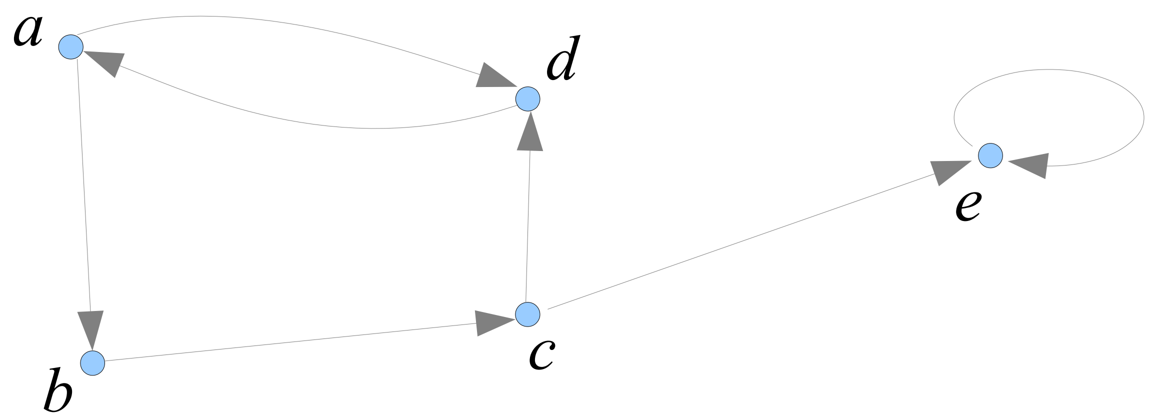
Orientovaný graf

Orientovaný graf je dvojice $G=(U, H)$, kde U je neprázdná konečná množina vrcholů nebo uzlů a $H \subseteq \{(u, v) | u, v \in U\}$ je konečná množina orientovaných hran.



$U=\{a, b, c, d\}$ $\quad H=\{(a, b), (a, d), (d, a), (b, c), (c, d), (c, e), (e, e)\}$

<u>Poznámka</u>

Z definice plyne, že orientovaný graf je též možno chápat jako neprázdnou konečnou množinu s binární relací.

Vstupní a výstupní stupeň uzlu

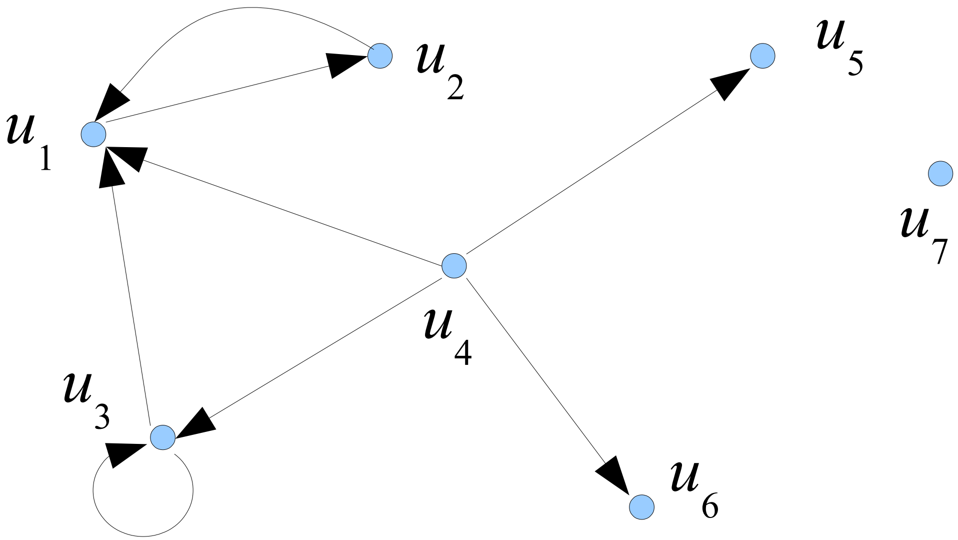
Nechť $G=(U, H)$ je orientovaný graf. Pro uzel $u \in U$ grafu G definujeme čísla

$$\deg_+(u) = |M|, \deg_-(u) = |N| ,$$

kde

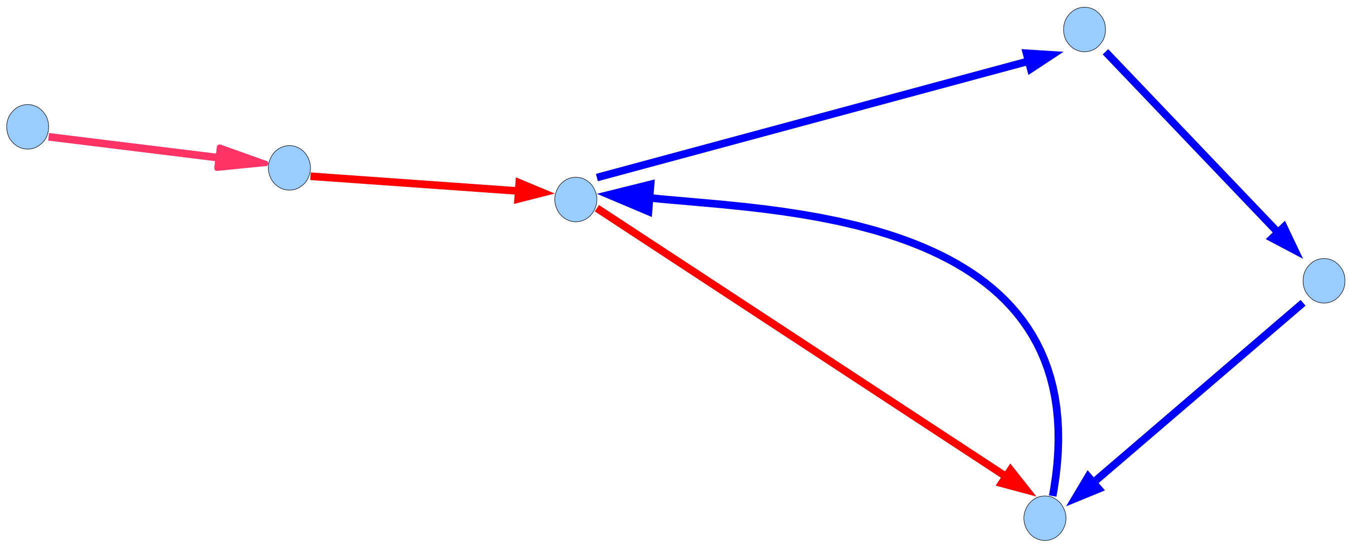
$$M = \{h \in H \mid \exists v \in U : h = (v, u)\} \text{ a } N = \{h \in H \mid \exists v \in U : h = (u, v)\} .$$

Číslo $\deg_+(u)$ se rovná počtu hran, které vedou z nějakého uzlu do uzlu u, a nazývá se *vstupním stupněm* uzlu u. Číslo $\deg_-(u)$ se rovná počtu hran, které vedou z uzlu u do nějakého uzlu, a nazývá se *výstupním stupněm* uzlu u. Pokud platí $\deg_-(u)=0$, u se nazývá koncový uzel, a pokud $\deg_+(u)=0$, u se nazývá počáteční uzel grafu G.



Uzel	$\deg_+$	$\deg_-$	
u_1	3	1	
u_2	1	1	
u_3	2	2	smyčka zvýší vstupní i výstupní stupeň uzlu
u_4	0	4	počáteční uzel
u_5	1	0	koncový uzel
u_6	1	0	koncový uzel
u_7	0	0	koncový i počáteční uzel

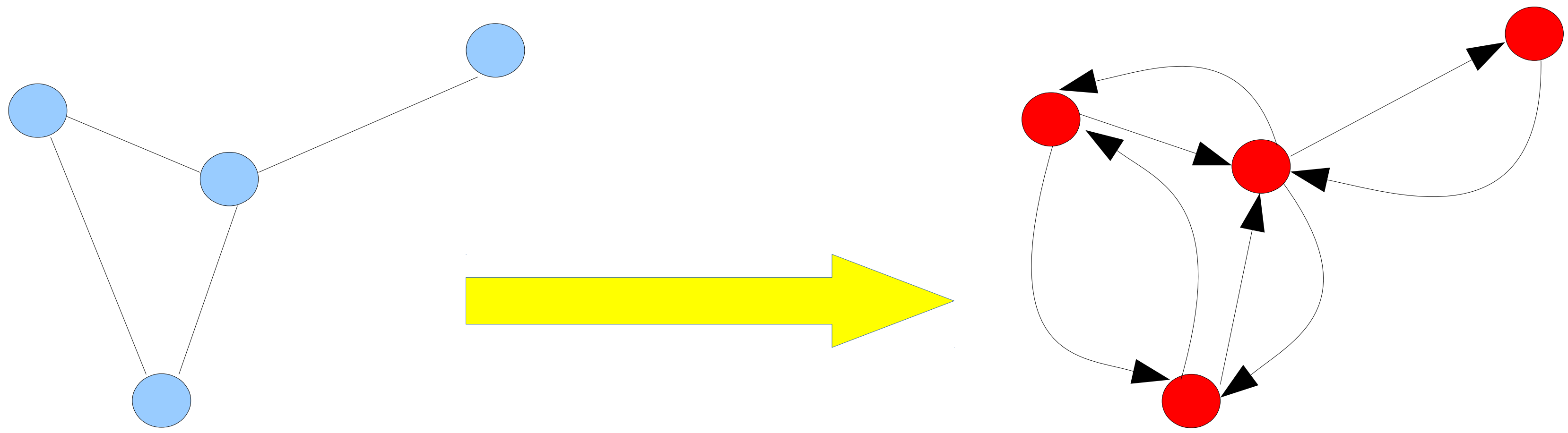
Analogicky k obyčejným grafům definujeme **(uzavřený)** **<u>orientovaný sled</u>**, **<u>orientovaný tah</u>**, **<u>orientovanou cestu</u>** a **<u>orientovanou kružnici</u>**. Hrany v příslušných posloupnostech jsou přitom nahrazeny orientovanými hranami tak, aby směřovaly od předchozího k následujíícmu uzlu v posloupnosti.



Červené hrany na obrázku představují orientovanou cestu a modré hrany orientovanou kružnici.

Symetrická orientace grafu

Máme-li zadán obyčejný graf $G=(U,H)$, je k němu možno definovat orientovaný graf $G'=(U,H')$ tak, že pro každou hranu $\{u,v\}\in H$ existují v H' právě dvě hrany h, h' takové, že $h=(u,v)\wedge h'=(v,u)$. Přitom v H' žádné jiné hrany nejsou. Takovýto graf se nazývá *symetrickou orientací grafu G*.
Jinými slovy, hrana v obyčejném grafu mezi uzly *u* a *v* se nahradí oběma orientovanými hranami mezi těmito uzly v novém grafu.

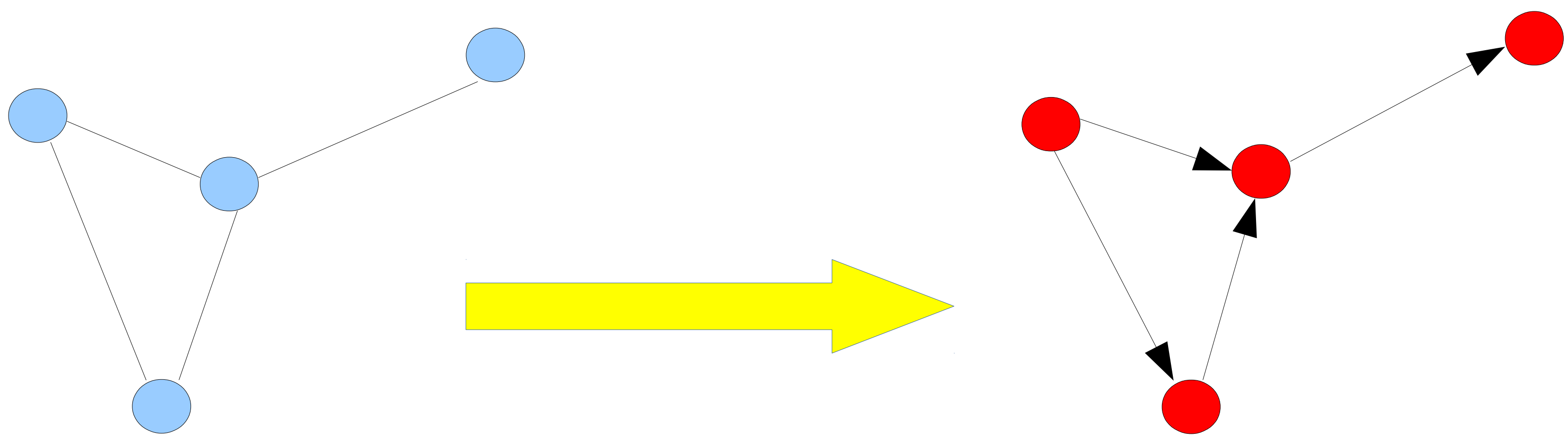


Orientace grafu

Máme-li zadán obyčejný graf $G=(U,H)$, je k němu možno definovat orientovaný graf $G'=(U,H')$ tak, že pro každou hranu $\{u,v\}\in H$ existuje v H' jediná orientovaná hrana h taková, že $h=(u,v)$ nebo $h=(v,u)$ a přitom H' žádné jiné hrany neobsahuje. Tento graf se nazývá *orientací grafu G*.

Jinými slovy, hrana v obyčejném grafu mezi uzly u a v se nahradí orientovanou hranou vedoucí z uzlu u do uzlu v nebo orientovanou hranou vedoucí z uzlu v do uzlu u. Je zřejmé, že na rozdíl od symetrické orientace grafu, která je jednoznačně definována, má obyčejný graf orientací více.

Navíc orientace grafu neobsahuje kružnice délky 2.

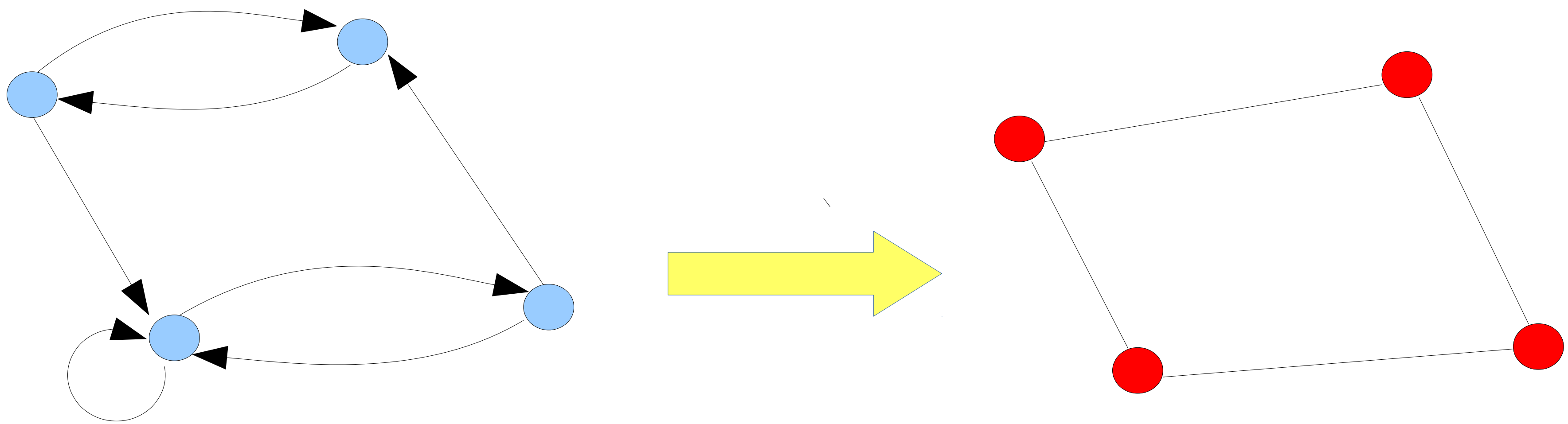


Symetrizace grafu

Máme-li zadán orientovaný graf $G=(U,H)$, potom k němu můžeme sestrojit jednoznačně obyčejný graf $G'=(U,H')$, který se nazývá *symetrizací grafu G*. Položíme

$$H'=\{\{u,v\} \mid u,v\in U, u\neq v, \exists h\in H: h=(u,v)\vee h=(v,u)\}$$

Jinými slovy, symetrizace vznikne “zanedbáním” šipek a smyček v původním grafu.



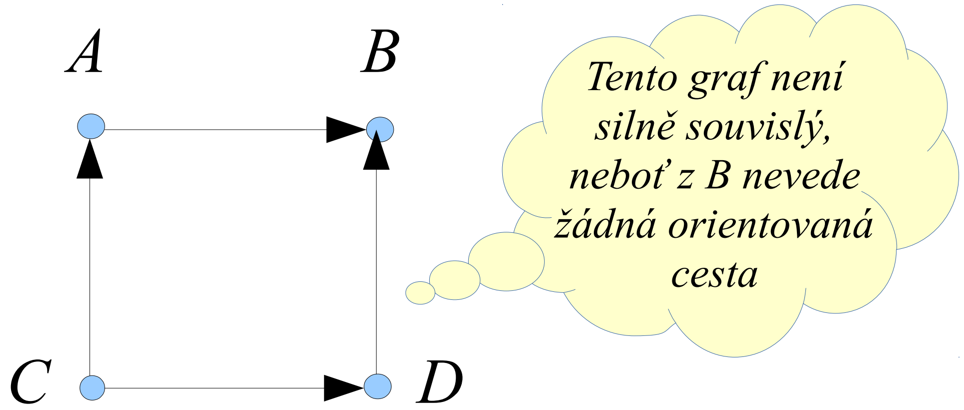
Souvislost

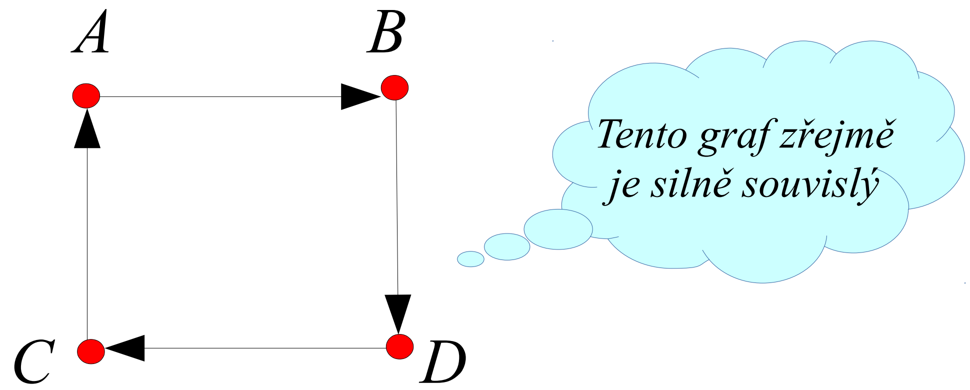
Řekneme, že orientovaný graf $G=(U,H)$ je souvislý, jestliže jeho symetrizace $G'=(U,H')$ je souvislý graf.

Silná souvislost

Řekneme, že orientovaný graf $G=(U,H)$ je silně souvislý, jestliže pro libovolné dva uzly $u,v\in U$ existuje orientovaná cesta z uzlu *u* do uzlu *v*.

Zřejmě každý silně souvislý graf je i souvislý, ale opačně toto tvrzení neplatí, jak je vidět na obrázku.

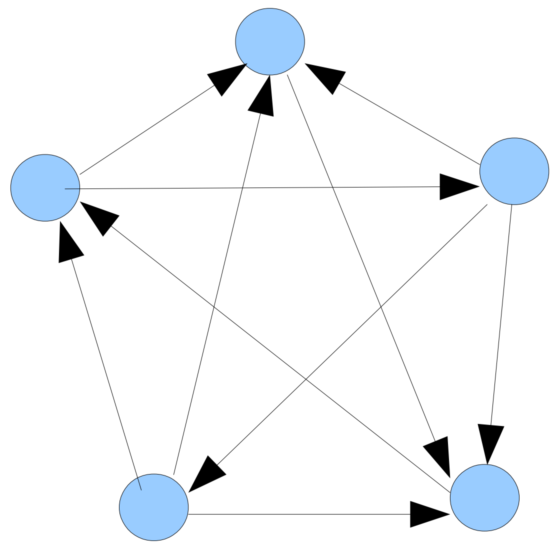




Turnaj

Orientovaný graf $T=(U,H)$ bez smyček se nazývá turnajem, když pro každou množinu uzlů $\{u,v\}, u,v \in U, u \neq v$ existuje právě jedna hrana $h \in H$ taková, že platí $h=(u,v) \vee h=(v,u)$.

V turnaji tedy existuje pro každou dvojici různých uzlů jediná orientovaná hrana jdoucí z jednoho uzlu do druhého

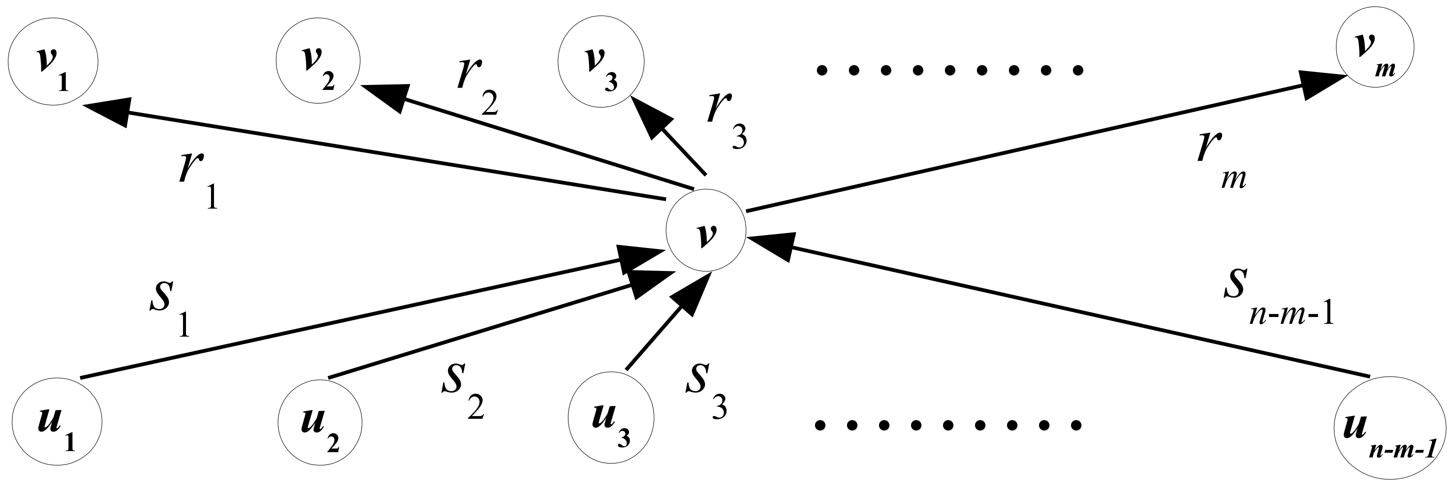


Věta

Buď $T=(U,H)$ turnaj a $v\in U$ uzel s maximálním výstupním stupněm. Pak pro každý uzel $w\in U$ existuje orientovaná cesta z uzlu *v* do uzlu *w* délky nejvýše dva.

Důkaz:

Nechť $\deg_-(v)=m$ a nechť z uzlu *v* vedou hrany $r_{1,} r_{2,}\dots, r_m$ do uzlů $v_{1,} v_{2,}\dots, v_m$. Má-li *T n* uzlů, z každého uzlu u_j ze zbývajících $n-m-1$ uzlů $u_1, u_2, \dots, u_{n-m-1}$ vede hrana s_j do uzlu *v*, protože *T* je turnaj.

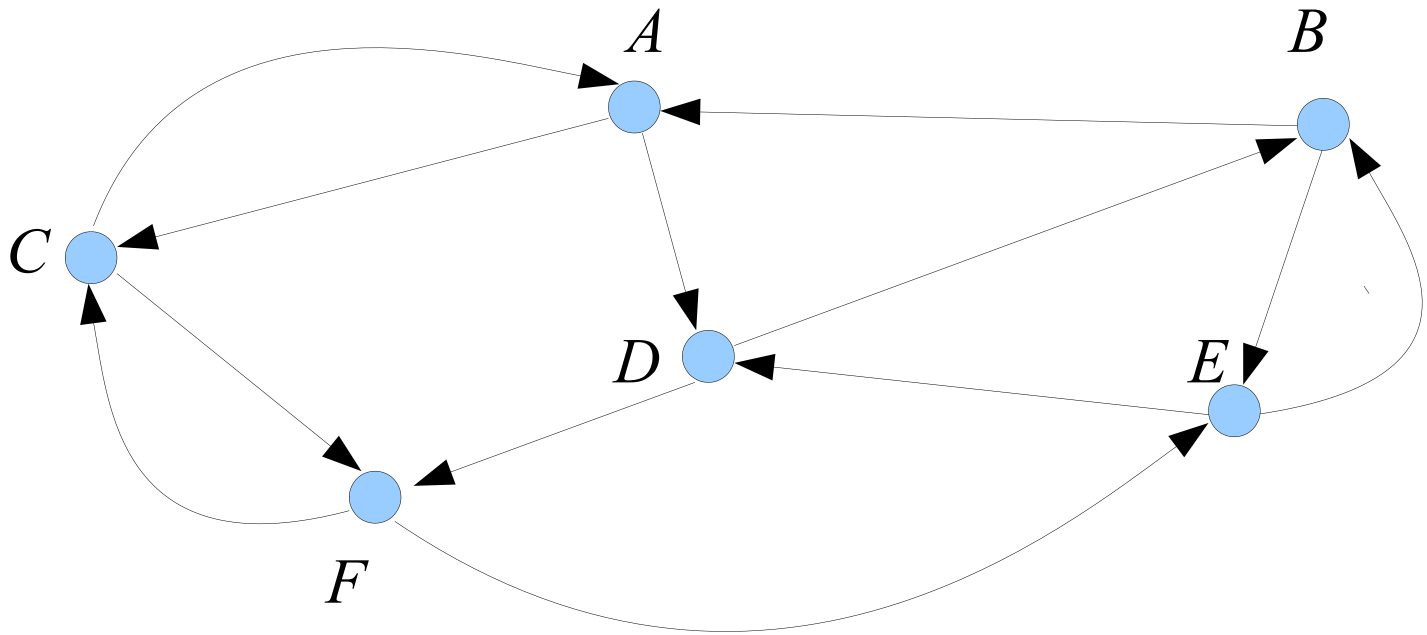


Potom pro každé i, $1 \leq i \leq m$ zřejmě existuje orientovaná cesta v, r_i, v_i délky 1 z uzlu v do uzlu v_i. Dokážeme nyní, že z uzlu v do uzlu u_j, $1 \leq j \leq n - m - 1$, existuje cesta délky 2. Uvažujme uzel u_j, $1 \leq j \leq n - m - 1$. Jestliže pro některé i, $1 \leq i \leq m$, existuje hrana t_i z uzlu v_i do uzlu u_j, potom takovouto cestou je zřejmě cseta v, r_i, v_i, t_i, u_j. Připusťme, že existuje uzel u_k, $1 \leq k \leq n - m - 1$ takový, že z žádného uzlu v_i, $1 \leq i \leq m$ do něj nevede hrana. Protože T je turnaj, znamená to, že pro každý uzel v_i existuje hrana q_i vedoucí z u_k do v_i. Protože však z uzlu u_k vede hrana s_k i do uzlu v, znamená to, že $deg_{-}(u_k) = m+1$, což je spor s tím, že uzel v je uzlem s maximálním výstupním stupněm.

Eulerovský graf

Orientovaný graf $G=(U,H)$ se nazývá *eulerovský*, jestliže v něm existuje uzavřený orientovaný tah obsahující všechny jeho hrany.

Vzhledem k tomu, že v tahu se nesmějí opakovat hrany, je orientovaný graf eulerovský právě tehdy, když se všechny jeho orientované hrany dají nakreslit ve směru šipek jedním tahem, aniž zvedneme tužku z papíru, přičemž po každé hraně táhneme právě jednou a nakonec se vrátíme do uzlu, z něhož jsme vyšli.



Uzavřeným tahem eulerovského grafu na obrázku je například tah definovaný posloupností uzlů *C*, *A*, *D*, *F*, *C*, *F*, *E*, *B*, *E*, *D*, *B*, *A*, *C*.

Věta

Souvislý orientovaný graf $G=(U,H)$ je *eulerovský* právě tehdy, když platí $deg_{+}(u)=deg_{-}(u)$ pro každý uzel $u\in U$.

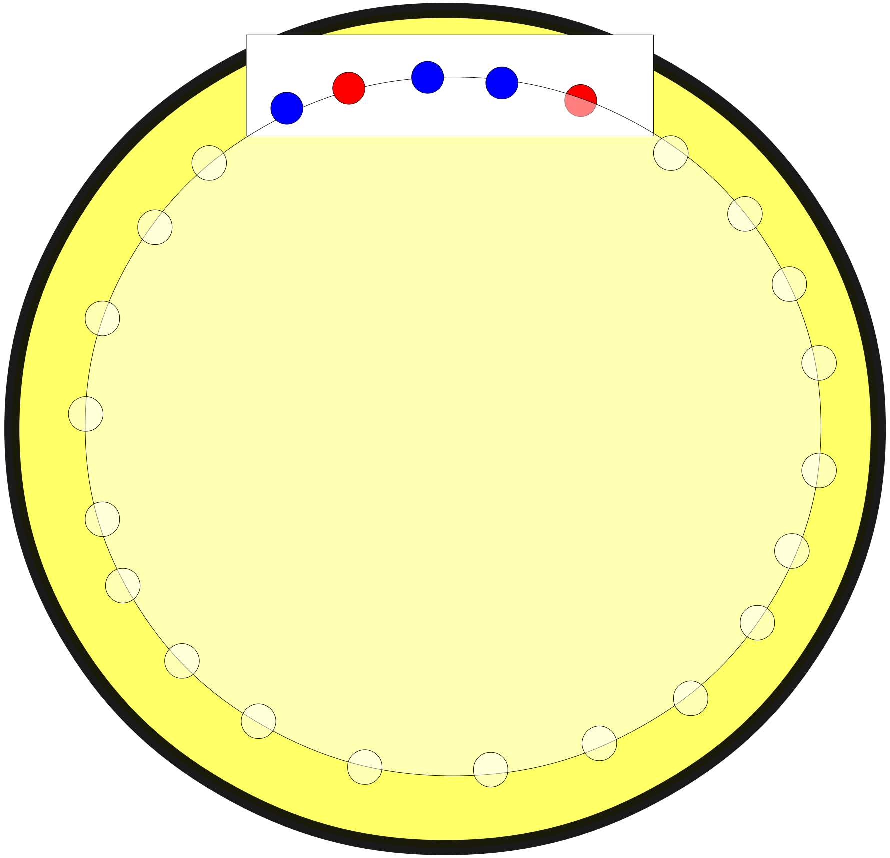
Důkaz:

To, že je podmínka $deg_{+}(u)=deg_{-}(u)$ k existenci uzavřeného orientovaného tahu obsahujícího všechny hrany nutná, je zřejmé. Důkaz toho, že je tato podmínka i dostatečná, není obtížný. Je však formálně složitý a proto ho zde uvádět nebudeme.

Úloha

Máme rozmístit na obvod kotouče červené a modré body tak, abychom vždy jednoznačně poznali polohu otáčejícího se kotouče, když vidíme okénkem pouze výřez k po sobě jdoucích bodů na kotouči. Při daném k chceme navrhnout co největší délku $m(k)$ kotouče.

$k = 5$



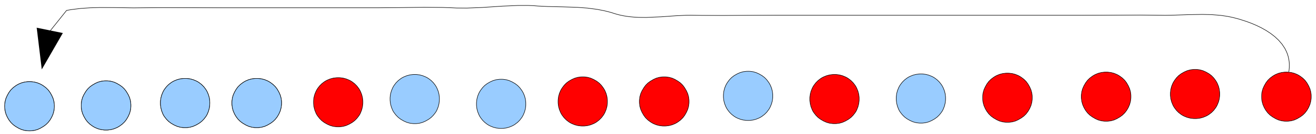
Řešení

Protože všech různých posloupností modrých a červených bodů délky *k* je 2^k, platí $m(k) \leq 2^k$. Cyklické uspořádání délky 2^k požadovaných vlastností sestrojíme takto: Definujeme orientovaný graf $G=(U, H)$, kde *U* je množina všech posloupností červených a modrých bodů délky $k-1$ a *H* je množina všech posloupností červených a modrých bodů délky *k,* přičemž pro $h=(a_{1,} a_{2,} \ldots , a_k) \in H$ platí $h=((a_{1,} a_{2,} \ldots , a_{k-1}), (a_{2,} a_{3,} \ldots , a_k))$.

G je Eulerovský graf, neboť $\deg_+ = \deg_- = 2$ pro každý uzel *x* grafu *G*. Dá se snadno ověřit, že *G* je souvislý: orientovaná cesta z uzlu $(a_{1,} a_{2,} \ldots , a_{k-1})$ do uzlu $(b_{1,} b_{2,} \ldots , b_{k-1})$ je dána např. posloupností hran $(a_{1,} a_{2,} \ldots , a_{k-1}, b_1), (a_{2,} \ldots , a_{k-1}, b_{1,} b_2), \ldots , (a_{k-1}, b_{1,} \ldots , b_{k-1})$. Dále platí, že počet hran grafu je 2^k. Položme $2^k = K$. Zvolme libovolný uzavřený orientovaný tah

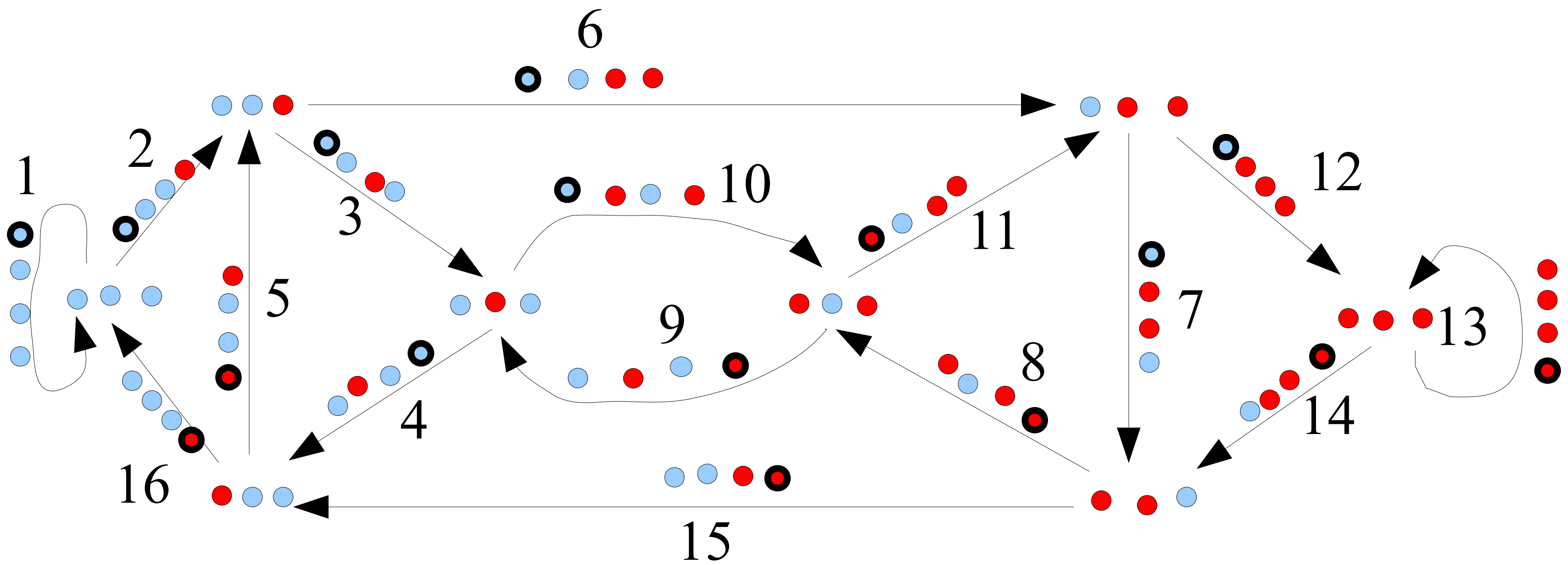
$(u_{0,} h_{1,} u_{1,} h_{2,} \ldots , u_{K-1}, h_K, u_K)$ a utvořme cyklické uspořádání $(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^K)$, kde jsme označili $h_i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_K^i)$ (tj. vzali jsme první prvky každé posloupnosti h_i). Vzhledem k volbě vrcholů a hran grafu G se každá posloupnost délky k vyskytuje v cyklickém uspořádání $(a_{1,}^1 a_{1,}^2 \ldots , a_1^K)$.

Pro k = 4 dostáváme například cyklické uspořádání



,

které dostaneme z uzavřeného orientovaného tahu znázorněného v grafu na obrázku pořadovými čísly jednotlivých hran:



Počáteční bod posloupnosti definující hranu má vždy tučné ohraničení.

Definice

Orientovanou hamiltonovskou cestou v garfu *G* nazveme orientovnou cestu, která prochází každým uzlem grafu *G*. Orientovanou hamiltonovskou kružnicí grafu *G* nazveme orientovanou kružnici, která prochází každým uzlem grafu *G*. Orientovaný graf nazveme hamiltonovským, má-li orientovnou hamiltonovskou kružnici.

Věta

V každém turnaji $T=(U,H)$ existuje orientovaná hamiltonovská cesta.

Důkaz:

Indukcí vzhledem k počtu uzlů. Pro turnaje s jedním uzlem je tvrzení triviální. Předpokládejme, že tvrzení věty platí pro všechny turnaje s počtem uzlů *n*. Uvažujme turnaj T s $n+1$ uzly a zvolme v T libovolný uzel u_0. Odstraníme-li z T uzel u_0 i s hranami vedoucími do něho či z něho, získáme graf T', který je zřejmě také turnajem. Proto v něm existuje orientovaná cesta $u_{1,} u_{2,} \ldots, u_n$ obsahující všechny jeho uzly. Pokud z žádného uzlu u_i, $1 \leq i \leq n$ nevede do u_0 hrana, pak vede hrana z u_0 do u_1, tedy $u_{0,} u_{1,} \ldots, u_n$ je cesta. Nechť naopak vede hrana z nějakého uzlu u_i, $1 \leq i \leq n$ do uzlu u_0 a označme i_0, $1 \leq i_0 \leq n$, největší index takový, že z u_{i_0} vede hrana do u_0. Uvažujme nyní posloupnost uzlů $u_{1,} u_{2,} \dots, u_{i_0}, u_{0,} u_{i_0+1}, \dots, u_n$ v turnaji T. Z vlastností turnaje snadno plyne, že z uzlu u_0 vede hrana do uzlu u_{i_0+1}, a tedy v T existuje orientovaná cesta daná touto posloupností.

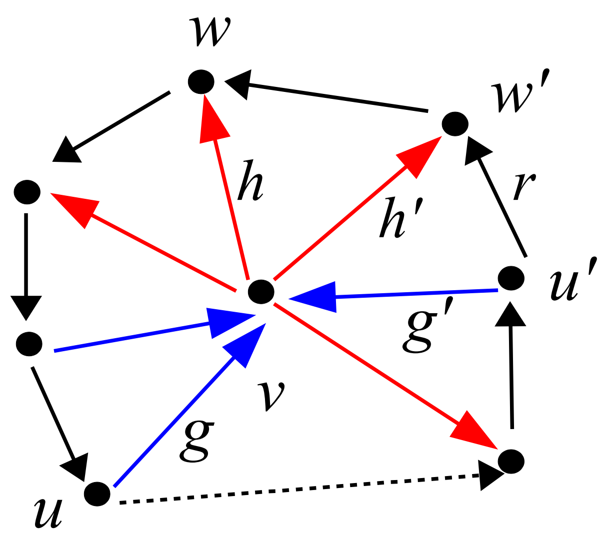
<u>Věta</u>

Je-li T_n je silně souvislý turnaj s n uzly, $n \geq 3$, potom T_n obsahuje orientované kružnice o délkách 3, 4, …., n.

Důkaz:

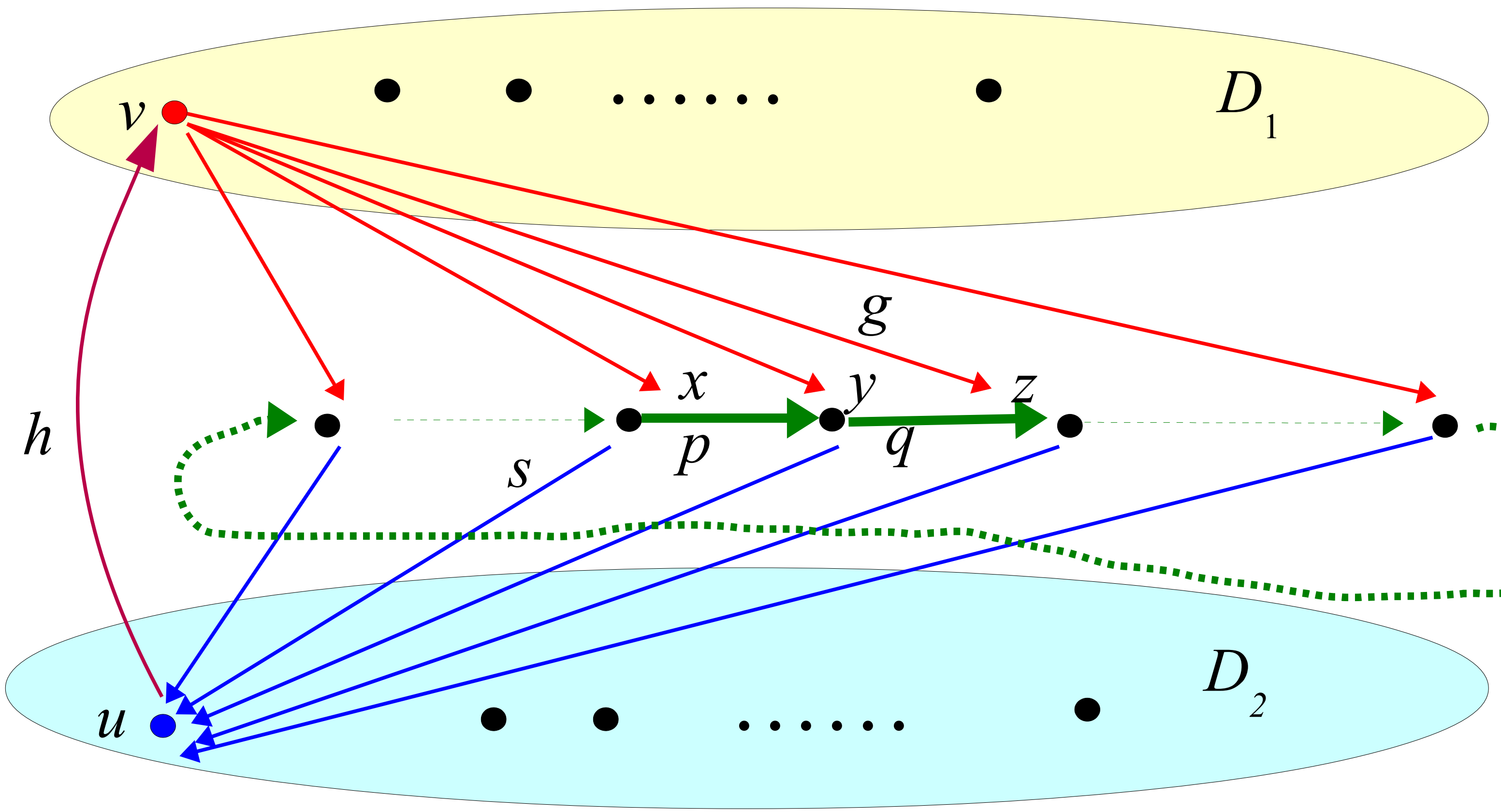
Nechť T_n je silně souvislý turnaj s n uzly, $n \geq 3$. Dokážeme napřed, že T_n obsahuje kružnici délky 3. Nechť v je uzel v T_n. Protože T_n je turnaj, lze ostatních $n-1$ uzlů rozdělit do dvou množin $U = \{u_{1,} u_{2,} \dots, u_m\}$ a $V = \{v_{1,} v_{2,} \dots, v_{n-m-1}\}$ tak, že pro každý uzel $u_i, 1 \leq i \leq m$ existuje hrana s_i z uzlu u_i do uzlu v a pro každý uzel $v_j, 1 \leq j \leq n-m-1$ existuje hrana t_j z uzlu v do uzlu v_j. Kdyby množina U byla prázdná, potom by platilo $\deg_{-}(v) = n-1$, což není možné, protože T_n je silně souvislý. Podobně se dokáže, že i množina V nemůže být prázdná. V množině V existuje uzel v_j, ze kterého vede hrana h do nějakého uzlu u_i množiny U. Jinak by nevedla cesta z uzlů množiny V do uzlů množiny U a graf by nebyl silně souvislý. Zřejmě $(u_i, s_i, v, t_j, v_j, h, u_i)$ je hledaná orientovaná kružnice o délce 3. Předpokládejme dále, že $n > 3$ a v T_n existuje orientovaná kružnice $C_k = (u_{1,} h_{1,} u_{2,} h_{2,} \dots , h_{k-1}, u_k, h_k, u_1)$, $3 \leq k < n$. Označme $D = \{v_{1,} v_{2,} \dots , v_{n-k}\}$ neprázdnou množinu uzlů, které do ní nepatří. Vzhledem k silné souvislosti T_n existuje aspoň jedna hrana g vedoucí z nějakého uzlu kružnice C_k do nějakého uzlu množiny D a aspoň jedna hrana vedoucí z nějakého uzlu množiny D do nějakého uzlu z kružnice C_k. Za těchto okolností jsou možné následující případy.

a) V D existuje uzel v takový, že z něho vede hrana h do uzlu w kružnice C_k a zároveň do něho vede hrana g z uzlu u kružnice C_k. Vzhledem k tomu, že T_n je turnaj, jsou přitom uzly u a w od sebe různé.



V kružnici C_k zřejmě existuje uzel u', z něhož vede hrana g' do uzlu v , uzel w', do kterého vede hrana h' z uzlu v a hrana r vedoucí z uzlu u' do uzlu w', jak je vidět na obrázku. Kružnice, která vznikne z C_k nahrazením úseku (u', r, w') úsekem (u', g', v, h', w'), je potom zřejmě kružnicí o délce $k + 1$.

b) V D žádný uzel výše uvedených vlastností neexistuje. D se potom rozdělí na dvě neprázdné podmnožiny D_1 a D_2 takové, že z každého uzlu v D_1 vedou hrany do všech uzlů C_k a do každého uzlu v D_2 vedou hrany ze všech uzlů C_k.



Existuje hrana z uzlu v D_2 do uzlu v D_1, protože T_n je silně souvislý. Označme h hranu z $u \in D_2$ do $v \in D_1$. C_k má aspoň 3 uzly x, y, z, vyberme tedy její úsek

(x, p, y, q, z). Nechť dále s značí hranu z uzlu x do uzlu u a g hranu z uzlu v do uzlu z. Potom, nahradíme-li úsek (x, p, y, q, z) úsekem (x, s, u, h, v, g, z), obdržíme opět kružnici o délce $k + 1$. Tím je věta dokázána.

<u>Důsledek</u>

Turnaj T s alespoň třemi uzly je hamiltonovský, právě když je silně souvislý.

Důkaz:

Předpokládejme, že T má n uzlů, $n \geq 3$. Pokud je silně souvislý, má podle předchozí věty orientovanou hamiltonovskou kružnici o délce n. Tato kružnice obsahuje každý uzel turnaje T a proto je T hamiltonovský.

Pokud obráceně T je hamiltonovský, potom obsahuje orientovanou kružnici $C=(v_{1,} h_{1,} v_{2,} h_{2,} \ldots , h_{n-1}, v_n, h_n, v_1)$. Jsou-li v_i, v_j libovolné uzly turnaje T, potom, pokud $i < j$, existuje v T orientovaná cesta $(v_i, h_i, v_{i+1}, h_{i+1}, \ldots , h_{j-1}, v_j)$,

a pokud $j < i$, existuje v T orientovaná cesta

$\left(v_i, h_i, v_{i+1}, h_{i+1}, \ldots, h_{n-1}, v_n, h_n, v_{1,} h_{1,} \ldots, h_{j-1}, v_j\right)$. T je tedy silně souvislý.

Délka hrany, délka cesty

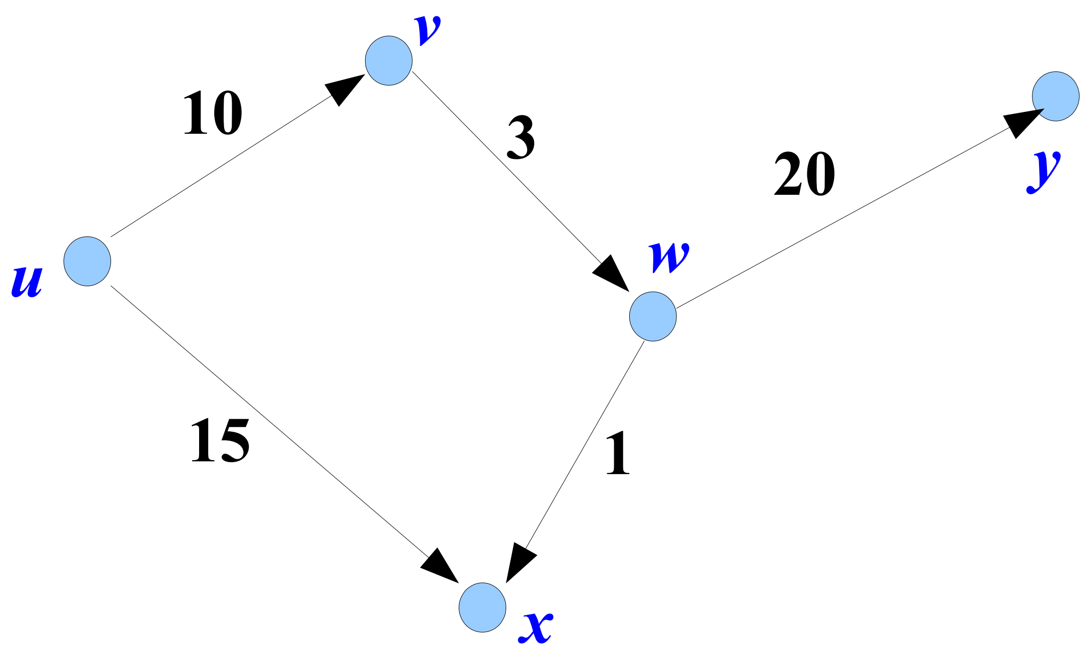
Graf bude dále vždy znamenat orientovaný graf bez smyček, hrana orientovanou hranu a cesta bude vždy znamenat orientovanou cestu.

Nechť $G=(U, H)$ je graf a každé hraně $h \in H$ nechť je přiřazeno reálné číslo $l(h)$. Potom tomuto číslu budeme říkat **délka hrany** h.

Délka $l(p)$ **sledu** p **v grafu** G se definuje jako součet délek všech hran obsažených v sledu p. Je-li p tvořena jediným uzlem, klademe $l(p)=0$

Cesta minimální délky

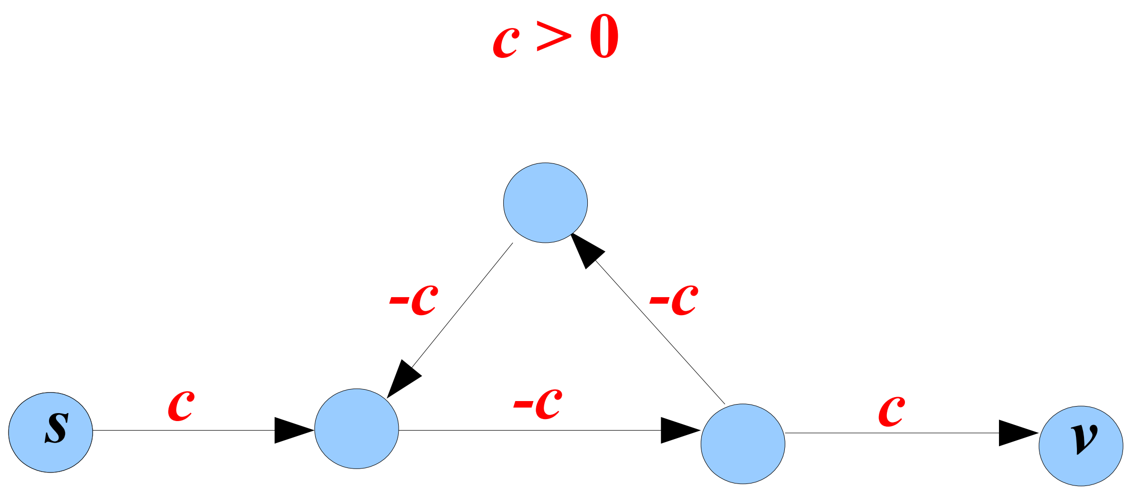
Nechť je dán graf $G=(U, H)$ a $u, v \in U$. Pokud existuje mezi uzly u a v cesta minimální délky, definujeme číslo $d(u, v)$ jako délku této cesty. Pokud z uzlu u do uzlu v vůbec žádná cesta neexistuje, klademe $d(u, v)=\infty$.



Například v grafu na obrázku platí $d(u, x)=14, d(u, y)=33$

Poznámka

Protože obecně mohou být délky hran i záporná čísla, nemá v případě existence kružnice se zápornou délkou pojem cesta minimální délky praktický význam, neboť přirozeně požadujeme, aby cesta minimální délky byla také sledem minimální délky. Na obrázku níže je například vidět, že z uzlu *s* do uzlu *v* existuje sled s délkou menší, než libovolné reálné číslo. Omezíme se tedy napřed na případ, kdy jsou všechny délky hran kladné.



V jednoduchých grafech je stanovení cesty minimální délky snadné, avšak u složitějších a rozsáhlejších grafů se jedná o mnohem složitější postup. Řešme proto tuto úlohu:

V grafu $G=(U,H)$, kde každé hraně h je přiřazeno **kladné** reálné číslo $l(h)$ a kde je vyznačen výchozí uzel s, najděte ke každému uzlu $v \neq s$ cestu $p(s,v)$ minimální délky a tuto minimální délku $d(s,v)$.

K řešení úlohy použijeme tzv. "Dijkstrova algoritmu". Jeho autorem je holandský matematik prof. Edsger Wybe Dijkstra * 11. 5. 1930 † 6. 8. 2002

Budeme dále říkat vzdálenost mezi dvěma uzly místo délka cesty minimální délky mezi těmito uzly. Pokud jsou tyto uzly totožné, pak je tedy jejich vzdálenost rovna 0.

Definice pomocných pojmů

Horní odhad vzdálenosti uzlu s a uzlu v je číslo $D(v)$ takové, že platí $D(v) \geq d(s, v)$. Pro každý uzel $v \in U$ bude symbol $\pi(v)$ označovat uzel, který bezprostředně předchází uzlu v v cestě minimální délky z uzlu s do uzlu v zkonstruované Dijkstrovým algoritmem. Pokud $v = s$ nebo pokud taková cesta dosud nebyla zkonstruována, položíme $\pi(v) = \emptyset$.

Dále pro každý uzel $v \in U$ definujeme symbol $N(v)$ označující množinu všech uzlů, do nichž vede nějaká hrana z uzlu v, tedy $N(v) = \{w \in U \mid (v, w) \in H\}$. Symbol S, $S \subseteq U$, značí množinu všech uzlů v, pro které už byla Dijkstrovým algoritmem definitivně stanovena cesta minimální délky $p(s, v)$ a odpovídající vzdálenost $d(s, v)$. Navíc budeme používat označení $Q = U - S$.

Schéma algoritmu

1. Inicializace: Pro každý uzel $u \in U$ položíme

$\pi(u) = \emptyset$, $D(s) = 0$, $D(u) = \infty$ jestliže $u \neq s$, $S = \emptyset$, $Q = U$.

2. Test na ukončení algoritmu: Pokud $S = U$, přechod na 5.

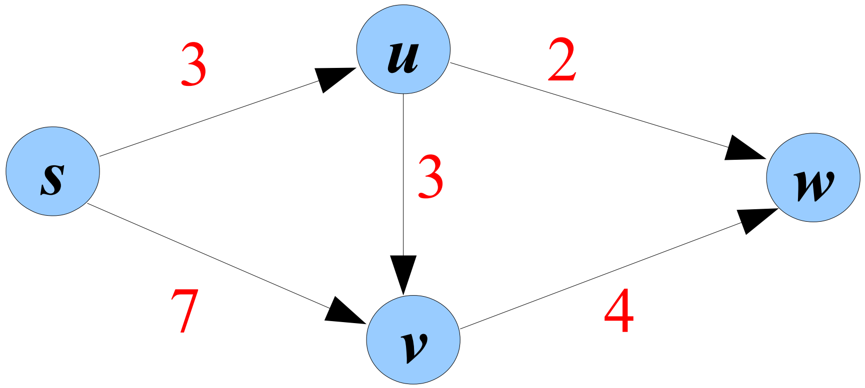
3. Nalezení uzlu s definitivní cestou: Z množiny Q přesuneme do množiny *S* uzel *v* s minimální hodnotou *D*(*v*). Jestliže pro všechny $u \in Q$ platí $D(u) = \infty$, přechod na 5.

4. Zlepšení horních odhadů: Pro každý uzel $w \in N(v) \cap Q$ takový, že $D(w) > D(v) + l((v, w))$, položíme $D(w) = D(v) + l((v, w))$ a $\pi(w) = v$. Přechod na 2.

5. Konstrukce výstupu:

Do uzlů, které zůstaly v množině *Q*, žádná cesta z uzlu *s* neexistuje. Pro všechny ostatní uzly *v* položíme $d(s, v) = D(v)$ a cestu minimální délky sestrojíme obrácením cesty $v \to \pi(v) \to \pi(\pi(v)) \to \pi(\pi(\pi(v))) \to \cdots \to s$.

Příklad



Inicializace: $\pi(s)=\pi(u)=\pi(v)=\pi(w)=\emptyset,\ S=\emptyset,\ Q=\{s,u,v,w\},\ \underline{D(s)=0},\ D(u)=D(v)=D(w)=\infty$

1. krok: $S=\{s\}, Q=\{u,v,w\}, D(s)=0, \underline{D(u)=3}, D(v)=7, D(w)=\infty$
   $\pi(u)=s, \pi(v)=s$
2. krok: $S=\{s,u\}, Q=\{v,w\}, D(s)=0, D(u)=3, D(v)=6, \underline{D(w)=5}$
   $\pi(u)=s, \pi(v)=u, \pi(w)=u$
3. krok: $S=\{s,u,w\}, Q=\{v\}, D(s)=0, D(u)=3, \underline{D(v)=6}, D(w)=5$
   $\pi(u)=s, \pi(v)=u, \pi(w)=u$
4. krok: $S=\{s,u,w,v\}, Q=\emptyset, D(s)=0, D(u)=3, D(v)=6, D(w)=5$
   $\pi(u)=s, \pi(v)=u, \pi(w)=u$

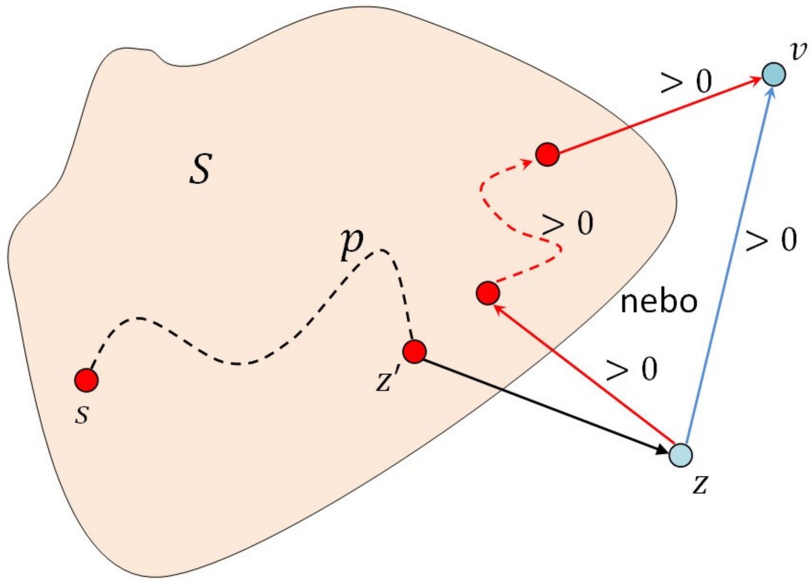
$p(s,u)=s\rightarrow u,\ p(s,v)=s\rightarrow u\rightarrow v,\ p(s,w)=s\rightarrow u\rightarrow w$

Věta Dijskstrův algoritmus nalezne cestu minimální délky a vzdálenost z výchozího uzlu *s* do každého jiného uzlu $v \in V$.

Důkaz: Dokážeme, že vždy během provádění algoritmu těsně před krokem 3 platí:

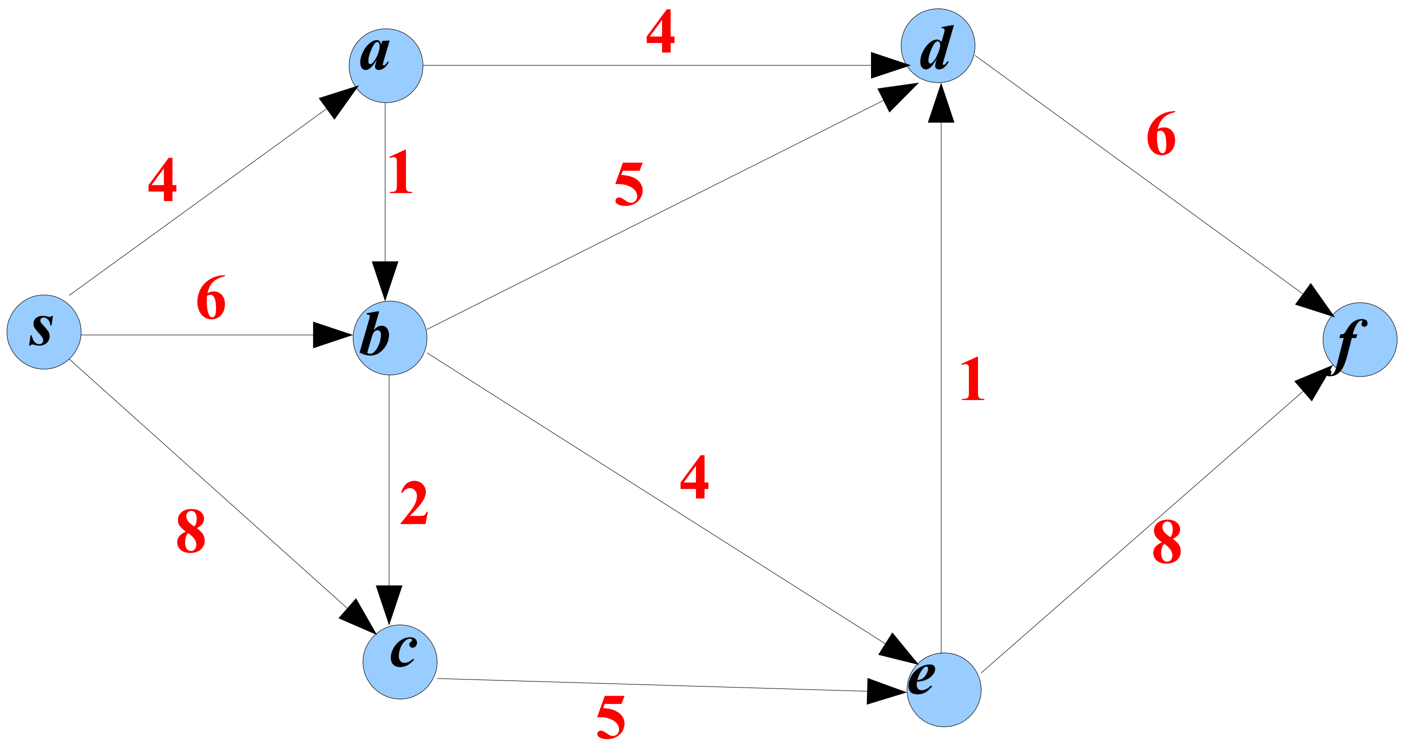
Pro každé $w \in S$, platí $D(w) = d(s, w)$ a je-li $p(s, w)$ cesta taková, že se její délka rovná $d(s, w)$, potom neobsahuje uzly z *Q*.

Toto platí zřejmě triviálně po inicalizačním kroku 1. Nechť je nyní $v \in Q$ takový uzel *v*, pro který je *D*(*v*) v *Q* minimální. Dokážeme, že cesta $p(s, v)$ minimální délky neobsahuje kromě uzlu *v* uzly z *Q*.

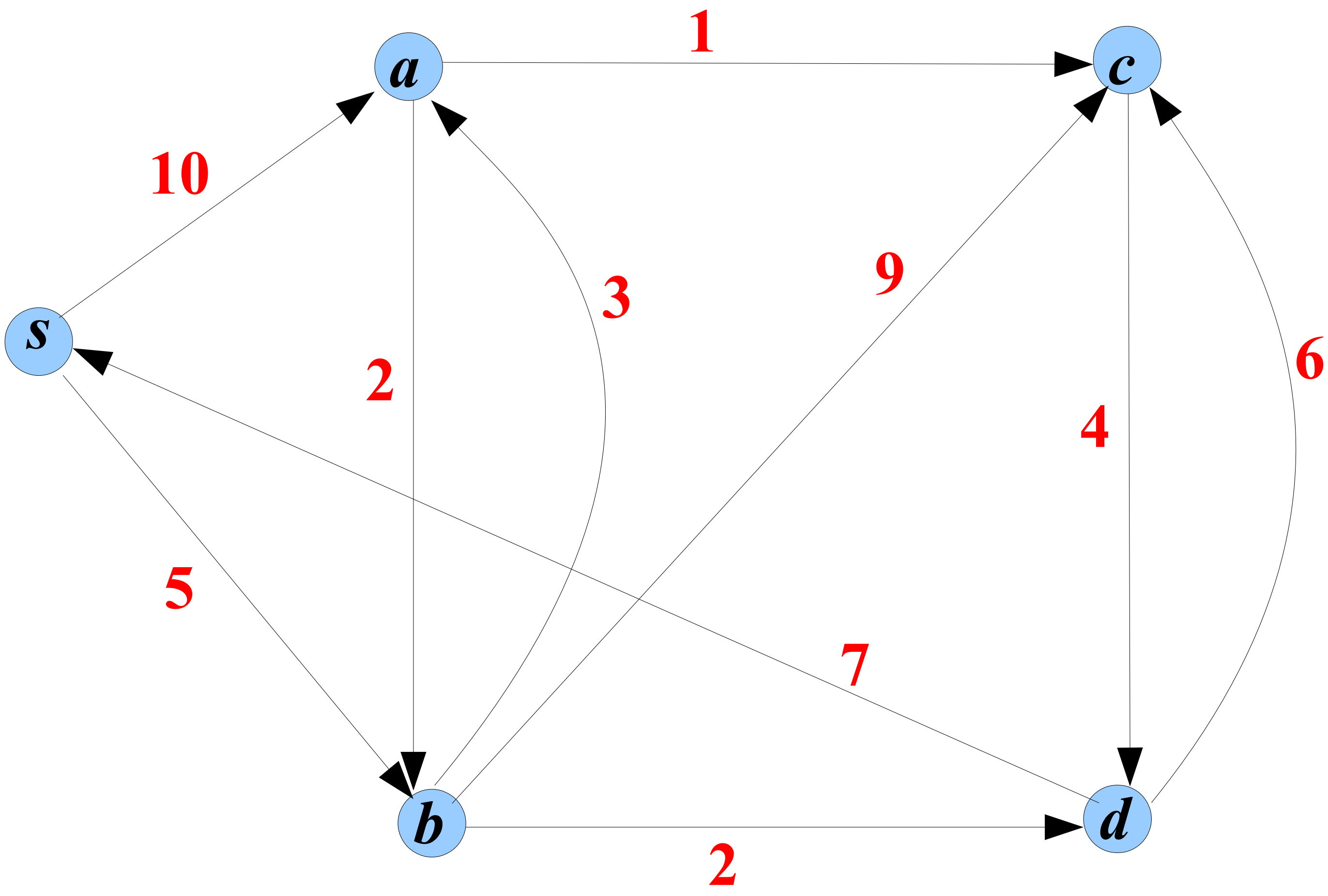


Skutečně, kdyby v p existoval uzel $z \neq v, z \in Q,$ potom vzhledem k tomu, že čísla přiřazená hranám jsou kladná a že kvůli dřívější operaci v kroku 4 se $D(z)$ rovná součtu délky úseku cesty p z uzlu s do uzlu z' a číslu přiřazenému hraně $(z, z'),$ by platilo $D(z) < D(v),$ což je spor. Navíc platí $D(v) = d(s, v)$ opět vzhledem k tomu, že proběhl krok 4. Po návratu do kroku 2 tedy tvrzení opět platí. Po skončení algoritmu pak zřejmě čísla $D(u)$ udávají délky nejkratších cest z uzlu s do uzlu u.

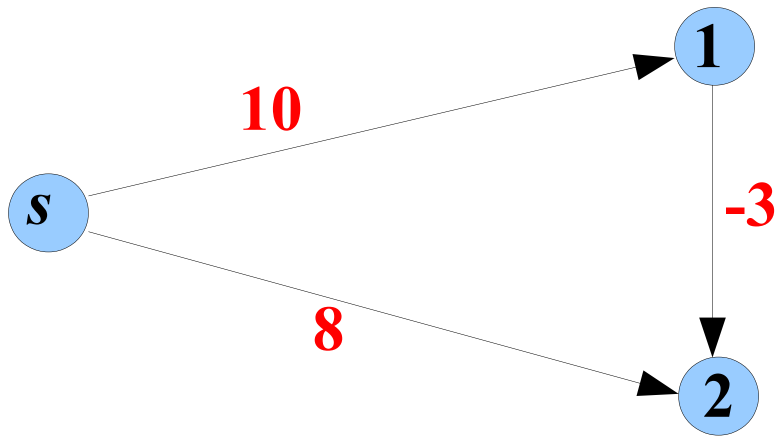
Cvičení 1



Cvičení 2



Úloha, kterou nelze řešit Dijkstrovým algoritmem



Po skončení Dijkstrova algoritmu totiž dostaneme:

$D(s) = 0$, $D(1) = 10$, $D(2) = 8$.

Přitom zřejmě cesta minimální délky z uzlu s do uzlu 2 má délku 7.

Je to způsobeno zápornou délkou hrany (1,2), i když v grafu nejsou kružnice se zápornou délkou.

Floyd-Warshallův algoritmus

Výše uvedený příklad ukazuje, že Dijkstrův algoritmus nelze použít, pokud se v grafu vyskytují hrany se zápornou délkou, i když graf neobsahuje kružnice se zápornou délkou. V takovém případě lze použít Floyd-Warshallův algoritmus. Při každém zadání délek hran tento algoritmus nalezne cestu minimální délky z každého uzlu do každého jiného uzlu a pokud taková cesta, která by současně byla minimálním sledem, neexistuje kvůli kružnici se zápornou délkou, tuto kružnici odhalí.

Uvažujme graf $G=(U, H)$, $U=\{1,2,\ldots,n\}$, v němž délky hran jsou zadány maticí

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} značí délku hrany (i, j) pro libovolné $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Dále budeme používat matici

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

kde na počátku platí $p_{ij}=j$. Algoritmus má vždy n iterací:

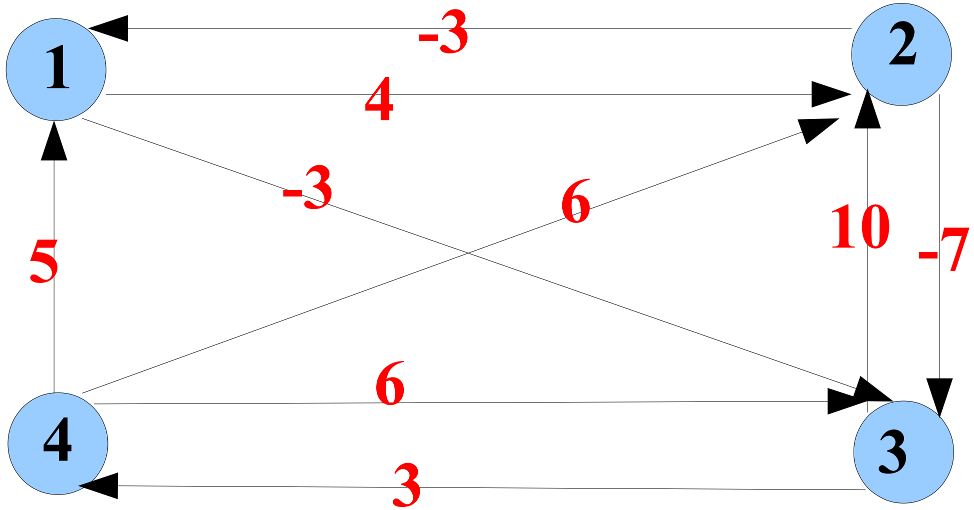
Začneme s maticí $A^0 = A, P^0 = P$ a v i-té iteraci vytvoříme matice A^i, P^i pomocí matic A^{i-1}, P^{i-1}. Nakonec tedy dostaneme matice A^n, P^n. Prvky matic $A^j, P^j, j = 1,2,\ldots,n$ se vypočítají následujícím způsobem:

$$a_{ik}^j = a_{ik}^{j-1},\ p_{ik}^j = p_{ik}^{j-1} \text{ jestliže } a_{ik}^{j-1} \leq a_{ij}^{j-1} + a_{jk}^{j-1}$$

$$a_{ik}^j = a_{ij}^{j-1} + a_{jk}^{j-1},\ p_{ik}^j = p_{ij}^{j-1} \text{ jestliže } a_{ik}^{j-1} > a_{ij}^{j-1} + a_{jk}^{j-1}$$

Indukcí se dá dokázat, že po skončení algoritmu má prvek a_{ij}^n hodnotu minimální vzdálenosti z uzlu i do uzlu j. Dá se též ověřit, že pokud $p_{ij}^n = k$, potom (i, k) je první hrana v minimální cestě z uzlu i do uzlu j, což se dá využít při konstrukci této cesty.

Příklad



$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & \infty \\ -3 & 0 & -7 & \infty \\ \infty & 10 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. iterace

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & \infty \\ -3 & 0 & -7 & \infty \\ \infty & 10 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. iterace

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & \infty \\ -3 & 0 & -7 & \infty \\ 7 & 10 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

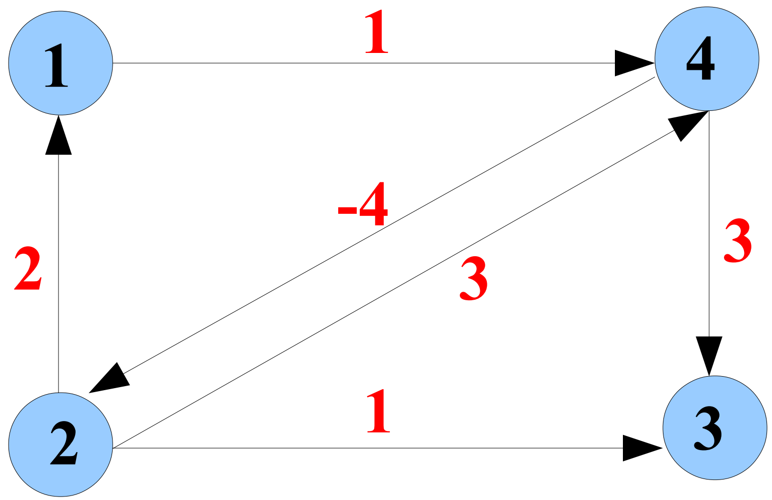
3. iterace

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -7 & -4 \\ 7 & 10 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. iterace

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -7 & -4 \\ 6 & 9 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad



$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. iterace

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. iterace

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ -2 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zde došlo k tomu, že diagonální prvek (4,4) je záporný, což vždy indikuje existenci kružnice se zápornou délkou a tedy neexistenci cesty s minimální délkou (která by byla sledem s minimální délkou) z uzlu *a* do uzlu *b,* která obsahuje alespoň jeden uzel této kružnice.