Godunovovy metody pro 1D-Eulerovy rovnice

Řešte Eulerovy rovnice

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{o}, && x \in (0,\ell),\ t \in (0,T),\\
&\frac{\partial \mathbf{w}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{w}(\ell,0)}{\partial x} = 0, && t \in (0,T),\\
&\mathbf{w}(x,0) = \mathbf{w}^0(x), && x \in (0,\ell),
\end{aligned}
$$

kde

$$
\mathbf{w} = (\varrho, \varrho u, E)^T, \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = (\varrho u, \varrho u^2 + p, (E+p)u)^T, \quad p = (\gamma-1)(E - \tfrac{1}{2}\varrho u^2).
$$

Jacobiho matici $\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{w})/\mathrm{D}\mathbf{w}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$
\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ u\left[\frac{1}{2}(\gamma-1)u^2 - H\right] & H-(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix},
$$

kde

$$
H = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2 \quad \text{je entalpie,} \quad a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}} \quad \text{je rychlost zvuku}
$$

a $\gamma = 1{,}4$ je Poissonova adiabatická konstanta. Vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ jsou

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(\mathbf{w}) &= u - a, & \mathbf{r}_1(\mathbf{w}) &= (1, u-a, H-au)^T,\\
\lambda_2(\mathbf{w}) &= u, & \mathbf{r}_2(\mathbf{w}) &= (1, u, \tfrac{1}{2}u^2)^T,\\
\lambda_3(\mathbf{w}) &= u + a, & \mathbf{r}_3(\mathbf{w}) &= (1, u+a, H+au)^T.
\end{aligned}
$$

Označme $\mathbf{T} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ matici vlastních vektorů,

$$
\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-a & u & u+a \\ H-au & \frac{1}{2}u^2 & H+au \end{pmatrix},
$$

matici inverzní

$$
\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2a^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma-1)u^2 + au & -a-(\gamma-1)u & \gamma-1 \\ 2a^2 - (\gamma-1)u^2 & 2(\gamma-1)u & -2(\gamma-1) \\ \frac{1}{2}(\gamma-1)u^2 - au & a-(\gamma-1)u & \gamma-1 \end{pmatrix},
$$

a diagonální matici vlastních čísel

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} u-a & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u+a \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \mathbf{T}(\mathbf{w})\mathbf{D}(\mathbf{w})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w}).$$

Zvolíme rovnoměrně dělení intervalu $\langle 0, \ell\rangle$, tj. pro $N > 1$ položíme $h = \ell/N$ a označíme $x_j = (j - \frac{1}{2})h$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Úsečka $\langle 0, \ell\rangle$ je sjednocením N konečných objemů

$$D_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \equiv [(j-1)h, jh], \qquad j = 1, 2, \ldots, N\,,$$

kde $x_{j-1/2} = x_j - \frac{1}{2}h$, $x_{j+1/2} = x_j + \frac{1}{2}h$. Na intervalu $\langle 0, T\rangle$ použijeme dělení

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_{Q-1} < t_Q = T$$

a označme $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ délku časového kroku. Má se spočítat přibližné řešení $\mathbf{w}_j^k$ v konečných objemech D_j pro časy t_k. Pro prezentaci výsledků použijte rovnoměrné dělení $t_j^{out} = j\Delta t$, $j = 0, 1, \ldots, M$, kde $\Delta t = T/M$. Výpočet organizujte tak, aby množina výpočetních časů $\{t_k\}_{k=0}^{Q}$ obsahovala množinu časů $\{t_j^{out}\}_{j=0}^{M}$.

Z počáteční podmínky určíme $\mathbf{w}_j^0 = \mathbf{w}^0(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$. Okrajovou podmínku uplatníme pomocí fiktivních konečných objemů $D_0 = [-h, 0]$ resp. $D_{N+1} = [\ell, \ell + h]$, v nichž předepíšeme hodnoty symetrické podle okraje $x = 0$ resp. $x = \ell$. Ve fiktivních konečných objemech tedy položíme $\mathbf{w}_0^k = \mathbf{w}_1^k$, $\mathbf{w}_{N+1}^k = \mathbf{w}_N^k$, $k = 0, 1, \ldots$.

Výpočet řídíme podle předpisu

$$\mathbf{w}_j^{k+1} = \mathbf{w}_j^k - \frac{\tau_k}{h}\left(\mathbf{H}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) - \mathbf{H}(\mathbf{w}_{j-1}^k, \mathbf{w}_j^k)\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

kde $\mathbf{H}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ je numerický tok.

Roeův numerický tok $\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ včetně entropy fixu podle Hartena a Hymana. Nejdříve pro levý stav $\mathbf{w}_L = (\varrho_L, \varrho_L u_L, E_L)^T$ a pravý stav $\mathbf{w}_R = (\varrho_R, \varrho_R u_R, E_R)^T$ definujeme nový stav

$$\hat{\mathbf{w}} \equiv \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = (\hat{\varrho}, \hat{\varrho}\hat{u}, \hat{E})^T,$$

kde

$$\hat{\rho} = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varrho_L} + \sqrt{\varrho_R}\right)\right]^2, \qquad \hat{u} = \frac{\sqrt{\varrho_L}u_L + \sqrt{\varrho_R}u_R}{\sqrt{\varrho_L} + \sqrt{\varrho_R}},$$

$$\hat{H} = \frac{\sqrt{\varrho_L}H_L + \sqrt{\varrho_R}H_R}{\sqrt{\varrho_L} + \sqrt{\varrho_R}}, \qquad \hat{E} = \frac{1}{\gamma}\hat{\varrho}\hat{H} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\hat{\varrho}\hat{u}^2.$$

Pro rychlost zvuku příslušnou vektoru $\hat{\mathbf{w}}$ dostaneme

$$\hat{a} = \sqrt{(\gamma - 1)\left(\hat{H} - \frac{1}{2}\hat{u}^2\right)}.$$

Jak bude zřejmé z dalšího, pro určení Roeova numerického toku budeme z hodnot opatřených stříškou potřebovat jen rychlost $\hat{u}$, entalpii $\hat{H}$ a rychlost zvuku $\hat{a}$.

Nechť $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{w}})(\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L) \equiv (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3)^T$. Koeficienty $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3$ lze efektivně spočítat takto:

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\gamma - 1}{\hat{a}^2} \left[(\hat{H} - \hat{u}^2)\delta_1 + \hat{u}\delta_2 - \delta_3 \right],$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{2\hat{a}} \left[(\hat{u} + \hat{a})\delta_1 - \delta_2 - \hat{a}\hat{\gamma}_2 \right],$$

$$\hat{\gamma}_3 = \delta_1 - \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_3,$$

kde $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ jsou složky vektoru $\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L \equiv (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$. Roeovův numerický tok počítáme takto:

a) Jestliže $\lambda_2(\hat{\mathbf{w}}) > 0$, spočteme $\mathbf{w}_L^* = \mathbf{w}_L + \hat{\gamma}_1 \mathbf{r}_1(\hat{\mathbf{w}})$, položíme

$$\tilde{\lambda}_1 = \begin{cases} \lambda_1(\mathbf{w}_L) \dfrac{\lambda_1(\mathbf{w}_L^*) - \lambda_1(\hat{\mathbf{w}})}{\lambda_1(\mathbf{w}_L^*) - \lambda_1(\mathbf{w}_L)} & \text{pro } \lambda_1(\mathbf{w}_L) < 0 < \lambda_1(\mathbf{w}_L^*), \\ \lambda_1(\hat{\mathbf{w}}) & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

a klademe

$$\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_L) + \hat{\gamma}_1 \tilde{\lambda}_1^- \mathbf{r}_1(\hat{\mathbf{w}}).$$

b) Jestliže $\lambda_2(\hat{\mathbf{w}}) \leq 0$, spočteme $\mathbf{w}_R^* = \mathbf{w}_R - \hat{\gamma}_3 \mathbf{r}_3(\hat{\mathbf{w}})$, položíme

$$\tilde{\lambda}_3 = \begin{cases} \lambda_3(\mathbf{w}_R) \dfrac{\lambda_3(\hat{\mathbf{w}}) - \lambda_3(\mathbf{w}_R^*)}{\lambda_3(\mathbf{w}_R) - \lambda_3(\mathbf{w}_R^*)} & \text{pro } \lambda_3(\mathbf{w}_R^*) < 0 < \lambda_3(\mathbf{w}_R), \\ \lambda_3(\hat{\mathbf{w}}) & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

a klademe

$$\mathbf{H}_{Roe}(\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_R) - \hat{\gamma}_3 \tilde{\lambda}_3^+ \mathbf{r}_3(\hat{\mathbf{w}}).$$

Pravý horní index $\pm$ má obvyklý význam, tj. $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \min(a, 0)$.

Délku časového kroku volíme tak, aby byla splněna CFL podmínka

$$\tau_k \leq Ch \left(\max_{j=0,\ldots,N} \left[|\hat{u}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)| + \hat{a}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) \right] \right)^{-1}, \qquad (1)$$

kde $C \leq 1$ je tzv. CFL konstanta, třeba $C = 0{,}9$. Rychlost $\hat{u}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ a rychlost zvuku $\hat{a}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ dostaneme z $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$, $j = 0, 1, \ldots, N$.

Vijayasundaramův numerický tok

$$H_V(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}^+(\hat{\mathbf{w}})\,\mathbf{u} + \mathbf{A}^-(\hat{\mathbf{w}})\,\mathbf{v}, \quad \text{kde} \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2},$$

$\mathbf{A}^+ = \mathbf{T}\mathbf{D}^+\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{A}^- = \mathbf{T}\mathbf{D}^-\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{D}^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_3^+)$, $\mathbf{D}^- = \mathrm{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-, \lambda_3^-)$. Délku časového kroku řídíme předpisem (1), rychlost $\hat{u}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ a rychlost zvuku $\hat{a}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ dostaneme z $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_j^k + \mathbf{w}_{j+1}^k)$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Stegerův-Warmingův numerický tok

$$H_{SW}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}^+(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{A}^-(\mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Délku časového kroku řídíme podle (1), rychlost $\hat{u}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ a rychlost zvuku $\hat{a}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ dostaneme z $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) := \mathbf{w}_j^k$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Van Leerův numerický tok včetně entropy fixu podle Hartena:

$$H_{VL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v}) - |\mathbf{A}(\hat{\mathbf{w}})|\,(\mathbf{v} - \mathbf{u})\right], \qquad \text{kde} \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2},$$

$|\mathbf{A}| = \mathbf{T}|\mathbf{D}|\mathbf{T}^{-1}$, $|\mathbf{D}| = \mathrm{diag}(\phi_\delta(\lambda_1), \phi_\delta(\lambda_2), \phi_\delta(\lambda_3))$,

$$\phi_\delta(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta} & \text{pro } |\lambda| < \delta, \\ |\lambda| & \text{pro } |\lambda| \geq \delta, \end{cases}$$

a $\delta \in [0{,}1; 1]$ je volitelný parametr, který je třeba pro každý konkrétní problém vhodně vyladit. Délku časového kroku řídíme předpisem (1), rychlost $\hat{u}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ a rychlost zvuku $\hat{a}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k)$ dostaneme z $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{w}_{j+1}^k) = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_j^k + \mathbf{w}_{j+1}^k)$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Testování lze provést pro Riemannovu úlohu

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{o}, \qquad \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{pro } x < x_0, \\ \mathbf{w}_R & \text{pro } x > x_0, \end{cases}$$

kde $x \in (0, \ell)$ a $t \in (0, T)$. Počáteční data $\mathbf{w}_L = (\varrho_L, \varrho_L u_L, E_L)^T$ a $\mathbf{w}_R = (\varrho_R, \varrho_R u_L, E_R)^T$ lze získat z tabulky 1.

test	ℓ	T	x_0	ϱ_L	u_L	p_L	ϱ_R	u_R	p_R
0	1	0,2	0,5	1	0	1	0,125	0	0,1
1	1	0,2	0,3	1	0,75	1	0,125	0	0,1
2	1	0,15	0,5	1	−2	0,4	1	2	0,4
3	1	0,012	0,5	1	0	1000	1	0	0,01
4	1	0,035	0,4	5,99924	19,5975	460,894	5,99942	−6,19633	46,0950
5	1	0,012	0,8	1	−19,59754	1000	1	−19,59745	0,01

Tabulka 1: testovací příklady

Výsledky jsou uvedeny v tabulce 2. Sloupec x_L popisuje levou vlnu: jsou-li uvedena dvě čísla, pak první z nich je poloha čela a druhá poloha týlu levé spojité vlny v čase T, je-li uvedeno jen jedno číslo, pak je to poloha levé rázové vlny v čase T. Sloupec x_M

obsahuje polohu kontaktní nespojitosti v čase T. Sloupec x_R popisuje pravou vlnu: jsou-li uvedena dvě čísla, pak první z nich je poloha týlu a druhá poloha čela pravé spojité vlny v čase T, je-li uvedeno jen jedno číslo, pak je to poloha pravé rázové vlny v čase T.

test	x_L	x_M	x_R	ϱ_L^*	ϱ_R^*	u^*	p^*
0	(0,26; 0,49)	0,69	0,85	0,43	0,27	0,93	0,30
1	(0,21; 0,36)	0,57	0,73	0,58	0,34	1,36	0,47
2	(0,088; 0,45)	0,50	(0,55; 0,91)	0,022	0,022	0,00	0, 0019
3	(0,051; 0,33)	0,74	0,78	0,58	6,00	19,60	460,89
4	0,43	0,70	0,83	14,28	31,04	8,69	1691,65
5	(0,12; 0,40)	0,80	0,85	0,58	6,00	0,00	460,89

Tabulka 2: řešení testovacích příkladů