Dále budeme předpokládat, že každý graf je obyčejný a má aspoň tři uzly.

Definice 1

Graf G se nazývá **eulerovský**, existuje-li v něm uzavřený tah, který obsahuje každou hranu v G.

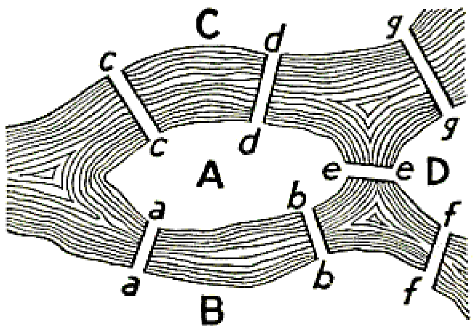
Definice 2

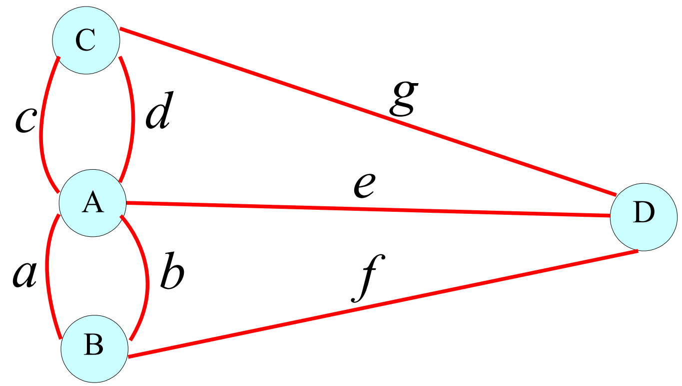
Graf G se nazývá **poloeulerovský**, existuje-li v něm tah, který obsahuje každou hranu v G.

Jinými slovy, eulerovský graf lze „nakreslit jedním tahem“, přičemž začneme v libovolném uzlu a v tomtéž uzlu skončíme, zatímco u polo-eulerovského grafu můžeme skončit i v jiném uzlu.

Historická poznámka 1

Ve svém článku vydaném v roce 1736 se Leonhard Euler, švýcarský matematik (1707 Basilej, † 1783 Petrohrad), zabývá řešením tzv. problému sedmi mostů města Královce. V Královci (Königsberg) ve Východním Prusku obtéká řeka Pregel ostrov Kneiphof a za ním se rozdvojuje. Části pevniny jsou přitom spojeny mosty podle obrázku.*





Problém, který Euler vyřešil, spočíval v tom, jak projít po všech sedmi mostech právě jednou a vrátit se přitom na původní místo. I když v tomto článku se přímo o grafech nehovoří, je Euler považován za zakladatele teorie grafů.

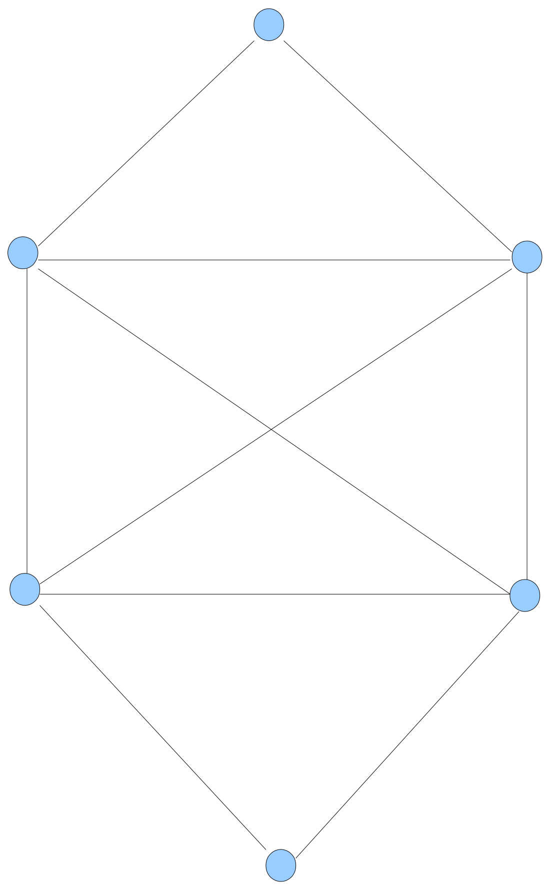
Věta 1

Nechť *G* je souvislý graf. Potom je *G* eulerovský, právě když každý jeho uzel má sudý stupeň.

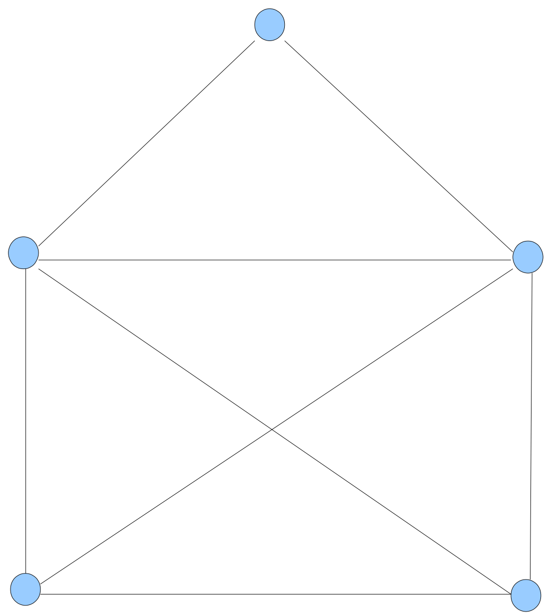
Důsledek 1

Souvislý graf je poloeulerovský, právě když každý jeho uzel má sudý stupeň nebo existují právě dva uzly lichého stupně.

Příklad 1



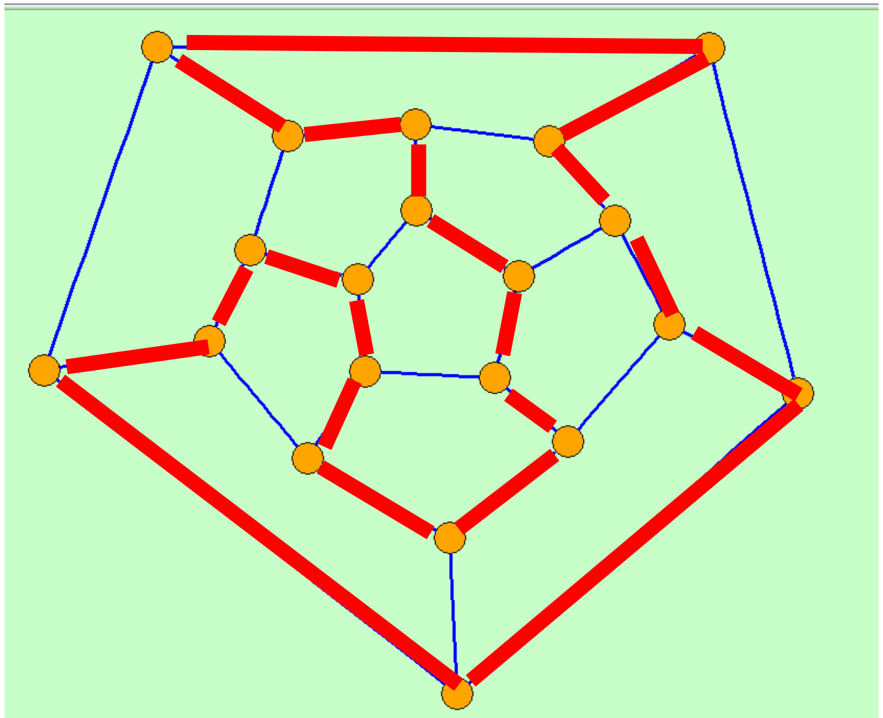
EULEROVSKÝ GRAF



POLOEULEROVSKÝ GRAF

Definice 3

Hamiltonovskou kružnicí grafu *G* nazveme kružnici, která prochází každým uzlem grafu právě jednou. Graf nazveme hamiltonovským, má-li hamiltonovskou kružnici.



HAMILTONOVSKÝ GRAF

<u>Historická poznámka 2</u>

Jméno tomuto grafu dal irský matematik Sir William Rowan Hamilton, který v roce 1859 vymyslel hlavolam a zadal jej výrobci hraček v Dublinu. Hlavolam ze dřeva měl tvar pravidelného dvanáctistěnu s dvaceti vrcholy označenými názvy předních evropských měst. Cílem bylo nalézt trasu podél hran dvanáctistěnu, která prochází každým městem právě jednou. Výše uvedený graf takovýto dvanáctistěn reprezentuje: jeho uzly odpovídají vrcholům tělesa a jeho hrany hranám spojujícím tyto vrcholy. Zároveň je zde naznačeno řešení v podobě Hamiltonovy kružnice.

Věta 2 (*Ore*)

Nechť G je graf s n uzly $n \geq 3$ a nechť platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ pro každé dva uzly u a v grafu G, které nejsou spojeny hranou. Potom je graf G hamiltonovský.

Důkaz

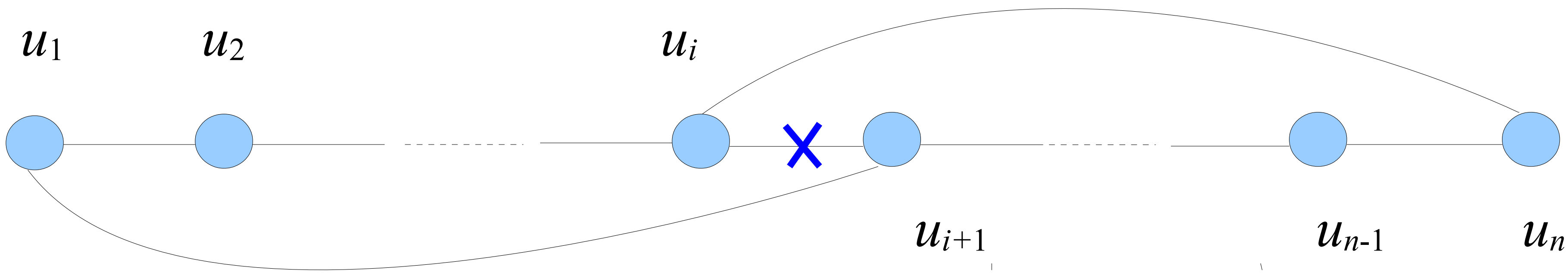
Nechť existuje graf G, který splňuje předpoklady věty a přitom v něm neexistuje hamiltonovská kružnice. Vyberme ze všech takovýchto grafů ten, který má maximální počet hran. Určitě v něm existuje cesta definovaná posloupností uzlů $u_{1,} u_{2,} \ldots, u_n$, jinak by bylo možno ke grafu G přidat aspoň jednu hranu, aniž by G obsahoval hamiltonovskou kružnici. Navíc zřejmě uzly u_1 a u_n nejsou spojeny hranou.

Definujme nyní množiny hran

$$E_1 = \{(u_i, u_{i+1}) \mid (u_{1,} u_{i+1}) \text{ je hranou v } G\}$$

$$E_n = \{(u_i, u_{i+1}) \mid (u_i, u_n) \text{ je hranou v } G\}$$

Protože počet hran cesty mezi uzly u_1 a u_n je roven $n-1$ a podle předpokladu věty je $|E_1| + |E_n| = \deg(u_1) + \deg(u_n) \geq n$, existuje aspoň jedna hrana (u_i, u_{i+1}) v průniku $E_1 \cap E_n$. Navíc platí $1 < i < n-1$, protože uzly u_1 a u_n nejsou spojeny hranou. Z toho vyplývá, že v *G* existuje hamiltonovská kružnice, jak je vidět na obrázku.



<u>Věta 3</u> (*Dirac*)

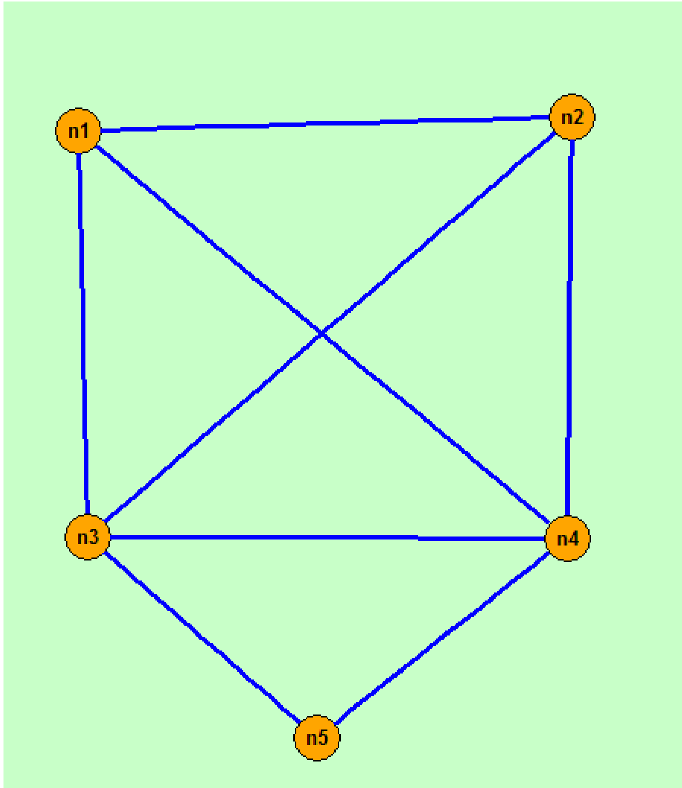
Nechť G je obyčejný graf s n uzly a nechť platí $\deg(u) \geq n/2$ pro každý uzel u. Potom je graf G hamiltonovský.

<u>Důkaz</u>

Předpoklad věty zřejmě vynucuje splnění předpokladu Věty 2, takže graf je hamiltonovský.

Příklad 2

Graf, který splňuje Oreho podmínku, ale nesplňuje Diracovu podmínku.



$\deg(n5)+\deg(n1)=\deg(n5)+\deg(n2)\geq 5$: Oreho podmínka je splněna.

$\deg(n5)<2{,}5=5/2$: Diracova podmínka splněna není.

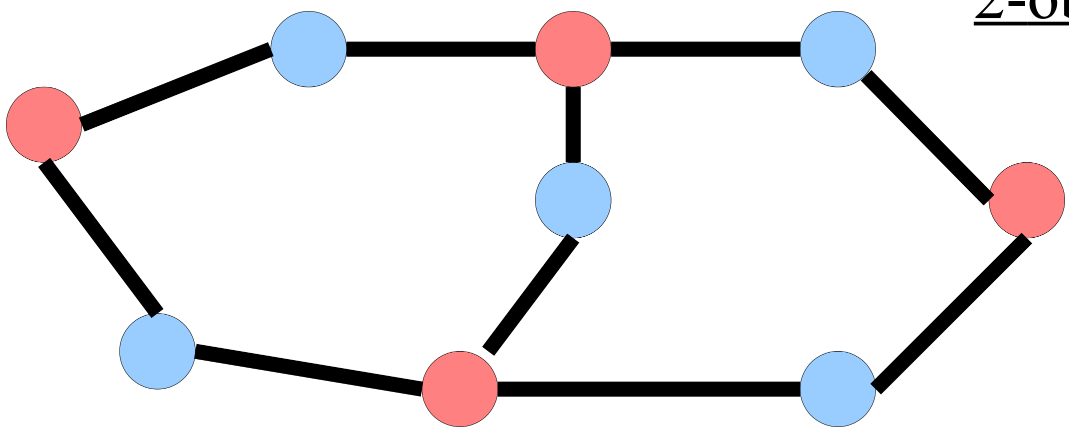
Barvení uzlů

Graf je ***obarvený***, když se každému uzlu přiřadí barva tak, že dvěma uzlům spojeným hranou jsou přiřazeny různé barvy.

Pokud je možno graf obarvit pomocí *k* barev, aniž bychom nutně užili všechny z nich, nazývá se ***k-obarvitelným*****.**

Nejmenší možná hodnota *k*, pro kterou je graf *G* *k*-obarvitelným, se nazývá ***chromatické číslo*** grafu *G*, formálně $\chi(G)$.

2-obarvitelný graf



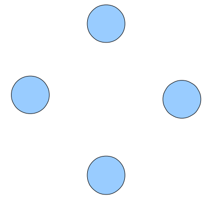
Označme

- K_n úplný graf s n uzly,
- D_n diskrétní graf s n uzly,
- K bipartitní graf, tj. graf, jehož množinu uzlů lze rozložit na dvě disjunktní množiny $V_{1,} V_2$ tak, že každá jeho hrana spojuje některý uzel z množiny V_1 s některým uzlem z množiny V_2 . Jestliže je navíc každý uzel z množiny V_1 spojen hranou s každým uzlem z množiny V_2 , pak se tento graf nazývá úplný bipartitní graf a značí se $K_{m,n}$, kde $m=|V_1|, n=|V_2|$.

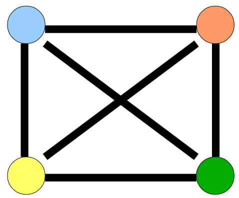
Je zřejmé, že bipartitní graf neobsahuje kružnici liché délky (platí i opačné tvrzení).

Následující tvrzení se dají snadno dokázat:

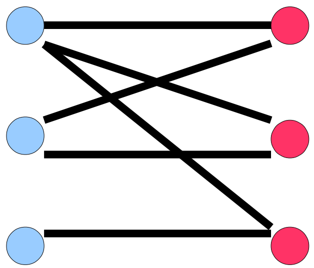
(a) $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G = D_n$



(b) $\chi(K_n) = n$

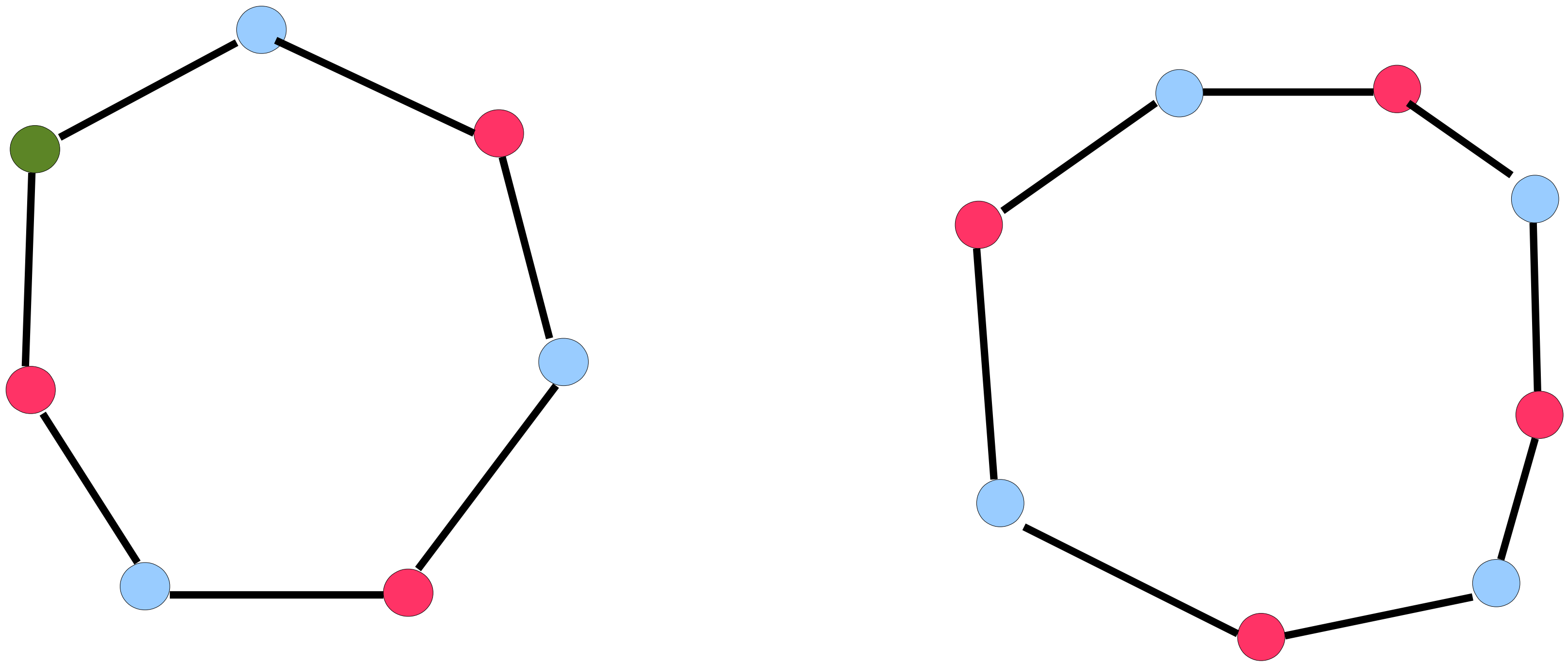


(c) $\chi(K) = 2$



Následující tvrzení je také názorné z obrázku:

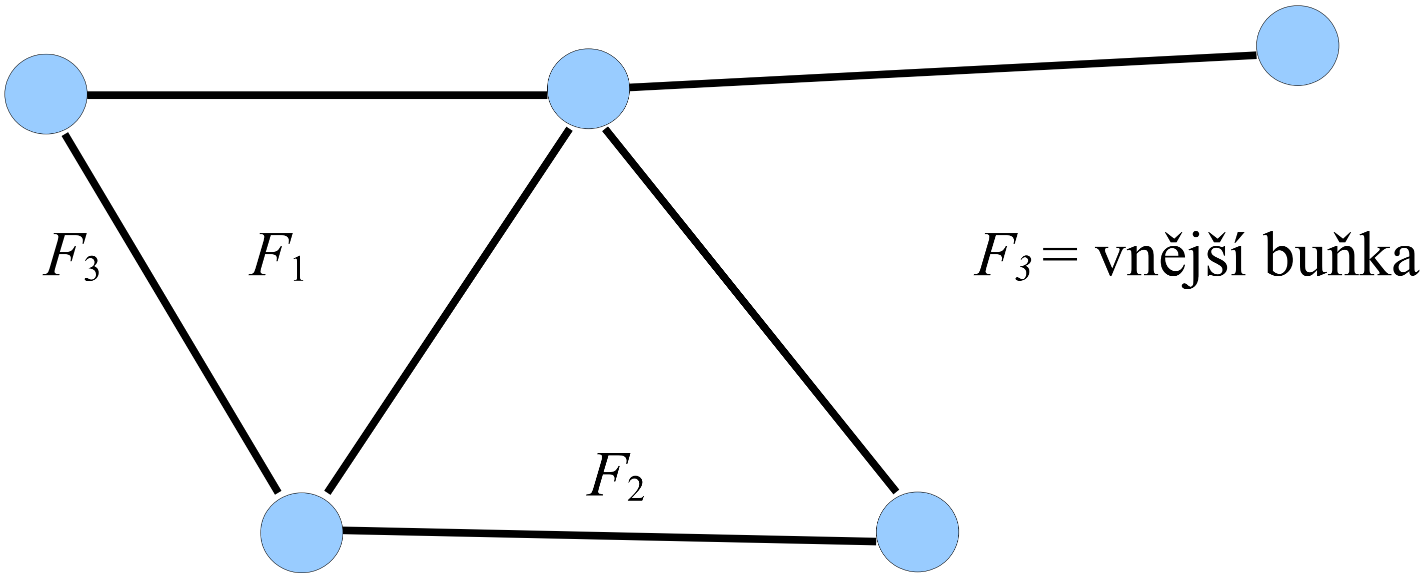
Kružnice je 2-obarvitelná, právě když má sudý počet uzlů.



Dále se dá snadno dokázat, že graf je 2-obarvitelný, když neobsahuje kružnici s lichým počtem uzlů. Strom, který žádné kružnice neobsahuje, je tedy 2-obarvitelný.

Planárnost grafu

Graf G se nazývá ***planární*** *(rovinný)*, když je možno jej nakreslit v rovině tak, aby se jeho hrany nekřížily. Části roviny vymezené hranami planárního grafu nakresleného v rovině bez křížení hran se nazývají ***buňky*** a hrany kolem nich jsou jejich ***hranice***.



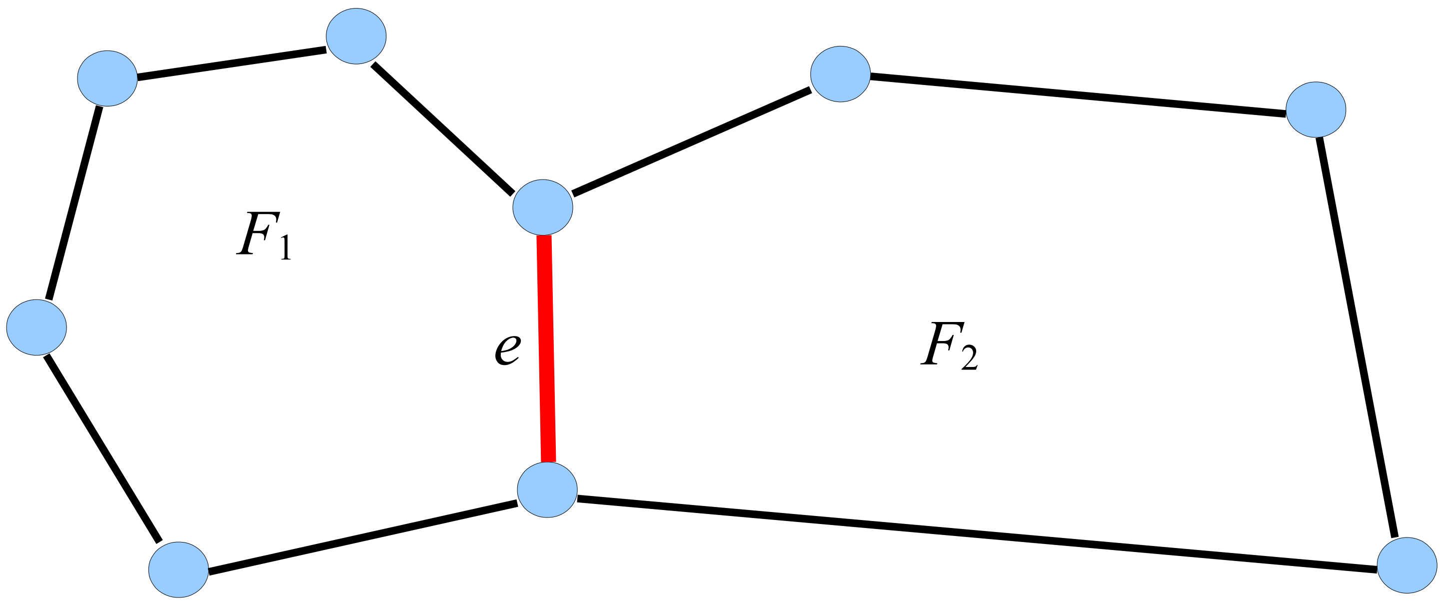
Věta 1 (*Euler 1750*)

Má-li souvislý planární graf n uzlů a m hran a tvoří p buněk, platí

$n - m + p = 2$.

Důkaz:

Důkaz provedeme indukcí podle počtu hran. Nechť G je planární souvislý graf s n uzly, m hranami a p buňkami. Pokud $m = 0$, potom $n = 1$ (protože G je souvislý) a $p = 1$, takže tvrzení věty platí. Nechť rovnost platí pro $m = k - 1$, kde $k \geq 1$. Nechť má graf G n uzlů a k hran. Je-li G strom, rovnice zřejmě platí, protože každý strom s n uzly má právě $n - 1$ hran a neohraničuje žádnou vnitřní buňku. Pokud G není strom, obsahuje nějakou kružnici C. Nechť e je hrana kružnice C. Pak jejím odstraněním vznikne graf G', který stále zůstává souvislým, má n uzlů a $k-1$ hran. Má tudíž $2-n+k-1=1-n+k$ buněk. Avšak odstraněním hrany z kružnice se buňka kružnicí ohraničená sloučí se sousední buňkou za odstraněnou hranou e. Tím bude počet buněk p grafu G o jednu větší než počet buněk v grafu G'. Tedy G má $p=2-n+k$ buněk, čili platí $n-k+p=2$.



<u>Věta 2</u>

Nechť G je souvislý planární graf s $n \geq 3$ uzly a m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$.

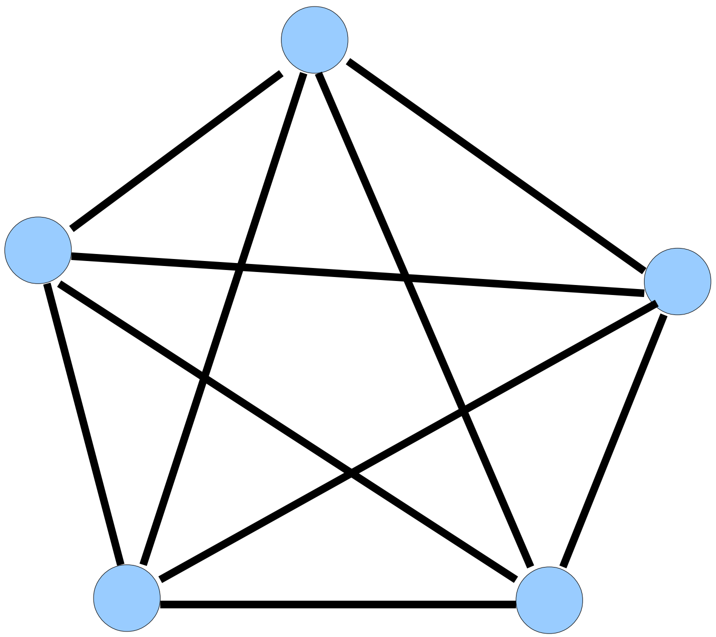
Důkaz: Pokud $n = 3$, tvrzení se dá snadno přímo ověřit. Nechť $n \geq 4$ a nechť G má buňky $F_{1,} F_{2,} \ldots F_p$ (při nakreslení G v rovině bez křížení hran). Nechť r_i je počet hran, které ohraničují buňku F_i. Protože G je obyčejný, $r_i \geq 3$. Proto $3p \leq (r_1 + r_2 + \cdots + r_p)$. Dále, při sečítání jednotlivých počtů hran tvořících hranice buněk se každá hrana počítá nejvýše dvakrát, neboť může být hranicí nejvýše dvou různých buněk . Proto je pravá strana nerovnosti nejvýše rovna $2m$ a podle Věty 1 platí $3(2 - n + m) = 3p \leq 2m$ neboli $6 - 3n + 3m \leq 2m$ a věta je dokázána.

<u>Důsledek</u>

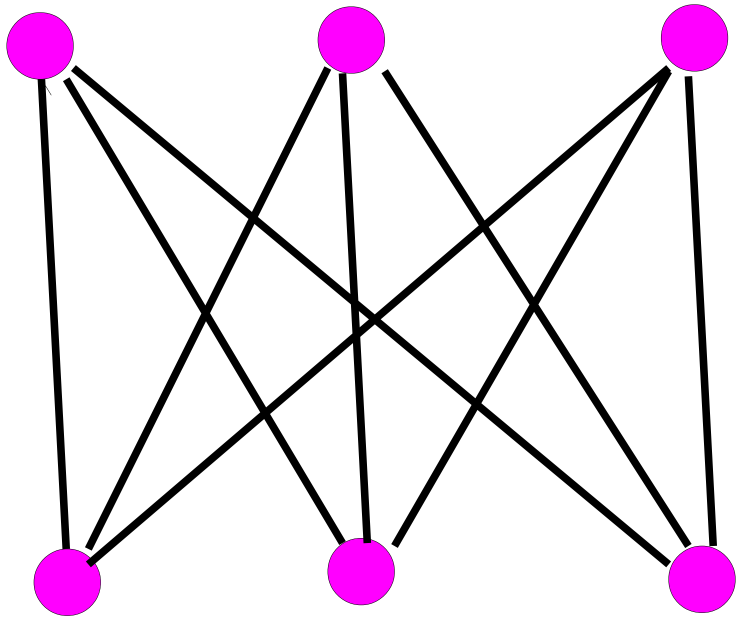
Každý planární graf má alespoň jeden uzel stupně nejvýše pět.

Důkaz: Předpokládejme, že existuje souvislý planární graf s n uzly a m hranami takový, že každý jeho uzel má stupeň nejméně 6. Pak součet stupňů všech uzlů je větší nebo roven $6n$, tedy $m \geq 3n$. To je však spor s Větou 2. Proto každý souvislý planární graf, a tedy také každá komponenta libovolného planárního grafu, má alespoň jeden uzel stupně nejvýše pět. Odtud plyne tvrzení.

Pomocí předchozí věty dokážeme, že níže uvedené souvislé grafy nejsou planární:



K_5



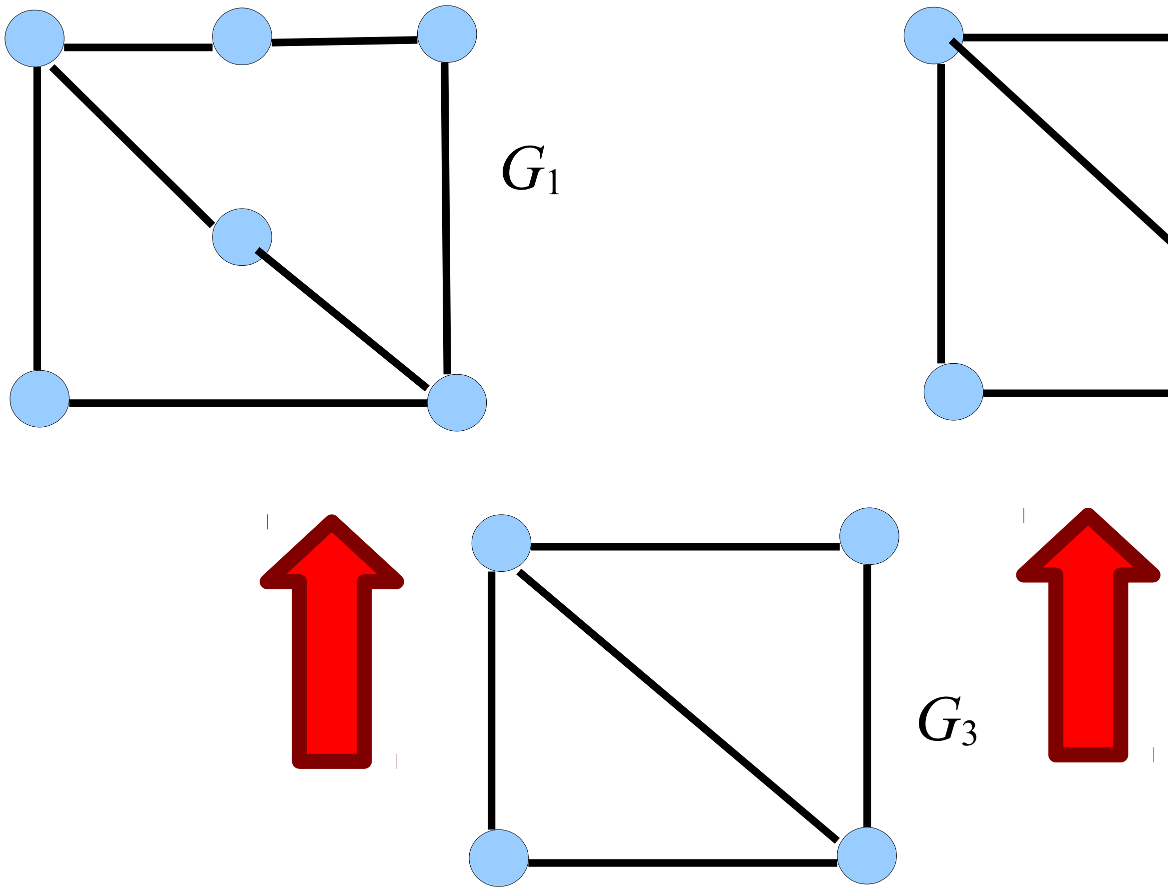
$K_{3,3}$

To, že K_5 není planární, plyne přímo z Věty 2, protože má 10 hran, ale podle Věty 2 nemůže mít více než 9 hran.

Neplanaritu grafu $K_{3,3}$ je možno dokázat sporem. Předpokládejme, že $K_{3,3}$ planární je. Potom jej můžeme nakreslit v rovině bez křížení hran a podle Věty 1 má pak $K_{3,3}$ právě 5 buněk, dosadíme-li $n = 6$ a $m = 9$. Protože bipartitní graf nemá kružnice liché délky, oněch 5 buněk musí ohraničovat nejméně 20 hran. Každá hrana tvoří hranici nejvýše dvou buněk, takže $K_{3,3}$ by musel mít aspoň 10 hran. To je zřejmý spor, protože $K_{3,3}$ má pouze 9 hran.

Tudíž žádný graf, který obsahuje některý z grafů K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf, není planární.

Dva grafy G_1 a G_2 se nazývají ***homeomorfní*** (nebo shodné až na uzly stupně 2), je-li možno G_1 i G_2 získat z nějakého grafu G_3 postupným rozpůlením některých hran vložením nového uzlu.



<u>Věta 3</u> (*Kuratowski 1930*)

Graf je planární, právě když neobsahuje podgraf homeomorfní s grafem K_5 ani podgraf homeomorfní *s* $K_{3,3}$.

Důkaz:

Viz např.

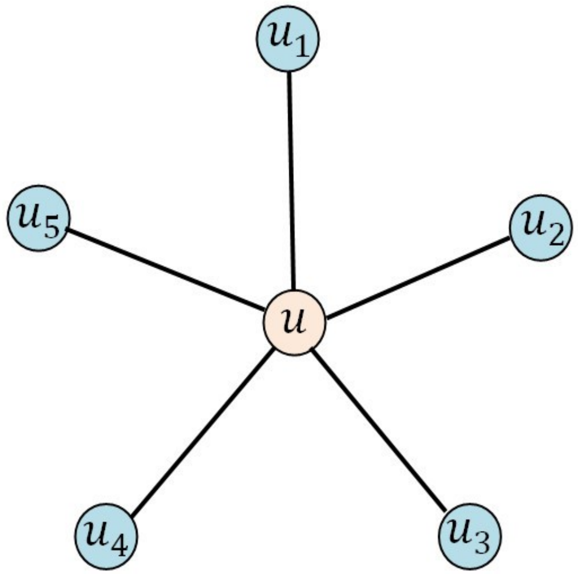
BONDY, J. A., and MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*, Elsevier, New York, 1976.

Věta 4

Každý planární graf je 5-obarvitelný .

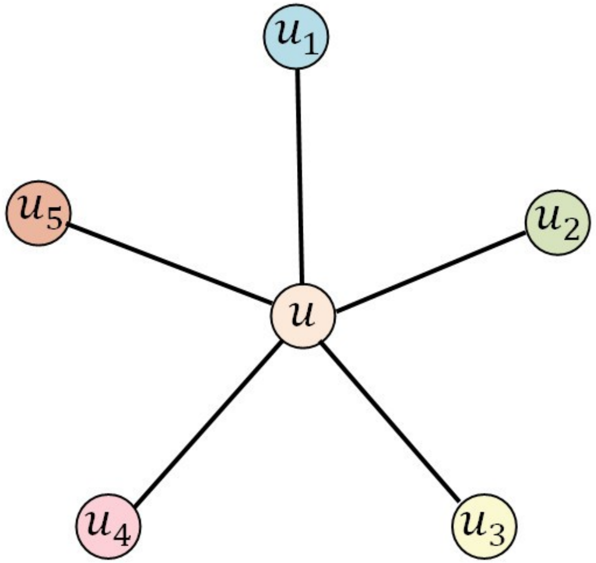
Důkaz:

Důkaz provedeme indukcí podle počtu uzlů grafu G. Zřejmě každý graf s méně než 6 uzly je 5-obarvitelný. Nechť je každý graf s méně než n uzly 5-obarvitelný. Uvažujme graf $G=(U, H)$ s n uzly a sestrojme jeho obarvení pěti barvami následovně: Podle důsledku Věty 2 existuje uzel $u \in U$, jehož stupeň je nejvýše 5. Označme symbolem G_u graf vytvořený z grafu G odstraněním uzlu u i s hranami, se kterými je incidentní. Protože G_u má $n-1$ uzlů, dá se podle indukčního předpokladu obarvit pěti barvami. Pokud z uzlu u v grafu G vede méně než pět hran, je možno jej obarvit barvou nepřiřazenou žádnému z jeho sousedních uzlů. Předpokládejme tedy, že z uzlu u vede právě 5 hran do uzlů $u_{1,} u_{2,} u_{3,} u_{4,} u_5$.

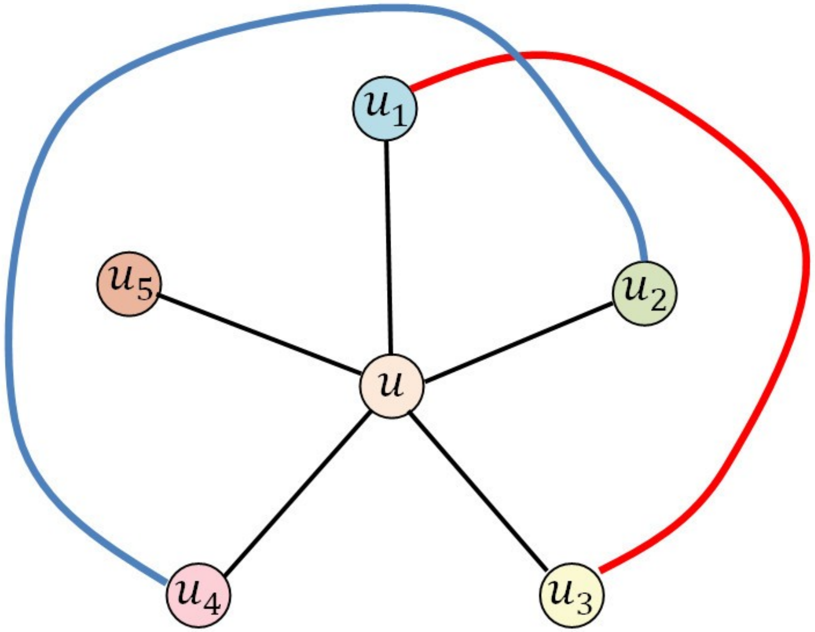


Nechť uzlu u_i je přiřazena například barva c_i. Nejsou-li všechny barvy $c_{1,} c_{2,} c_{3,} c_{4,} c_5$ různé, je možno uzlu u přiřadit barvu neobsaženou mezi barvami $c_{1,} c_{2,} c_{3,} c_{4,} c_5$.

Předpokládejme tedy, že $c_i \neq c_j, 1 \leq i < j \leq 5$.



Označme H_{13} podgraf grafu G indukovaný všemi uzly obarvenými barvami c_1 a c_3. Podobně H_{24} bude značit podgraf grafu G indukovaný všemi uzly obarvenými barvami c_2 a c_4 . Dokážeme, že buďto uzly u_1 a u_3 nepatří do stejné komponenty podgrafu H_{13} nebo uzly u_2 a u_4 nepatří do stejné komponenty podgrafu H_{24}.



Kdyby byly uzly u_1 a u_3 oba v jediné komponentě podgrafu H_{13}, existovala by mezi nimi v G_u cesta složená pouze z uzlů obarvených barvami c_1 a c_3. Pokud by i uzly u_2 a u_4 byly oba v jediné komponentě podgrafu H_{24}, existovala by mezi nimi v G_u cesta složená pouze z uzlů obarvených barvami c_2 a c_4. To však není možné, protože v rovinném grafu se hrany protínají pouze v uzlech.

Nechť tedy jsou řekněme uzly u_1 a u_3 ve dvou různých komponentách podgrafu H_{13}. Nechť u_1 je v komponentě K_1. V K_1 můžeme prohodit barvy uzlů, čili uzly s barvou c_3 obarvit barvou c_1 a naopak. I potom bude zřejmě přiřazení barev obarvením grafu G_u a uzel u_1 bude mít nyní barvu c_3, takže uzlu u můžeme přiřadit barvu c_1 a získat tak hledané obarvení grafu G.

<u>Věta 4</u>

Každý planární graf je 4-obarvitelný.

Tato věta byla více než 150 let známa jako hypotéza čtyř barev, než ji v roce 1976 dokázali američtí matematikové Appel a Haken. Důkaz byl značně komplikovaný a částečně se spoléhal i na výstup z počítačového programu. Pro každou zeměpisnou mapu můžeme sestrojit rovinný graf. Každý stát na mapě představuje uzel. Dva uzly jsou spojeny hranou, mají-li státy, které je představují, společné hranice. Minimální počet barev potřebných k vyrobení mapy se rovná chromatickému číslu tohoto grafu, tedy čtyřem (podle Věty 4). Naopak, ke každému rovinnému grafu lze zřejmě sestrojit odpovídající „fiktivní“ mapu.