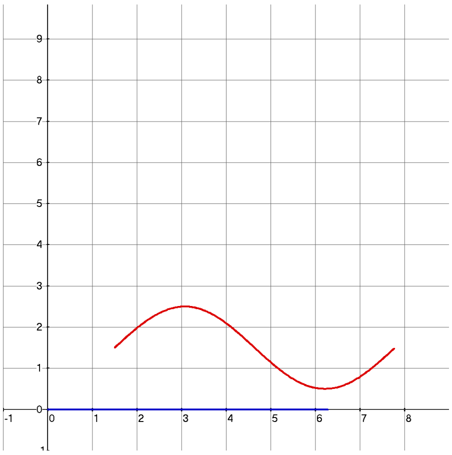
Zobrazení v euklidovské rovině

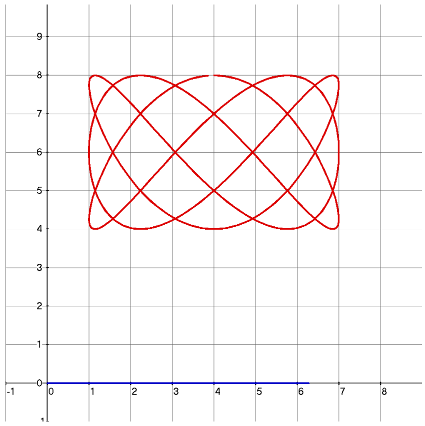
$$Z: \begin{matrix} x_1' = f_1(x_1;x_2) \\ x_2' = f_2(x_1;x_2) \end{matrix}$$

Příklady:

$$AB: A[0;0]; B[2\pi;0]$$

$$Z: \begin{matrix} x_1' = x_1 + 1.5 \\ x_2' = \sin x_1 + 1.5 \end{matrix} \qquad Z: \begin{matrix} x_1' = 3\sin 3x_1 + 4 \\ x_2' = 2\cos 5x_1 + 6 \end{matrix}$$



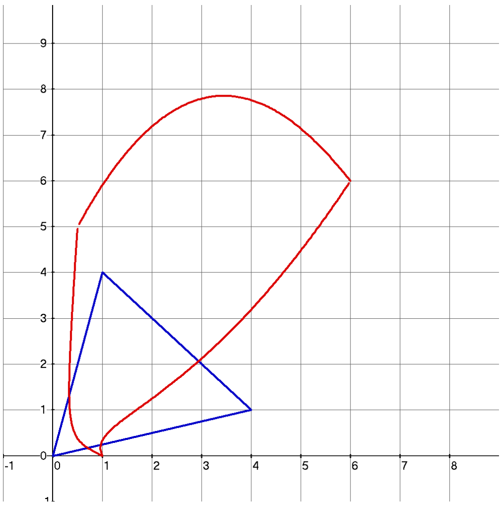


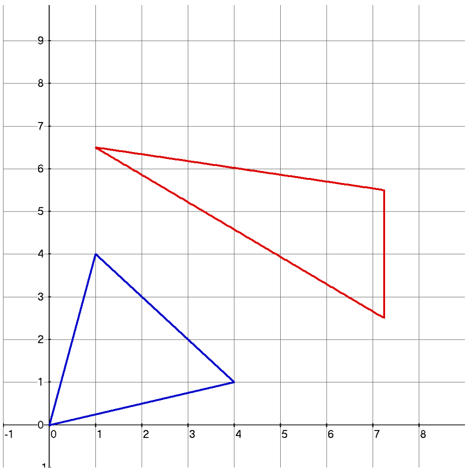
Zobrazení v euklidovské rovině

$$Z: X \to X'$$

$$Z: \begin{matrix} x_1' = f_1(x_1;x_2) \\ x_2' = f_2(x_1;x_2) \end{matrix} \qquad \Delta ABC: A[0;0]; B[4;1]; C[1;4]$$

$$Z: \begin{matrix} x_1' = 1.5x_1 - \sqrt{x_2} + 1 \\ x_2' = \sqrt{x_1} + x_1 x_2 \end{matrix} \qquad Z: \begin{matrix} x_1' = 1,25x_1 + 1,25x_2 + 1 \\ x_2' = 0,75x_1 + 0,5x_2 + 6,5 \end{matrix} \qquad Z: \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 & 1,25 \\ 0,75 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6,5 \end{pmatrix}$$





$$Z: X \to X'$$

$$Z: (\mathbf{X}')^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{v}^T$$

$$Z: \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

přímka $\to$ ***přímka***

kolineární zobrazení

Základní kolineární zobrazení v euklidovské rovině

$$\mathsf{Z}:\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{O}_x:\begin{aligned}x_1' &= x_1\\ x_2' &= -x_2\end{aligned}$$

$$\mathsf{Z}:\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{T}_v:\begin{aligned}x_1' &= x_1 + v_1\\ x_2' &= x_2 + v_2\end{aligned}$$

$$\mathsf{Z}:\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{O}_y:\begin{aligned}x_1' &= -x_1\\ x_2' &= x_2\end{aligned}$$

$$\mathsf{Z}:\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{R}_{\frac{\pi}{3}}:\begin{aligned}x_1' &= x_1\cdot\cos\alpha - x_2\cdot\sin\alpha\\ x_2' &= x_1\cdot\sin\alpha + x_2\cdot\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\mathsf{Z}:\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{S}:\begin{aligned}x_1' &= -x_1\\ x_2' &= -x_2\end{aligned}$$

$$\mathsf{Z}:\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{H}_\lambda:\begin{aligned}x_1' &= \lambda\cdot x_1\\ x_2' &= \lambda\cdot x_2\end{aligned}$$

Základní kolineární zobrazení v E^3: $\mathsf{Z}:(\mathbf{X}')^T=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}^T+\mathbf{v}^T$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+v_1\\ x_2' &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+v_2\\ x_3' &= a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+v_3\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{aligned}x_1' &= -x_1\\ x_2' &= x_2\\ x_3' &= x_3\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{aligned}x_1' &= x_1\\ x_2' &= -x_2\\ x_3' &= x_3\end{aligned}$$

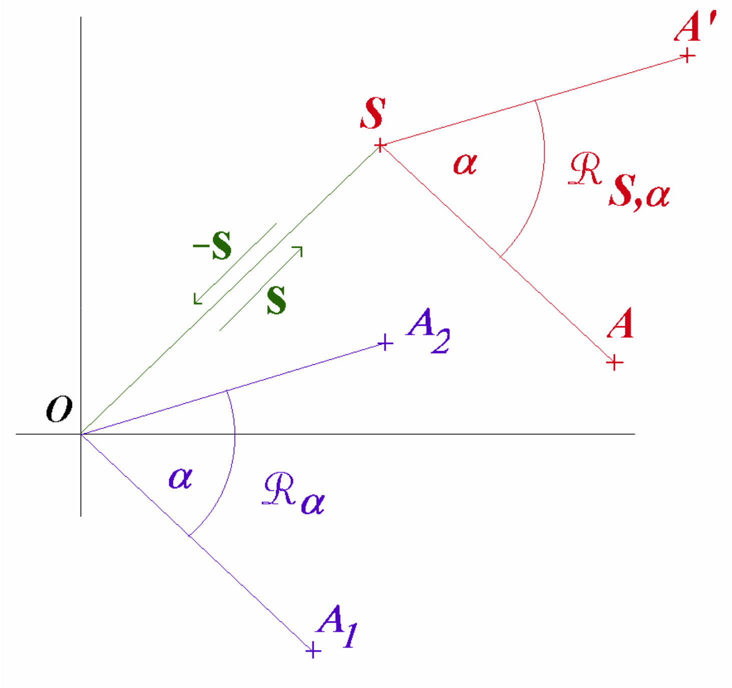
$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{aligned}x_1' &= x_1\\ x_2' &= x_2\\ x_3' &= -x_3\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skládání kolineárních zobrazení v euklidovské rovině



$A_1 = \mathrm{T}_{-\mathbf{s}}(A) \qquad \mathbf{A}_1^T = \mathbf{T}_{-\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{s}$

$A_2 = \mathrm{R}_\alpha(A_1) \qquad \mathbf{A}_2^T = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{A}_1^T$

$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(A_2) \qquad \mathbf{A}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{s}$

$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(\mathrm{R}_\alpha(A_1))$

$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{T}_{-\mathbf{s}}(A)))$

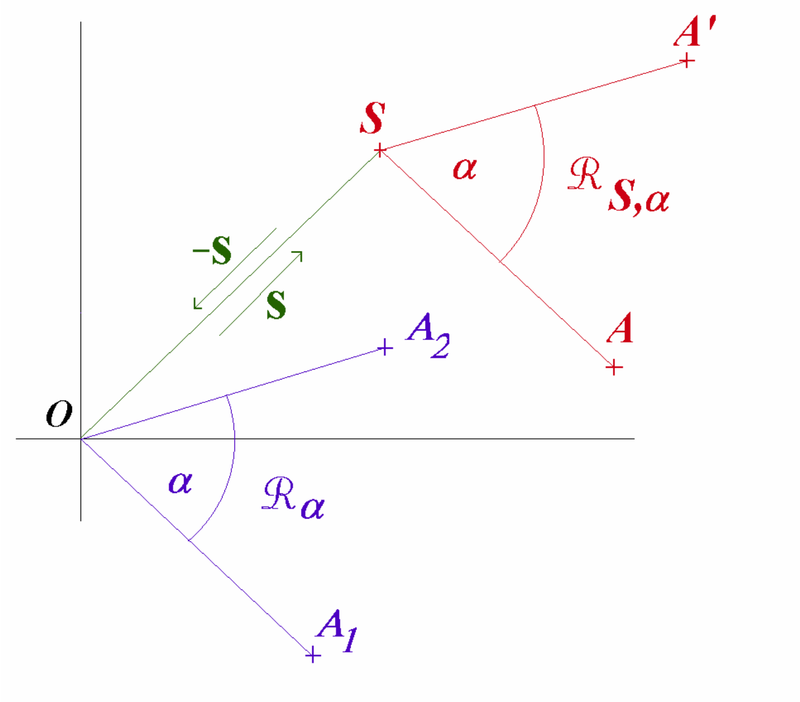
$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}} \circ \mathrm{R}_\alpha \circ \mathrm{T}_{-\mathbf{s}}$

$\mathbf{A}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{s}$

$\mathbf{A}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \left(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{A}_1^T\right) + \mathbf{s}$

$\mathbf{A}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \left(\mathbf{R}_\alpha \cdot \left(\mathbf{T}_{-\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{s}\right)\right) + \mathbf{s}$

Skládání afinních zobrazení



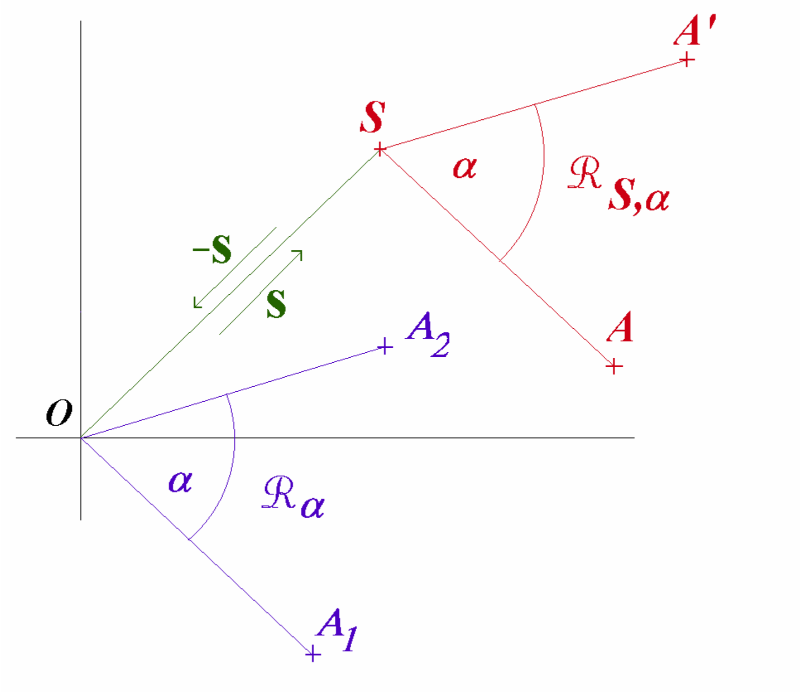
$A_1 = \mathrm{T}_{-\mathbf{s}}(A)$	$\mathbf{A}_1^T = \mathbf{T}_{-\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{s}$
$A_2 = \mathrm{R}_\alpha(A_1)$	$\mathbf{A}_2^T = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{A}_1^T$
$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(A_2)$	$\mathbf{A}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{s}$

$$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(\mathrm{R}_\alpha(A_1))$$

$$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{T}_{-\mathbf{s}}(A)))$$

$$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}} \circ \mathrm{R} \circ \mathrm{T}$$

Skládání afinních zobrazení



$A_1 = \mathrm{T}_{-\mathbf{s}}(A)$	$\mathbf{A}_1^T = \mathbf{T}_{-\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{s}$
$A_2 = \mathrm{R}_\alpha(A_1)$	$\mathbf{A}_2^T = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{A}_1^T$
$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(A_2)$	$\mathbf{A}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{s}$

$$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(\mathrm{R}_\alpha(A_1))$$

$$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}}(\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{T}_{-\mathbf{s}}(A)))$$

$$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}} \circ \mathrm{R} \circ \mathrm{T}$$

$$\mathbf{A}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{s}$$

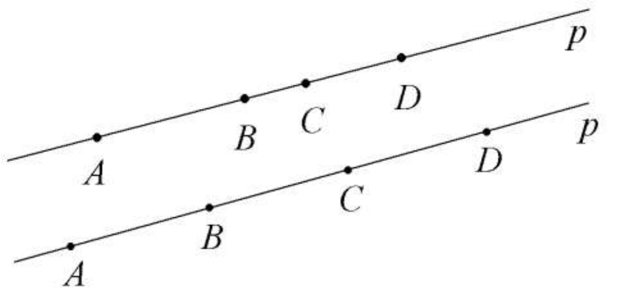
Dělicí poměr bodů

Tři různé vlastní body:

$$|(A;B;C)| = \frac{|AC|}{|BC|};\ (A;B;C) > 0 \Leftrightarrow B\mu AC$$

$(A; {}_{\infty}B; C) = 0$

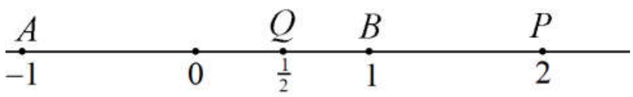
$(A; B; {}_{\infty}C) = 1$



Dvojpoměr

čtyř různých bodů $A;B;C;D \in p$*; kde* $A;B$ *jsou vlastní body, je číslo*

$$(A;B;C;D) = \frac{(A;B;C)}{(A;B;D)}$$



Příklady

$|AB| = |BC| = |CD| \Rightarrow (A;B;C;D) = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} = \frac{4}{3}$

$A;B;Q;P$ *jsou po řadě obrazy čísel* $-1;1;\frac{1}{2};2$ *na číselné ose* $(A;B;Q;P)$

$(A;B;S;{}_{\infty}P) =$

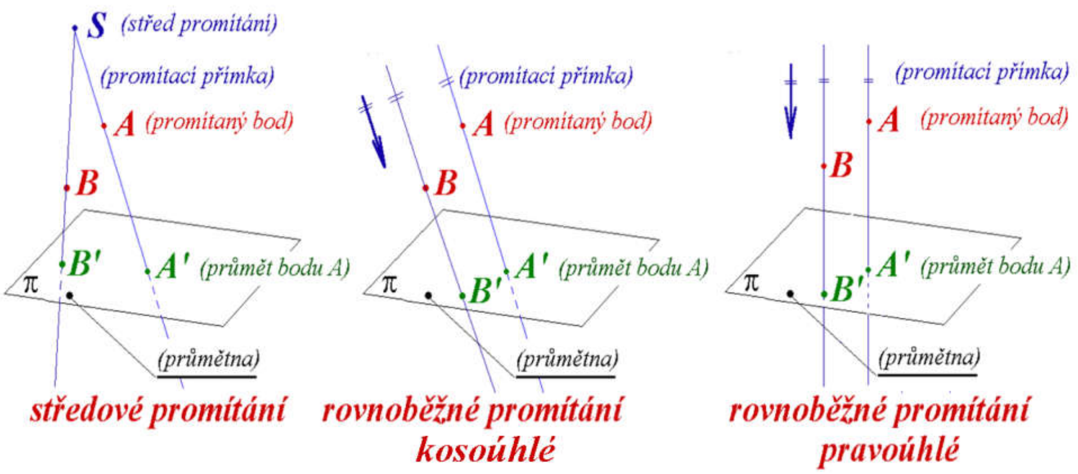
Zobrazení v projektivním prostoru

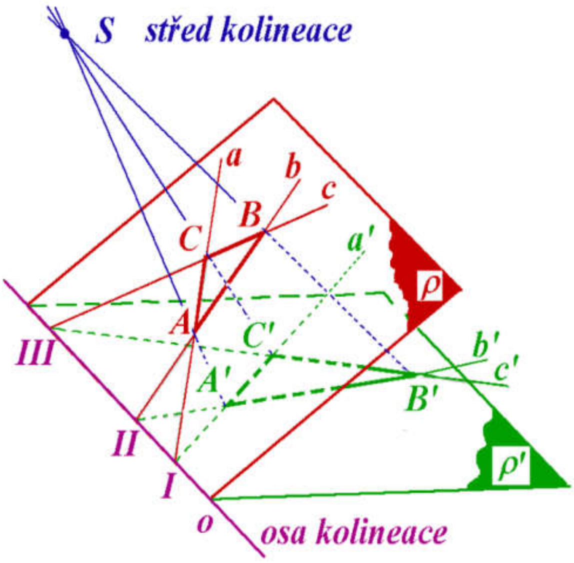
je zobrazení, které zobrazuje množinu $M \subset {}_{\infty}E^3$ *na množinu* $M' \subset {}_{\infty}E^3$.

Kolineární zobrazení v projektivním prostoru *– zobrazuje přímku opět na přímku, anebo na bod*

Promítání *– je projektivní zobrazení* ***a)*** $\quad {}_{\infty}E^3 \to \pi = {}_{\infty}E^2$ *(prostoru na rovinu)*

Definice: Je dána rovina π a bod $S \notin \pi$. Zobrazení, které libovolnému bodu $A \neq S$ přiřadí průsečík A' přímky AS s rovinou π, se nazývá promítání z bodu S do roviny π.





Definice: Nechť jsou dány dvě roviny $\rho; \rho'$ a bod S. Středovou kolineací rozumíme zobrazení, které zobrazuje:

1. Body $A, B, C ... \in \rho$ na body $A', B', C' ... \in \rho'$ tak, že $AA' \cap BB' \cap CC' = \{S\}$ (S - střed kolineace).

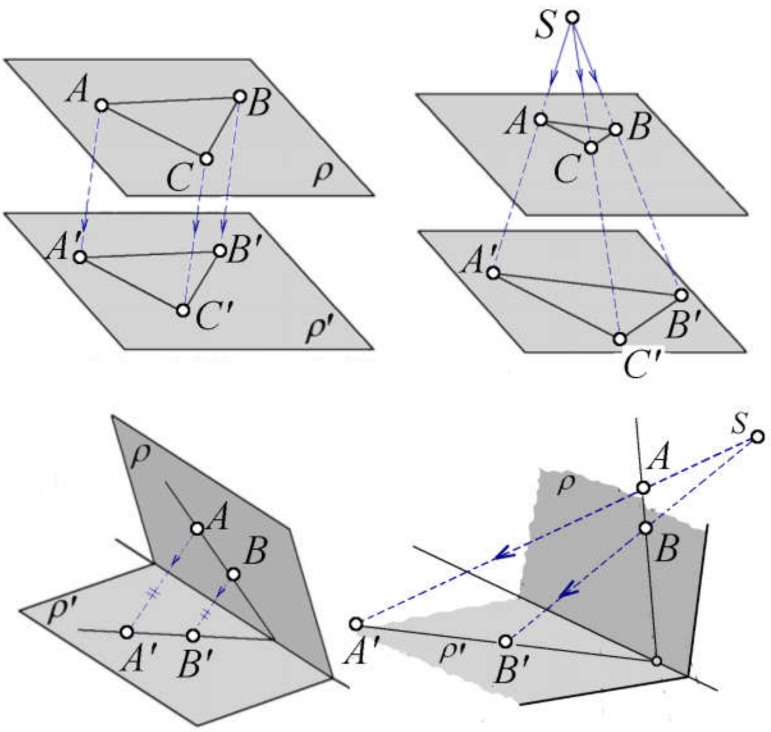
2. Přímky $a, b, c ... \subset \rho$ na přímky $a', b', c' ... \subset \rho'$ tak, že body $I \in a \cap a'$; $II \in b \cap b'$; $III \in c \cap c'$; leží na jedné přímce (o - osa kolineace).

3. Zachovává incidenci:
$(A \in a) \wedge (A \to A') \wedge (a \to a') \Rightarrow (A' \in a')$.

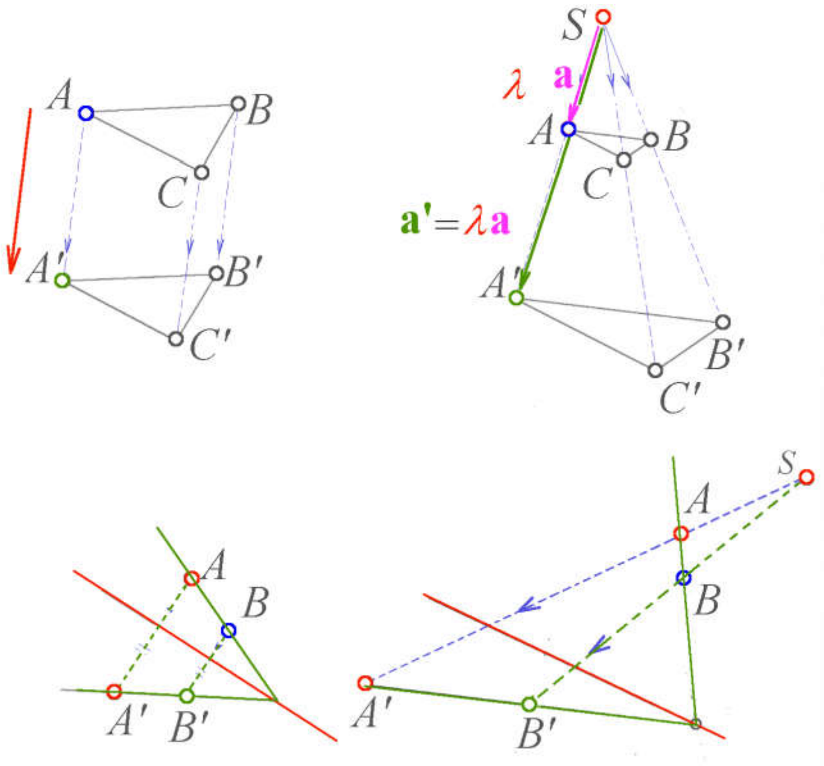
***Věta (Pappova)**: promítání přímky na přímku zachovává dvojpoměr.*

***Důsledek**: Každé kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr.*

Středová kolineace v rovině



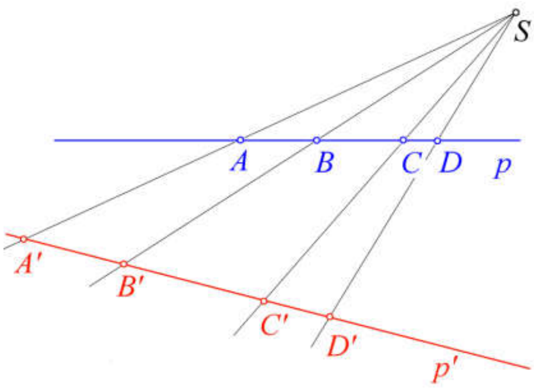
Středová kolineace v rovině – syntetické konstrukce

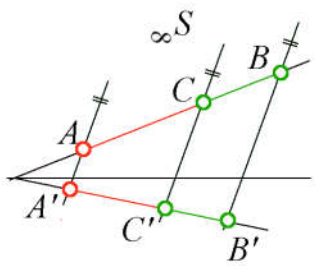


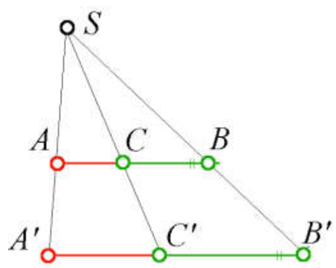
Středová kolineace v rovině – analytické konstrukce

dvojpoměr: $(A;B;C;D)=\dfrac{(A;B;C)}{(A;B;D)}$ **dělicí poměr:**

Pappova věta: zachován dvojpoměr.







všechny shodnosti, stejnolehlost, všechny ¨ afinita v rovině

podobnosti, osová

zobrazují vlastní bod vždy na vlastní bod.

Středová kolineace v rovině – analytické konstrukce

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \omega_{x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \omega_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ ***shodnosti, stejnolehlost, podobnosti, osová afinita***

Výhody: ***1. Lze vyjádřit středovou kolineaci s vlastním středem***

2. Pohodlnější skládání zobrazení

matice složeného zobrazení je součinem matic jednotlivých složek

Základní kolineární zobrazení

v euklidovské rovině

$$O_x : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$O_y : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_\alpha : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{\mathbf{v}} : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

v projektivní rovině

$$O_x : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}_x \cdot \mathbf{X}^T$$

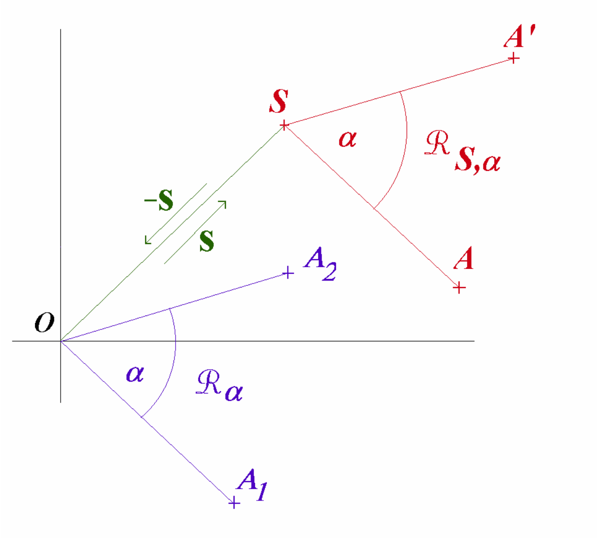
$$O_y : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}_y \cdot \mathbf{X}^T$$

$$S : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}'^T = \mathbf{O}_S \cdot \mathbf{X}^T$$

$$R_\alpha : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}'^T = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X}^T$$

$$T_{\mathbf{v}} : \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}'^T = \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{X}^T$$

Skládání kolineárních zobrazení v projektivní rovině



$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}} \circ \mathrm{R} \circ \mathrm{T}$

$\mathbf{A'}^{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_{\alpha} \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}^{T}$

Příklad:

***Rotace o** $30°$ **kolem bodu** $S = [2;3] \in E^2$*

***Rotujeme v projektivní rovině, střed rotace určíme euklidovským reprezentantem** $\mathbf{S} = (2;3;1)$*

$A' = \mathrm{T}_{\mathbf{s}} \circ \mathrm{R} \circ \mathrm{T}$

$\mathbf{A'}^{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_{\alpha} \cdot \mathbf{T}_{-\mathbf{s}} \cdot \mathbf{A}^{T}$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Základní kolineární zobrazení

v euklidovském prostoru | ***v projektivním prostoru***

souměrnost podle roviny yz

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

posunutí

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

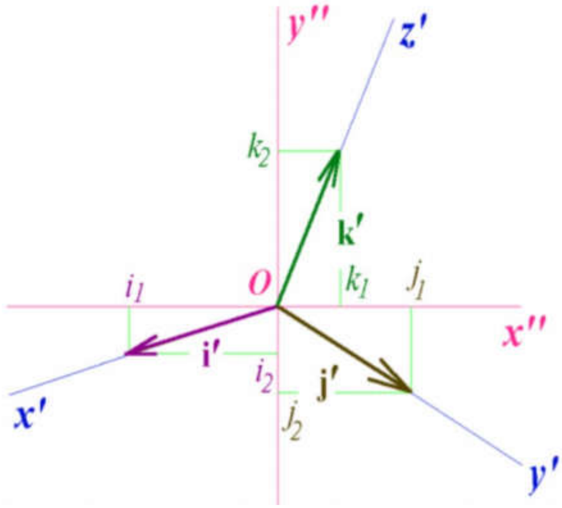
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rotace kolem osy y

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kosoúhlé promítání prostoru na rovinu



$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

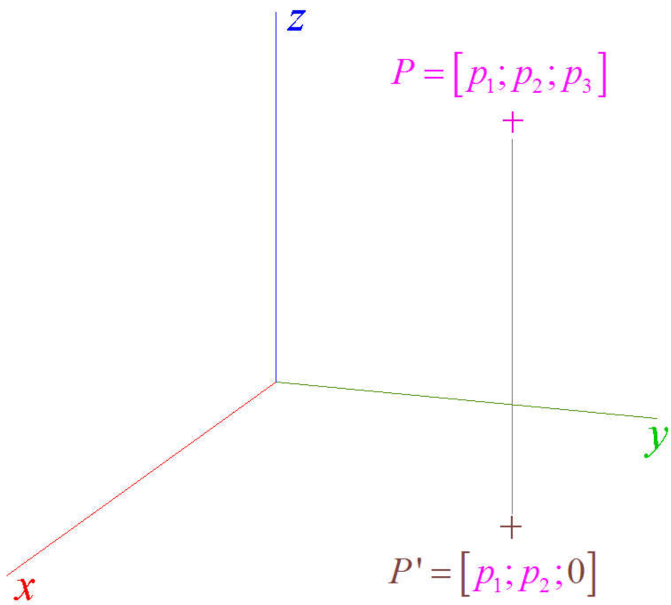
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}$$
$$x'_1 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}$$

$$x'_1 = i_1x_1 + j_1x_2 + k_1x_3$$
$$x'_1 = i_2x_1 + j_2x_2 + k_2x_3$$

Pravoúhlé (kolmé) promítání prostoru na rovinu

na rovinu $z = 0$



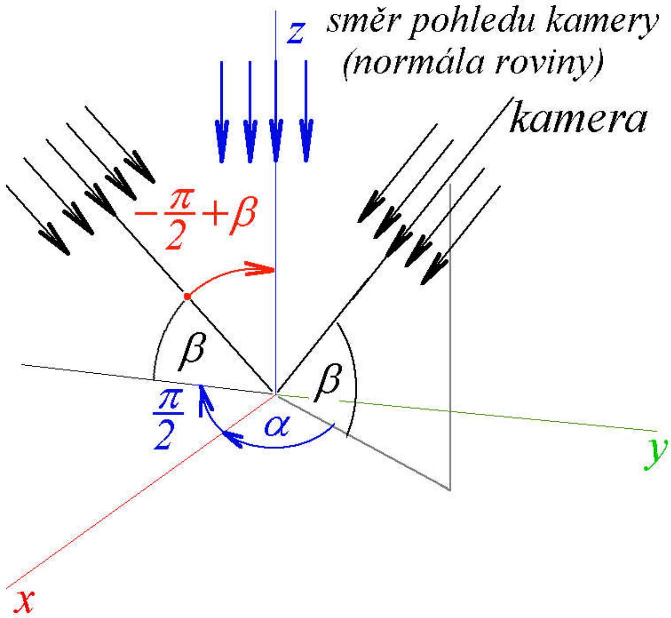
$$p'_1 = p_1$$
$$p'_2 = p_2$$
$$p'_3 = 0$$
$$1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pravoúhlé (kolmé) promítání prostoru na rovinu

na rovinu $ax+by+cz=0$



$$\mathbf{R}_z(\omega)=\begin{pmatrix}\cos\omega & \sin\omega & 0 & 0\\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \omega=-\alpha-\frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{R}_x(\omega)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega & \sin\omega & 0\\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \omega=\beta-\frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{K}_z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

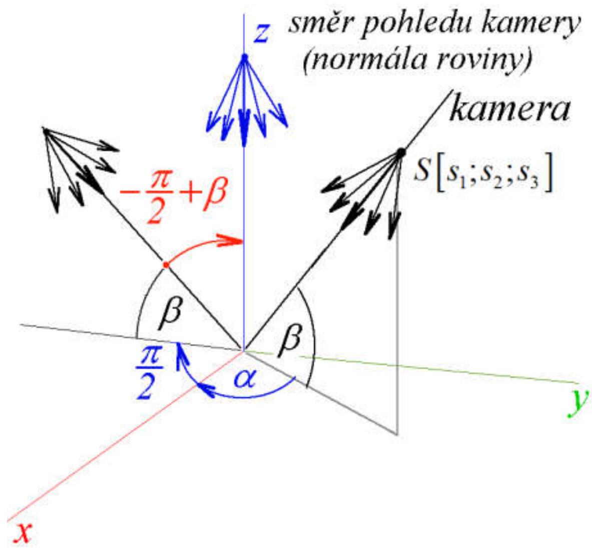
Matice kolmého promítání ve směru určeném úhly $\alpha;\beta$:

$$\mathbf{R}_z\left(-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathbf{R}_x\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathbf{K}_z$$

Středové promítání prostoru na rovinu

Středové promítání se středem $S=[s_1;s_2;s_3]$ ***na rovinu*** $s_1x+s_2y+s_3z=0$ ***(„vázaná kamera“)***

(stejný postup, matice $\mathbf{K}_z$ ***kolmého promítání je nahrazena maticí*** $\mathbf{S}_z$ ***středového promítání)***



$$\mathbf{R}_z(\omega)=\begin{pmatrix}\cos\omega & \sin\omega & 0 & 0\\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \omega=-\alpha-\frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{R}_x(\omega)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega & \sin\omega & 0\\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \omega=\beta-\frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{K}_z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{S}_z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -s_3^{-1} & 1\end{pmatrix}$$

Matice středového promítání ve směru určeném úhly $\alpha;\beta$:

$$\mathbf{R}_z\left(-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathbf{R}_x\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathbf{S}_z$$