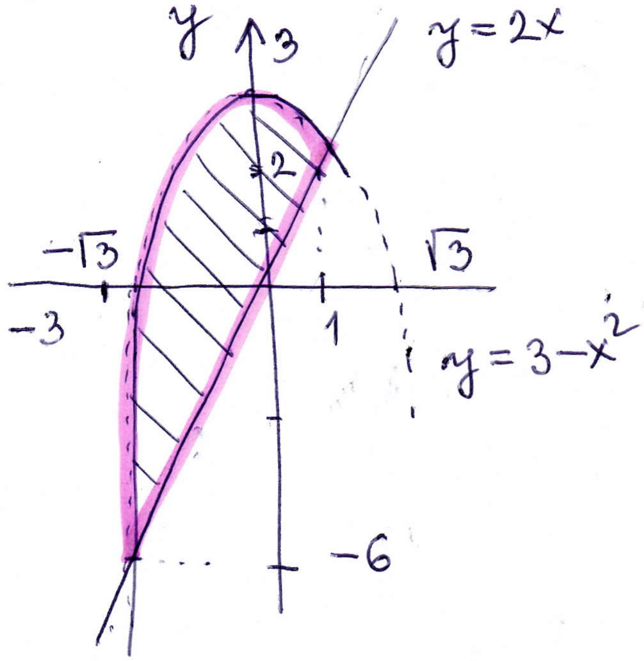
PŘÍKLAD 1.

Vypočtěte $\iint_M x \, dx \, dy$, kde integrační obor M je ohraničen křivkami $y = 2x$, $y = 3 - x^2$.

Řešení: a) Nakreslíme obrázek M.



spočítáme průsečíky přímky a paraboly.

Musíme vyřešit kvadratickou rovnici

$$2x = 3 - x^2 \iff$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff$$
$$(x-1)(x+3) = 0 \iff$$
$$x = -3 \vee x = 1.$$

b) Popíšeme M jako integrační obor typu (x, y):

$$M = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 ; -3 \leq x \leq 1 , 2x \leq y \leq 3 - x^2 \}.$$

c) Dosadíme do Fubiniho vzorce a dopočítáme

$$\iint_M x \, dx \, dy = \int_{-3}^{1} \left(\int_{2x}^{3-x^2} x \, dy \right) dx = \int_{-3}^{1} [xy]_{2x}^{3-x^2} \, dx =$$

$$\int_{-3}^{1} x(3-x^2) - 2x^2 \, dx = \int_{-3}^{1} -x^3 - 2x^2 + 3x \, dx =$$

$$\left[-\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{1} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{81}{4} + 18 + \frac{27}{2} \right)$$

$$= 20 - 12 - 18 - \frac{2}{3} = -10 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{-32}{3}}}.$$

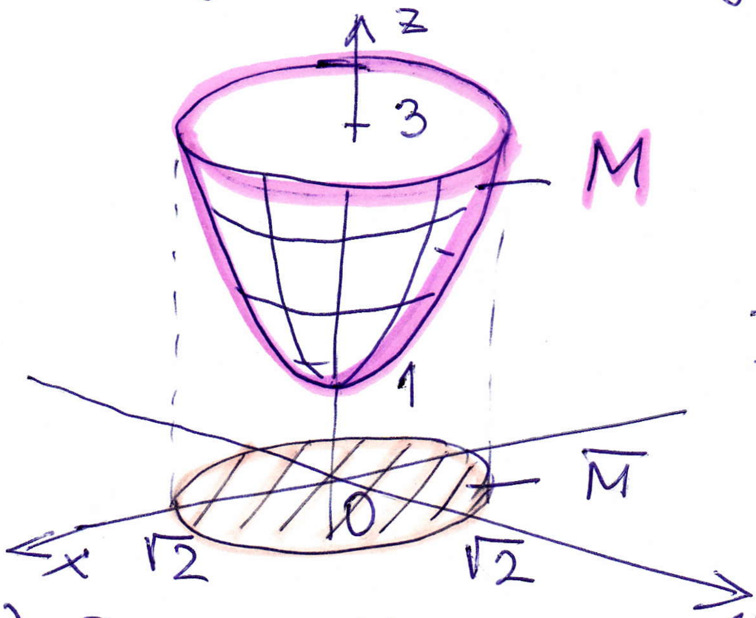
PŘÍKLAD 2:

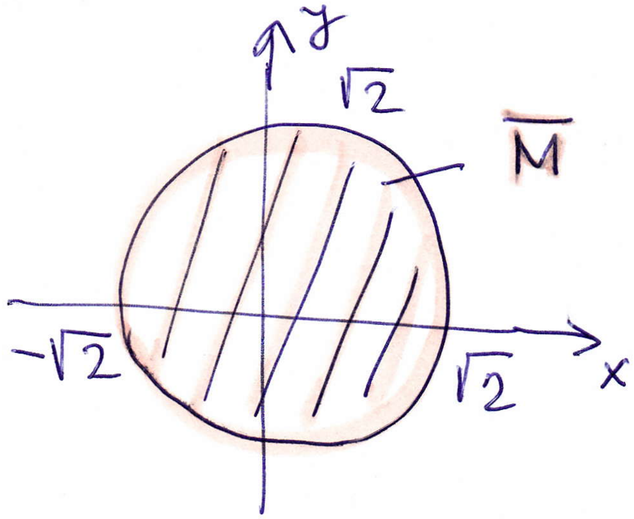
Pomocí transformace do válcových souřadnic vypočtěte trojrozměrný integrál

$\iiint\limits_M dx\,dy\,dz$, kde integrační obor M je ohraničen plochami $z = x^2+y^2+1$ a $z = 3$.

Řešení: a) Nejprve nakreslíme integrační obor M a jeho průmět $\overline{M}$ do roviny xy, tj: $z = 0$. Hraniční křivka průmětu je kružnice

$$x^2+y^2+1 = 3 \Rightarrow x^2+y^2 = 2$$





b) Popíšeme M jako integrační obor typu $[\rho,\varphi,z]$ ve válcových souřadnicích.

$$M^* = \{[\rho,\varphi,z] \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \rho^2+1 \le z \le 3\}.$$

c) Výpočet

$$\iiint\limits_M dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{M^*} \overset{|J|}{\overset{\shortparallel}{\rho}} \cdot d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{\rho^2+1}^{3} \rho\,dz\right)d\varphi\right)d\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left([\rho z]_{\rho^2+1}^{3}\right)d\varphi\right)d\rho = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi} 2\rho-\rho^3\,d\varphi\right)d\rho =$$

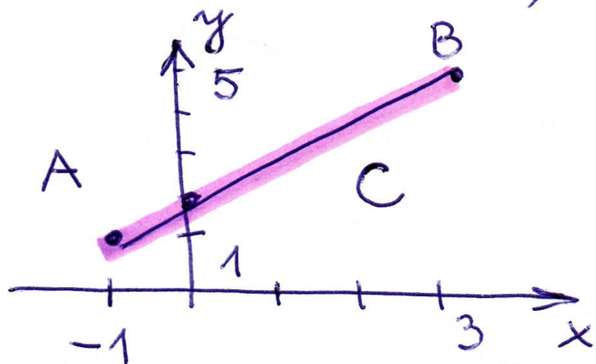
$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} 2\rho-\rho^3\,d\rho = 2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(2-1) = \underline{\underline{2\pi}}$$

PŘÍKLAD 3:

Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu

$\int_C 3xy \, ds$, kde křivka C je úsečka určená body $A=[-1,1]$, $B=[3,5]$.

Řešení:



a) Napíšeme parametrizaci křivky C:

$C: [x,y] = A + t(B-A) = [-1,1] + t(4,4), \quad t \in \langle 0,1 \rangle$

$$(*) \quad \begin{aligned} x &= -1 + 4t \\ y &= 1 + 4t, \end{aligned} \quad t \in \langle 0,1 \rangle. \quad \text{Odtud} \quad \begin{aligned} x' &= 4 \\ y' &= 4. \end{aligned}$$

Jiná možnost jak C parametrizovat, je odečíst rovnice $(*)$: $x - y = -2$ odtud $y = x+2$,

Tedy

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t+2, \end{aligned} \quad t \in \langle -1,3 \rangle. \quad \text{Odtud} \quad \begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 1. \end{aligned}$$

b) Použijeme výpočetního vzorce:

$$\int_C 3xy \, ds = \int_0^1 3 \cdot (-1+4t)(1+4t) \cdot \sqrt{16+16} \, dt =$$

c) Vypočítáme určitý integrál

$$= 3\sqrt{32} \int_0^1 -1 + 16t^2 \, dt = 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \left[-t + 16 \frac{t^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= 12\sqrt{2} \left(-1 + \frac{16}{3} \right) = 12\sqrt{2} \cdot \frac{13}{3} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 13 =$$

$$= \underline{\underline{52\sqrt{2}}}.$$

Druhý postup pomocí parametrizace

$$x = t$$
$$y = t+2, \quad t \in \langle -1, 3 \rangle$$ je podobný:

$$\int_C 3xy \, ds = \int_{-1}^{3} 3 \cdot t\,(t+2) \cdot \sqrt{(+1)^2 + 1^2} \, dt =$$

$$= 3\sqrt{2} \int_{-1}^{3} t^2 + 2t \, dt = 3\sqrt{2} \left[\frac{t^3}{3} + t^2 \right]_{-1}^{3} =$$

$$= 3\sqrt{2} \left(\frac{27}{3} + 9 - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right) = 3\sqrt{2} \left(17 + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 3\sqrt{2} \; \frac{51+1}{3} = \underline{\underline{52\sqrt{2}}}.$$

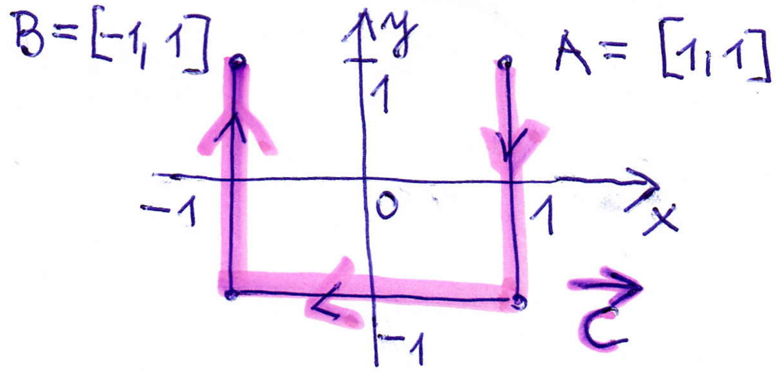
Výsledek musel vyjít stejně, ať zvolíme libovolnou parametrizaci.
Je samozřejmé jedno, jakou parametrizaci si zvolíte. (Stačí jeden postup).

PŘÍKLAD 4:

Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\vec{C}} x^2+y^2\,dx + 2xy\,dy$$, kde křivka $\vec{C}$ je

po částech hladká, definovaná obrázkem:



Řešení:

a) Nejprve ověříme, že vektorové pole

$\vec{F}(x,y) = (\underbrace{x^2+y^2}_{f}, \underbrace{2xy}_{g})$ je potenciálové.

Platí $f'_y = 2x$
$\qquad\quad\ \ \|$ $\Rightarrow \vec{F}$ je potenciálové.
$g'_x = 2y$

b) Je-li $\vec{F}$ potenciálové, pak existuje potenciál φ.
Vypočítáme φ:

$$\varphi(x,y) = \int_0^x t^2+y^2\,dt + \int_0^y 2\cdot 0\cdot t\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}+y^2t\right]_0^x + \left[c\right]_0^y = \frac{x^3}{3}+xy^2+(c-c)$$

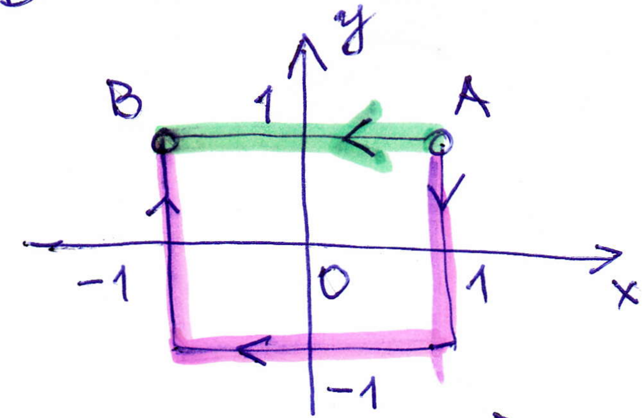
$$= \underline{\frac{x^3}{3}+xy^2}$$

c) $I = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(-1,1) - \varphi(1,1) =$

$= -\frac{1}{3} - 1 - \left(\frac{1}{3}+1\right) = -2-\frac{2}{3} = \underline{\underline{-\frac{8}{3}}}$

Druhá možnost řešení: (Část a) stejně).

b) Protože je pole $\vec{F}$ potenciálové, nezávisí výsledek integrace na křivce $\vec{C}$, ale pouze na jejím počátečním bodu A a koncovém bodu B. Body A, B spojíme úsečkou $\vec{D}$ orientovanou od A k B. (zelená)



Napišme parametrizaci $\vec{D}$: To lze sice provést ∞ mnoha způsoby, ale následující je nejjednodušší:

$$x = t \qquad t \in \langle -1, 1 \rangle. \text{ Odtud } \quad x' = 1$$
$$y = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad y' = 0 \quad \text{a } \varepsilon = -1.$$

Platí:

$$\int_{\vec{C}} x^2+y^2\,dx + 2xy\,dy = \int_{\vec{D}} x^2+y^2\,dx + 2xy\,dy =$$

$$\overset{\varepsilon}{(-1)} \cdot \int_{-1}^{1} \left(t^2+1^2, 2\cdot t \cdot 1\right) \circ (1,0)\,dt = -\int_{-1}^{1} t^2+1\,dt$$

$$= (-1) \cdot \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_{-1}^{1} = (-1)\left[\frac{1}{3}+1-\left(-\frac{1}{3}-1\right)\right] =$$

$$= (-1)\left[\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right] = \underline{\underline{\frac{-8}{3}}}$$

! V příkladu č. 4 vyžaduji použít teorii vektorových polí. Tedy postup a) nebo b). (Jedno který).

AUTOR TEXTU: JIŘÍ KLAŠKA
VUT BRNO

POKRAČOVÁNÍ SEDMÉ, 13.4 – 17.4. 2020

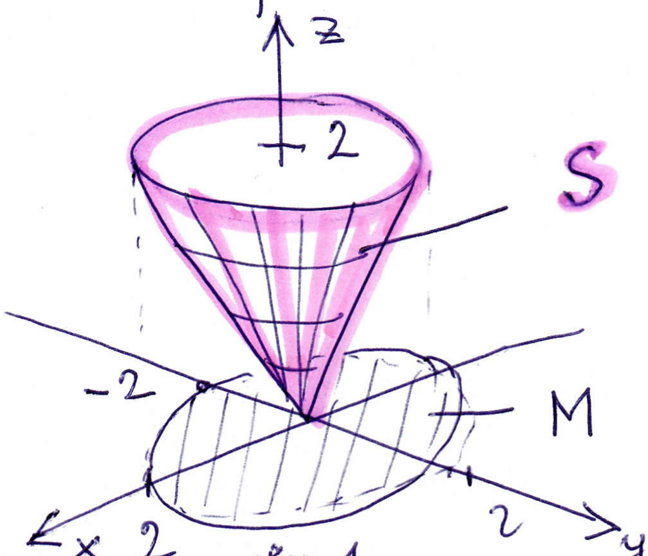
PLOŠNÉ INTEGRÁLY

Zadání: Vypočtěte plošný integrál 1. druhu

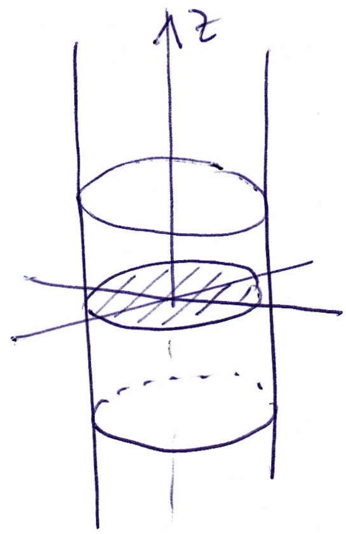
$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dS$, kde plocha S je definována

vztahy: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \leq 4$.

Řešení: Nakreslíme plochu S:



obr. 1



obr. 2

Rovnice $z = \sqrt{x^2+y^2}$ definuje kuželovou plochu na $\mathbb{R}^2$. Druhá podmínka definuje vnitřek a hranici válce (jsme v $\mathbb{R}^3$) viz obr 2. Společně obě podmínky definují část kuželové plochy (obr. 1), která je definována nad kruhem $M: x^2+y^2 \leq 4$ v $\mathbb{R}^2$. Kruh má poloměr 2. Plocha S je červeně.

Napsat parametrizaci plochy S z tohoto zadání je snadné:

$$x = u$$
$$y = v \qquad , \quad M = \{[u,v] \in \mathbb{R}^2;\ u^2+v^2 \le 4\}$$
$$z = \sqrt{u^2+v^2}$$

Množina M je obor parametrů u, v.

Normálový vektor $\vec{n}(u,v) = (-z'_u, -z'_v, 1)$.

V našem případě je

$$z'_u = \frac{1}{2}\,\frac{2u}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$z'_v = \frac{1}{2}\,\frac{2v}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$ Odtud:

$$\vec{n}(u,v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right).$$

Nyní použijeme výpočtní vzorec (*), který převede výpočet plošného integrálu 1. druhu na dvojrozměrný integrál, v němž se integruje přes obor parametrů M, tedy kruh o poloměru 2:

$$(*) \quad \iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_M f(u,v,z(u,v)) \cdot |\vec{n}(u,v)|\,du\,dv$$

Dosadíme a provedeme algebraickou úpravu:

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS = \iint_M \sqrt{u^2+v^2+u^2+v^2} \cdot |\vec{n}(u,v)|\,du\,dv$$

$$\iint_M \sqrt{2u^2+2v^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 + \left(\frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 + 1^2}\,du\,dv$$

$$\iint_M \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{u^2+v^2}\right) \cdot \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2} + 1}\,du\,dv$$

$$= \sqrt{2} \iint_M \sqrt{u^2+v^2} \cdot \sqrt{\frac{u^2+v^2+u^2+v^2}{u^2+v^2}}\, du\, dv$$

$$= \sqrt{2} \iint_M \sqrt{u^2+v^2} \cdot \sqrt{2}\, du\, dv = 2 \iint_M \sqrt{u^2+v^2}\, du\, dv$$

Nyní provedeme transformaci do polárních souřadnic : $u = \rho \cos\varphi$, $v = \rho \sin\varphi$, $|J| = \rho$:

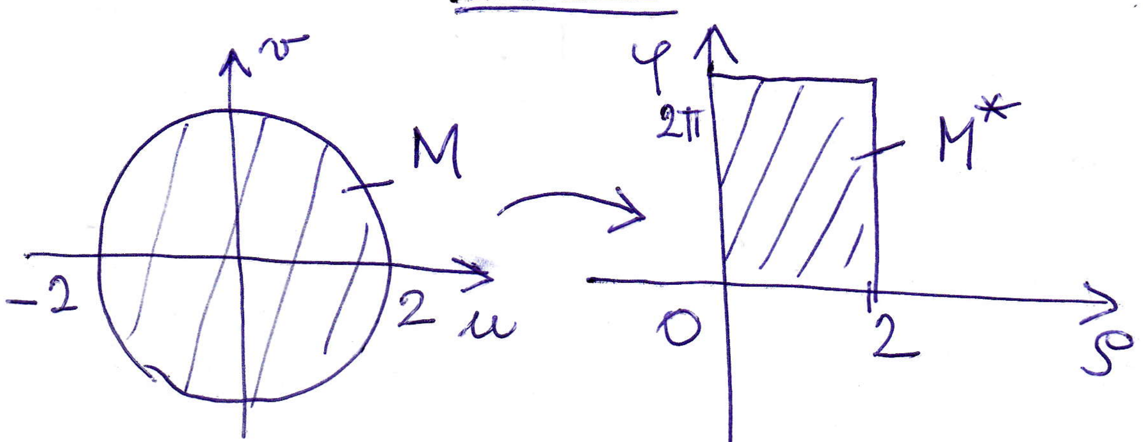
$$= 2 \iint_{M^*} \sqrt{\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 2 \iint_{M^*} \sqrt{\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi \underset{\text{(viz obr.)}}{=} 2 \iint_{M^*} \rho^2 d\rho\, d\varphi$$

Množina M^* je obdélník : $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.
Použijeme Dirichletovo tvrzení:

$$= 2 \int_0^2 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 2 \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2 \cdot \frac{8}{3} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{32}{3}\pi}}$$



obr.

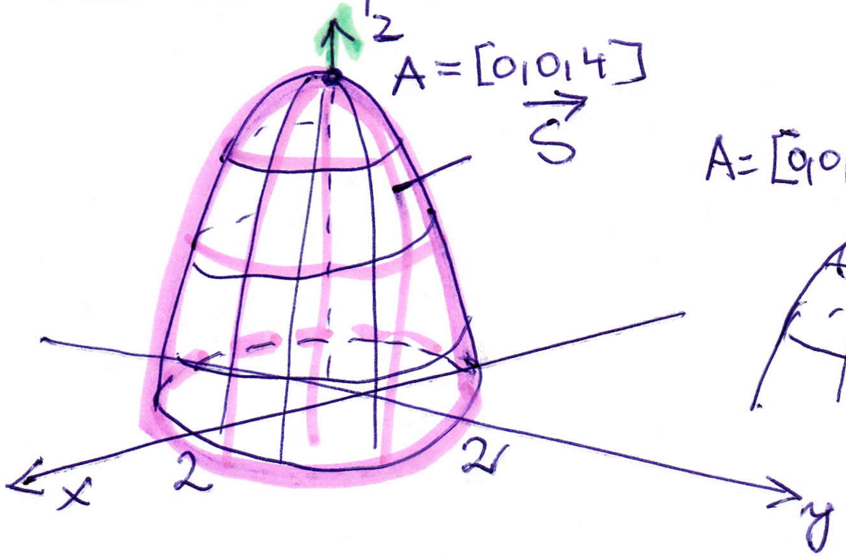
Zadání:

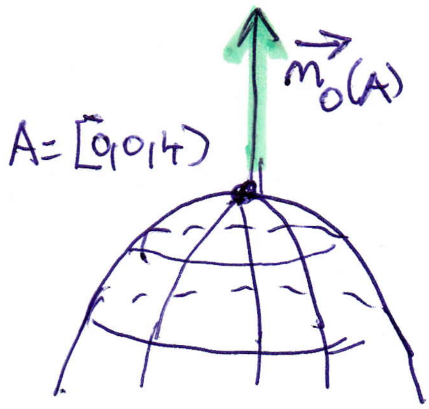
Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\iint_{\vec{S}} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy,$$ kde $\vec{S}$ je orientovaná plocha definovaná vztahy $z = 4 - x^2 - y^2$ a $z \geq 0$.

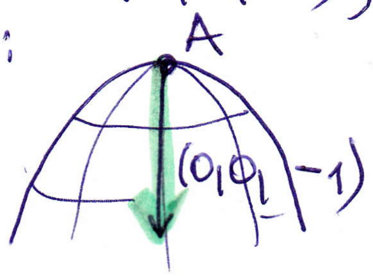
Orientace: Pro $A = [0,0,4]$ je $\vec{n}_0(A) = (0,0,1)$.

Řešení: Nakreslíme plochu $\vec{S}$:





Orientace plochy je dána pomocí normálového vektoru. V bodě A je zadán vektor $\vec{n}_0(A)$, který spolu s obrázkem určuje, že orientace paraboloidu je „vnější". Je totiž označena vnější strana protože vektor „míří" či směřuje ven z paraboloidu ve směru osy z. Pokud by bylo v zadání $\vec{n}_0(A) = (0,0,-1)$, byla by označena vnitřní strana:

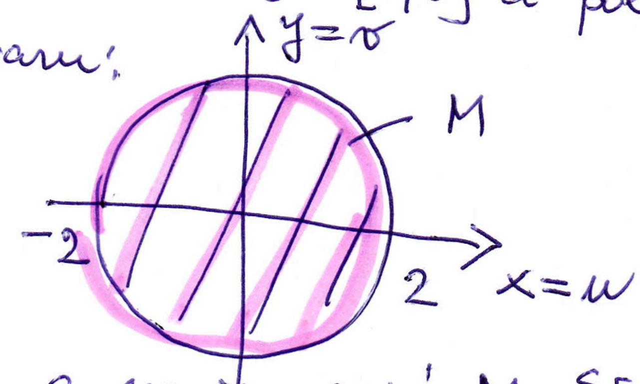


Napíšeme parametrizaci plochy S:

$x = u$

$y = v$

$z = 4 - u^2 - v^2$. Součástí parametrizace je rovnož obor parametrů M; Jak ho zjistíme? Z druhé podmínky $z \geq 0$ plyne, že $4 - x^2 - y^2 = 0$ tj. $x^2 + y^2 = 4$. Paraboloid „protne" rovinu $z = 0$ v kružnici se středem $S = [0,0]$ a poloměrem $r = 2$. Tedy M je tvaru:



Protože $x = u$ a $y = v$ platí $M = \{[u,v] \in \mathbb{R}^2, u^2 + v^2 \leq 4\}$.

Dále musíme znát základní výpočetní vzorec:

Je-li $\vec{F}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ vektorové pole a $d\vec{S} = (dy\,dz, dx\,dz, dx\,dy)$, pak

$$\iint_{\vec{S}} \vec{F}(x,y,z) \circ d\vec{S} = \underset{\pm 1}{\varepsilon} \cdot \iint_{M} \vec{F}(u, v, z(u,v)) \circ \vec{m}(u,v)\,du\,dv$$

zde $\vec{m}(u,v) = (-z'_u, -z'_v, 1)$ a $\varepsilon = \pm 1$ je tzv. ekvalizátor (vyrovnávač znaménka), podle ~~toho, zda~~ ~~(v zadání)~~ je orientace plochy (v zadání) souhlasná s orientací plochy plynoucí z parametrizace, kterou jsme si sami sestavili. Vypočítáme jaké je ε pro náš případ:

Protože $z = z(u,v) = 4 - u^2 - v^2$, je

$z'_u = -2u$ a $z'_v = -2v$. Tedy

$\vec{n}(u,v) = (-(-2u), -(-2v), 1) = (2u, 2v, 1)$.

Odtud, po dosazení bodu $A = [0,0,4]$ dostaneme
$u = 0$, $v = 0$, tedy

$\vec{n}(A) = (2\cdot 0, 2\cdot 0, 1) = (0,0,1)$. Protože

$\vec{n}_0(A) = n(A)$ je $\underline{\underline{\varepsilon = 1}}$. (Obecně, tj. při volbě libovolné parametrizace musí vyjít vždy rovnost

$$n(A) = k\cdot n_0(A), \text{ kde } k \in \mathbb{R},\ k \neq 0.$$

Je-li $k > 0$ je $\varepsilon = 1$. Je-li $k < 0$ je $\varepsilon = -1$.)

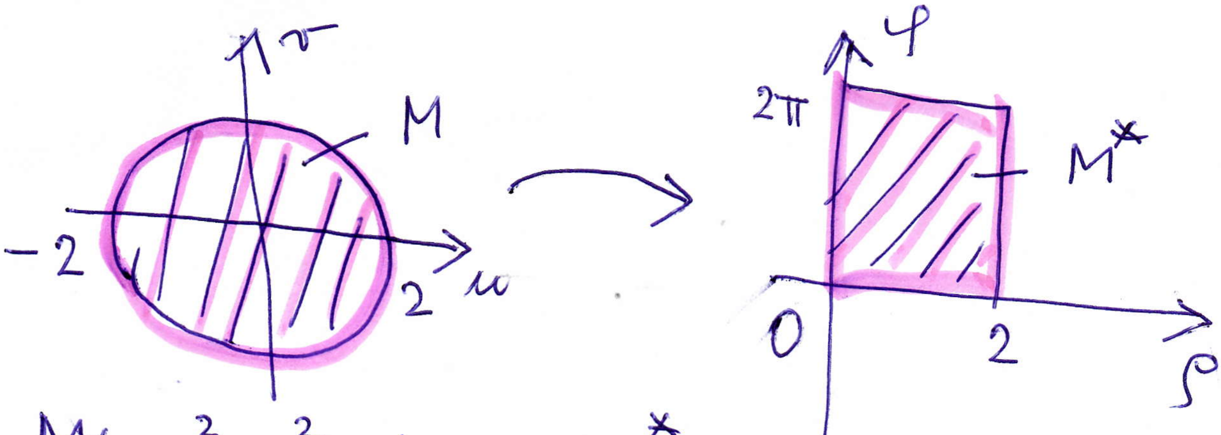
Dosazením do vzorce obdržíme: (zde $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$)

$$\iint_{\vec{S}} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy =$$

$$\underset{\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot \iint_M (u, v, 4-u^2-v^2) \overset{\text{skalární součin}}{\circ} (2u, 2v, 1)\,du\,dv =$$

$$\iint_M 2u^2 + 2v^2 + 4 - u^2 - v^2\,du\,dv =$$

$$\iint_M u^2 + v^2 + 4\,du\,dv.$$ Protože M je kruh, provedeme transformaci do polárních souřadnic)



$M: u^2+v^2 \le 4$ kruh

$M^* = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$ obdélník

$$\iint_M u^2+v^2+4\,du\,dv \overset{\text{věta o transformaci}}{=} \iint_{M^*} (\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi+4)\cdot\overset{|J|}{\varrho}\,d\varrho\,d\varphi =$$

$$\iint_{M^*} (\varrho^2+4)\cdot\varrho\,d\varrho\,d\varphi = \iint_{M^*} \varrho^3+4\varrho\,d\varrho\,d\varphi \overset{\text{Dirichletova věta}}{=}$$

$$\int_0^2 \varrho^3+4\varrho\,d\varrho\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{\varrho^4}{4}+4\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^2\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$\left(\frac{16}{4}+8\right)\cdot(2\pi-0) = 12\cdot 2\pi = \underline{\underline{24\pi}}$$

Jak vidíte, zmobilizoval jsem před velikonočními svátky síly a sepsal jsem <u>ŘEŠENÍ VZOROVÉ</u> druhé písemky a také úvod do plošných integrálů. V týdnu po velikonocích bude následovat Gauss-Ostrogradského a Stokesova věta. Hezké svátky všem.