POSTUP ŘEŠENÍ LDR 1. ŘÁDU (PRAKTICKÝ)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

1. Vypočteme $A(x) = \int p(x)\,dx$
2. Vypočteme $B(x) = \int q(x)e^{A(x)}\,dx$
3. Výsledné řešení pak je

$$y = (B(x) + C)e^{-A(x)} \qquad C \dots \text{konstanta}$$

Podrobně:

$$y = \left[\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right] \cdot e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Samostatné cvičení:

$$y' \cdot \operatorname{tg} x - y = 1$$

$$y' - xy = e^{\frac{1}{2}x(x+2)}$$

$$y' + x^2 y = x^2 \ , \quad y(2) = 1$$

EHK 1236

1. $A(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$,

2. $B(x) = \int x^2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x^3}{3} \\ dt = x^2\,dx \end{array} \right| =$

$= \int e^t\,dt = e^t = e^{\frac{x^3}{3}}$.

3. $y = (B(x) + C)e^{-Ax} = \left(e^{\frac{x^3}{3}} + C\right)e^{-\frac{x^3}{3}} =$

$= e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3}} + Ce^{-\frac{x^3}{3}} = 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}}$

4. $1 = 1 + Ce^{-\frac{8}{3}} \Rightarrow Ce^{-\frac{8}{3}} = 0 \Rightarrow C = 0$

Řešení: $y = 1$.

Řešení na počítači: MAPLE:

```
> ode:=diff(y(x),x)+x^2*y(x)=x^2;dsolve(ode);pocatecni:=y(2)=1;dso
lve({ode,pocatecni});
```

$$ode := \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + x^2\,\mathrm{y}(x) = x^2$$

$$\mathrm{y}(x) = 1 + \mathbf{e}^{\left(-\frac{x^3}{3}\right)}\,\_C1$$

$$pocatecni := \mathrm{y}(2) = 1$$

$$\mathrm{y}(x) = 1$$

```
>
```

EHK 1237

24

$$y' + y = \cos x \,, \quad y(0) = 1$$

1. $A(x) = \int 1 \, dx = x$

2. $B(x) = \int \cos x \cdot e^{x} \, dx = \left| \begin{matrix} f = \cos x & f' = -\sin x \\ g' = e^{x} & g = e^{x} \end{matrix} \right|$

$$= \cos x \cdot e^{x} + \int \sin x \cdot e^{x} \, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} f = \sin x & f' = \cos x \\ g' = e^{x} & g = e^{x} \end{matrix} \right| = \cos x \cdot e^{x} + \sin x \cdot e^{x}$$

$$- \int \cos x \cdot e^{x} \, dx.$$

$$B(x) = e^{x}(\cos x + \sin x) - B(x)$$

$$2B(x) = e^{x}(\cos x + \sin x)$$

$$B(x) = \frac{1}{2} e^{x}(\cos x + \sin x)$$

3. $y = \left(\frac{1}{2} e^{x} (\cos x + \sin x) + C \right) \cdot e^{-x} =$

$$= \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + C \cdot e^{-x}$$

4. $1 = \frac{1}{2}(\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{\sin 0}_{1}) + Ce^{0}$

$$1 = \frac{1}{2} + C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

Řešení: $y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^{-x})$.

Školní cv: $y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3 , \; y(0) = 1.$

LDR S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

1. HOMOGENNÍ:

Homogenní

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n \cdot y = 0 \qquad p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$$ (konstanty)

rce má obecné řešení

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$$ (konstanty)

Nezávislá partikulární řešení $y_1, \dots, y_n$ se najdou pomocí charakteristické rovnice

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

! (1) Každému reálnému kořenu a násobnosti m odpovídá m ~~[illegible]~~ nezávislých partikulárních řešení

$$e^{ax}, \; x e^{ax}, \dots, x^{m-1} e^{ax}.$$

! (2) Každé dvojici komplexně sdružených kořenů $r = a + ib$ násobnosti m odpovídá m dvojic nezávislých partikulárních řešení

$$e^{ax} \cdot \cos bx, \; x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{m-1} e^{ax} \cos bx,$$
$$e^{ax} \cdot \sin bx, \; x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{m-1} e^{ax} \sin bx.$$

2. NEHOMOGENNÍ:

Nehomogenní $f \neq 0$

$$(**) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$$

rce má obecné řešení

$$y = y_H + y_P, \text{ kde}$$

y_H je ~~je~~ obecné řešení homogenní rce
$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$ a
y_P je partikulární řešení rovnice (**).
nehomogenní.

y_P určíme metodou variace konstant.
(tzv. Lagrangeova metoda)

! Speciálně pro $n = 2$.

Jsou-li y_1, y_2 nezávislá partikulární řešení rce

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

pak řešení rovnice

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

je tvaru

$$y = A(x)y_1 + B(x)y_2,$$ kde funkce

$A(x), B(x)$ vypočítáme ze soustavy rovnic

$$\boxed{\begin{aligned} A'(x)y_1 + B'(x)y_2 &= 0, \\ A'(x)y_1' + B'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned}}$$

Použijeme Cramerovo pravidlo. Funkce $A(x), B(x)$ pak získáme integrací $A'(x), B'(x)$.

POZN: ~~$A'(x)$~~
Je-li pravá strana speciálního typu, můžeme použít kratší postup: y_P má stejný tvar jako $f(x)$ a liší se pouze koeficienty.

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \,,\; y(0) = 1,\; y'(0) = 0$$

1. $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} =$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

2. $y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ 2C_1 + 3C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &C_2 = 1 - C_1 \\ &2C_1 + 3(1 - C_1) = 0 \Rightarrow -C_1 = -3 \\ &C_1 = 3 \\ &C_2 = -2 \end{aligned}$$

3. $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}.$

```
> ode:=diff(y(x),x,x)-5*diff(y(x),x)+6*y(x)=0;dsolve(ode);
```

$$ode := \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) - 5\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + 6\,\mathrm{y}(x) = 0$$

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\, \mathbf{e}^{(2x)} + \_C2\, \mathbf{e}^{(3x)}$$

```
> pocatecni:=y(0)=1,D(y)(0)=0;dsolve({ode,pocatecni});
```

$$pocatecni := \mathrm{y}(0) = 1, \mathrm{D}(y)(0) = 0$$

$$\mathrm{y}(x) = 3\,\mathbf{e}^{(2x)} - 2\,\mathbf{e}^{(3x)}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

1. $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

2. $y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} + C_2 x(-2) e^{-2x}$

$$C_1 + 0C_2 = 1 \quad \Rightarrow C_1 = 1$$
$$-2C_1 + C_2 + 0C_2 = 3 \Rightarrow -2C_1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 5$$

3. $\underline{y = e^{-2x}(1 + 5x)}$

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

1. $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} =$
$= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$

$$y = C_1 e^{2x} \cdot \cos x + C_2 \cdot e^{2x} \sin x = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

2. $y' = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 2 \quad \Rightarrow C_1 = 2$$
$$2C_1 + C_2 \cdot 0 - C_1 \cdot 0 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow 2C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = -3$$

3. $\underline{y = e^{2x}(2\cos x - 3\sin x)}$

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

I. $y'' + 3y' + 2y = 0$

hledáme obecné řešení zhomogenizované rce

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot 2}}{2}$

$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2$

$\varphi_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ $\quad$ φ_1, φ_2 fundamentální systém řešení $\left(= c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)\right)$

II. Nalezneme partikulární řešení $\varphi_p(x)$ (metoda variace konstant)

$\varphi_p(x) = g_1(x)\varphi_1(x) + g_2(x)\varphi_2(x)$

$g_1'(x)\varphi_1(x) + g_2'(x)\varphi_2(x) = 0$

$g_1'(x)\varphi_1'(x) + g_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x)$ $\quad$ $f(x)$ pravá strana rovnice.

$\varphi_p(x) = g_1(x)e^{-x} + g_2(x)\cdot e^{-2x}$

$g_1'(x)\cdot e^{-x} + g_2'(x)\cdot e^{-2x} = 0$

$g_1'(x)(-e^{-x}) + g_2'(x)\cdot(-2e^{-2x}) = \frac{1}{1+e^x}$

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{bmatrix}$$

CRAMER:

$$g_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{e^{-2x}}{1+e^x}}{-2e^{-3x} + e^{-3x}} = \frac{e^{-2x}}{(1+e^x)\cdot(+e^{-3x})}$$

$$= +\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$g_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{1+e^x} \end{vmatrix}}{-e^{-3x}} = \frac{\frac{e^{-x}}{1+e^x}}{-e^{-3x}} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

Spočteme integrály:

$$g_1(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| =$$

$$= \underline{\underline{\ln(1+e^x)}}$$

$$g_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = -\int \frac{t\,dt}{1+t} = -\int \frac{t+1-1}{1+t}\,dt$$

$$= -\int 1 - \frac{1}{t+1}\,dt = -t + \ln|1+t| = \underline{\underline{-e^x + \ln(1+e^x)}}$$

$$\varphi_p(x) = g_1(x)\varphi_1(x) + g_2(x)\varphi_2(x) =$$

$$\ln(1+e^x)\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\varphi_1} + \left(-e^x + \ln(1+e^x)\right)\cdot\underbrace{e^{-2x}}_{\varphi_2}$$

Celkem:

$$\varphi(x) = \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}}_{\varphi_H} + \underbrace{e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\left(-e^x + \ln(1+e^x)\right)}_{\varphi_p}$$

$$y'' - y = \sin x$$

1. Vyřešíme $y'' - y = 0$.

$$\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$$

$$y_H = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

2. Variace konstant:

$$y = C_1(x) e^{x} + C_2(x) e^{-x}$$

Vyřešíme soustavu

$$C_1'(x) e^{x} + C_2'(x) e^{-x} = 0$$

$$C_1'(x) e^{x} + C_2'(x)(-e^{-x}) = \sin x$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \sin x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-\sin x \cdot e^{-x}}{\underbrace{e^{x}(-e^{-x})}_{-1} - \underbrace{e^{-x}e^{x}}_{1}} = \frac{-\sin x\, e^{-x}}{-2}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x} \sin x$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & \sin x \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} e^{x} \sin x$$

3. $C_1(x), C_2(x)$ získáme výpočtem integrálů:

$$C_1(x) = \int \frac{1}{2} e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{4}(\sin x + \cos x) e^{-x} + C_1$$

$$C_2(x) = \int -\frac{1}{2} e^{x} \sin x \, dx = \frac{1}{4}(\cos x - \sin x) e^{x} + C_2$$

4. Celkem (upravíme řešení)

$$y(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = \left(-\frac{1}{4}(\sin x + \cos x) e^{-x} + C_1\right) \cdot e^{x} + \left(\frac{1}{4}(\cos x - \sin x) e^{x} + C_2\right) e^{-x} = -\frac{1}{2}\sin x + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\cancel{x^2+4}\; x} \qquad \frac{e^x}{x}$$

1. Vyřešíme $y'' - 2y' + y = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1$$

$$y_H = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

2. Variace konstant

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$$

Vyřešíme soustavu

$$C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0$$
$$C_1'(x) e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{-e^x \cdot e^x}{(e^x)^2 + \underbrace{x(e^x)^2 - x(e^x)^2}_{0}} = -1$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix}}{(e^x)^2} = \frac{\frac{(e^x)^2}{x}}{(e^x)^2} = \frac{1}{x}$$

3. vypočteme integrály

$$C_1'(x) = -1 \Rightarrow C_1(x) = -\int dx = -x + C_1$$
$$C_2'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{1}{x} = \ln|x| + C_2$$

4. Celkem

$$y(x) = (-x + C_1)e^x + (\ln|x| + C_2)xe^x =$$
$$= -xe^x + C_1 e^x + x\ln|x| e^x + C_2 x e^x$$
$$= \underbrace{C_1 e^x + C_2 xe^x - xe^x + x\ln|x| e^x}.$$

$$y'' + 3y' + 2y = 4x \quad , \; y(0)=0, \; y'(0)=0$$

33

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = -2$

$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

2. Variace konstant

$y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-2x}$

Vyřešíme soustavu

$$\underline{\underline{y = 2x - 3 + 4e^{-x} - e^{-2x}}}$$

$C_1'(x)\, e^{-x} + C_2'(x)\, e^{-2x} = 0$

$C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)\, e^{-2x}(-2) = 4x$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 4x & -2e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-4xe^{-2x}}{-2e^{-3x} + e^{-3x}} = \frac{-4xe^{-2x}}{-e^{-3x}}$$

$e^{-x} \cdot e^{-2x} = e^{-3x}$ $\qquad \frac{e^{-2x}}{e^{-3x}} = e^{-2x} \cdot e^{3x} = e^{x}$

$$= \frac{4x}{e^{-x}} = \underline{4xe^{x}}$$

e^{-x+3x}

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & 4x \end{vmatrix}}{-e^{-3x}} = \frac{4xe^{-x}}{-e^{-3x}} = \frac{-4x}{e^{-2x}} = -4xe^{+2x}$$

3. Integrace

$C_1(x) = \int 4xe^{x}\,dx = 4\int xe^{x}\,dx = \begin{vmatrix} f = x & f' = 1 \\ g' = e^{x} & g = e^{x} \end{vmatrix} = 4\left(xe^{x} - \int e^{x}\,dx\right) = 4e^{x}(x-1) + C_1$

$C_2(x) = \int -4xe^{+2x}\,dx = -4\int xe^{+2x}\,dx \begin{vmatrix} f = x & f' = 1 \\ g' = e^{+2x} & g = \int e^{+2x}\,dx = \begin{vmatrix} t = +2x \\ dt = +2\,dx \end{vmatrix} = \int e^{t}\frac{dt}{+2} = +\frac{1}{2}e^{+2x} \end{vmatrix}$

$= -4\left(+\frac{1}{2}xe^{+2x} - \int \frac{1}{2}e^{+2x}\,dx\right) = -2xe^{+2x} + 4\cdot\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)e^{+2x} =$

$= -2xe^{+2x} + e^{+2x} = e^{+2x}(-2x+1) + C_2$

$\underline{\underline{e^{2x}(1-2x) + C_2}}$

4. $y = \left(4e^{x}(x-1) + C_1\right)e^{-x} + \left(e^{+2x}(-2x+1) + C_2\right)e^{-2x} =$

$= 4(x-1) + C_1 e^{-x} + (-2x+1) + C_2 e^{-2x} = 2x - 3 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

5. $\left.\begin{aligned} 0 &= -3 + C_1 + C_2 \\ 0 &= 2 - C_1 - 2C_2 \end{aligned}\right\}+ \quad y' = 2 - C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$

$\Rightarrow -1 - C_2 = 0, \; C_2 = -1, \; C_1 = 4 \quad y = ~~6x - 3 + 3e^{-2x}~~$

Domáca cvičenia:

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

   V: $y = e^x(C_1 + C_2 x) - \frac{1}{2} e^x \ln(x^2+1) + x e^x \operatorname{arctg} x$

2. $y'' - 2y' = x e^x$

   V: $y = C_1 e^{2x} + C_2 - x e^x$

3. $y'' - y' - 12y = 14 e^x$

   V: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} - \frac{7}{6} e^x$

4. $y'' + 2y' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$