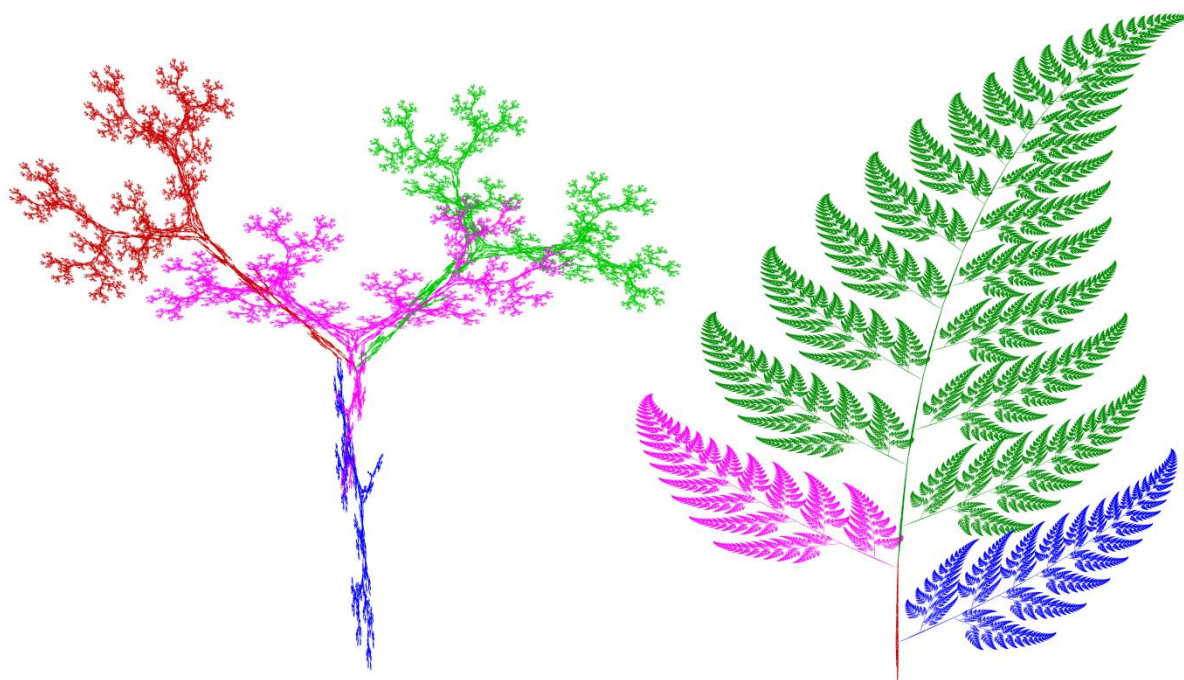
resp.

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0.195 & -0.488 & 0.443 \\ 0.344 & 0.443 & 0.245 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0.462 & 0.414 & 0.251 \\ -0.252 & 0.361 & 0.569 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} -0.058 & -0.070 & 0.598 \\ 0.453 & -0.111 & 0.097 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} -0.637 & 0 & 0.856 \\ 0 & 0.501 & 0.251 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V konkrétních algoritmech ovšem není možné startovací bod podrobovat vždy všem transformacím, neboť počet takto generovaných bodů by exponenciálně narůstal a způsobil by přetečení největší paměti. Tento problém se většinou řeší tak, že v každém kroku je generátorem náhodných čísel vybrána vždy jen jedna transformace, které je bod podroben. V každém kroku se tedy bod ocitne jakoby na křižovatce, kde si vylosuje další cestu. Proto je tento algoritmus nazýván **metodou náhodné procházky**. Touto metodou byly vytvořeny i fraktály na obr. 7.4.1. a 7.5.5. Metodou náhodné procházky byl sestaven i fraktální trojúhelník na obr. 7.5.6, který nám v následujícím příkladu pomůže při výpočtu dimenze podle vzorců (7.4.3) a (7.4.8).





Obr. 7.5.5: Příklady iteračních systémů funkcí (IFS)

**7. Příklad:** Určeme Hausdorffovu dimenzi soběpříbuzné množiny určené maticemi

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0 \\ 0.48 & -0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0.64 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} -0.28 & 0 & 0.64 \\ 0 & 0.28 & 0.48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Řešení:** Podle 7.4.8 máme

$$\sum_{i=1}^5 (\sqrt{\det \mathbf{M}_i})^D = 1$$

## 7. 6 Dynamické systémy

**Dynamickým systémem** rozumíme systém, který je definován pomocí konečného počtu podmínek, které popisují změnu systému v čase. Množina všech možných stavů systému tvoří tzv. **stavový prostor**, konkrétní stav systému v libovolném časovém okamžiku je opět popsán konečnou posloupností hodnot – stavovým vektorem. Jestliže podle daných podmínek necháme systém vyvíjet se v čase, vzniká ve stavovém prostoru buď křivka (jestliže parametr reprezentující čas je spojitý), anebo množina bodů reprezentujících konkrétní stavy (je-li časový parametr diskrétní). Množina stavů, ke kterým systém konverguje pro  $t \rightarrow \infty$ , se nazývá **atraktor**. Dynamické systémy mohou být **stabilní**, anebo **nestabilní**, a to podle toho, jak reagují na změnu vstupních parametrů. Atraktorem stabilního systému je buď bod, anebo uzavřená křivka, atraktorem nestabilního systému jiná množina.

V tomto smyslu je dynamickým systémem např. i metoda náhodné procházky zmiňovaná v závěru předchozí kapitoly. Počátečním stavem je startovací bod, počátečními podmínkami jsou transformace, kterým má být vystaven. Každý iterační krok představuje časový okamžik, atraktorem je množina sestavená po „dostatečném počtu kroků“. Projektivní systémy jsou zcela necitlivé pokud jde o startovací bod – metodu náhodné procházky můžeme startovat ze

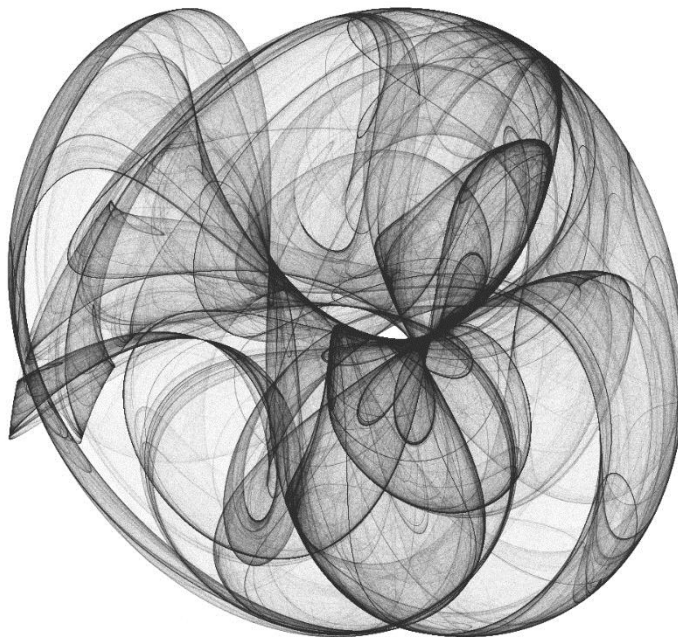
zcela libovolného bodu, výsledkem je vždy identický atraktor (strom či kapradina podle zvolených transformací). S citlivostí vůči nepatrným změnám transformací to už je složitější. Například Juliova množina je extrémně citlivá na změnu parametru  $C$ , citlivost projektivních systémů závisí na podmíněnosti matic příslušných projektivních transformací.

Pomocí dynamických systémů lze studovat jevy závislé na mnoha parametrech, jejichž přesný vliv lze obtížně předvídat, např. vodní víry, turbulence apod. Na obr. 7.6.1 si můžeme prohlédnout tzv. Cliffordův atraktor – atraktor dynamického systému popsaného soustavou rovnic

$$\begin{aligned}x &= \sin 1.5y + 1.6 \cos 1.5x \\y &= 0.9 \cos 1.8y - \sin 1.8x\end{aligned}$$

### 7.7 $L$ -systémy

$L$ -systémy byly navrženy maďarským biologem **Aristidem Lindenmayerem** v r. 1968 (**Lindenmayerovy systémy**) jako formální matematický nástroj popisu růstu řas. Dnes jsou využívány především k modelování morfologie rostlin. Ve své nejjednodušší podobě je  $L$ -systém formálně trojice množin  $L = (\Sigma; S; P)$ , kde  $\Sigma$  je množina přípustných symbolů,  $S$  je množina axiomů, které definují počáteční stav systému a  $P$  je množina přepisovacích pravidel, která umožňují generovat další stavy. Tyto stavy se posléze interpretují pomocí tzv. želví grafiky, kde želva reprezentuje kreslicí zařízení. Její stav je popsán polohou a orientací.



**Obr. 7.6.1:** Cliffordův atraktor

- 1. Příklad – Kochova křivka jako  $L$ -systém:** Uvažujme  $L$ -systém  $L = (\Sigma; S; P)$ , v němž je  
**abeceda** obsahuje tři znaky  $\Sigma = \{F; +; -\}$   
**axiomem** je znak  $F$ , tedy  $S = \{F\}$   
**a přepisovacím pravidlem**  $P = \{F \rightarrow F + F - -F + F\}$   
(což značí, že znak  $F$  se vždy přepisuje posloupností  $F + F - -F + F$ )

Možné stavy tohoto  $L$ -systému tedy jsou:

$$\begin{array}{c}
 F \\
 F + F - -F + F \\
 \underbrace{F + F - -F + F}_F + \underbrace{F + F - -F + F}_F - - \underbrace{F + F - -F + F}_F + \underbrace{F + F - -F + F}_F
 \end{array}$$

atd. Grafická interpretace určuje „cestu“ pro kreslicí zařízení (želvu):

$F$  - krok vpřed;  $+$  otoč se o  $60^\circ$  v kladném smyslu;  $-$  otoč se o  $60^\circ$  v záporném smyslu

Je-li tedy želva v počátku souřadné soustavy a orientována ve směru osy  $x$ , je

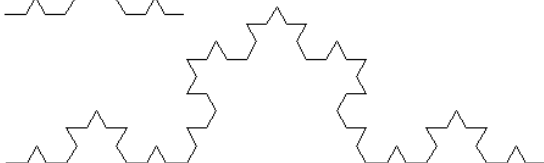
první možný stav



druhý možný stav



třetí možný stav



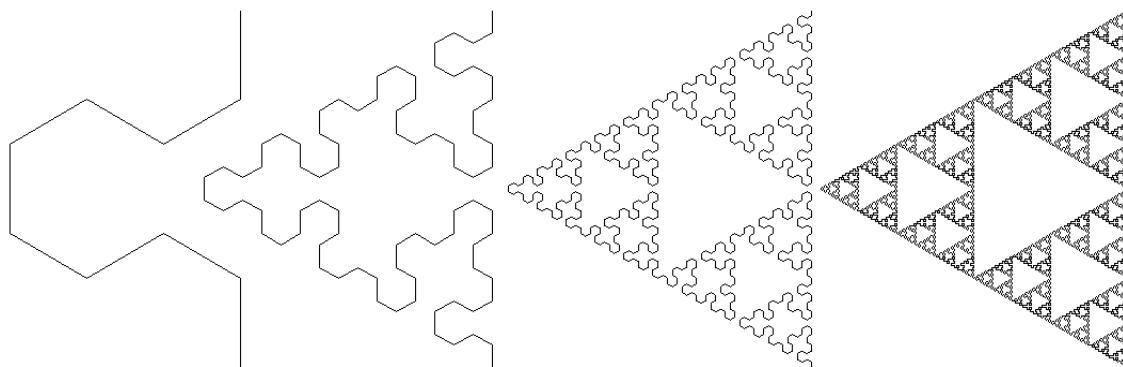
**2. Příklad – Sierpiňského trojúhelník jako  $L$ -systém:** Vhodným  $L$ -systémem lze rovněž „uplést“ Sierpiňského trojúhelník. Přidáme jeden znak a jedno přepisovací pravidlo:

**abeceda:**  $\Sigma = \{F; G; +; -\}$

**axiom:**  $S = \{F\}$

**přepisovací pravidla:**  $P = \{F \rightarrow G - F - G; G \rightarrow F + G + F\}$

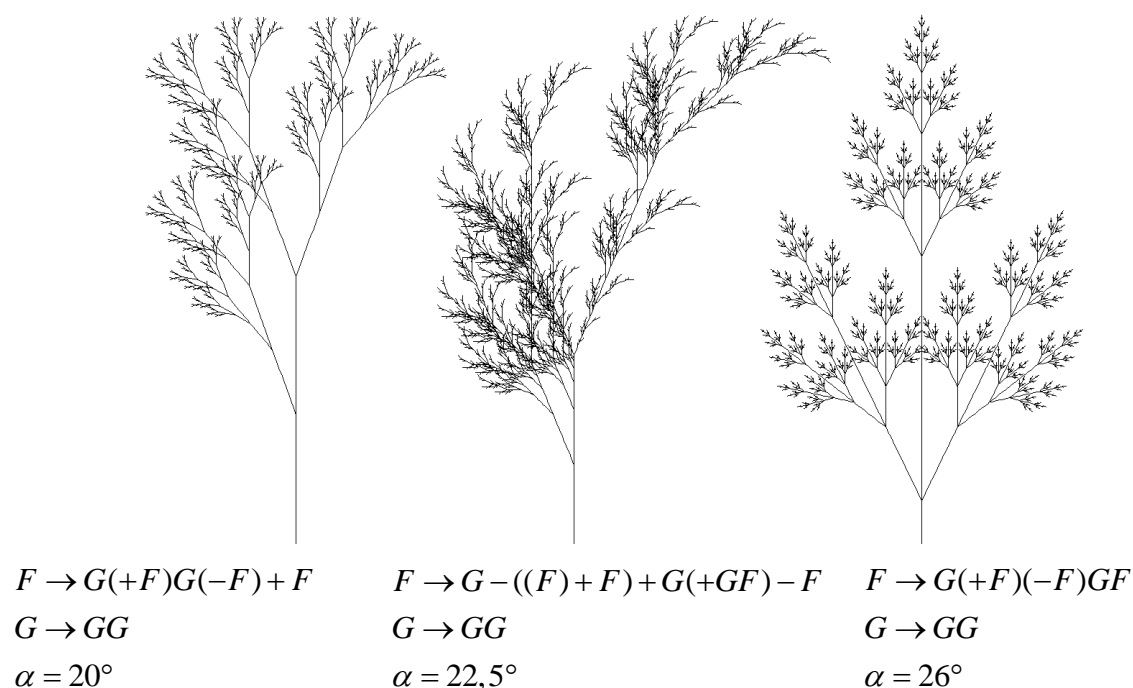
Interpretace je stejná jako v předchozím příkladu:  $F; G$  - krok vpřed;  $+$  otoč se o  $60^\circ$  v kladném smyslu;  $-$  otoč se o  $60^\circ$  v záporném smyslu. Na obr. 7.7.1 vidíme některé možné stavy (krok každého následujícího stavu je z technických důvodů vždy zkrácen):



**Obr. 7.7.1:** Sierpiňského trojúhelník jako  $L$ -systém

Jak bylo řečeno v úvodu této kapitoly, jsou  $L$ -systémy využívány především k modelování morfologie rostlin. K tomu je třeba umožnit  $L$ -systému větvení, a to pomocí závorek.

**3. Příklad – modelování morfologie rostlin:** Abeceda, axiom i grafická interpretace jsou stejné, jako v předchozím případě. Levá závorka znamená uložení stavu želvy do zásobníku, pravá pak vyzvednutí stavu ze zásobníku. Modely se liší přepisovacími pravidly a úhlem  $\alpha$ , o který se otáčí (uvedeno u jednotlivých výstupů):



**Obr. 7.7.2:** Modelování morfologie rostlin pomocí  $L$ -systémů

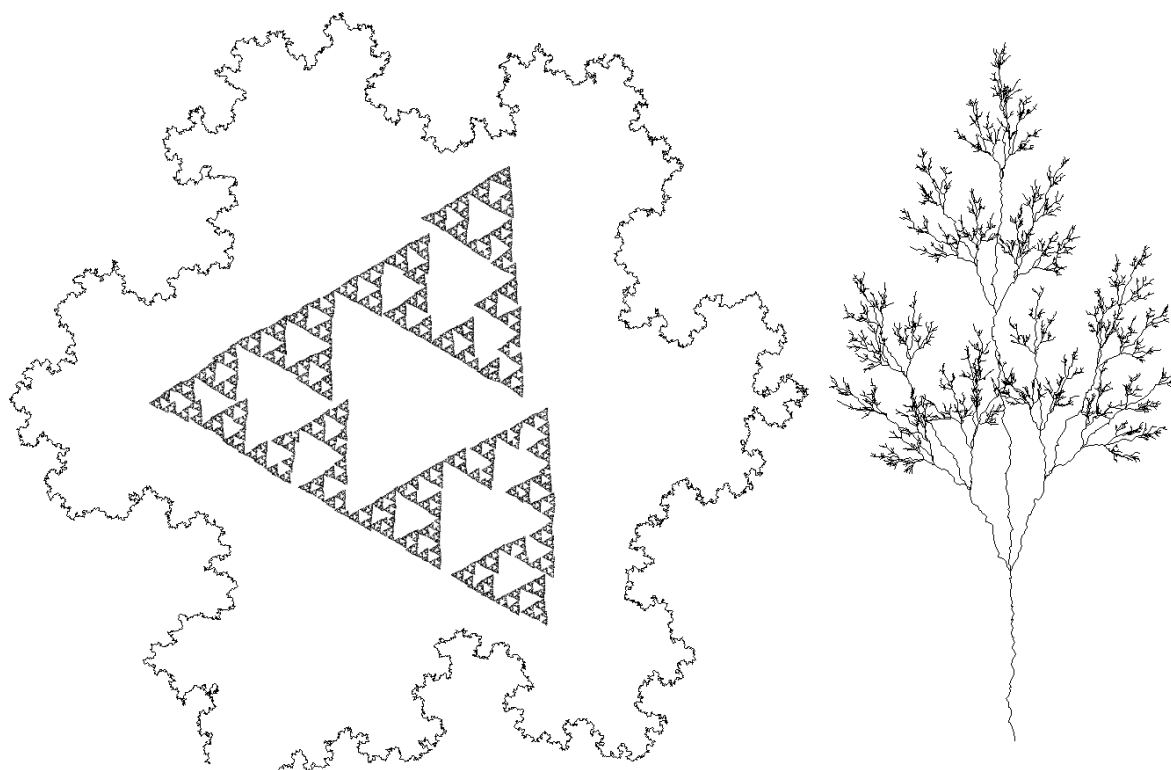
## 7.8 Náhodné fraktály

V předchozích kapitolách jsme se zabývali tzv. deterministickými fraktály – tedy fraktály, které jsou plně určeny několika relativně jednoduchými počátečními podmínkami, kde nebylo místo pro náhodu. Tyto fraktály mají z hlediska popisu přírodních útvarů jednu zásadní vadu – jsou totiž příliš pravidelné. Při popisu přírodních útvarů je třeba pracovat i s náhodou – dostaneme útvary, které mnohem lépe odpovídají reálným objektům.

**1. Základní princip:** S náhodnými procesy lze pracovat v podstatě dvojím způsobem:

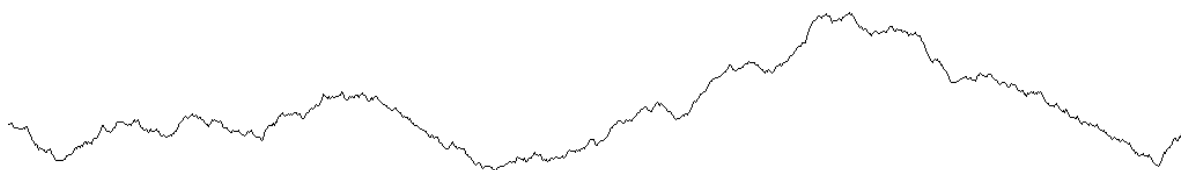
**a)** Pomocí generátoru náhodných čísel „rozmazávat“ souřadnice bodů, které určuje deterministický algoritmus. Aby výsledek nebyl úplně chaotický, je třeba vhodně volit jednak typ generátoru (nejčastěji se používá generátor s normálním rozložením) a také rozpětí (u rovnoměrného rozložení) resp. rozptyl (u normálního). Tyto parametry se musejí zmenšovat úměrně úrovni rekurze. Na obr. 7.8.1 si můžeme prohlédnout takto upravený Kochův ostrov, Sierpiňského trojúhelník a jednu z rostlin generovanou  $L$ -systémem.





**Obr. 7.8.1:** Náhodně upravený Kochův ostrov, Sierpiňského trojúhelník a rostlina

**b)** Používat algoritmy náhodné již ze své podstaty. Ve 20. letech minulého století modeloval **Norbert Wiener** Brownův pohyb tzv. **metodou přesouvání středního bodu** (Midpoint Displacement Method - *MDM*). V jednorozměrném případě je princip metody následující: zvolme úsečku  $AB$ , najdeme její střed a jeho  $y$ -ovou souřadnici změňme o náhodné číslo. Na vzniklé dvě úsečky aplikujeme tentýž postup, atd., teoreticky do nekonečna. Vzniklá křivka je příkladem grafu funkce, která je na daném intervalu spojitá, ale nemá nikde derivaci. V praktických situacích algoritmus opět ukončíme tehdy, jestliže se rozdíl  $x$ -ových souřadnic sousedních bodů dostane pod rozlišovací schopnost výstupního zařízení. Výsledkem je křivka, která ne náhodou připomíná profil či horizont reálné krajiny

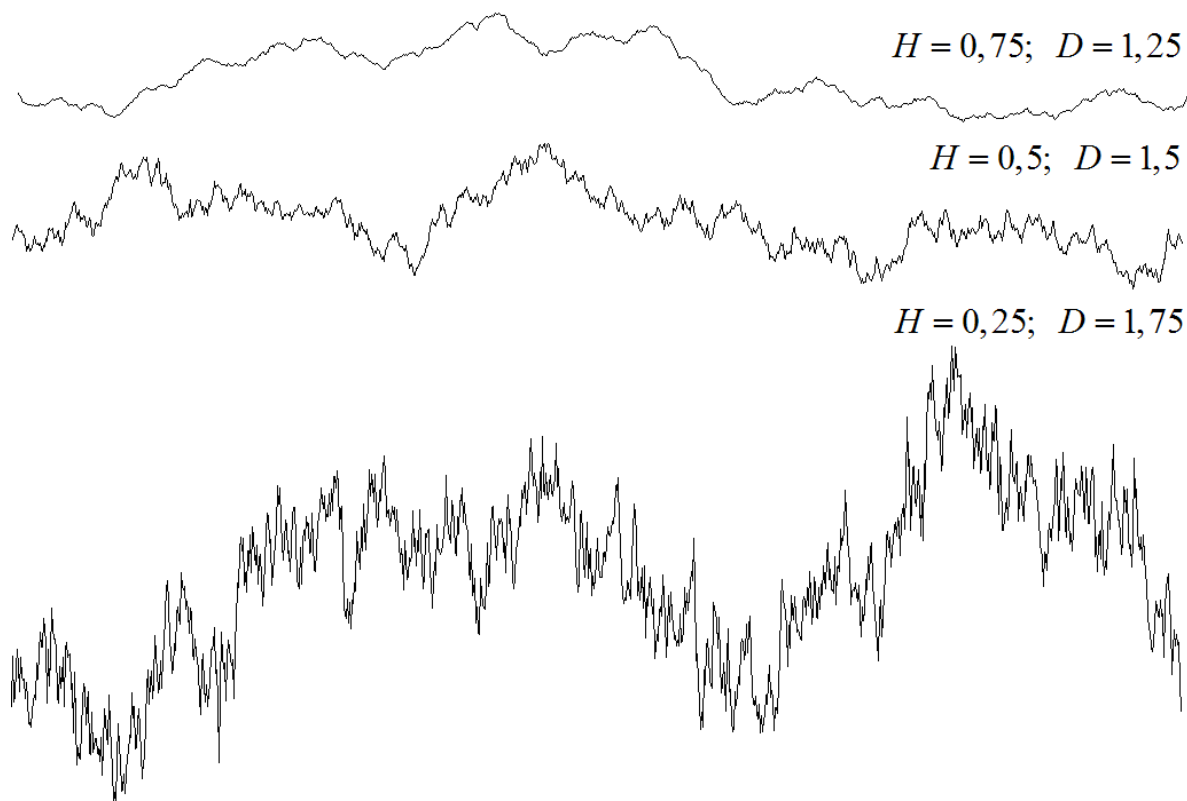


**Obr. 7.8.2:** Profil krajiny generovaný metodou přesouvání středního bodu

**2. Hurstův exponent:** Jak jsme konstatovali v předchozím odstavci, při generování náhodných fraktálů je třeba velmi pečlivě volit rozpětí resp. rozptyl generátoru náhodných čísel. Tyto parametry ovlivňují členitost výsledného fraktálu, a tím i jeho fraktální dimenzi. Při generování fraktálů metodou přesouvání středního bodu lze pomocí vhodně voleného rozptylu gaussovského generátoru vygenerovat fraktál s předem danou fraktální dimenzí. Použijeme-li totiž generátor, jehož rozptyl v  $n$ -té iteraci je dán vztahem

$$\sigma_n^2 = \sigma_0^2 \cdot 2^{-(n+1) \cdot H}$$

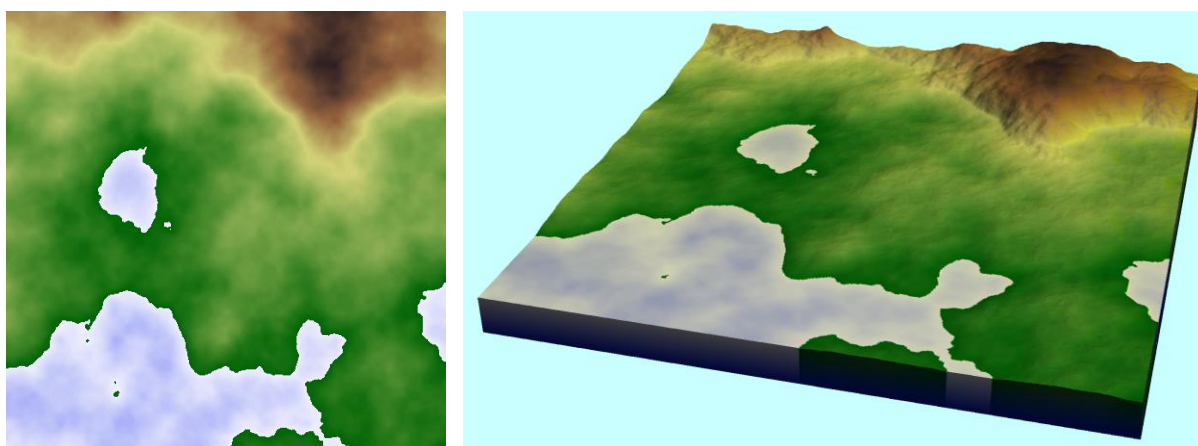
kde  $\sigma_0$  je počáteční rozptyl, pak fraktální dimenze fraktálu vygenerovaného metodou *MDM* je  $D = 2 - H$ . Číslo  $H \in \langle 0; 1 \rangle$  je tzv. Hurstův exponent – čím je jeho hodnota menší, tím větší je dimenze vygenerované křivky a tím je tedy fraktál členitější. Na obr. 7.8.3 je několik křivek s různými hodnotami  $H$ .



**Obr. 7.8.3:** Profily krajiny generované *MDM* s různými hodnotami Hurstova exponentu

**3. *MDM* ve 2D:** Výše popsaný algoritmus pro úsečku je možné rozšířit na obdélník. V tomto případě vytváříme náhodně funkci dvou proměnných – např. model terénu. V tom nejjednodušším případě definujeme funkční hodnoty ve vrcholech obdélníka, poté jsou počítány a náhodně přesouvány další body. Možností, jak je postupně procházet, je víc. Nejčastěji se najdou a posunou středy obvodových úseček aktuálně zpracovávaného obdélníka a pomocí nich se náhodně přesune jeho střed. Podobně jako v jednorozměrném případě je možno ovlivňovat Hausdorffovu dimenzi volbou Hurstova exponentu.

Popsané rekursivní dělení čtverce je možné využít jak pro vytváření prostorových modelů terénu (viz obr. 7.8.4), tak i pro tvorbu výstupů, kterým se v počítačové grafice říká **plasma**. Ta se používá pro modelování nejrozličnějších objektů – oblačnosti, barevných odstínů půdy apod. Na připojeném obrázku si můžeme prohlédnout obrázek kapradiny, k jehož vygenerování bylo použito několik výše popsaných technik. Půdní profil byl vytvořen metodou *MDM* v 1D. Barva půdy a obloha je plasma vytvořená metodou *MDM* ve 2D. Listy jsou projektivní *IFS* vytvořené dle odst. 6 kpt. 7.5, konečně kořenový systém je *L*-systém dle kpt. 7. 7.



**Obr. 7.8.4:** Krajina vytvořená metodou *MDM* ve *2D* a její prostorový model



**Obr. 7.8.5:** Model kapradiny vytvořený kombinací čtyř fraktálních metod