Miloš Zlámal

ZAKLADATEL MATEMATICKÉ TEORIE METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Libor Holuša
Jiří Kratochvíl
Michal Křížek
Ivo Marek
Alexander Ženíšek

Editor
Jan Franců

Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTIUM

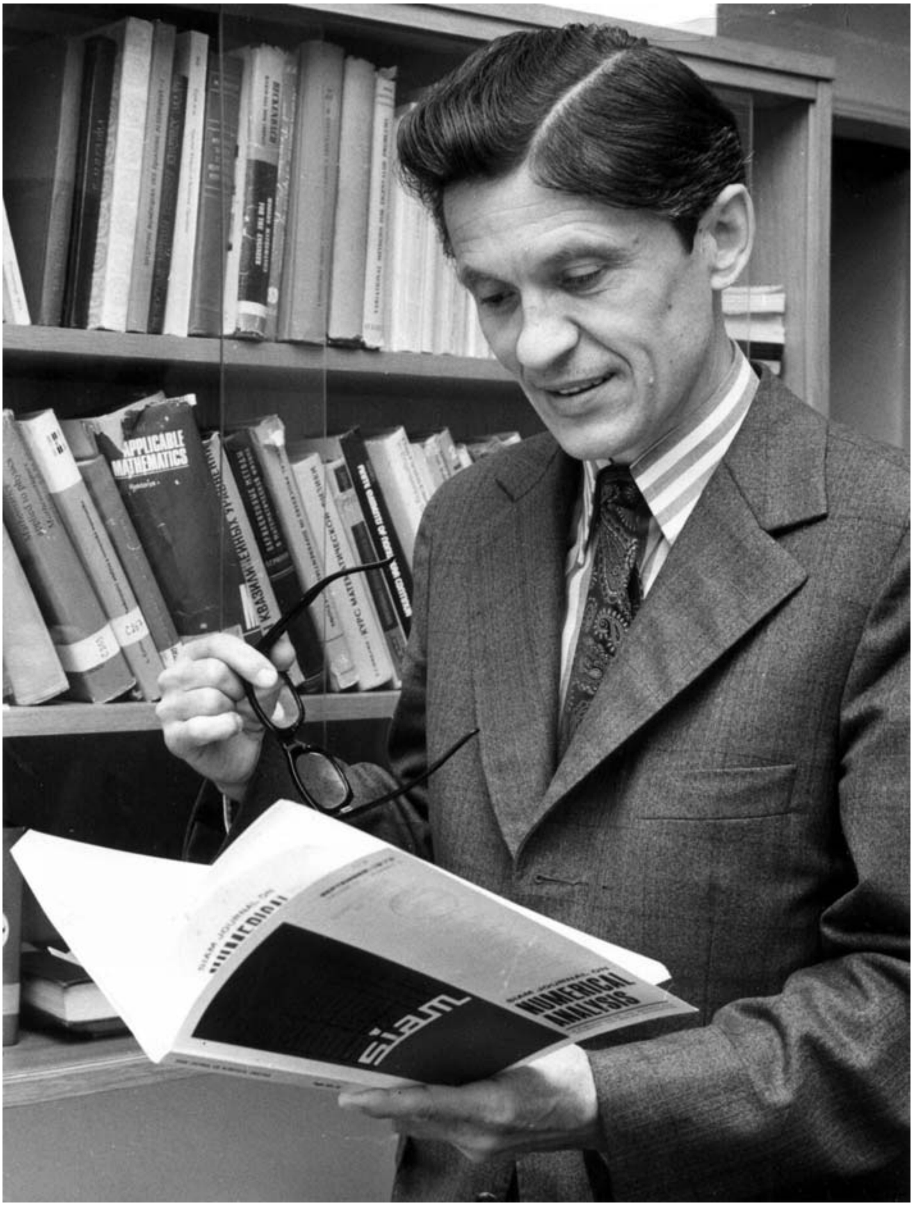
Miloš Zlámal

ZAKLADATEL MATEMATICKÉ TEORIE METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Libor Holuša
Jiří Kratochvíl
Michal Křížek
Ivo Marek
Alexander Ženíšek

Editor
Jan Franců

1996–2006 10 LET NAKLADATELSTVÍ VUTIUM
VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ


APPLICABLE MATHEMATICS
siam
NUMERICAL ANALYSIS

Miloš Zlámal

ZAKLADATEL MATEMATICKÉ TEORIE METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Libor Holuša
Jiří Kratochvíl
Michal Křížek
Ivo Marek
Alexander Ženíšek

Editor
Jan Franců

Vysoké učení technické v Brně,
nakladatelství VUTIUM 2006

ISBN 80-214-2920-8

Koncem roku 2004 by se dožil osmdesáti let Miloš Zlámal (30. 12. 1924 – 22. 6. 1997), profesor matematiky Vysokého učení technického v Brně, významný přední matematik světového významu, zakladatel matematické teorie metody konečných prvků. K tomuto výročí se dne 12. ledna 2005 konalo Vzpomínkové odpoledne. Podnět k této akci dal prof. Ivo Marek, formu Vzpomínkového odpoledne navrhl prof. Alexander Ženíšek, záštitu převzal rektor VUT v Brně prof. Jan Vrbka. Pořadatelem vedle Vysokého učení technického v Brně byla také Česká matematická společnost a brněnská pobočka Jednoty českých matematiků a fyziků.

Vzpomínkové odpoledne se konalo v novobarokní aule Centra VUT v Brně, přednášky byly odděleny krátkými varhanními skladbami v podání prof. Jiřího Jana, vedoucího Ústavu biomedicínského inženýrství FEKT VUT. V předsálí byly na čtyřech panelech vystaveny fotografie prof. Miloše Zlámala, diplomy a další dokumenty. Na jednom panelu byla vystavena kopie článku „On the finite element method“, který mu přinesl světové uznání. Seminář zakončilo občerstvení, které věnovala firma Czech Software First, s. r. o., prof. Jiří Hřebíčka. Celé Vzpomínkové odpoledne včetně výstavky dokumentů připravil a přednášky moderoval doc. Jan Franců.

Obsah tohoto sborníku tvoří texty přednášek, které odezněly během odpoledne, a vystavované dokumemty: vysvědčení, diplomy a ocenění, fotografie pracovní i rodinné a faksimile zmíněného článku. Sborník je doplněn životopisnými daty, seznamem publikací a fotografiemi z akce. Při výběru fotografií jsem se snažil připomenout také spolupracovníky profesora Zlámala a další osobnosti, z nichž mnohé již nejsou mezi námi.

Poděkování patří zejména paní Ludmile Zlámalové, manželce prof. Zlámala, za zapůjčení dokumentů a fotografií. Také bych rád poděkoval všem kolegyním a kolegům, kteří mně zapůjčili další fotografie, pomohli při identifikování osob na snímcích a přispěli radou při sestavování tohoto sborníku.

Editor

Vzpomínkové odpoledne

Brno 12. ledna 2005
Aula Centra VUT v Brně

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ v BRNĚ

Ústav matematiky Fakulty strojního inženýrství

a

Česká matematická společnost s brněnskou pobočkou JČMF

pořádají

pod záštitou rektora VUT prof. RNDr. Ing. Jana Vrbky, DrSc.

VZPOMÍNKOVÉ ODPOLEDNE

Prof. RNDr. Miloš Zlámal, DrSc.

30. 12. 1924 – 22. 6. 1997

zakladatel matematické teorie metody konečných prvků

Seminář se bude konat

ve středu 12. ledna 2005 ve 14 hodin

v aule Centra VUT, Antonínská 1, Brno

Na tohoto světoznámého vědce, jeho dílo
a dobu počátků metody konečných prvků v Brně
budou vzpomínat jeho spolupracovníci a další hosté

Ing. Libor Holuša, CSc.
Prof. Ing. Jiří Kratochvíl, DrSc.
Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc.
Prof. RNDr. Ivo Marek, DrSc.
Prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc.

Varhanní doprovod: prof. Jiří Jan
Občerstvení věnuje Czech Software First, s. r. o.

Všichni zájemci z řad studentů a matematické i inženýrské veřejnosti jsou srdečně zváni

VZPOMÍNKOVÉ ODPOLEDNE

Prof. RNDr. Miloš Zlámal, DrSc.

Středa 12. ledna 2005   14.00–19.00   Aula Centra VUT

Program

14.30 *Zahájení*

Úvodní slovo rektora

Prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc. (Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně): ***Profesor Zlámal a metoda konečných prvků***

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc. (Matematický ústav AVČR Praha): ***Superkonvergenční jevy v metodě konečných prvků***

16.00 *Přestávka*

16.30 Prof. Ing. Jiří Kratochvíl, DrSc. (Fakulta stavební VUT v Brně): ***O spolupráci inženýra s matematikem***

Ing. Libor Holuša, CSc. (Fakulta informatiky MU Brno): ***O spolupráci programátora s matematikem***

Prof. RNDr. Ivo Marek, DrSc. (Fakulta stavební ČVUT Praha): ***Prof. Zlámal, světový průkopník matematické teorie metody konečných prvků***

Diskuse

18.00 *Zakončení, přípitek a občerstvení*

Czech Software First s.r.o

Úvodní slovo rektora Vysokého učení technického

Jan Vrbka

Dámy a pánové, vzácní hosté, milé kolegyně, milí kolegové,

dovolte, abych vás přivítal na přátelském setkání u příležitosti osmdesátých, bohužel nedožitých, narozenin pana profesora Miloše Zlámala. Vítám vás jménem naší alma mater Vysokého učení technického v Brně i jménem svým. Myslím, že toto setkání je rovněž vyjádřením jistého poslání univerzity, které spočívá ve vytváření trvalých pout mezi učiteli, studenty a všemi, kteří na vysoké škole působí.

Pan profesor Zlámal, ač odešel, žije v mnohém z nás, protože to byl náš učitel. Jsem velice rád, že zde mohu vystupovat nejen jako představitel Vysokého učení technického v Brně, ale i jako člověk, který měl tu čest pana profesora osobně poznat. Milé je rovněž osobní setkání s lidmi, se kterými jsem se často potkával v Laboratoři počítacích strojů a posléze v Oblastním výpočetním centru.

Vaše účast na dnešním semináři — a vidím mezi vámi také slovutné matematiky z České republiky i ze Slovenska — je důkazem upřímných vztahů, které jsme k panu profesoru Zlámalovi, měli. Jsem potěšen, že mohu trochu zavzpomínat, jak jsem pana profesora znal.

Prof. Zlámal byl člověkem velice cílevědomým. Šel za tím, co považoval za účelné, jedině dobré. Byl to rozvoj výpočetní techniky, numerické matematiky i informatiky, které neměly zpočátku oficiální podporu tehdejších politických představitelů. Výsledkem byla první Laboratoř počítacích strojů, můžeme vzpomenout na první počítač LGP 20, můžeme vzpomínat na strojový kód a na všechno, co jsme v laboratoři dělali a na čem jsme pracovali.

Pan profesor měl také hluboký smysl pro týmovou práci, a rovněž pro spolupráci mezi obory. Pro něho to byla především spolupráce s inženýry, docenty a profesory v oblasti metody konečných prvků. Úroveň a pověst každé univerzity je dána osobnostmi, které na ní působí. Pan profesor Zlámal takovou osobností byl a svou dlouholetou prací přispěl značnou měrou k rozvoji našeho Vysokého učení technického v Brně v dané oblasti. Byl jedním ze spoluzakladatelů mezinárodně uznávané brněnské školy metody konečných prvků spolu s prof. A. Ženíškem a prof. J. Kratochvílem, která působila zejména v období 60. a 70. let.

Profesor Zlámal musel být také člověkem odvážným, protože v období takzvané normalizace poskytl zaměstnání několika lidem, kteří to neměli jednoduché.

Vím, že ač byl ředitelem Oblastního výpočetního centra, profesor Zlámal měl velice rád svou vědu, odbornost, vždy chtěl mít své prostředí a svůj klid k odborné práci. Ve výpočetním centru měl pracovnu v zadním traktu, kam se chodilo po střeše a kde byl rovněž trošku střežen svojí paní sekretářkou paní Winklerovou.

Pro pana profesora bylo charakteristické hluboké zahloubání do oblasti matematiky, do numerické matematiky, přestože se musel zabývat běžným chodem důležitého pracoviště naší školy. Svým významem přesahovala Laboratoř počítacích strojů a později Oblastní výpočetní centrum rámec Vysokého učení technického v Brně, jejich význam byl nejen regionální, ale i celostátní. O tom také svědčí naše setkání.

Jsem rád, že v dnešním programu vystoupí jeho nejbližší spolupracovníci. Chtěl bych také poděkovat organizátorovi tohoto setkání, docentu Franců za jeho záslužnou práci.

Velice se těším na přednášky, které si vyslechnu. Přeji nám všem, abychom se v duchu přenesli do doby, kdy byl pan profesor Zlámal mezi námi, působil ve skvělé Laboratoři počítacích strojů a v oblasti výpočetní techniky.

Prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc., dr. h. c.

od roku 2000 ve funkci rektora VUT v Brně, je profesorem mechaniky na Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně

Profesor Zlámal a metoda konečných prvků

Alexander Ženíšek

Dne 17. dubna 1969 odstoupil z funkce prvního tajemníka KSČ Alexander Dubček, a tím i formálně skončil poslední záchvěv pražského jara 1968. Většina z vás asi toto datum zapomněla; já si je pamatuji jenom proto, že matematická teorie metody konečných prvků měla v ten den právě jeden rok.

Je ovšem nutné definovat, čím rozumíme první den matematické teorie. Ztotožňuji se s názorem, že je to datum zaslání článku, který vyšel první v rámci této teorie v matematickém časopise. První článek o metodě konečných prvků vyšel v roce 1968 v Numerische Mathematik, měl název *On the finite element method*, autorem byl Miloš Zlámal a pod jeho jménem stálo: *Received April 17, 1968.*

Pojem metoda konečných prvků potřebuje alespoň minimální výklad: je to přibližná metoda pro řešení variačních problémů. Variačním problémem přitom rozumíme problém, ve kterém se minimalizuje (resp. maximalizuje) nějaký funkcionál na třídě přípustných funkcí, které se často nazývají stavy. Nejjednodušším a nejpřístupnějším příkladem je princip *minima potenciální energie*, podle kterého se ze všech přípustných stavů realizuje ten, ve kterém je potenciální energie dané soustavy minimální.

Ještě konkrétněji: představte si kuličku, kterou vložíme do misky kulovitého tvaru, a to nikoliv na dno. Kulička v misce chvíli kmitá, až se ustálí na dně misky. Každá z poloh kuličky v misce je přípustná, na dně má však kulička potenciální energii minimální.

Formulovat nějaký variační problém matematicky vyžaduje značné úsilí. Velké štěstí je, že existují třídy variačních problémů; v každé třídě se problémy liší pouze geometrickým tvarem oblasti, ve které jsou definovány, a vedlejšími podmínkami (většinou okrajovými a počátečními) a materiálovými konstantami. Máme-li dva variační problémy téže třídy dané na různých oblastech a s různými vedlejšími podmínkami, jde o dva matematicky různé problémy, z nichž každý se musí řešit samostatně.

Donedávna (tj. do konce šedesátých let) jediný způsob, jak tyto problémy řešit, bylo sestavit tzv. Eulerovu rovnici příslušného problému. Dostali jsme tak okrajový (či počáteční – okrajový) problém (parciální) diferenciální rovnice. Z matematického hlediska sestavení takového problému znamená vyřešení původního variačního problému, protože byl formulován snazší matematický problém.

Z praktického hlediska ovšem bylo nutné pokusit se o řešení tohoto snazšího problému. Drtivou většinu těchto problémů nelze řešit analyticky a z přibližných metod byla k dispozici pouze takzvaná *metoda sítí*. Ta se však neumí dobře vypořádat s nepravidelným tvarem oblastí a s okrajovými podmínkami silového typu. Situace byla pro matematiky v polovině šedesátých let dosti tristní: o metodě sítí mohli pilně teoretizovat, dobré výsledky však nedávala. Nedobře na tom byla také variační metoda Ritzova vzhledem ke své nestabilitě. A tu přišel Zlámal se svým článkem a téměř přes noc (přesněji během neceléh roku) se stal světovou jedničkou v Numerical Analysis. Vysvětlím proč.

Vítězslav Nezval napsal ve čtvrtém zpěvu Edisona:

Je to úmysl a trochu náhoda
stát se presidentem svého národa.

Stejně je to úmysl (pokud tím nazýváme ctižádostivou píli) a trochu náhoda stát se světovou jedničkou ve svém oboru. Miloš Zlámal díky jednomu svému kladnému povahovému rysu této náhodě dosti pomohl. Tím jeho pozitivem byla ochota naslouchat každému inženýrovi a snažit se mu pomoci, pokud žádal o pomoc. A protože se jako ředitel výpočetního centra VUT v Brně často setkával s inženýry, kteří tam počítali na tehdy moderním počítači DATASAAB D21, zajímal se také o jejich práci.

V roce 1967 tam často počítali inženýři Kratochvíl a Leitner. Protože Zlámal o ně skoro zakopával, jednoho dne mu to nedalo a zeptal se, co pořád tak pilně počítají. A k svému velkému překvapení se dozvěděl jemu neznámý výraz: *metoda konečných prvků*. Počítali touto metodou statický výpočet jedné přehrady. Ing. Jiří Kratochvíl, nyní už dlouhá léta profesor a DrSc., byl totiž duše zvídavá a vypěstoval si už před mnoha lety zvyk sledovat všechnu dostupnou časopiseckou inženýrskou literaturu, která jen trochu souvisela s jeho oborem.

Ačkoliv byl vodař, alespoň okrajově, ale pravidelně sledoval americké letecké žurnály (na VAAZ byly k dispozici), a tak jednou na počátku roku 1965 ho v časopisu AIAA zaujaly konstrukce trupů letadel sestavené z trojúhelníčků a malůvky různých trojúhelníkových prvků. Dočetl se tam o *finite element method*, což si pro sebe přeložil jako *metoda konečných prvků*. (Přirozenější překlad metoda konečného prvku, který byl později propagován, se neujal.) Začal studovat články podrobněji a po důkladnějším zvážení se rozhodl pokusit se o samostatnou praktickou aplikaci: dal si za úkol vytvořit v praxi aplikovatelný program pro statické výpočty zemních hrází a přehrad.

Úkol to byl nelehký: nejen že se musel doučit mnohé z programování, ale musel také rozřešit to nejtěžší, totiž sestavit algoritmus vytvoření celkové matice tuhosti a vektoru pravé strany výsledné soustavy lineárních algebraických rovnic z elementárních matic a vektorů. To v článcích totiž nebylo. Jak řešit velkou soustavu lineárních algebraických rovnic co nejrychleji, dal za úkol svému spolupracovníkovi Ing. Františku Leitnerovi, který byl mým bridžovým partnerem. Ten mě také seznámil v březnu 1967 s Ing. Kratochvílem, protože podle Ing. Kratochvíla už potřebují matematika.

V říjnu 1967 mi dal Ing. Kratochvíl fotografickou kopii článku inženýrů Pin Tonga a J. H. H. Piana z časopisu Solids and Structures o konvergenci metody konečných prvků. Tím, že jsem ten článek „přeložil“ do matematiky, něco přidal a přizpůsobil pasáže ze slavné Michlinovy knihy *Problema minimuma kvadratičnogo funkcionala*, jsem napsal obhajovatelnou kandidátskou práci, kterou jsem v hrubém rukopise dokončil 5. března 1968.

Takový byl stav, když v listopadu 1967 dal Ing. Kratochvíl svou první informaci o metodě konečných prvků prof. Zlámalovi. Popsal mu v ní princip metody a na co ji konkrétně aplikují. Zlámalova první reakce byla: „No, myslím, že metoda sítí je lepší.“

Zlámal však rozpoznal v inženýrském přístupu polozapomenutou Courantovu myšlenku z roku 1943, která zapadla proto, že tehdy nebyly počítače, na kterých by se dala realizovat. Proto mu to nedalo, vyhledal Kratochvíla a nechal si od něj podrobněji o MKP poreferovat. Dozvěděl se tak mimo jiné o do té doby známých interpolačních polynomech druhého a třetího stupně na trojúhelníku, které dodnes inženýři nazývají

Veubeckův element a Holandův element podle jejich prvních uživatelů. A protože zrovna neměl na čem pracovat, dal si za cíl dokázat konvergenci metody konečných prvků při použití Veubeckova elementu.

Práce se mu tak dařila, že dokázal konvergenci i pro Holandův element a navíc zkonstruoval trojúhelníkový C^1-prvek, tj. polynom jednoznačně určený takovými parametry, že globální funkce, která je pomocí něj na triangulaci zkonstruovaná, je spojitá i s oběma svými prvními parciálními derivacemi v celé ztriangulované oblasti s polygonální hranicí. To už byl velký výsledek, a když po vtipném triku dokázal také příslušný interpolační teorém, byl článek hotov.

V květnu 1968 sice v časopisu Numerische Mathematik vyšel článek amerických autorů Birkhoffa, Schultze a Vargy na podobné téma — pojednával o konvergenci Galerkinovy–Ritzovy metody při použití Ahlinových polynomů z roku 1964, což jsou vlastně obdélníkové C^m-prvky. Vzhledem k malé použitelnosti obdélníkových prvků byl Zlámalův výsledek obecnější, navíc originálnější, měl ve svém názvu MKP a poukazoval na současné inženýrské trendy. Zlámal je tedy první matematik, který ve své práci užil výraz metoda konečných prvků. Svým článkem poukázal na jednu oblast matematiky velmi málo zmapovanou — její mapa měla velký nápis HIC SUNT LEONES.

Zajímavé je, že v roce 1968 publikovali čtyři různí inženýři stejný trojúhelníkový C^1-prvek — ovšem bez příslušného interpolačního teorému, pouze s poukazem na možnosti při řešení tenkých desek. V tom roce začalo být v MKP horko, výsledky stíhaly výsledky a do práce se začali v důsledku Zlámalovy práce zapojovat i matematici. V Brně jsme však díky Ing. Kratochvílovi měli náskok.

I když byl ve své podstatě Zlámal vždy vlk samotář, v té době jsme si to ani neuvědomovali. Ing. Kratochvíl se u něj pravidelně při svých návštěvách v LPS stavoval, Zlámal neměl možnost se kromě mne s nikým o MKP bavit, a tak jsme dosti často spolu všichni tři družně sedávali v Zlámalově pracovně. Tento kolektiv se na jaře 1968 rozrostl o dalšího člena: programátora Ing. Holušu — budoucí programátorskou jedničku přes MKP v Československu. Zlámal totiž chtěl svoje výsledky ověřit v početní praxi, a pověřil proto Holušu, aby mu jeho algoritmus pro výpočet tenké desky při použití jeho trojúhelníkového C^1-prvku naprogramoval.

Kratochvílovy programy obsahovaly jako konečněprvkovou násadu funkce, které byly po trojúhelnících polynomy prvního stupně, takže Holušova úloha nebyla lehká: musel Kratochvílovy programátorské postupy zobecnit pro polynom pátého stupně, kde kromě derivací prvního a druhého řádu vystupovaly také derivace podle normály. Holuša vždy říkal, že programovat konečné prvky je snadná věc (ale v závorce dodával, že hledat chyby při ladění je velmi obtížné). A ladění při tak komplikovaném programu bylo k zoufání, protože výsledky testovacích příkladů byly takové neslané nemastné — zkrátka nepřesvědčivé vzhledem k teoreticky předpovězené přesnosti.

Zlámal se ptal Kratochvíla: „A počítal tou metodou vůbec někdo něco?“ Kratochvíl se jen smál a říkal Zlámalovi, aby byl trpělivý. V polovině července 1968 našel Holuša po několikanásobné kontrole chybu v jednom indexu a testovací příklady najednou vyšly s přesností na osm platných číslic — čili naprosto přesvědčivě potvrzená teorie. Zlámal týden nato odjel na konferenci do Edinburghu a tam požádal předsedajícího, aby směl hovořit o něčem naprosto jiném než, na začátku roku oznámil. Byl to první mezinárodní referát o metodě konečných prvků.

Po vstupu vojsk jsme se ještě více zakousli do práce. Zlámal psal současně dva články; jeden o algoritmizaci MKP, druhý o redukci parametrů — oba vyšly krátce po sobě v Numerische Mathematik a spolu s prvním článkem z roku 1968 mu vynesly pozvání do USA a Francie celkem na tři měsíce za velmi výhodných finančních podmínek. Odjel začátkem roku 1970.

Já jsem v říjnu 1968 začal budovat hieararchii interpolačních polynomů na trojúhelníku — byla to cesta dlouhým tmavým tunelem a směšné na celé věci je, že z matematiky jsem na to nepotřeboval nic, nepočítám-li vědomost, že součet přirozených čísel od jedné do n je roven $\frac{1}{2}n(n+1)$. V hlavě se mně rozsvítilo někdy na začátku roku 1969 při večerních zprávách — tu sobotu, kdy dávali druhé pokračování Randalla a Hopkirka. Článek, který mně udělal jméno, jsem pak sepsal během měsíce. Stačilo dokázat ještě jedno duchaplnější lemma a zobecnit trochu Zlámalovo důkazové schéma z jeho prvního článku o MKP.

Zlámal tento můj výsledek odvezl na podzim 1969 do USA a spolu s Bramblem jej oděli do lepšího hávu, tj. příslušné interpolační teorémy dokázali v sobolevovských normách. Mezitím stačil Zlámal ještě pracovat na algoritmech pro pružnostní výpočty metodou konečných prvků a spolupracovat na několika drobnějších článcích.

V druhé polovině roku 1970 začal Zlámal pracovat na své koncepci zakřivených trojúhelníkových prvků. První část tohoto díla mu vyšla v roce 1973 v SIAM Journal on Numerical Analysis. Je to práce typicky zlámalovská: stručná, přesná, srozumitelná. Zatímco první část pojednávala o ideálních zakřivených trojúhelníkových prvcích, jejichž křivá strana je totožná s částí hranice, druhá část, ještě hutnější a přitom rozsáhlejší, pojednávala o reálných křivých trojúhelnících a numerické integraci na nich. Při psaní této práce udělal Zlámal jen jednu chybu: referoval o dosažených výsledcích v průběhu práce při jedné ze svých zahraničních cest.

Prof. Raviart z Paříže mi v roce 1975 řekl: „Věděli jsme, že ještě nějakou dobu potrvá, než Zlámal článek pošle do tisku. Museli jsme jej předehnat. Dělali jsme na tom s Ciarletem téměř dnem i nocí a práci o křivých izoparametrických prvcích a numerické integraci na nich jsme uveřejnili v Azizově knize o matematických základech metody konečných prvků, která vyšla v roce konání konference (tj. 1972)." Tak vlastně ztratil Zlámal pozici světové jedničky v Numerical Analysis. Nic na tom nemění skutečnost, že Raviart mi v témže hovoru přiznal, že se metodu konečných prvků učil z prvních Zlámalových prací.

Uvedenými dvěma pracemi skončilo Zlámalovo stacionární (či eliptické) období. Od roku 1973 začal pracovat na evolučních problémech, které řešil kombinací metody konečných prvků a diferenční metody. Zprvu to byla lineární rovnice pro vedení tepla, kde se věnoval zejména vícekrokovým metodám; od roku 1975 začal analyzovat různé nelineární typy. V období 1975–78 navíc zásadním způsobem přispěl k teoretickým otázkám superkonvergence MKP.

V období 1981–88 se věnoval jednak řešení kvazistacionárního magnetického pole v nestejnorodém prostředí a dále metodě konečných prvků aplikované na rovnice polovodičů. Pozoruhodné je, že kromě zásadních matematických výsledků publikovaných v renomovaných amerických časopisech se vždy zúčastnil na přípravě algoritmu a podstatně tak přispěl k praktické realizaci řešení problému pomocí průmyslového programu.

Prof. Zlámal nenapsal žádnou knihu — byl příliš soustředěn na hledání řešení praktických problémů. Nevydržel u žádné problematiky přitom tak dlouho, aby ji zcela vyčerpal. Obrazně řečeno: jeho brázda byla široká, ale ne tak hluboká, aby tam žádné brambory nezůstaly. A při pečlivém zkoumání člověk zjistil, že jich tam zůstalo požehnaně. Je to moje dobrá zkušenost.

Je zajímavé, že se nikdy nezajímal o svoje ohlasy v časopisech — citace ho zkrátka nezajímaly a nikdy žádný Citation Index neotevřel. Citací měl přitom požehnaně; o tom jsem se vždy přesvědčil, když jsem hledal svoje citace, protože naše příjmení jsou blízko sebe v anglické abecedě. Zato si zakládal na velkém množství pozvání, která za svůj život obdržel. Málokterý matematik odmítl tolik pozvání jako on.

Z formálních uznání stojí za zmínku dvě: řadu let byl předsedou matematického kolegia ČSAV a obdržel čestný doktorát Technische Universität Dresden.

Prof. Zlámal zemřel náhle ve věku 73 let dne 22. června 1997. V jeho pozůstalosti jsem nalezl seznam jeho článků. Má 70 položek, z toho je 47 věnováno metodě konečných prvků. Od roku 1968 pracoval jenom na této metodě. Asi 18 článků je zcela zásadních. Kdybych je měl hodnotit kvantitativně, užil bych následující hodnotovou stupnici:

-1 — záporný stupeň; stydím se za autora, že to napsal

0 — neutrální stupeň; práce mne nezajímá, i když něco na ní je

1 — první stupeň: to je chytré – že mě to nenapadlo

2 — druhý stupeň: práce mě velmi obohacuje, jsem rád, že jsem ji poznal

3 — třetí stupeň: práce otvírá nový směr bádání

Zlámalova práce z roku 1968 je třetího stupně; zbývajících 17 prací druhého stupně — mne aspoň velmi obohatily.

Zlámalovo velké štěstí bylo, že první inženýr na evropském kontinentě, který začal pracovat v metodě konečných prvků, působil v Brně. Další vývoj událostí už však náhoda nebyla.

Když vědecká rada strojní fakulty VUT v Brně přála prof. Zlámalovi k jeho sedmdesátinám, prozradil na sebe: „Když jsem v roce 1961 přešel z přírodovědecké fakulty brněnské univerzity na strojní fakultu, uvědomil jsem si, že musím dělat matematiku jinak, než jak se dělá na univerzitě.“ A to se mu podařilo dokonale.

Prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc.

člen Učené společnosti České republiky, profesor aplikované matematiky Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně, od roku 2005 emeritní profesor VUT

Superkonvergence metody konečných prvků

Michal Křížek

1. Úvod

Profesor Miloš Zlámal patří mezi nejvýznamnější zakladatele metody konečných prvků, jež je dodnes považována za jednu z nejefektivnějších numerických metod pro řešení rozmanitých technických úloh, především pak úloh matematické fyziky. V roce 1968 podal elegantní důkaz její konvergence (viz [15]). Později zavedl tzv. křivočaré prvky (viz [17]) a též přechodové prvky T-6 a T-8, které umožňují spojitě napojovat Lagrangeovy lineární trojúhelníkové prvky na Hermitovy kubické trojúhelníkové prvky (viz [16]). Navrhl metodu konečných prvků pro řešení nelineární soustavy polovodičových rovnic (viz [22]). Byl také jedním z prvních matematiků, kteří zkoumali superkonvergenční jevy v metodě konečných prvků (viz [11], [18], [19], [20], [21], [23]). A tomuto tématu se dále budeme věnovat.

Během rozvoje metody konečných prvků bylo objeveno, že ve speciálních bodech vyšetřované oblasti je řád rychlosti konvergence vyšší než optimální globální řád. Tento pozoruhodný jev byl nazván *superkonvergence*.

Systematické studium superkonvergenčních jevů začalo počátkem sedmdesátých let. Postupně byla dokázána superkonvergence metody konečných prvků pro speciální rovnice v uzlových bodech, Gaussových-Legendrových bodech, Jacobiho bodech a Lobattových bodech. Naším cílem je přiblížit základní poznatky o tomto jevu. Následující dvě kapitoly vznikly především z materiálů uvedených v přehledovém článku [9].

Kapitola 4 se týká Zlámalova přínosu k teorii superkonvergence. V poslední kapitole uvedeme některé konkrétní aplikace superkonvergenčních jevů.

2. Jednorozměrný příklad

Pojem superkonvergence se poprvé objevil v roce 1973 v článku [5] J. Douglase a T. Duponta. Tito autoři vyšetřovali eliptickou okrajovou úlohu druhého řádu

$$\begin{aligned} -(au')' + cu &= f, && (1) \\ u(0) = u(1) &= 0, && (2) \end{aligned}$$

kde $a > 0$, $c > 0$ a f jsou hladké reálné funkce na intervalu $[0, 1]$.

Řešení u budeme aproximovat pomocí spojitých a po částech polynomiálních funkcí. Pro libovolné přirozené číslo n položme $h = (n+1)^{-1}$, $x_i = ih$ pro $i = 0, \dots, n+1$ a $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ pro $i = 1, \dots, n+1$. Dále definujme prostor konečných prvků

$$V_h = \{v \in C[0,1] \mid v(0) = v(1) = 0,\ v|_{K_i} \in P_k(K_i),\ i = 1, \dots, n+1\}, \tag{3}$$

kde $P_k(K)$ je prostor polynomů stupně k na prvku K.

Metoda konečných prvků spočívá v nalezení přibližného řešení $u_h \in V_h$, pro něž platí

$$(au_h', v_h')_0 + (cu_h, v_h)_0 = (f, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde $(\cdot,\cdot)_0$ je skalární součin v prostoru $L^2(0,1)$. Tato rovnice formálně vznikne tak, že obě strany vztahu (1) vynásobíme libovolnou testovací funkcí $v_h \in V_h$, zintegrujeme přes interval $[0, 1]$, provedeme integraci per partes a zaměníme u za u_h. Ze známé Rieszovy věty (viz např. [13, s. 233]) pak plyne existence právě jednoho takového řešení $u_h \in V_h$.

V roce 1973 Douglas a Dupont dokázali, že pro $h \to 0$

$$\max_i |u(x_i) - u_h(x_i)| = \mathcal{O}(h^{2k}),$$

je-li $u \in C^{k+1}[0, 1]$, zatímco

$$\max_{x\in[0,1]} |u(x) - u_h(x)| = \mathcal{O}(h^{k+1}) \tag{4}$$

je optimální globální odhad, který nelze obecně zlepšit. Pro $k \geq 2$ je tedy rychlost konvergence v uzlových bodech x_i mnohem větší než na celém intervalu $[0, 1]$. Tento jev se nazývá *superkonvergence* (obecná definice je zavedena v [9]). Pro $k = 1$, $a = 1$ a $c = 0$ dokonce platí, že $u(x_i) = u_h(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n+1$; tj. v uzlových bodech x_i je diskretizační chyba nulová.

Později M. Bakker (viz [2]) objevil další překvapivý superkonvergenční jev. Zjistil totiž, že pro $k \geq 2$ uvnitř každého intervalu K_i existuje $k-1$ bodů (tzv. Lobattových bodů), kde rozdíl $u - u_h$ je řádu $\mathcal{O}(h^{k+2})$, tj. rychlost konvergence metody konečných prvků je v těchto bodech o jeden řád vyšší, než je optimální globální řád (4).

V roce 1979 Lesaint se Zlámalem [11] dokázali, že v k Gaussových bodech každého intervalu K_i derivace u_h' konvergují k přesnému řešení rychlostí $\mathcal{O}(h^{k+1})$, zatímco $\mathcal{O}(h^k)$ je optimální globální rychlost. V tomto případě hovoříme o *superkonvergenci derivací*. Připomeňme ještě, že Gaussovy body jsou kořeny Legendrových polynomů, které jsou ortogonální v $L^2(K_i)$. V Lobattových bodech nabývají tyto polynomy lokálních minim a maxim.

V monografii Babuška, Práger, Vitásek [1, s. 145] z roku 1966 se rovnice (1) s obecnými Newtonovými okrajovými podmínkami diskretizuje pomocí speciální metody konečných diferencí. K aproximaci součinu $a(x)u'$ se používají Marčukovy identity. Vzniklá soustava lineárních algebraických rovnic je třídiagonální (podobně jako při použití lineárních konečných prvků, které mají optimální rychlost konvergence $\mathcal{O}(h^2)$). Autoři však dokazují konvergenci řádu $\mathcal{O}(h^6)$ v uzlových bodech, což lze též označit jako superkonvergenční výsledek, i když termín superkonvergence tehdy ještě nebyl znám.

3. Superkonvergenční jevy v rovině a v prostoru

Klíčovými předpoklady u většiny superkonvergenčních jevů jsou hladkost řešení a jistá pravidelná struktura triangulací použitých pro metodu konečných prvků. Ukažme to opět na jednoduchém příkladu.

Předpokládejme, že $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3$, je ohraničená oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, a uvažujme Poissonovu rovnici s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega, && (5) \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, && (6) \end{aligned}$$

kde $f \in L^2(\Omega)$.

Nechť nejprve $d = 2$. Uvažujme triangulace T_h uzávěru oblasti $\overline{\Omega}$, které jsou tvořeny pouze rovnostrannými trojúhelníky o délce strany h. Jejich vrcholy označme x_i pro $i = 1, 2, \ldots, n(h)$. V prostoru lineárních konečných prvků

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid v = 0 \text{ na } \partial\Omega, \quad v|_K \in P_1(K) \text{ pro } K \in T_h\}$$

hledejme Galerkinovo řešení $u_h \in V_h$ definované vztahem

$$(\nabla u_h, \nabla v_h)_0 = (f, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde ∇ je gradient. Pak platí (viz [3])

$$\max_i |u(x_i) - u_h(x_i)| = \mathcal{O}(h^4 \log h^{-1}), \tag{7}$$

je-li $u \in C^4(\overline{\Omega})$, zatímco

$$\max_{x \in \Omega} |u(x) - u_h(x)| = \mathcal{O}(h^2)$$

je optimální globální odhad, který nelze obecně zlepšit.

Bohužel superkonvergenční odhad vysokého řádu (7) nelze zobecnit na případ $d = 3$, protože prostor nelze vykrýt pravidelnými čtyřstěny, i když Aristoteles se kdysi domníval, že to možné je a že kolem každé hrany je „navinuto“ 5 čtyřstěnů. To by odpovídalo situaci, že úhel α mezi dvěma stěnami pravidelného čtyřstěnu je 72°. Aristoteles byl ale tak významnou osobností, že o jeho (nepravdivém) tvrzení nikdo nepochyboval. Teprve ve 12. století Averroes dokázal, že se Aristoteles mýlil. Zjistil totiž, že délka hrany pravidelného dvacetistěnu vepsaného do jednotkové koule o poloměru 1 se nerovná 1, jak by plynulo z Aristotelovy domněnky. Úhel α je přibližně 71° (přesná hodnota je $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$). Další teoretické potíže se superkonvergencí v trojrozměrném prostoru jsou popsány v článku [8].

V roce 1969 Oganesjan a Ruchovec [12] dokázali velice překvapivou vlastnost pro lineární konečné prvky na uniformních triangulacích (tj. triangulacích, v nichž každé dva sousední trojúhelníky tvoří rovnoběžník). Pro dostatečně hladké v definujme Lagrangeovu interpolaci $\pi_h v \in V_h$ vztahem

$$\pi_h v(x_i) = v(x_i)$$

pro všechny uzlové body x_i. Označme $\|v\|_1 = \left(\|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2\right)^{1/2}$ Sobolevovu normu, kde $\|v\|_0$ je standardní L^2-norma. Pak platí (podrobnosti viz [12])

$$\|u_h - \pi_h u\|_1 = \mathcal{O}(h^2). \tag{8}$$

Na druhé straně není obecně možné zlepšit odhady

$$\|u - \pi_h u\|_1 = \mathcal{O}(h) \quad \text{a} \quad \|u - u_h\|_1 = \mathcal{O}(h),$$

které jsou optimální.

Vlastnost (8), jež je základem většiny superkonvergenčních jevů, nám vlastně říká, že Lagrangeova interpolace a Galerkinovo řešení jsou si velice blízké. Oganesjan a Ruchovec ji použili k důkazu konvergence metody konečných prvků pomocí trojúhelníkové nerovnosti

$$\|u - u_h\|_1 \le \|u - \pi_h u\|_1 + \|u_h - \pi_h u\|_1 = \mathcal{O}(h),$$

ale nevyužili ji k důkazu superkonvergence. Navíc jejich důkaz konvergence byl mnohem komplikovanější než Zlámalův důkaz z fundamentálního článku [15]. Oganesjan a Ruchovec totiž nepoužili známé Céovo lemma, které umožňuje vyhnout se odhadu (8) a výše uvedené trojúhelníkové nerovnosti.

Superkonvergenční jevy vznikající při řešení eliptických, parabolických a jiných problémů byly získány na celé řadě různých typů pravidelných triangulací, např. uniformních, po částech uniformních, kvaziuniformních, lokálně bodově symetrických, lokálně periodických a sobě podobných v R^2 či v R^3 (viz [9], [10], [14]).

4. Zlámalův přínos k teorii superkonvergence

Přibližme si nyní Zlámalův výsledek z jeho vůbec první práce o superkonvergenci metody konečných prvků [18], o které referoval v roce 1975 na konferenci v Římě, tedy pouhé dva roky poté, co Douglas a Dupont zavedli pojem superkonvergence pro jednorozměrnou okrajovou úlohu.

Opět budeme uvažovat úlohu (5)–(6). Předpokládejme, že vyšetřovaná oblast $\overline{\Omega}$ je sjednocením uzavřených obdélníků, jejichž strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a každé dva obdélníky mají společnou právě jednu celou stranu, nebo jeden vrchol, anebo nemají společný žádný bod. Příslušnou triangulaci označme T_h. Nechť prostor konečných prvků $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ se skládá ze spojitých funkcí, které jsou neúplné kubické polynomy na každém prvku $K \in T_h$ takové, že nejvyšší mocniny x_1^3 a x_2^3 scházejí. Takové prvky patří do tzv. třídy „Serendipity“.[1] Jsou určeny jednoznačně hodnotami ve vrcholech a středech stran obdélníků. Označíme-li $\|\cdot\|_3$ normu v Sobolevově prostoru $H^3(\Omega)$, pak z věty o interpolaci plyne, že

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_0 \le Ch^2 \|u\|_3$$

je nejlepší možný odhad.

Uvažujme dále *Gaussovy body* $(\pm\sqrt{3}/3, \pm\sqrt{3}/3)$ v referenčním čtverci $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ a označme G_h množinu jejich obrazů vzájemně jednoznačného lineárního afinního zobrazení $F_K : \hat{K} \to K$ pro

[1]Pojmenování *Serendipity* je převzato ze staré perské pohádky o třech princích ze Serendipu (což je původní název pro Srí Lanku), kteří nečekaně objevovali různé kouzelné věci a vlastnosti, i když je původně nehledali.

všechna $K \in T_h$. Zlámal ve své práci [18] dokázal, že aritmetický průměr μ hodnot $|\nabla u(x) - \nabla u_h(x)|$ přes všechny body $x \in G_h$ je ohraničen shora pomocí h^3,

$$\mu \leq Ch^3(|u|_3 + |u|_4),$$

kde $|\cdot|$ označuje eukleidovskou normu a $|\cdot|_m$ označuje standardní Sobolevovu seminormu v prostoru $H^m(\Omega)$. Platí tedy

$$h^2 \sum_{x \in G_h} |\nabla u(x) - \nabla u_h(x)| \leq Ch^3(|u|_3 + |u|_4). \tag{9}$$

Povšimněme si, že na levé straně nerovnosti (9) stojí vlastně diskrétní L^1-norma. Tento odhad lze dokázat dokonce pro mnohem obecnější eliptické okrajové problémy s proměnnými koeficienty a také okrajovými podmínkami Newtonova typu, viz [18].

V další stěžejní Zlámalově práci [20] je odhad (9) zobecněn na diskrétní L^2-normu, tj.

$$h \left(\sum_{x \in G_h} |\nabla u(x) - \nabla u_h(x)|^2 \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(h^3) \tag{10}$$

pro pravoúhlé oblasti z R^d, $d = 1, 2, 3$. Zde Zlámal používá i jiné typy konečných prvků. Například pro bilineární prvky dostává $\mathcal{O}(h^2)$–superkonvergenci gradientu přibližných řešení v Gaussových bodech, což jsou v tomto jednoduchém případě těžiště jednotlivých obdélníkových prvků.

Odhad (10) je zobecněn na křivočaré izoparametrické prvky ve společné práci Lesainta a Zlámala [11] a Zlámalově článku [20]. Superkonvergencí obdélníkových prvků se Zlámal zabývá též v příspěvcích [19] a [21].

V poslední Zlámalově práci o superkonvergenci [23] se vyšetřuje jistá bilanční metoda pro numerické řešení úlohy (5)–(6) na obecné polygonální oblasti. Pro lineární trojúhelníkové prvky se opět odvozuje superkonvergence gradientu přibližných řešení.

5. Použití superkonvergence v technické praxi

Zatím jsme se nezmínili o konkrétních aplikacích superkonvergence. Pokud je rychlost konvergence v některých bodech vyšší než jinde, lze v nich očekávat i relativně malou diskretizační chybu. V dalším si ukážeme, jak můžeme z bodové superkonvergence vytěžit ještě něco navíc. Jedná se o tzv. *aposteriorní odhady chyby* (např. [4]).

Vraťme se k jednorozměrné úloze (1)–(2). Předpokládejme, že k aproximaci řešení u použijeme spojité a po částech kvadratické funkce, tj. v (3) položíme $k = 2$. Odhad (4) nám pak říká, že globálně nemůžeme získat chybu obecně vyššího řádu než $\mathcal{O}(h^3)$, zatímco Bakkerův výsledek [2] tvrdí, že v Lobattových bodech dostáváme superkonvergenci řádu $\mathcal{O}(h^4)$. Pokud ale aproximujeme u_h kubickým interpolačním polynomem ve čtyřech sousedních Lobattových bodech, potom i v okolí těchto bodů můžeme očekávat chybu $\mathcal{O}(h^4)$ díky dobrým interpolačním vlastnostem kubických polynomů. Tato myšlenka nás přivádí k následujícímu algoritmu:

Pro každý prvek K_i, který obsahuje 3 Lobattovy body (dva krajní body a těžiště K_i), vyberme čtvrtý Lobattův bod v jednom ze sousedních intervalů K_{i+1} nebo K_{i-1}. Dále vypočteme kubickou interpolaci u_h v těchto čtyřech bodech. Označíme-li $R_h u_h$ její restrikci na K_i, pak pomocí interpolačních vlastností Lagrangeových polynomů lze odvodit, že

$$\max_{x\in[0,1]} |u(x) - R_h u_h(x)| = \mathcal{O}(h^4). \tag{11}$$

Výše popsaná jednoduchá a výpočetně zcela nenáročná procedura (angl. post-processing) tak zlepšuje globální konvergenční řád na úroveň lokálního superkonvergenčního řádu v Lobattových bodech.

Nehledě na skutečnost, že vztah (11) je sám o sobě velice zajímavý, novou lepší aproximaci $R_h u_h$ lze použít k odhadu chyby $u - u_h$. Tato chyba obecně není známa, protože přesné řešení u neznáme. Funkce $R_h u_h$ je však asymptoticky mnohem blíže k u než u_h. Jestliže tedy zaměníme neznámou funkci u za $R_h u_h$, pak rozdíl

$$\varepsilon_h = R_h u_h - u_h,$$

který se nazývá *estimátor*, známe a ε_h dává dobrou aproximaci chyby $u - u_h$. Za poměrně slabých předpokladů lze totiž pro každé pevné x z intervalu $[0, 1]$ dokázat, že

$$\frac{\varepsilon_h(x)}{u(x) - u_h(x)} \to 1 \quad \text{pro} \;\; h \to 0, \quad u(x) \neq u_h(x),$$

což nám říká, že estimátor ε_h je *asymptoticky přesný*. Podobné odhady mohou být dokázány i pro vícerozměrné problémy. Lze je použít i pro přesnější výpočet gradientu či na tzv. adaptivní zjemňování triangulací. Proto je otázkám superkonvergenčních jevů v metodě konečných prvků věnována velká pozornost. Rozsáhlá komentovaná bibliografie věnovaná superkonvergenci, která obsahuje 600 odkazů, je uvedena v [10].

Vyšší přesnost přibližného řešení při použití superkonvergenčních technik má celou řadu dalších praktických aplikací. Např. v knize [6] bylo pomocí průměrování gradientů lineárních prvků vypočteno dosti přesně mechanické napětí v tělese přehrady. Superkonvergence gradientu v těžišti bilineárních obdélníkových prvků, kterou objevil Zlámal (viz [20] a též kapitola 4), byla použita k přesnějšímu výpočtu magnetického pole ve vysokonapěťových transformátorech ČKD. Chyba gradientu bilineárních prvků se totiž globálně chová jako $\mathcal{O}(h)$, zatímco v těžištích jednotlivých prvků konverguje kvadraticky, tj. jako $\mathcal{O}(h^2)$. V článku [7] se používá superkonvergence při citlivostní analýze jisté úlohy tvarové optimalizace.

Poděkování

Autor děkuje Dr. Janu Brandtsovi za cenné připomínky. Práce na tomto článku byla podpořena grantem A 1019201 GA AV ČR.

Literatura

[1] I. Babuška, M. Práger, E. Vitásek: *Numerical processes in differential equations,* John Wiley & Sons, New York 1966.

[2] M. Bakker: *A note on C^0 Galerkin methods for two-point boundary problem,* Numer. Math. **38** (1981/82), 447–453.

[3] H. Blum, Q. Lin, R. Rannacher: *Asymptotic error expansion and Richardson extrapolation for linear finite elements,* Numer. Math. **49** (1986), 11–38.

[4] J. Brandts: *Superconvergence and a posteriori error estimation in triangular mixed finite elements,* Numer. Math. **68** (1994), 311–324.

[5] J. Douglas, T. Dupont: *Some superconvergence results for Galerkin methods for the approximate solution of two-point boundary value problems,* Topics in Numer. Anal. II, Acad. Press, 1973, 89–113.

[6] C. M. Chen, Y. Q. Huang: *High accuracy theory of finite element methods,* Hunan Science and Technology Press, Changsha 1995.

[7] I. Hlaváček, J. Chleboun: *A recovered gradient method applied to smooth optimal shape problems,* Appl. Math. **41** (1996), 281–297.

[8] M. Křížek: *Superconvergence phenomena on three-dimensional meshes,* Internat. J. Numer. Anal. Model. **2** (2005), 43–56.

[9] M. Křížek, P. Neittaanmäki: *On superconvergence techniques,* Acta Appl. Math. **9** (1987), 175–198.

[10] M. Křížek, P. Neittaanmäki, R. Stenberg (eds): *Finite Element Methods: Superconvergence, Postprocessing, and A Posteriori Estimates,* LN in Pure and Appl. Math., vol. 196, Marcel Dekker, New York 1998.

[11] P. Lesaint, M. Zlámal: *Superconvergence of the gradient of finite element solutions,* RAIRO Anal. Numér. **13** (1979), 139–166.

[12] L. A. Oganesjan, L. A. Ruchovec: *An investigation of the rate of convergence of variational-difference schemes for second order elliptic equations in a two-dimensional region with smooth boundary,* Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **9** (1969), 1102–1120.

[13] A. E. Taylor: *Úvod do funkcionální analýzy,* Academia, Praha 1973.

[14] L. Wahlbin: *Superconvergence in Galerkin finite element methods,* LN in Math., vol. 1605, Springer, Berlin 1995.

[15] M. Zlámal: *On the finite element method,* Numer. Math. **12** (1968), 394–409.

[16] M. Zlámal: *The finite element method in domains with curved boundaries,* Internat. J. Numer. Methods Engrg. **5** (1972/73), 367–373.

[17] M. Zlámal: *Curved elements in the finite element method,* SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 229–240.

[18] M. Zlámal: *Some superconvergence results in the finite element method. Mathematical aspects of finite element methods,* Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975, LN in Math., Vol. 606, Springer, Berlin, 1977, 353–362.

[19] M. Zlámal: *Superconvergence of gradients in the finite element method (Russian),* Variational-difference methods in mathematical physics (Proc. All-Union Conf., Novosibirsk, 1977), Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Vychisl. Tsentr, Novosibirsk, 1978, 15–22.

[20] M. Zlámal: *Superconvergence and reduced integration in the finite element method,* Math. Comp. **32** (1978), 663–685.

[21] M. Zlámal: *Superconvergence of the gradient of finite element solutions,* Wiss. Z. Hochschule Architektur Bauwesen Weimar, 1979, 375–380.

[22] M. Zlámal: *Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, Parts I and II,* Math. Comp. **49** (1986), 27–43, Appl. Math. **46** (2001), 251–294.

[23] M. Zlámal: *A box finite element method giving solution gradients with a high order accuracy,* Finite Element Methods: Fifty Years of the Courant Element, Proc. Conf., Univ. of Jyväskylä, 1993, Křížek, M., Neittaanmäki, P., Stenberg, R. (eds), LN in Pure and Appl. Meth., 164, Marcel Dekker, New York, 1994, 501–504.

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc.

člen Učené společnosti České republiky, vědecký pracovník Matematickém ústavu Akademie věd ČR a profesor pro obor matematika – přibližné a numerické metody na Karlově univerzitě v Praze

Moje vzpomínky na dobu, kdy jsme začali pracovat na metodě konečných prvků

Jiří Kratochvíl

Letos je tomu čtyřicet let od doby, kdy jsem spolu s Ing. Františkem Leitnerem, tehdy pracovníkem brněnského odštěpného závodu Hydroprojektu Praha, začal spolupracovat na řešení rovinných úloh přetvoření a napjatosti masivních hydrotechnických konstrukcí metodou konečných prvků (MKP). S metodou jsem se seznámil v roce 1964 v článku autorů M. J. Turnera, R. W. Clougha, H. C. Martina a L. J. Toppa: *Stifnness and Deflection Analysis of Complex Structures.* V jejich práci, publikované v roce 1956 v americkém časopise Journal of the Aeronautical Sciences, byla tato metoda poprvé uvedena v ucelené formě jako metoda přibližného řešení rovinných a prostorových konstrukcí. Našla v druhé polovině padesátých a v následujících šedesátých letech minulého století široké uplatnění a stala se dominantní metodou řešení statických a dynamických úloh v leteckém, raketovém a loďařském průmyslu.

Jen pro zajímavost uvádím, že touto metodou byly propočteny konstrukce raket typu Saturn, z nichž Saturn V vynesl v srpnu 1968 lunární expedici USA na měsíc. Ve zmíněném článku byla uvedena koncepce metody, nikoliv detailní algoritmy řešení. Použiji-li stupnici hodnocení mého přítele, a od jara 1967 také jednoho z mých nejbližších spolupracovníků, profesora Alexandra Ženíška, lze jej, při zpětném hodnocení významu tohoto článku pro mě a pro mnoho dalších pracovníků v inženýrských oborech, hodnotit známkou 3 — článek otevřel nový směr bádání a současně i širokou škálu možností využití metody pro řešení náročných problémů praxe.

Jednou ze základních otázek při algoritmizaci statických řešení konstrukcí založených na aplikaci MKP byla, mimo jiné, úloha sestavení výsledné matice tuhosti konstrukce s uvažováním okrajových podmínek kinematického charakteru. Tuto otázku jsme vyřešili a v týmu, rozšířeném o programátora Ing. Ivo Bartoňka a Ing. Radúze Russa, projektanta střešní příhradové konstrukce jednoho z pavilonů na brněnském veletržním výstavišti, aplikovali v roce 1965. Vyřešili jsme, jako první v tehdejší ČSR, statickou úlohu konstrukce s přibližně 15 000 pruty a s 10 500 neznámými složkami vektoru posunutí.

V tehdejší době, kdy se začaly v ČSR instalovat první počítače, to byl až neuvěřitelně velký počet neznámých. Byl natolik velký, že profesor Ferdinand Lederer, vynikající konstruktér ocelových konstrukcí a vysoce fundovaný teoretik, pochyboval v první chvíli, když byl o výsledku řešení informován, o jeho správnosti. Teprve podrobné kontroly statické rovnováhy osových sil v jednotlivých styčnících této prostorové příhradové konstrukce, které provedl po předložení výsledků našeho řešení, ho přesvědčily o správnosti nové metody. Jeho nedůvěra byla pochopitelná, protože ještě několik málo let předtím neexistovaly u nás počítače a jedinou pomůckou pro numerické výpočty soustavy lineárních algebraických rovnic byly elektrické kalkulačky, např. typu Rheinmetall. Ty prakticky neumožňovaly numerické řešení tak velkých soustav rovnic. Navíc některé tehdy odborníky používané metody vedly na plné a špatně numericky podmíněné matice. Naproti tomu MKP vedla k pozitivně definitním, a tudíž symetrickým a navíc numericky dobře podmíněným pásovým maticím s ostře dominantními diagonálními členy.

V roce 1968 se nám naskytla příležitost realizovat touto metodou, na zakázku německé firmy MERO, statický výpočet konstrukce výstavního pavilonu Německé spolkové republiky na světové výstavě v Osace. Vstupem vojsk Varšavské smlouvy spolupráce, jejímž tuzemským organizátorem byl brněnský Chemoprojekt, skončila.

Taková byla situace, když jsme s Františkem Leitnerem začali v roce 1965 pracovat na algoritmizaci, programování a aplikaci metody konečných prvků v rovinných úlohách pružnosti. Rozdělili jsme si úkoly. Já jsem si vytkl za cíl vypracovat část věnovanou odvození matice tuhosti trojúhelníkového prvku s lineárním polynomem v x, y a vektorů transformovaného povrchového a objemového zatížení. Objemové zatížení tvořily vlastní tíha, síly vyvolané vodou prosakující tělesem přehrady a teplotou vzniklou hydratací betonu a působením vnějšího prostředí. Poslední dva druhy objemových sil byly funkcemi prostorových proměnných x a y. Ing. Leitner si vzal na starost algoritmus řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Oba jsme pak provedli numerická řešení vybraných úloh a srovnali získané výsledky s exaktními analytickými řešeními. Srovnání prokázalo, i při relativně hrubém dělení, s přihlédnutím k dnešním možnostem, velmi dobrou shodu. Článek, který měl v rukopise, včetně obrázků, přes 40 stran, jsme zaslali k uveřejnění 12. května 1967 redakci Stavebnického časopisu. Ta jej přijala a uveřejnila ve dvou pokračováních v číslech 2 a 4 v roce 1968.

Uvědomovali jsme si, že úkol sestavit stavebnici konečných prvků, která by umožnila dostatečně přesně aproximovat geometricky a konstrukčně náročné systémy, je velmi obtížný. Teoretické aspekty řešení pomocí MKP nutně vyžadovaly spolupráci s matematiky. A tak Ing. Leitner přizval na jaře 1967 ke spolupráci profesora Alexandra Ženíška, svého bridžového partnera a v té době odborného asistenta katedry fyziky strojní fakulty. Téměř současně začal s námi spolupracovat Ing. Libor Holuša, v té době ještě student elektrotechnické fakulty. Byla to šťastná volba a také náhoda. Oba byli v jejich oborech mimořádně talentovanými, tvůrčími, obětavými a spolehlivými spolupracovníky. Protože neexistoval pro metodu konečných prvků software, musel jej Ing. Holuša vytvořit. A vytvořil dokonalé programátorské dílo, které i dnes zasluhuje obdiv. Postupně jím vytvořený software umožnil numerická řešení složitých a náročných prostorových konstrukcí přehrad vybudovaných z materiálů s nelineárními stavovými rovnicemi a současně modelovat předepsané technologické postupy výstavby a složité heterogenní geologické podloží.

Spolu s Ing. Leitnerem jsme v letech 1965–1967 téměř každý den pracovali u počítače DATASAAB D21 v Laboratoři počítacích strojů (LPS), jejímž ředitelem byl profesor Miloš Zlámal. Vzbudili jsme jeho zájem, když se dozvěděl, že počítáme stavební konstrukce metodou, kterou, jako numerický matematik, neznal. A tak jsem se s ním na jeho pozvání na podzim, v listopadu 1967, v jeho pracovně sešel. Přibližně v téže době jsem informoval o výsledcích naší práce profesora Vladimíra Koláře, tehdy vedoucího katedry stavební mechaniky na stavební fakultě VUT v Brně. Pamatuji si, že jsem mu při té příležitosti s nadsázkou řekl: „Vladimíre, já ti tu tvoji mechaniku napíši v kompaktním maticovém a vektorovém zápisu na 25 stranách.“ Mohl jsem si tuto poznámku dovolit, protože jsme byli přátelé a dobře jsme si rozuměli.

Profesor Kolář, známý a uznávaný odborník v oblasti stavební mechaniky, okamžitě pochopil dalekosáhlý význam metody konečných prvků pro výpočet stavebních konstrukcí a okamžitě jednal. Je jeho nezpochybnitelnou zásluhou, že v rekordním čase zajistil vydání dvou publikací. První: *Technical, Physical and Mathematical Principles of the Finite Element Metod* vyšla v roce 1971 v Rozpravách Československé akademie věd. Jejími autory byli Kolář, Kratochvíl, Zlámal a Ženíšek.

Druhou publikací zásadního významu byla kniha vydaná v roce 1972 SNTL Praha s názvem *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků* pod autorstvím Koláře, Kratochvíla, Leitnera a Ženíška. Úvodní slova k jejímu vydání napsal O. C. Zienkiewicz, tehdy děkan univerzity ve Swansea a světově uznávaný autor prací o metodě konečných prvků. O tři roky později, v roce 1975, ji v koedici se SNTL vydalo nakladatelství Springer Verlag v SRN a v roce 1979, s rozšířeným obsahem, opět nakladatelství SNTL Praha.

Byla to šťastná náhoda, že jsme získali do našeho týmu člověka, který s důrazem jemu vlastním a s kontakty, které měl již ze své dřívější vydavatelské a publikační činnosti, prosadil především všechna tři vydání uvedené knihy. Vydání v roce 1972 bylo první knihou věnovanou metodě konečných prvků v zemích tehdejší RVHP. Obě vydání nalezla příznivý ohlas v odborných časopisech u nás a zejména v zahraničí.

S profesorem Zlámalem jsem se po listopadu 1967 pravidelně setkával v jeho pracovně. Zpočátku jsem ho informoval o tom, co vlastně v LPS počítáme, jaké inženýrské problémy řešíme a jakých výsledků jsme s Ing. Leitnerem dosáhli. Diskuse postupně přešla na problematiku variační formulace námi řešených okrajových problémů mechaniky kontinua popsaných parciálními diferenciálními rovnicemi eliptického typu s konstantními koeficienty. Tedy, stručně řečeno, mluvili jsme o nejjednodušších matematických modelech dvojrozměrných úloh přetvoření a napjatosti, které bylo možné aplikovat při řešení některých inženýrských problémů.

Postupně jsem tak uváděl profesora Zlámala do mé inženýrské problematiky. On pozorně naslouchal a měl vždy věcné dotazy a připomínky. Uvědomuji si, že jsem se tehdy pokoušel zvládnout tak trochu roli tlumočníka mezi myšlenkovým světem inženýra, jeho problémy a úkoly, a světem matematika. Zpočátku vznikaly menší problémy v dorozumění. Ale profesor Zlámal byl vnímavý posluchač a jeho zpětný vliv na mě způsobil, že jsem přizpůsobil svůj výklad jeho stylu formulace myšlenek. Měl zřejmě z jeho pohledu úspěch, když mně po roce naší spolupráce řekl: „To, jak se dnes přesně vyjadřujete, se nedá srovnat s tím, jak jste se vyjadřoval před rokem.“ Tato spolupráce měla dopad i na moji pedagogickou činnost. Ve výuce jsem posluchačům vždy zdůrazňoval nutnost přesné formulace problému. Profesora Zlámala jsem průběžně informoval o literatuře, která se týkala metody konečných prvků, a o jejích aplikacích při řešení inženýrských problémů. On si sám, hned na počátku naší spolupráce zjišťoval, zda existují práce věnované teoretickým aspektům této metody. A když zjistil, že tomu tak není, pustil se do práce. Výsledkem byl článek napsaný v rekordně krátké době, jeden z jeho nejúspěšnějších, uveřejněný v Numerische Mathematik s názvem *On the Finite Element Metod*, kde pod jeho jménem stálo: *Received April 17, 1968.*

Jednou, při našem setkání po uveřejnění této práce, mně řekl: „Škoda, že jste za mnou nepřišel o rok dříve. Byl bych první na světě, kdo se věnoval matematické teorii této metody." Profesor Zlámal mně předtím s radostí sdělil, že článek byl redakcí přijat a řekl: „Tak článek mně přijali, konvergenci jsem dokázal, ale nevím, jak se sestaví výsledná matice soustavy." Na to jsem mu odpověděl: „Tak s tím si, pane profesore, nedělejte starost. To my již známe více než dva roky." Ale profesor Zlámal chtěl vědět víc. Nespokojil se s mojí odpovědí. A tak jsme se sešli v jeho pracovně, jako již několikrát předtím. Vysvětlil jsem mu námi inženýry používané dva základní principy mechaniky kontinua umožňující řešení úlohy přetvoření a napjatosti zatížených konstrukcí. Princip minima celkové potenciální energie těles vytvořených z pružné látky, tj. bez disipace potenciální energie, v nichž v důsledku toho vznikají účinkem zatížení jen „pružná", tj. vratná poměrná přetvoření a dále obecně platný princip rovnosti virtuálních prací aplikovatelný na tělesa vytvořená z jakékoliv látky, tudíž i z látky, u níž dojde v důsledku disipace energie kromě pružných přetvoření i k nevratným poměrným přetvořením.

Nebudu zacházet do podrobností. Řeknu jen závěr. Dokázali jsme si během diskuse existenci dvou v lineární algebře známých výrazů. V prvním případě existenci kvadratické formy, v druhém případě existenci bilineární formy. Závěr byl jasný. Z jejich existence vyplynulo i pravidlo používané při sestavování regulární matice výsledné soustavy lineárních algebraických rovnic, k jejichž řešení vede ve finální fází algoritmus úloh přetvoření a napjatosti konstrukcí pomocí metody konečných prvků. Současně jsme si také přitom vysvětlili postup realizace okrajových podmínek kinematického charakteru.

To je příklad jedné z mnoha diskusí s profesorem Zlámalem. Vždy byly konkrétní a věcné. Stejně tak věcná byla naše spolupráce na algoritmizaci např. úlohy týkající se jedné zakázky. Každý z nás napsal odděleně algoritmus řešení, pak jsme se sešli a krok za krokem provedli srovnání a případné opravy a změny.

Profesor Zlámal patřil k těm numerickým matematikům, kteří si ověřovali teoretické výsledky svých prací numerickými výpočty. Ing. Libor Holuša vypracoval náročný program na řešení biharmonické úlohy pomocí Zlámalova trojúhelníkového prvku s polynomem pátého stupně v x, y. Numerické výsledky prvních řešení však zdaleka nepotvrzovaly řád konvergence predikovaný Zlámalovou teorií při zjemňování dělení náhradní oblasti. Profesor Zlámal tím byl nemile překvapen, a když jsme se setkali, povídal mně: „Řekněte mně, ale upřímně, počítá touto metodou vůbec někdo?“ Odpověděl jsem: „Pane profesore, buďte bez obav, počítá“, protože jsem měl informace o realizaci řady výpočtů složitých a náročných konstrukcí v oborech vojenského průmyslového odvětví USA a dalších zemí, a sám jsem spolu s Ing. Leitnerem do té doby vyřešil řadu úloh a řešil statické úlohy prostorových příhradových konstrukcí pomocí matic tuhosti prutů. Chybu v programu Ing. Holuša našel, výsledky byly vynikající a plně potvrzovaly teoretické závěry dosažené profesorem Zlámalem v jeho prvním článku o MKP.

V tomto ohledu byl profesor Zlámal zcela mimořádnou osobností numerické matematiky. Připomněl jsem si to později, když jsem se setkal, spolu s několika účastníky konference o MKP v Hannoveru v roce 1983, s nestorem evropských numerických matematiků, profesorem Collatzem. Byl krásný letní podvečer. Seděli jsme v hale hlavní budovy hannoverské univerzity pod její nádhernou kopulí a profesor Collatz vyprávěl o svých zkušenostech z numerické matematiky. Přitom vyjádřil své přesvědčení o nutnosti doložit teoretické výsledky numerickými výpočty. Řekl, že pokud by on v budoucnu rozhodoval o přijetí teoretických příspěvků z oblasti numerické matematiky, nepřijal by příspěvek, který by nebyl doložený podrobnými numerickými výpočty, protože, jak zdůraznil, i elegantní důkaz nemusí odhalit v navržené metodě výpočtu slabá místa, která tam mohou být skryta, a projeví se teprve při práci u počítače.

Profesor Zlámal se postupně začal věnovat dalším teoretickým problémům MKP a jeho spolupracovníky se stali především matematici. Z našich to byli zejména profesor Ženíšek a docent Nedoma. S profesorem Ženíškem jsem ještě několik let spolupracoval na algoritmech inženýrských úloh. Publikovali jsme spolu jedenáct prací. S Ing. Leitnerem a Ing. Holušou jsme pomocí isoparametrických prostorových prvků realizovali na přelomu let 1968–1969 první prostorové řešení klenbové přehrady na řece Vrchlici u Kutné Hory.

V letech 1971–1972 následovalo řešení prostorové napjatosti a přetvoření dvou variant přehrady na Jihlavě u Dalešic — klenbové a zemní. Výpočet zemní přehrady byl proveden pomocí přírůstkové nelineární teorie a byl při něm respektován technologický postup sypání hráze, časové změny napětí vody v pórech zeminy a změny přetvárných vlastností zemin v závislosti na proběhlé dráze napětí, jako funkce oktaedrického a deviatorického napětí. Při výpočtu byly použity opět osvědčené prostorové isoparametrické prvky. Jen pro historickou evidenci tehdejší úrovně výpočetní techniky uvádím, že výpočet trval přibližně 140 hodin. Tady se prokázala známá zkušenost, že inženýr dělá to, co musí, matematik to, co umí.

Během posledních čtyřiceti let došlo k obrovskému rozvoji výpočetní techniky. Změnila se i filozofie pohledu na možnosti a účelnost matematického a numerického modelování — od deterministických modelů se pomalu přechází ke stochastickým. Řešení soustav se statisíci nebo miliony neznámých není již problém. Mám před sebou článek nazvaný *Ultrascalable Implicite Finite Element Analysis in Solid Mechanics with over a Half a Billion Degrees of Freedom* od M. F. Adamse a spoluautorů. V něm je popisováno řešení části lidské páteře, která je modelována pomocí 135 milionů konečných (mikro)prvků.

Problém již není v rozsahu, ale ve spolehlivosti určení náhodné struktury a náhodných časoprostorových procesů. Lze jen diskutovat, jaká bude budoucí strategie a metody řešení úloh tohoto druhu a jemu podobných. A do tohoto vývoje vstoupila elektronika dávající možnost realizace dálkového monitorování složitých a náročných systémů a dějů v nich probíhajících — Remote Monitoring Systém i s využitím Internetu. Získat podklady a informace o časoprostorových náhodných polích přerůstá mnohdy, i v závažných případech, finanční možnosti investorů a provozovatele. Víme, že numerický model je pouhým transformátorem vstupní informace na výstupní informaci. A pokud nemáme spolehlivé vstupní informace, platí známé pořekadlo: Garbage in, garbage out. A to nemluvím o otázce věcné přesnosti matematického modelu. Odpověď na otázku, jak řešit časově závislou spolehlivost složitých systémů, nám snad napoví nejbližší budoucnost.

Vzpomínám-li dnes na druhou polovinu šedesátých a první polovinu sedmdesátých let, souhlasím s mým přítelem profesorem Ženíškem, že to byla naše nejkrásnější léta, jak to nadepsal v jednom svém článku. Lidé měli k sobě blíž a bádali především pro radost. Vnitřní život na některých pracovištích se soustředil na řešení vědeckých problémů a často se bouřlivě diskutovalo o metodách řešení.

Pro mě zůstanou hřejivou vzpomínkou na tato léta upřímná slova profesora Zlámala, když mně, v jedné chvíli našeho setkání, řekl: „Přinesl jste mně štěstí.“

Prof. Ing. Jiří Kratochvíl, DrSc.

působí jako emeritní profesor hydrotechniky na Ústavu vodních staveb Fakulty stavební VUT

Spolupráce matematika s programátorem

Libor Holuša

Když jsem byl vyzván k aktivní účasti ve Vzpomínkovém odpoledni na prof. Zlámala a přislíbil ji, uvědomil jsem si, že musím pátrat 40 let dozadu ve své paměti. Profesora Zlámala jsem potkal poprvé na podzim roku 1964, kdy jsem coby právě nastoupivší student VUT měl možnost přijít se podívat na počítač LGP30 a následně pronikat do tajů jeho ovládání. Profesora Zlámala jsem tak sporadicky potkával na chodbě skromných prostor tehdejšího LPS a netušil, že právě tato osobnost výrazně ovlivní celou mou profesní kariéru. Víc než po roce, kdy jsem už uměl napsat samostatně nějaký ten program, mne prof. Zlámal (pro mne překvapivě) pozval a zeptal se, zda bych uměl naprogramovat i to, co mi vzápětí nastínil. Vůbec jsem tomu z hlediska matematiky nerozuměl (týkalo se to řešení diferenciálních rovnic metodou sítí), ale jeho nástin postupu, tedy algoritmu, byl pro mne velice přitažlivý. Odvážně jsem přikývl. Nevím již přesně, který to byl den či měsíc, ale byl to začátek spolupráce mne jako programátora s matematikem, která trvala, jak uvedu na závěr, až do konce tvůrčích sil této matematické osobnosti.

Jak se náš vztah vyvíjel pracovně? Asi jsem jej nezklamal. A poznal jsem, že prof. Zlámal je velký pedagog. Ani v tom prvopočátku, ani nikdy později jsem se nesetkal ani s nástinem toho, že by dal najevo svůj předstih v matematickém myšlení a svých znalostí. Samozřejmě že jsem se zajímal i o to, co vlastně programuji. A tak na mé (častokrát i opakované) dotazy na triviálnosti, za které bych se dnes s odstupem času musel stydět, mi prof. Zlámal trpělivě odpovídal a vysvětloval mi podstatu problému.

Tento přístup uplatňoval ale ke všem, kdo za ním přicházeli pro radu či konzultaci. Myslím, že právě takto se mu podařilo získat pro matematiku, zejména aplikovanou matematiku, celou řadu lidí, kteří se buď stali jeho přímými spolupracovníky, nebo se později uplatnili v průmyslové praxi.

Prvopočátky mé spolupráce s prof. Zlámalem nabraly výrazně na intenzitě v okamžiku, kdy se začal z popudu prof. Kratochvíla a dalších inženýrů věnovat metodě konečných prvků. Protože ho zajímaly především matematické aspekty této metody, veškeré technické záležitosti s aplikací a programováním přenesl na mne. Právě v té době mne seznámil s prof. Kratochvílem a Ing. Leitnerem, kteří se pokoušeli realizovat na počítači první výpočty MKP podle poznatků získaných ze zahraniční literatury. Pro mne to byl základ, ze kterého se odvíjela koncepce celého systému, tak aby bylo možno následně jednodušeji realizovat nové algoritmy, které pokrok ve vývoji MKP přinášel. Díky takové týmové spolupráci a na základě motivace z průmyslové praxe vznikla postupně celá řada problémově orientovaných aplikačních variant celého systému.

Jednalo se o rovinné, rotačně symetrické a prostorové úlohy pružnosti, tenké desky, skořepiny, vedení tepla, proudění kapalin, přechodové jevy polovodičů — no bylo toho hodně, a tady nesmím upřít zásluhu na rozvoji i dalším matematikům a i programátorům, kterými byl prof. Zlámal obklopen. A toto zázemí budoval prof. Zlámal cílevědomě díky seminářům numerické matematiky a dalším kurzům, které inicioval.

Ale neodpustím si i poznámku k některým momentům, které z prvního pohledu nevedly k ideálnosti mé spolupráce s tímto matematikem. Občas se stalo, že výsledky kontrolních příkladů ve srovnání s jinak ověřitelnou metodou výpočtu nesouhlasily. A kde hledat chybu? Prof. Zlámal měl v podstatě čtyři výrobní prostředky: svou hlavu, to především, a pak tužku, papír a gumu. A právě ten posledně jmenovaný vedl někdy k tomu, že jsem např. místo indexu i přečetl j a podobně. Ani já jsem nebyl neomylný, takže např. místo dvojice indexů j, i jsem do programu přepsal i, j. Na něco se přišlo ihned, něco trvalo déle. Ani jednou jsem však v případě mého provinění neviděl od prof. Zlámala vztyčený prst. Závěr vždy byl — chybu jsme našli, a zdůrazňuji slovo našli, a to bylo podstatné.

Této vzácné vlastnosti uznávat vzájemně chyby si dodnes nesmírně vážím. Zde bych se pozastavil nad zdůrazňováním odbornosti prof. Zlámala, která bude asi lépe zvýrazněna v dalších referátech, ale rád bych upozornil i na jeho roli ředitele pro VUT významné instituce. Nad otázkou, že tento člověk dokázal stmelit tak profesně diferencovaný a velký kolektiv lidí, by se měli zamyslet mnozí manažeři současnosti. Jeho krédem byla především spokojenost umocňující pracovní nasazení. Zajímal se o osobní problémy zaměstnanců, pomáhal jim v rámci svých možností řešit třeba i bytové či jiné problémy, prozíravě věděl, že má pro udržení schopných a perspektivních lidí udělat maximum.

Vytvořil prostor i pro relaxaci od psychicky náročné práce. Mohli jsme hrát na pracovišti stolní tenis, šachy, pořádat různé besídky (a on se jich rád a aktivně účastnil). Nezapomenutelné jsou i výlety do přírody, kdy se jako jejich účastník někdy sice nedostal do cíle včas a pak s jemu vlastní matematickou precizností dokazoval omyl organizátorů, ale to jen proto, aby povznesl následnou náladu (vždy však nakonec uznal svou chybu). On byl sportovec — lyžař, tenista, turista — věděl, co mu přispívá k myšlenkové relaxaci, a snažil se to předat i nepřímo jiným.

V současné politické situaci si dovolím říct na rovinu, že prof. Zlámal coby nestraník udělal vše, aby uchránil vědu od politické závislosti. Nemohu to nijak doložit, ale určitě musel odolávat velkým tlakům tehdejšího vedení. Jak jinak by se mu podařilo např. prosadit rozvoj MKP pod hlavičkou BSP — tedy pro generaci později narozených čtenářů „Brigády socialistické práce“. Takto se podařilo překlenout jisté krizové období, které však znamenalo, že celá éra vývoje MKP tehdejšího týmu se dokázala přenést do následného období. A takových případů řešených z pozice prof. Zlámala muselo být bezesporu víc.

Nyní se vrátím k tématu mého vystoupení — spolupráce programátora s matematikem. Různé „postsametové“ reorganizace vedly k tomu, že jsme se na čas oba vzdálili. Ale nakonec jsme se setkali na stejné fakultě VUT, i když na jiných pracovištích. Prof. Zlámal coby stále aktivní myslitel potřeboval ověřovat své nové myšlenkové pochody, a protože nenašel podporu ve svém blízkém okolí, obrátil se znovu na mne. Nezištně jsem mu ji přislíbil. A tak jsme pokračovali řadu měsíců v již pro nás oba zažitém stylu: omyl, chyba, konzultace, nové řešení — bezproblémově. Když jsem se v pátek před osudným dnem loučil s prof. Zlámalem s domluvou, že jeho novou myšlenku na počítači ověřím a v pondělí předám výsledek, netušil jsem, že tento výsledek už nebudu moci nikomu předat, netušil jsem, že tím skončí i má letitá podpora programátora matematikovi. Je mi líto, že prof. Zlámal již není mezi námi.

Ing. Libor Holuša, CSc.

blízký spolupracovník prof. Zlámala, pracoval na VUT v Brně a Masarykově univerzitě v Brně

Profesor Zlámal — světový průkopník matematické teorie metody konečných prvků

Ivo Marek

Z mých studií mi v paměti utkvěl výrok, kterým si dovolím začít své vzpomínání na velkého vědce a významnou osobnost naší i světové matematiky a nezapomenutelného přítele prof. RNDr. Miloše Zlámala, DrSc. Ten výrok zní: *Čas je spravedlivý soudce.* Pokusím se i s pomocí tohoto výroku ukázat, že různá hodnocení úspěchů profesora Zlámala, jež byla uveřejněna ještě za jeho života, zůstávají v platnosti i dnes, kdy si připomínáme jeho nedožité osmdesáté narozeniny.

Své výjimečné postavení v tehdejší československé akademické obci profesor Zlámal získal svými světovými úspěchy jakožto matematik-numerický analytik. Jeho cesta k maximálnímu vědeckému vrcholu vedla prostřednictvím jím pěstovaných matematických disciplín, jakými jsou teorie diferenciálních rovnic a posléze přibližné metody jejich řešení. Bezesporu nejvýznamnější epocha jeho vědeckého i pedagogického působení je spojena s jeho aktivitami v oblasti matematické analýzy metody konečných prvků. Tato metoda vzniklá ve vyspělých inženýrských výzkumných světových centrech se stala na sklonku šedesátých let 20. století předmětem zájmu nejen odborníků z kruhů inženýrských, ale i odborníků zabývajících se řešením matematických problémů na prudce se rozvíjející výkonné výpočetní technice.

Historie, jak se prof. Zlámal seznámil s metodou konečných prvků, je všeobecně známá z podání jeho přímých spolupracovníků prof. Kratochvíla a Ing. Holuši. Nezaujatý čtenář se může ptát, jak se má maličkost ocitá v roli hodnotitele činnosti prof. Zlámala. Důvodů je několik, a tak se o některých mohu zmínit. Nejdůležitějším důvodem je můj blízký vztah k prof. Zlámalovi. Ten se vytvořil v průběhu mnoha let, co jsme se znali.

Nebyla to však matematika, ale jiná naše společná láska — sport obecně a tenis zvláště. Prof. Zlámal v době svých studií v Praze, kdy byl vědeckým aspirantem v MÚ ČSAV, hrával tenis v 1. ČLTK[2] v Praze na Štvanici. Za tento klub jsem v téže době hrával jako dorostenec. Jak tomu bývá, náhoda dala dohromady tři osoby: budoucího profesora Zlámala, budoucího lékaře MUDr. Seemana a mne. Byl jsem rád, že jsem si mohl zahrát s hráči, kteří měli právo hrát i v době maximálního vytížení dvorců, což pro dorostence znamenalo dostat se do hry i v době, kdy mí dorostenečtí partneři teprve hledali své příležitosti.

S Milošem Zlámalem jsme toho mnoho o matematice nenamluvili, ale byl to on spolu s docentem Riegrem, kdo mě inspiroval dát se po maturitě zapsat ke studiu matematiky. Mé cíle v matematice nebyly nikterak vědecké, ba právě naopak. Dle mých tehdejších a dnes vím, že mylných představ, Milošův příklad mě vedl k lehkomyslnému závěru, že k tomu, abych mohl hodně hrát tenis a vlastně nedělat nic jiného, je pro mne studium matematiky to nejlepší řešení. Tak se Miloš Zlámal „zasloužil", byť nechtěně, že jsem matematiku studovat šel. Později jsem zjistil, že tenisu se při studiu matematiky moc nahrát nedá, ale to je už jiná historie. Díky tenisu jsme se stali partnery na kurtě a posléze přáteli a to i v oblasti vědy, i jiných našich aktivit.

Dalším důvodem pro to, abych se dostal do styku s vědeckými výsledky prof. Zlámala, byla naše společná účast na plnění úkolů státního plánu základního výzkumu. V sedmdesátých letech 20. století jsem se stal pravidelným posuzovatelem výsledků dosažených na pracovišti vedeném prof. Zlámalem a bylo mou povinností referovat o nich na zasedání orgánu, který byl k tomu účelu vytvořen. Postupně jsem se stal poměrně dobře informovaným členem různých hodnotících komisí v rámci Státního plánu základního výzkumu.

Tato činnost mě přivedla k poznání, že prof. Zlámal je jedním z nejvýznamnějších současných matematiků, a snažil jsem se tento názor prosazovat v široké veřejnosti. Tak se stalo, že jsem měl tu čest podílet se na dvou akcích, jež měly za cíl výše uvedené skutečnosti demonstrovat naší

[2] První Český Lawn Tenisový Klub.

matematické obci. První z těchto akcí se konala v roce 1984 v Mariánských lázních u příležitosti 60. výročí narození prof. Zlámala a ta druhá pak v roce 1994 jakožto mezinárodní sympozium *Modelling 2004*.

Na konferenci Modelling věnované jubileím prof. Miloše Zlámala a Owe Axelssona odezněly některé příspěvky obsahující hodnocení Zlámalova přínosu světové vědě. Abych dokumentoval teze z úvodu tohoto příspěvku, dovolím si porovnat tehdejší mé laudatio s dnešními názory na roli a význam prof. Zlámala v celosvětovém kontextu.

Mé vystoupení bylo založeno na analogii mezi úspěšným hudebním skladatelem, jímž byl v tomto případě Antonín Dvořák, a úspěšným vědcem, tedy Milošem Zlámalem.

Světově nejproslulejším dílem Antonína Dvořáka je bezesporu jeho symfonie e-moll *Z Nového světa*. Mou snahou proto bylo identifikovat Zlámalovu nejúspěšnější publikaci a porovnat její význam pro matematiku s významem Novosvětské symfonie pro světovou hudbu. Za tu jsem označil první ve světové literatuře matematicky orientovaný článek věnovaný podstatě metody konečných prvků, tedy práci M. Zlámala *On the finite element method*, Numerische Mathematik **12** (1968), 394–409. Dosavadní ohlasy ve světovém písemnictví potvrzují, že tento Zlámalův článek má pro matematiku zcela fundamentální význam, a tak je vskutku dílem náležitého významu, jaký znamená uvedená Dvořákova symfonie.

Dále pak jsem se snažil určit další Zlámalovy práce, jež by mohly sloužit jako vědecký protipól k Dvořákovým dalším symfoniím a symfonickým opusům. Seznam obsahoval tyto výsledky:

- metodika dokazování konvergence různých variant metody konečných prvků
- Zlámalovy dvourozměrné prvky
- ideální zakřivený prvek
- Zlámalova podmínka na nejmenší úhel v trojúhelníkovém prvku
- metodika konečných prvků pro evoluční problémy
- superkonvergence a její partikulární projevy
- numerika rovnic pro polovodičové materiály

Dalším analogem mezi skladatelem Dvořákem a prof. Zlámalem je skutečnost, že oběma byla udělena hodnost čestného doktora. Dále pak oba tito giganti českého národa byli poctěni četnými vyznamenáními a medailemi. V případě Miloše Zlámala je to čestné členství v JČMF, Bolzanova medaile za zásluhy o matematické vědy udělená mu presidiem ČSAV a Pamětní medaile MFF UK v Praze k jeho životnímu jubileu za zásluhy o rozvoj matematických věd.

Rád bych ještě dodal jednu skutečnost, která postavila Miloše přede mě jako vzor. Byl to jeho vztah k jeho manželce a rodině.

Jak je patrné z projevů mých kolegů, kteří se podílejí na tomto vzpomínkovém semináři, není zapotřebí na mnou podané charakterizaci úspěchů prof. Zlámala nic měnit. Všechna vystoupení na tomto semináři svorně konstatují, že prof. Zlámal byl významnou osobností druhé poloviny 20. století, a to jak pro naši zemi, tak i celosvětově. Můj příspěvek na tomto semináři má potvrdit tyto skutečnosti s tím, že prof. Zlámal byl takto vnímán a oceňován již dlouho před svým skonem. To svědčí o tom, že byl všemi, kdo se dostali do jeho blízkosti, chápán jako legenda již za svého života.

Prof. RNDr. Ivo Marek, DrSc.

je profesorem aplikované matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, nyní působí na Katedře matematiky Fakulty stavební Českého vysokého učení technického v Praze

Fotografie ze Vzpomínkového odpoledne 12. ledna 2005

Nahoře: v předsálí byly instalovány čtyři panely s dokumenty. Panel s fotografiemi si prohlíží Miloš Ráb.

Dole zleva: Ing. Ivo Zlámal (syn), RNDr. Aleš Zlámal (synovec), Ludmila Zlámalová (manželka prof. Zlámala), doc. Jan Franců a prof. Jiří Hřebíček.

Nahoře vlevo: prof. Ing. Jiří Kratochvíl, DrSc., z Fakulty stavební VUT mluvil o své spolupráci inženýra s matematikem; vpravo: na varhany hrál prof. Ing. Jiří Jan, CSc., z Ústavu biomedicínského inženýrství VUT.

Dole: Vzpomínkové odpoledne po přednáškách pokračovalo v neformální diskusi při občerstvení ve dvoraně Centra VUT.

Přehled životopisných údajů

Životopisná data

30. 12. 1924	narodil se ve Zborovicích na Kroměřížsku
1936 – 1944	studoval na 3. reálném gymnáziu v Brně
1944 – 1945	totálně nasazen v Breslau (Vratislav)
15. 9. 1945	maturita na 3. reálném gymnáziu v Brně
6. 2. 1946	zapsán na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity (PřF MU)
1. 4. 1948	asistent Ústavu matematiky Vysoké školy technické Dr. E. Beneše v Brně (nyní VUT v Brně)
10. 2. 1949	ukončil studia na PřF MU a získal titul RNDr. obhájením rigorózní práce: *O postačujících podmínkách pro jednoznačnost řešení systému* $y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_\nu))$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ *a posloupnostech s tímto systémem*
1950 – 1951	aspirant na Matematickém ústavu Československé akademie věd v Praze (MÚ ČSAV)
19. 1. 1952	oženil se s Ludmilou Vichrovou
1951 – 1952	základní vojenská služba
1952	odborný asistent na Katedře matematiky PřF MU
1955	získal vědeckou hodnost kandidáta věd (CSc.) na MÚ ČSAV v Praze obhájením práce: *Studium oscilačních a asymptotických vlastností řešení lineárních diferenciálních rovnic* vypracované na KM PřF Univerzity v Brně pod vedením prof. Dr. O. Borůvky
1. 6. 1956	jmenován docentem PřF Univerzity v Brně (nyní MU)
1956 – 1984	členem redakční rady časopisu *Aplikovaná matematika*
1. 9. 1961	přestoupil na Fakultu strojní VUT v Brně
1. 11. 1961	jmenován vedoucím Laboratoře počítacích strojů Fakulty strojní VUT v Brně
1963 – 1990	ředitel Laboratoře počítacích strojů (pozdějšího Oblastního výpočetního centra VUT)
17. 4. 1963	získal vědeckou hodnost doktora věd (DrSc.) na MÚ ČSAV obhájením práce *Smíšený problém pro hyperbolické rovnice s malým parametrem*
28. 7. 1965	jmenován profesorem matematiky
1968	publikoval práci *On the Finite Element Method*
16. 3. 1981	jmenován členem korespondentem ČSAV

1983 – 1992	předsedou Vědeckého kolegia matematiky ČSAV
1990	přestoupil na Katedru matematiky Fakulty strojní
1995	odešel do důchodu
22. 6. 1997	zemřel v Brně

Ocenění

19. 11. 1969	Bronzová pamětní medaile VUT v Brně *za mimořádné zásluhy o rozvoj školy, vědy a techniky*
30. 4. 1974	Státní cena Klementa Gottwalda *za vypracování a rozvinutí matematické teorie konečných prvků a za její aplikace* (udělil Prezident ČSSR)
15. 6. 1974	Čestná cena Jiřího Dimitrova I. stupně (udělily ČKD Blansko, závody Jiřího Dimitrova)
30. 12. 1979	Stříbrná plaketa Bernarda Bolzana *za zásluhy o rozvoj matematických věd* (udělilo Presidium ČSAV)
březen 1981	Pamětní medaile na paměť 35. výročí obnovení Univerzity v Olomouci
5. 9. 1984	čestný doktorát na Technické univerzitě v Drážďanech
30. 12. 1984	Zlatá plaketa Bernarda Bolzana *za zásluhy o rozvoj matematických věd* (udělilo Presidium ČSAV)
30. 12. 1984	Zlatá pamětní medaile VUT v Brně *za mimořádné zásluhy o rozvoj školy, vědy a techniky*
1984	Zlatá medaile Univerzity Palackého *za zásluhy o rozvoj Univerzity Palackého*
22. 8. 1987	Čestný člen Jednoty československých matematiků a fyziků
9. 12. 1987	medaile Československé společnosti pro mechaniku při ČSAV *za zásluhy o rozvoj mechaniky*
1989	Pamětní medaile VUT při příležitosti 140. a 90. výročí založení technického školství v Brně
1992	Pamětní medaile Univerzity Karlovy *za významný příspěvek k rozvoji a aplikaci metody konečných prvků*
1994	Stříbrná pamětní medaile Masarykovy univerzity
17. 2. 1995	Čestné uznání *za významný přínos k rozvoji numerických metod, zejména metody konečných prvků a dlouholetou práci ve prospěch fakulty strojní VUT*

Seznam vědeckých prací M. Zlámala

[1] *Oscillation Criterions.* Časopis Pěst. Mat. Fys. **75** (1950), 213–218.

[2] *Asymptotic Properties of the Solutions of the Third Order Linear Differential Equations.* Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, No 329, 1951.

[3] *Über eine Eigenwertaufgabe bei der Differentialgleichung* $y^{(n)}+\lambda A(x)y=0$. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, No 345, 1953.

[4] *On a Criterion of Lyapunov Stability.* (In Russian.) Czechoslovak Mat. J. **3(78)** (1953), 257–264.

[5] *Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen.* Math. Nachr. **10** (1953), 169–174.

[6] *Über die Stabilität der nichtlinearen erzwungenen Schwingungen.* Czechoslovak Mat. J. **4(79)** (1954), 95–103.

[7] *Eine Bemerkung über die charakteristische Determinante einer Eigenwertaufgabe.* Czechoslovak Mat. J. **5(80)** (1955), 175–179.

[8] *Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.* Czechoslovak Mat. J. **6 (81)** (1956), 75–93.

[9] *Über die Differentialgleichung* $\dot{y}+y=\ddot{y}^2$. Czechoslovak Mat. Journal **7 (82)** (1957), 26–40.

[10] *Über die erste Randwertaufgabe für eine singulär pertubierte elliptische Differentialgleichung.* Czechoslovak Mat. J. **7 (82)** (1957), 413–417.

[11] *On the mixed problem for a hyperbolic equation with small parameter.* (In Russian.) Czechoslovak Mat. J. **9 (84)** (1959), 218–242.

[12] *Sur l'equation des télégraphistes avec un petit paramétre.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Math. Appl. **8 (27)** (1959), 324–332.

[13] *Mixed problem for hyperbolic equations with small parameter.* (In Russian.) Czechoslovak Mat. J. **10 (85)** (1960), 83–122.

[14] *The parabolic equation as a limiting case of a certain elliptic equation.* Ann. Mat. Pura Appl. **57** (1962), 143–150.

[15] *The parabolic equations as a limiting case of hyperbolic and elliptic equations.* Differential Equations and their Applications. Ed. I. Babuška. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha 1963, 243–247.

[16] *On singular perturbation problems concerning hyperbolic equations.* The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, 1965, Lecture Series, No 45.

[17] *Asymptotic error estimates in solving elliptic equations of the Fourth Order by the Method of Finite Differences.* SIAM J. Numer. Anal., Ser. B **2** (1965), 337–344.

[18] *On the estimate of the error of quadrature formulae.* Appl. Math. **11** (1966), 423–426.

[19] *On the zeros of solutions to Bessel's equations.* (Jointly with F. T. Metcalf.) Amer. Math. Monthly **73** (1966), 746–749.

[20] *Discretization and error estimates for boundary value problems of the second order.* Calcolo **4** (1967), 541–550.

[21] *Discretization and error estimates for elliptic boundary value problems of the fourth order.* SIAM J. Numer. Anal. **4** (1967), 626–638.

[22] *Discrete analogues of the dirichlet problem with isolated singularities.* (Jointly with J. H. Bramble and B. E. Hubbard.) SIAM J. Numer. Anal. **5** (1968), 1–25.

[23] *On mildly nonlinear elliptic boundary value problems.* Fourth Congress of the International Federation of Information Processing, Mathematics, Part 2, North Holland, Amsterdam, 1968, 65–67.

[24] *On the finite element method.* Numer. Math. **12** (1968), 394–409.

[25] *A finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order.* Proceedings of Conference of Finite Element Method. Plzeň, 1968.

[26] *On some finite element procedures for solving second order boundary value problems.* Numer. Math. **14** (1969), 42–48.

[27] *A finite element procedure of the second order of accuracy.* Numer. Math. **14** (1970), 394–402.

[28] *Calculation of a plate of constant thickness by finite element method.* (Jointly with L. Holuša, J. Kratochvíl and A. Ženíšek.) Stav. čas. SAV **XVII** (1969), 779–783.

[29] *Statical Solution of Hydrotechnical Constructions.* (Jointly with J. Kratochvíl and A. Ženíšek.) (In Czech.) Priehradné dni 1969, Proceedings of Conference II, 298–311.

[30] *Finite Elements Method.* (Jointly with L. Holuša, J. Kratochvíl and A. Ženíšek.) (In Czech.) Vysoké učení technické, Brno, 1970.

[31] *Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order.* (Jointly with A. Ženíšek.) J. Numer. Methods Engrg. **2** (1970), 307–310.

[32] *Triangular elements in the finite element method.* (Jointly with J. H. Bramble.) Math. Comp. **24** (1970), 809–820.

[33] *A simple algorithm for the stiffness matrix of triangular plate bending elements.* (Jointly with J. Kratochvíl and A. Ženíšek.) Internat. J. Numer. Methods Engrg. **3** (1971), 553–563.

[34] *Technical, physical and mathematical principles of the finite element method.* (Jointly with V. Kolář, J. Kratochvíl and A. Ženíšek.) Rozpravy ČSAV **81** (1971), 3–85.

[35] *An Introduction to the mathematical theory of the finite elements method.* (In Czech.) Navrhovanie stavebných konštrukcií metódou konečných prvkov. Proceedings of Conference.

[36] *Some recent advances in the mathematics of finite elements and applications.* Ed. by J. R. Whiteman. Academic Press, London, 1973, pp. 59–81.

[37] *The finite element method in domains with curved boundaries.* Internat. J. Numer. Methods Engrg. **5** (1973), 367–373.

[38] *Curved elements in the finite element method, I.* SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 229–240.

[39] *A remark on the 'Serendipity family'.* Internat. J. Numer. Methods Engrg. **7** (1973), 98–100.

[40] *Curved elements in the finite element method, II.* SIAM J. Numer. Anal. **11** (1974), 347–362.

[41] *Curved elements in the finite element method. Time dependent problems.* Čisl. met. mech. spl. sredi **4** (1973), 25–49.

[42] *Finite element methods for parabolic equations.* Conference on the Numerical Solution of Differential Equations, Dundee 1973. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974, 215–221.

[43] *Finite element methods for parabolic equations.* Math. Comp. **28** (1974), 393–404.

[44] *Finite element multistep discretizations of parabolic boundary value problems.* Math. Comp. **29** (1975), 350–359.

[45] *Unconditionally stable finite element schemes for parabolic Equations.* Topics in Numerical Analysis, II. Ed. by J. H. Miller.

Academic Press, London, 1975, 253–261.

[46] *Finite element multistep methods for parabolic equations.* Finite Elemente und Differenzenverfahren. Ed. by J. Albrecht, L. Collatz. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1975, 177–186.

[47] *Finite elements method for heat transfer equation.* (In Russian.) Variacionno-raznostnyje metody rešenija zadač matematičeskoj fiziki. Trudy Vsesojuznogo seminara, Novosibirsk 1976, 21–26.

[48] *Solution of nonlinear heat conduction problems by the finite element method.* Stav. Čas. **24** (1976), 428–435.

[49] *Finite element methods in heat conduction problems.* The Mathematics of Finite Elements and Applications II. Academic Press, London 1976, 85–104.

[50] *Finite element methods for nonlinear parabolic equations.* RAIRO, Anal. Numer. **11** (1977), 93–107.

[51] *Some superconvergence results in the finite element method.* Mat. Aspects of Finite Element Methods. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977, 353–362.

[52] *Superconvergence and reduced integration in the finite elements method.* (In Russian.) Differentsial'nye i Integr. Dif. Uravneniya. Novosibirsk, 1977, 15–20.

[53] *Superconvergence and reduced integration in the finite element method.* Math. of Comp. **32** (1978), 663–685.

[54] *Superconvergence of the gradient of finite element solutions.* (Jointly with P. Lesaint) RAIRO, Anal. Numer. **13** (1979), 139–166.

[55] *Transformation of dependent variables and the finite element solution of nonlinear evolution equations.* (Jointly with L. Čermák.) Internat. J. Numer. Meth. Engrg. **15** (1980), 31–40.

[56] *A Finite element solution of the nonlinear heat equation.* RAIRO, Anal. Numer. **14** (1980), 203–216.

[57] *Finite element method in physical and technical applications.* Comput. Phys. Comm. **20** (1980), 37–42.

[58] *Convergence of the nonconforming Wilson element for arbitrary quadrilateral meshes.* (Jointly with P. Lesaint.) Numer. Math. **36** (1980), 33–52.

[59] *Galerkin-Finite Element Solution of Nonlinear Evolution Problems.* Proc. of the Special Year in Numer. Anal., University of Maryland, 1981.

[60] *Galerkin-Finite element solution of non-linear evolution problems.* Proceedings of Equadiff 5. Teubner, 1982, 378–386.

[61] *Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic field.* RAIRO, Anal. Numer. **16** (1982), 161–191.

[62] *Numerical solution of nonlinear quasi-stationary magnetic fields.* (Jointly with F. Melkes.) Internat. J. Num. Methods Engrg. **19** (1983), 1053–1062.

[63] *A linear scheme for the numerical solution of nonlinear quasistationary magnetic fields.* Math. Comp. **41** (1983), 425–440.

[64] *Addendum to the paper "Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic field".* RAIRO, Anal. Numer. **17** (1983), 407–415.

[65] *Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices I.* Math. Comp. **46** (1986), 27–43.

[66] *Finite element solution of a nonlinear diffusion problem with a moving boundary.* (Jointly with L. Čermák.) Math. Modelling Numer. Anal. **20** (1986), 403–426.

[67] *Finite element solution of a nonlinear diffusion problem with a moving boundary.* (Jointly with L. Čermák.) Proceedings of Equadiff 6, 1986, 291–294.

[68] *Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo, 1987, 121–128.

[69] *Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, II.* Report. Dep. of Mathematiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1988.

[70] *Inverse-averge-type finite element discretizations of selfadjoint second-order elliptic problems.* (Jointly with P. A. Markowich.) Math. Comp. **51** (1988), 431–449.

[71] *Nonconforming elements in the finite element method with penalty.* (Jointly with I. Babuška.) SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 863–875.

[72] *Use of the computer for evaluating technological parameters of pit furnaces in NHKG steel company.* (In Czech.) (Jointly with B. Vojtek.) Bulletin INORGA **19** (1985), 193–195.

Články o Miloši Zlámalovi

[Z1] *Profesor Miloš Zlámal laureátem státní ceny za rok 1974.* Apl. Mat. **20** (1975), no. 2, 152–153.

[Z2] J. Nedoma, A. Ženíšek: *K šedesátinám člena korespondenta ČSAV prof. RNDr. Miloše Zlámala, DrSc., laureáta státní ceny K. Gottwalda,* Apl. Mat. **29** (1984), no. 6, 470–473.

[Z3] M. Ráb: *K šedesátinám profesora Miloše Zlámala,* Časopis Pěst. Mat. **109** (1984), no. 4, 436–441.

[Z4] I. Marek: *An introduction of Professor Owe Axelsson and Professor Miloš Zlámal,* International Symposium on Mathematical Modelling and Computational Methods Modelling 94 (Prague, 1994), J. Comput. Appl. Math. **63** (1995), no. 1–3, 5–8.

[Z5] L. Čermák, J. Nedoma, A. Ženíšek: *In memoriam professor Miloš Zlámal (1924–1997),* Appl. Math. **43** (1998), no. 1, 77–79.

[Z6] L. Čermák, J. Nedoma, A. Ženíšek: *In memoriam professor Miloš Zlámal,* Czechoslovak Math. J. **48** (123) (1998), 185–191.

[Z7] J. Franců: *K nedožitým osmdesátinám profesora Zlámala,* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **49** (2004), č. 4, 345–347.

[Z8] J. Franců: *Vzpomínka na 80. výročí narození profesora Miloše Zlámala,* Události na VUT v Brně **15** (2005), č. 2, str. 18.

[Z9] J. Franců: *K nedožitým osmdesátinám profesora Zlámala,* Bulletin České společnosti pro mechaniku 2005, č. 1, 26–28.

[Z10] J. Franců: *Vzpomínkové odpoledne k nedožitým osmdesátinám profesora Zlámala,* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **50** (2005), č. 4, 344–345.

Za profesorem Milošem Zlámalem

Libor Čermák, Josef Nedoma, Alexander Ženíšek

Dne 22. června 1997 neočekávaně zemřel ve věku 73 let prominentní český matematik profesor RNDr. Miloš Zlámal, DrSc.

Miloš Zlámal se narodil 30. prosince 1924 ve Zborovicích u Kroměříže. Svá studia začal na třetím reálném gymnáziu v Brně. Po maturitě se zapsal ke studiu matematiky a fyziky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně. V roce 1949 získal doktorát a stal se asistentem na Vysokém učení technickém v Brně. V akademickém roce 1950/1951 byl ve vědecké přípravě na Matematickém ústavu Československé akademie věd v Praze a po odsloužení základní vojenské služby přešel na Přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity. Po získání akademické hodnosti kandidáta věd působil na fakultě až do roku 1961, nejprve ve funkci odborného asistenta, později docenta matematiky. Od roku 1961 je jeho profesionální kariéra a také jeho osobní život spjat s Vysokým učením technickým v Brně. Nejprve zde pracoval krátce jako docent na Fakultě strojního inženýrství. Během let 1963–1990 byl ředitelem Oblastního výpočetního centra a v letech 1990–1995 působil jako profesor matematiky na Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství. I po odchodu do důchodu si nedovedl představit svůj život bez matematiky a nikdy nepřestal spolupracovat s fakultou.

Během svého působení na VUT v roce 1963 získal vědeckou hodnost doktora věd a v roce 1965 byl jmenován profesorem. V roce 1980 mu byla udělena stříbrná medaile Bernarda Bolzana ČSAV, v roce 1984 získal zlatou medaili Vysokého učení technického v Brně a čestný doktorát Technické univerzity v Drážďanech. V roce 1992 získal Pamětní medaili Univerzity Karlovy za svůj významný příspěvek k rozvoji a využití metody konečných prvků. V letech 1983–1992 byl předsedou vědeckého kolegia pro matematiku Československé akademie věd.

Profesor Zlámal strávil většinu svého výjimečně vědecky plodného života vedením výpočetního centra VUT v Brně. Od založení byl jeho ředitelem plných 27 let. Původně malé výpočetní centrum se pod jeho vedením rozrostlo v jednu z nejdůležitějších institucí v rámci vysokého školství v zemi a hrálo významnou roli při zavádění moderních výpočetních metod a výpočetní techniky do praxe. Profesor Zlámal přednášel řadu let postgraduálním studentům o nejmodernějších výpočetních metodách. Více než 30 let vedl vědecký seminář pro specialisty v numerických metodách pro československé i zahraniční účastníky. Profesor Zlámal se osobně angažoval také při výchově řady mladých vědců — většina z nich je nyní profesory nebo výzkumníky v různých oblastech vysokého školství.

Jako mladý matematik Miloš Zlámal pracoval v teorii diferenciálních rovnic nejprve obyčejných, později parciálních. Do roku 1967 publikoval 23 původních článků v této oblasti. Mezi nejvýznamnější výsledky z tohoto období nutno zmínit teorii hyperbolických rovnic s malým parametrem při nejvyšší derivaci, která se stala předmětem jeho disertace v roce 1960. Podstatná část disertace byla publikována v [13].

Nejdůležitější období jeho tvůrčí práce začalo, když se v roce 1967 díky spolupráci s inženýry seznámil s nově se rozvíjející metodou konečných prvků. Výsledky týkající se této metody publikované ve 47 článcích mu přinesly uznání v celém světě.

Profesor Zlámal byl vybaven schopností, která není příliš častá mezi matematiky: živě se zajímal o problémy, které vycházely z inženýrské praxe, byl schopen naslouchat inženýrům, spolupracovat s nimi a využít jejich problémy jako podnětu k vysoce vědecky podloženému výzkumu. Tak například předmět jeho doktorské disertace vznikl z diskusí s profesorem V. Hálkem. První informace o metodě konečných prvků získal od Ing. Jiřího Kratochvíla ze stavební fakulty VUT v Brně. Profesor Zlámal rozpoznal v procedurách užívaných inženýry určité souvislosti s téměř zapomenutým článkem R. Couranta (*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 1–23) a s variačními metodami obecně. Nejprve zamýšlel napsat pouze krátkou poznámku o konvergenci Veubeckeho prvku, ale nové myšlenky a impulzy přicházející během práce vedly ke článku [24], jednomu z nejcitovanějších článků v metodě konečných prvků.

Ve svém semináři profesor Zlámal postupně vytvořil skupinu lidí plně angažovaných v nově se rozvíjející metodě konečných prvků, čímž vznikla tzv. brněnská škola této metody. Její výhodou bylo přímé spojení s výpočetní praxí: algoritmy a tvoření programů pro tuto metodu byly rozvíjeny paralelně s řešením inženýrských problémů. V tomto směru programátorská erudice Ing. L. Holuši stejně jako praktické zkušenosti prof. J. Kratochvíla s aplikacemi metody znamenaly značný přínos. Programový systém se vyvíjel řadu let a vedle využití pro výpočet úloh z praxe sloužil také pro okamžité ověření teoretických výsledků.

Léta 1967–1973 lze nazvat „eliptickým obdobím“ v Zlámalově práci v metodě konečných prvků. Výše zmíněný článek [24] začal sérii osmnácti článků, které lze považovat za nejlepší učebnici metody konečných prvků té doby. Například profesor Raviart z Paříže prohlásil, že se tuto metodu učil z raných Zlámalových prací.

Od roku 1973 (kromě období 1977–1979, když analyzoval superkonvergenci a redukovanou integraci v metodě konečných prvků) se M. Zlámal zabýval evolučními úlohami. Nejdříve zkoumal lineární parabolické rovnice, přičemž zvláštní pozornost věnoval multikrokovým metodám. Od roku 1976 systematicky studoval nelineární problémy, nejdříve opět parabolické rovnice. Dva nejdůležitější články z tohoto období jsou práce [50], ve které studoval konvergenci dvoukrokových A-stabilních diferenčních metod, a práce [56], ve které se zabýval také nelinearitou ve členu s časovou derivací.

Během let 1979–1982 M. Zlámal studoval hlavně parabolicko-eliptické nelineární rovnice, které mají hodně aplikací při řešení nelineárních magnetických polí. Zejména články [61] a [63] mají zásadní význam, i když byly méně citované, než si zasloužily.

V období 1983–1990 M. Zlámal studoval problémy spojené s numerickým řešením rovnic popisujících procesy při výrobě polovodičů a jejich činnosti. Články [65] a [69] mají největší význam v této oblasti. Během posledního období svého života se profesor Zlámal zabýval box metodou.

Profesor Zlámal se vždy snažil ověřit si své teoretické výsledky v metodě konečných prvků také numericky. To vedlo k vytvoření programů pro řešení tenkých desek, pro problémy rovinné pružnosti s různými druhy prvků spojených s přechodovými prvky, pro rovnice přenosu tepla, magnetické pole, simulaci polovodičů a základní rovnice polovodičů.

Profesor Zlámal vždy volil problémy, které byly zajímavé nejen z teoretického, ale i praktického hlediska. Ve svých pracích řešil problémy zásadního významu, proto jeho metody a důkazy mohly být upraveny a přeneseny do mnoha dalších oblastí, jak se to častokrát stalo. Proto se pečlivé čtení Zlámalových článků často stalo nečekaným, ale velmi příjemným začátkem další tvořivé práce.

Když se ohlédneme na množství vědecké, pedagogické a organizační práce profesora Zlámala, uvědomíme si, kolik nám toho zanechal a jak nám bude chybět. V Miloši Zlámalovi česká vědecká komunita ztratila jednoho ze svých prominentních matematiků a Ústav matematiky Fakulty strojního inženýrství VUT svého nejvýznamnějšího člena.

Seznam vědeckých prací M. Zlámala je na stranách 48–52.

Překlad z angličtiny článku [Z6] *v Czechoslovak Math. Journal 1998.*

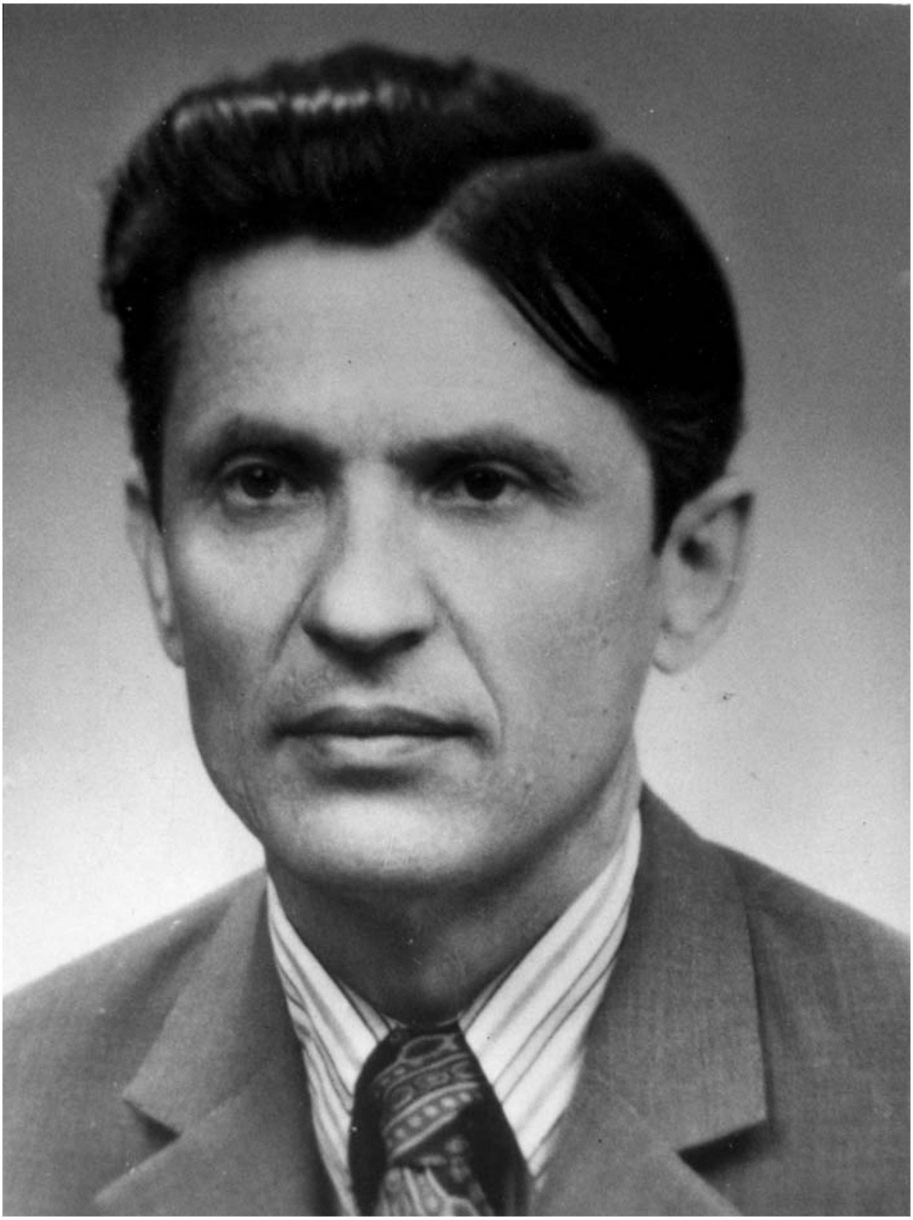
Faksimile článku

Miloš Zlámal

On the Finite Element Method

Numerische Mathematik 12 (1968), 394–409

Tento článek přinesl autorovi
takřka přes noc světové uznání
a patří k nejcitovanějším pracím
v oblasti metody konečných prvků.



Numerische Mathematik

Band 12 · 1968

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Numer. Math. 12, 394—409 (1968)

On the Finite Element Method

MILOŠ ZLÁMAL

Received April 17, 1968

Dedicated to Professor OTAKAR BORŮVKA on the occasion of his scientific jubilee.

1. Introduction

COURANT has suggested in [8] a finite difference method which is applicable to boundary value problems arising from variational problems. The finite difference equations are obtained by means of the Ritz method with trial functions that are piecewise linear over a triangulation of the plane. There are several papers dealing with this method. We name FRIEDRICHS and KELLER [12] and OGANESJAN [14][1]. Much more papers appeared in recent years in technical journals. The method has been called the finite element method (see the monograph [17] by ZIENKIEWICZ). It was developed originally as a concept of structural analysis and in contrast to the mathematicians the engineers have begun to use for approximation polynomials of higher degrees and have developed this method also for variational problems containing derivatives of the second order (see CLOUGH and TOCHER [7] and FRAEIJS DE VEUBEKE [9]).

In this paper we justify first a procedure by FRAEIJS DE VEUBEKE [10] which uses quadratic polynomials. Then we propose and justify a procedure using cubic polynomials. All these procedures concern variational problems containing first order derivatives only. In the last section we introduce and justify a procedure using fifth degree polynomials and applicable to variational problems containing second order derivatives. In all cases we derive asymptotic estimates of the discretization error. Some details of the computational technique and numerical results will be published in a subsequent paper.

2. Second Order Equations

Let Ω be a simply or multiply connected bounded domain in the x_1, x_2 plane with the boundary Γ. Γ consists of a finite number of simple closed curves Γ_i $(i=0, \ldots, r)$; $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ lie inside of Γ_0 and do not intersect. We consider the equation

$$(1) \qquad Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu = f(x_1, x_2)$$

[1] I am indebted to the referee for calling my attention to the following papers: AUBIN [1], CÉA [4], CIARLET [5], CIARLET, SCHULTZ and VARGA [6]. After having sent the manuscript to the editor there appeared a very interesting paper [3] by BIRKHOFF, SCHULTZ and VARGA.

in Ω. Here a_{ij}, c, f are continuous functions of (x_1, x_2) on $\bar{\Omega}$ and

$$a_{ij}(x_1, x_2) = a_{ji}(x_1, x_2), \quad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq \mu \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \tag{2}$$
$$\mu = \text{const} > 0, \qquad c(x_1, x_2) \geqq 0.$$

Two boundary value problems will be solved:

The Dirichlet problem

$$u|_\Gamma = 0 \tag{3}$$

and the third boundary value problem

$$\left[\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma u\right]_\Gamma = 0. \tag{4}$$

In (4) ν is the outside normal to Γ and on Γ we assume

$$\sigma \geqq 0 \quad \text{on } \Gamma, \qquad \sigma \not\equiv 0 \quad \text{if} \quad \min_{\bar{\Omega}} c = 0. \tag{5}$$

Under these assumptions both these problems are positive definite and the solution of the Dirichlet problem minimizes the functional

$$F_1(v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c v^2 - 2 f v\right) dx \tag{6}$$

in the class of functions $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ and the solution of the third boundary value problem minimizes

$$F_2(v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c v^2 - 2 f v\right) dx + \int_\Gamma \sigma v^2 \, d\Gamma \tag{7}$$

in the class $W_2^{(1)}(\Omega)$ (see, e.g., [13]). Here $W_2^{(k)}(\Omega)$ means the Sobolev space of functions having generalized derivatives up to the order k inclusive which belong to $L_2(\Omega)$. The norm is defined by

$$\|u\|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} = \sum_{|i| \leqq k} \|D^i u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{8}$$

Here we use the notation $i = (i_1, i_2)$, $|i| = i_1 + i_2$, $D^i u = \dfrac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}$ and $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ is the space of functions which we get by completing in the norm $\| \; \|_{W_2^{(k)}(\Omega)}$ the set of functions from $C^{(k)}(\Omega)$ with compact support in Ω.

As we want to use for approximation polynomials of higher order we restrict ourselves to the case that the boundary curves Γ_i $(i = 0, \ldots, r)$ are polygons. We consider all triangulations of $\bar{\Omega}$. To triangulate $\bar{\Omega}$ means to cover $\bar{\Omega}$ by a finite number of arbitrary triangles such that the open triangles are disjoint, the union of closed triangles is $\bar{\Omega}$ and any two adjacent triangles have a common side. To every triangulation we associate two parameters: h, ϑ. h is the largest side and ϑ the smallest angle of all triangles of the given triangulation.

To explain the procedure by Fraeijs de Veubeke let us consider a triangle T [2] with vertices P_1, P_2, P_3. Let Q_1, Q_2, Q_3 be the mid points of the sides of T and

[2] By T we denote both the triangle and its interior.

$p(x_1, x_2)$ be a quadratic polynomial

$$p(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 x_2^2.$$

We determine the six coefficients α_i by six conditions, namely that the polynomial $p(x_1, x_2)$ assumes given values at the nodes $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$. We consider these values as parameters when no side of the triangle lies on the boundary Γ or when it lies and there is prescribed the natural boundary condition (4). In case of the Dirichlet condition (3) the values at the boundary nodes are equal to zero. It follows easily from Theorem 1 introduced later that the polynomial $p(x_1, x_2)$ is uniquely determined by these six conditions. We construct such polynomials for every triangle of the given triangulation and consider the spaces $\mathring{H}_2(\Omega)$ and $H_2(\Omega)$ of functions defined on every triangle by the corresponding polynomial ($\mathring{H}_2$ corresponds to the boundary condition (3) and H_2 to (4)). It is easy to show that every function from $\mathring{H}_2$ belongs to $\mathring{W}_2^{(1)}$ and every function from H_2 to $W_2^{(1)}$. These functions have piecewise continuous partial derivatives of the first order and we show that they assume the same values on the common sides of adjacent triangles which means that they are continuous. Let namely $P_j P_k$ be a common side of two triangles and p_1, p_2 be the corresponding polynomials. We can express the segment $P_j P_k$ by means of a parameter $s \in \langle 0, l\rangle$, l being the length of the side $P_j P_k$, and then both polynomials p_1, p_2 are quadratic polynomials of s assuming the same values for $s = 0, \frac{1}{2} l, l$. Hence it follows that the polynomials assume the same values on the side $P_j P_k$.

$\mathring{H}_2$ and H_2 are finite dimensional subspaces of $\mathring{W}_2^{(1)}$ and $W_2^{(1)}$, respectively. The approximate solutions $U(x_1, x_2)$ of our boundary value problems are determined as that functions from $\mathring{H}_2$ or H_2 which minimize (6) in the class $\mathring{H}_2$ and (7) in the class H_2, respectively. The existence and uniqueness of $U(x_1, x_2)$ follows immediately if we realize that the functionals (6) and (7) without the linear term $-2\int_\Omega f v\, dx$, considered in the classes $\mathring{H}_2$ and H_2, respectively, are positive definite quadratic forms of the nodal values.

We want to find an estimate for the discretization error $u(x_1, x_2) - U(x_1, x_2)$ in the norm $\| \|_{W_2^{(1)}(\Omega)}$ proving thus the convergence of the method. The argumentation goes in the same lines as in [12] and [16]. Consider first the Dirichlet problem. It is well known (see, e.g., [13]) that if u is the solution and $v \in \mathring{W}_2^{(1)}$ then

$$D(v-u) = F_1(v) - F_1(u)$$

where $D(z) = D(z, z)$ and

$$D(\varphi, \psi) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + c\varphi\psi\right] dx.$$

Hence we have

$$D(U-u) = F_1(U) - F_1(u) = \min_{v\in \mathring{H}_2} F_1(v) - F_1(u) = \min_{v\in \mathring{H}_2} D(v-u) \leq D(u-\tilde{u})$$

where $\tilde{u}$ is the function from $\mathring{H}_2$ assuming the same values at nodal points as the solution $u(x_1, x_2)$.

Now to get an estimate for the discretization error it is sufficient to derive an estimate for the difference $u - \tilde{u}$. We use the following Theorem 1 which we prove later.

Theorem 1. Let the function $\varphi(x_1, x_2)$ be continuous on a closed triangle $\overline{T}$ and have bounded derivatives of the third order in the interior of T,

$$|D^i \varphi(x_1, x_2)| \leqq M_3, \quad |i| = 3.$$

Further let φ vanish at the vertices P_1, P_2, P_3 and at the mid points Q_1, Q_2, Q_3. Then it holds in $\overline{T}$

(9) $$\left|\frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_j}\right| \leqq \frac{2}{\sin\alpha} M_3 c^2, \quad j = 1, 2, \qquad |\varphi(x_1, x_2)| \leqq M_3 c^3,$$

where c is the greatest side and α the smallest angle of the triangle T.

Assume that the solution $u(x_1, x_2)$ has bounded derivatives of the third order, M_3 being the bound. Applying Theorem 1 for every triangle of the triangulation and for $\varphi = u - \tilde{u}$, taking into account that $D^i \varphi = D^i u$ for $|i| = 3$ and remembering the meaning of the parameters h, ϑ we get

$$[D(U-u)]^{\frac{1}{2}} \leqq C \frac{1}{\sin\vartheta} M_3 h^2$$

where the constant C does not depend on the triangulation. Using first the assumptions (2) and then Friedrichs inequality we come easily to the following statement:

If the solution $u(x_1, x_2)$ has bounded derivatives of the third order in Ω,

(10) $$|D^i u(x_1, x_2)| \leqq M_3, \quad |i| = 3,$$

then it holds

(11) $$\|u - U\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq C \frac{1}{\sin\vartheta} M_3 h^2$$

where the constant C does not depend on the triangulation.

(11) means that if we refine the triangulation in such a way that $\vartheta \geqq \vartheta_0 > 0$ the approximate solution $U(x_1, x_2)$ converges to the exact solution in the norm $\| \; \|_{W_2^{(1)}(\Omega)}$, the convergence being of the order h^2. This is the same rate of convergence as in the case of the usual second order finite difference scheme. However we need only to assume the boundedness of the derivatives of the third order whereas in the case of the usual finite difference scheme the boundedness of the fourth order derivatives is required.

Concerning the boundary condition (4) the estimate (11) remains true and only minor changes in the proof are necessary. Instead of the form $D(z)$ we have

$$D_1(z) = D(z) + \int_\Gamma \sigma z^2 d\Gamma.$$

If $\min\limits_{\overline{\Omega}} c(x_1, x_2) = c_0 > 0$ then

$$D_1(z) \geqq \mu \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2\right] dx + c_0 \int_\Omega z^2 dx$$

and from $D_1(U-u) \leqq D_1(\tilde{u}-u)$ we get (11) immediately. If $\min_{\bar{\Omega}} c(x_1, x_2) = 0$ then from our assumption (5) it follows that $\sigma \geqq \sigma_0 > 0$ on a part $\bar{\Gamma}$ of Γ for σ_0 being sufficiently small. Then

$$D_1(z) \geqq \mu \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2\right] dx + \sigma_0 \int_{\dot{\Gamma}} z^2 \, d\Gamma.$$

Using the generalised Friedrichs inequality (see [11], footnote 13a) we again get (11).

We turn our attention to the approximation by cubic polynomials. A general cubic polynomial in two variables has ten coefficients. Thus we must impose ten conditions. We suggest two possibilities: a) to prescribe the values of the polynomial and its first derivatives at the vertices P_1, P_2, P_3 and as the tenth condition the value of the polynomial at the center of gravity P_0 of the triangle. b) to prescribe the values of the polynomial at the vertices, at the center of gravity and at six points lying on the sides of the triangle and dividing them in three equal parts. We shall discuss the first case only.

Again we consider the prescribed values as parameters when no side of the triangle lies on the boundary Γ or when it lies and we have the boundary condition (4). In case of the Dirichlet condition (3) the values of the polynomial at boundary nodes must be equal to zero whereas the first derivatives must satisfy the condition

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial p}{\partial x_2} \sin \alpha = 0$$

where α is the angle of the corresponding side with the x_1-axe. This simply means that $\partial p / \partial s = 0$ at the boundary node, $\partial / \partial s$ being the derivative in the direction of the side. It follows from Theorem 2 introduced below that the polynomial $p(x_1, x_2)$ is uniquely determined by these ten conditions. We construct such polynomials for every triangle of the given triangulation and consider the spaces $\mathring{H}_3(\Omega)$ and $H_3(\Omega)$ of functions defined on every triangle by the corresponding polynomial. Again it is true that $\mathring{H}_3 \subset \mathring{W}_2^{(1)}$ and $H_3 \subset W_2^{(1)}$. Let namely $P_j P_k$ be the common side of two triangles. The corresponding polynomials are cubic polynomials of a parameter $s \in \langle 0, l \rangle$ and they have the same values and the same derivative with respect to s at the endpoints of the interval $\langle 0, l \rangle$. Hence they assume the same values on $P_j P_k$. $\mathring{H}_3$ and H_3 are finite dimensional subspaces of $\mathring{W}_2^{(1)}$ and $W_2^{(1)}$, respectively. The approximate solutions $U(x_1, x_2)$ of our boundary value problems are determined as that functions from $\mathring{H}_3$ and H_3 which minimize (6) in the class $\mathring{H}_3$ and (7) in the class H_3, respectively. Again the existence and uniqueness of $U(x_1, x_2)$ follow in the same way as before.

To get an estimate for the discretization error $u(x_1, x_2) - U(x_1, x_2)$ we use the following

Theorem 2. Let the function $\varphi(x_1, x_2)$ be continuously differentiable on a closed triangle $\bar{T}$ and have bounded derivatives of the fourth order in the interior:

$$|D^i \varphi(x_1, x_2)| \leqq M_4, \quad |i| = 4.$$

Further let φ and its first derivatives vanish at the vertices of T and let φ vanish at the center of gravity of T. Then it holds in $\overline{T}$

$$(12) \qquad \left|\frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_j}\right| \leqq \frac{5}{\sin\alpha} M_4 c^3, \quad j=1,2, \qquad |\varphi(x_1, x_2)| \leqq \frac{3}{\sin\alpha} M_4 c^4$$

where c is the greatest side and α the smallest angle of the triangle T.

A consequence of this theorem is the following statement:

If the solution $u(x_1, x_2)$ has bounded derivatives of the fourth order in Ω,

$$|D^i u(x_1, x_2)| \leqq M_4, \quad |i| = 4,$$

then it holds

$$(13) \qquad \|u - U\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leqq C \frac{1}{\sin\vartheta} M_4 h^3$$

where the constant C does not depend on the triangulation.

The convergence is of the order h^3 under the same assumptions which in case of the usual second order finite difference scheme ensure the convergence of the order h^2.

Let us remark at the end that the estimates (11) and (13) can be proved in a similar way also for the Neumann problem and for the mixed problem where the condition (3) is prescribed on a part of the boundary and on the remainder of it there is prescribed the condition (4).

3. Auxiliary Lemmas and Proofs of Theorem 1 and 2

We first introduce the notation for the elements of the triangle T. We denote the angles at the vertices P_1, P_2 and P_3 by α, β and γ, respectively. We choose the notation of the vertices in such a way that $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$. The sides are denoted by $c = P_1P_2$, $a = P_2P_3$, $b = P_3P_1$. From $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ it follows by elementary considerations

$$(14) \qquad \begin{gathered} a \leqq b \leqq c, \\ \frac{1}{\sin\gamma} \leqq \frac{1}{\sin\beta} \leqq \frac{1}{\sin\alpha}, \\ \frac{c}{b} < 2. \end{gathered}$$

Now we state some very simple lemmas. Only one of them will be proved.

Lemma 1. Let s_1, s_2 be two directions containing an angle ω. Let $\frac{\partial\varphi(P)}{\partial s_1} = k_1$, $\frac{\partial\varphi(P)}{\partial s_2} = k_2$, P being a point in the (x_1, x_2)-plane. Then

$$\left|\frac{\partial\varphi(P)}{\partial x_j}\right| \leqq \frac{|k_1| + |k_2|}{|\sin\omega|}, \quad j = 1, 2$$

and if $0 < \omega < \frac{1}{3}\pi$ then

$$\left|\frac{\partial\varphi(P)}{\partial s}\right| \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3} \max|k_j|$$

where s is any direction lying inside the acute angle formed by s_1 and s_2.

In the following lemmas $g(s)$ means always a function of a real parameter $s \in \langle 0, l \rangle$, continuous on $\langle 0, l \rangle$ and having a derivative of the second, third or fourth order.

Lemma 2. Let $g(0) = \eta_1$, $g(l) = \eta_2$ and $|g''(s)| \leq K_2$ in $(0, l)$. Then

$$|g(s)| \leq \max|\eta_j| + \tfrac{1}{8} K_2 l^2.$$

Lemma 3. Let $g(0) = \eta_1$, $g(\tfrac{1}{2} l) = \eta_2$, $g(l) = \eta_3$ and $|g'''(s)| \leq K_3$ in $(0, l)$. Then

$$|g(s)| \leq \frac{5}{4} \max|\eta_j| + \frac{\sqrt{3}}{6^3} K_3 l^3,$$

$$|g'(s)| \leq \frac{8}{l} \max|\eta_j| + \frac{1}{4} K_3 l^2.$$

Lemma 4. Let $g(0) = \eta_1$, $g'(0) = k_1$, $g(l) = \eta_2$ and $|g'''(s)| \leq K_3$ in $(0, l)$. Then

$$|g(s)| \leq \max|\eta_j| + \tfrac{1}{4} |k_1| \, l + \tfrac{1}{4} K_3 l^3.$$

Lemma 5. Let $g(0) = \eta_1$, $g(l) = \eta_2$, $g'(0) = k_1$, $g'(l) = k_2$ and $|g^{(4)}(s)| \leq K_4$ in $(0, l)$. Then

$$|g(s)| \leq \max|\eta_j| + \frac{1}{4} l \max|k_j| + \frac{1}{16.24} K_4 l^4,$$

$$|g'(s)| \leq \frac{3}{l} \max|\eta_j| + \max|k_j| + \frac{1}{24} K_4 l^3.$$

Proof. Let

$$p(\xi) = \eta_1 [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3] + \eta_2 [3\xi^2 - 2\xi^3] + k_1 l [\xi - 2\xi^2 + \xi^3] + k_2 l [-\xi^2 + \xi^3]$$

and set $g(s) = p(l^{-1} s) + \psi(s)$. The polynomial $p(l^{-1} s)$ is an Hermite interpolation polynomial. We have

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi(l) = \psi'(l) = 0, \quad |\psi^{(4)}(s)| \leq K_4$$

and from the remainder theorem for Hermite interpolation (see, e.g., [2]) we get $|\psi(s)| \leq \dfrac{1}{16.24} K_4 l^4$. Concerning $\psi'(s)$ there exists $\xi_1 \in (0, l)$ such that $\psi'(\xi_1) = 0$. From the remainder theorem for Lagrange interpolation we have

$$|\psi'(s)| \leq \tfrac{1}{6} K_4 |x(x - \xi_1)(x - l)| \leq \tfrac{1}{6} K_4 \tfrac{1}{4} l^2 |x - \xi_1| \leq \tfrac{1}{24} K_4 l^3.$$

As

$$|p(\xi)| \leq \max|\eta_j| + \tfrac{1}{4} l \max|k_j|, \quad |p'(\xi)| \leq 3 \max|\eta_j| + \max|k_j|$$

the lemma follows.

Lemma 6. Let $g(0) = \eta_1$, $g'(0) = k_1$, $g(\tfrac{2}{3} l) = \eta_2$, $g(l) = \eta_3$ and $|g^{(4)}(s)| \leq K_4$ in $(0, l)$. Then

$$|g'(s)| \leq \frac{27}{2l} \max|\eta_j| + |k_1| + \frac{1}{18} K_4 l^3.$$

Proof of Theorem 1. In the triangle T it holds

$$\left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1 \, \partial s_2 \, \partial s_3} \right| \leq 2\sqrt{2} M_3 \tag{15}$$

where $\partial/\partial s_j$ means a derivation in the direction s_j and s_j $(j=1, 2, 3)$ are arbitrary directions. Let us choose $\varepsilon>0$ and let us construct a triangle $P_1'P_2'P_3'$ lying inside T with sides a', b', c' which are parallel to the sides of T and lie in a distance δ. We have $a', b', c'<c$ and from continuity of φ it follows that $|\varphi(P_i')|\leqq\varepsilon$ and $|\varphi(Q_i')|\leqq\varepsilon$ if δ is sufficiently small (Q_1', Q_2' and Q_3' are the mid points of the sides $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$ and $P_3'P_1'$). We consider the function φ on the side $P_2'P_3'$ as a function of a parameter $s\in\langle 0, a'\rangle$. Let $\partial/\partial s_1$ be the derivative in the direction of the side $P_2'P_3'$. By (15) we have $|\partial^3\varphi/\partial s_1^3|\leqq 2\sqrt{2}M_3$. We apply Lemma 3 for $g=\varphi|_{P_2'P_3'}$ and $l=a'<c$ so that $K_3=2\sqrt{2}M_3$, $\max|\eta_j|\leqq\varepsilon$. Thus

$$\left|\frac{\partial\varphi(P_2')}{\partial s_1}\right|\leqq\frac{8}{a'}\varepsilon+\frac{\sqrt{2}}{2}M_3c^2.$$

In the same way we get

$$\left|\frac{\partial\varphi(P_2')}{\partial s_2}\right|\leqq\frac{8}{c'}\varepsilon+\frac{\sqrt{2}}{2}M_3c^2\leqq\frac{8}{a'}\varepsilon+\frac{\sqrt{2}}{2}M_3c^2$$

where s_2 is the direction of the side $P_2'P_1'$. Hence by Lemma 1

$$\left|\frac{\partial\varphi(P_2')}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{16\varepsilon}{a'\sin\beta}+\frac{\sqrt{2}M_3}{\sin\beta}c^2\leqq\frac{16\varepsilon}{a'\sin\alpha}+\frac{\sqrt{2}M_3}{\sin\alpha}c^2.$$

The same inequality holds for the vertex P_3':

$$\left|\frac{\partial\varphi(P_3')}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{16\varepsilon}{a'\sin\alpha}+\frac{\sqrt{2}M_3}{\sin\alpha}c^2.$$

From the last two inequalities and by Lemma 2 $\left(g=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|_{P_2'P_3'},\ K_2=2M_3,\ l=a'<c\right)$ we obtain

$$\left|\frac{\partial\varphi(P')}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{16\varepsilon}{a'\sin\alpha}+\frac{\sqrt{2}M_3}{\sin\alpha}c^2+\frac{1}{4}M_3c^2$$

where P' is an arbitrary point of the side $P_2'P_3'$. For the vertex P_1' it also holds

$$\left|\frac{\partial\varphi(P_1')}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{16\varepsilon}{a'\sin\alpha}+\frac{\sqrt{2}M_3}{\sin\alpha}c^2.$$

Now let P' be the point of the side $P_2'P_3'$ which lies on the line going through P_1' and P, P being an arbitrary point from the interior of the triangle $P_1'P_2'P_3'$. Applying again Lemma 2 $\left(g=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|_{P_1'P'},\ K_2=2M_3,\ l=P_1'P'\leqq c'<c\right)$ we get from the last two inequalities

$$\left|\frac{\partial\varphi(P)}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{16}{a'\sin\alpha}\varepsilon+\frac{\sqrt{2}M_3}{\sin\alpha}c^2+\frac{1}{2}M_3c^2$$

and letting $\varepsilon\to 0+$

$$\left|\frac{\partial\varphi(P)}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{2\sqrt{2}+\sin\alpha}{2\sin\alpha}M_3c^2\leqq\frac{2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2\sin\alpha}M_3c^2\leqq\frac{2}{\sin\alpha}M_3c^2.$$

This is the first inequality in Theorem 1. An estimate for the function φ itself could be won from the estimates of the first derivatives. A better result, the second inequality in Theorem 1, follows from this lemma.

Lemma 7. Let the function $\psi(x_1, x_2)$ be continuous on a closed triangle $\overline{T}$ and have bounded derivatives of the third order in the interior. Further let $\psi(P_i)=\eta_i$, $\psi(Q_i)=\zeta_i$. Then it holds on $\overline{T}$

$$|\psi(x_1, x_2)| \leqq 6\eta + M_3 c^3, \quad \eta = \max(|\eta_i|, |\zeta_i|). \tag{16}$$

Proof. We again consider the triangle $P_1' P_2' P_3'$. Let $\psi(P_i')=\eta_i'$, $\psi(Q_i')=\zeta_i'$. If δ is sufficiently small then $|\eta_i - \eta_i'| \leqq \varepsilon$, $|\zeta_i - \zeta_i'| \leqq \varepsilon$. By means of Lemma 3 we easily show that on the boundary of the triangle $P_1' P_2' P_3'$ it holds

$$|\psi| \leqq \frac{5}{4}\eta' + \frac{2\sqrt{6}}{6^3} M_3 c^3, \quad \eta' = \max(|\eta_i'|, |\zeta_i'|). \tag{17}$$

By Lemma 3 we again get

$$\left|\frac{\partial\psi(P_1')}{\partial s_1}\right| \leqq \frac{8}{b'}\eta' + \frac{\sqrt{2}}{2} M_3 c^2, \quad \left|\frac{\partial\psi(P_1')}{\partial s_2}\right| \leqq \frac{8}{c'}\eta' + \frac{\sqrt{2}}{2} M_3 c^2,$$

s_1 and s_2 now being the directions of the sides $P_1' P_3'$ and $P_1' P_2'$, respectively. By the second part of Lemma 1 it follows from these inequalities that

$$\left|\frac{\partial\psi(P_1')}{\partial s}\right| \leqq \frac{16\sqrt{3}}{3}\,\frac{\eta'}{b'} + \frac{\sqrt{6}}{3} M_3 c^2, \tag{18}$$

s being any direction lying in the angle α. Let P' be the point on the side $P_2' P_3'$ which lies on the line going through P_1' and P. By (17), (18) and Lemma 4 we obtain

$$|\psi(P)| \leqq \frac{5}{4}\eta' + \frac{2\sqrt{6}}{6^3} M_3 c^3 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\frac{c}{b'}\eta' + \frac{\sqrt{6}}{12} M_3 c^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} M_3 c^3$$

and letting $\varepsilon \to 0+$

$$|\psi(P)| \leqq \left(\frac{5}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{c}{b}\right)\eta + \left(\frac{2\sqrt{6}}{6^3} + \frac{\sqrt{6}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) M_3 c^3 \leqq 6\eta + M_3 c^3.$$

Proof of Theorem 2. We consider the triangle $P_1' P_2' P_3'$ and choose δ so small that $|D^i \varphi(P_j')| \leqq \varepsilon$, $|i| \leqq 1$, $j = 1, 2, 3$ and $|\varphi(P_0')| \leqq \varepsilon$ where P_0' is the center of gravity of the triangle $P_1' P_2' P_3'$. By Lemma 5 applied to $g = \varphi|_{P_2' P_3'}$ ($l = a' < c$, $K_4 = 4M_4$) it holds

$$|\varphi(Q_2')| \leqq \varepsilon\left(1 + \frac{1}{4}c\right) + \frac{1}{96} M_4 c^4, \quad \left|\frac{\partial\varphi(Q_2')}{\partial s_1}\right| \leqq \varepsilon\left(\frac{3}{a'} + 1\right) + \frac{1}{6} M_4 c^3,$$

s_1 being the direction of the side $P_2' P_3'$. Let s_2 be the direction of the line joining P_1' with Q_2'. As $\left|\frac{\partial\varphi(P_1')}{\partial x_j}\right| \leqq \varepsilon$ we have $\left|\frac{\partial\varphi(P_1')}{\partial s_2}\right| \leqq \sqrt{2}\,\varepsilon$. Applying Lemma 6 to $g = \varphi|_{P_1' Q_2'}$ ($l = P_1' Q_2' < c$, $K_4 = 4M_4$) we get

$$\left|\frac{\partial\varphi(Q_2')}{\partial s_2}\right| \leqq \varepsilon\left[\frac{27}{2 P_1' Q_2'}\left(1 + \frac{1}{4}c\right) + \sqrt{2}\right] + \left(\frac{9c}{64 P_1' Q_2'} + \frac{2}{9}\right) M_4 c^3.$$

By Lemma 1 it follows

$$\left|\frac{\partial\varphi(Q_2')}{\partial x_j}\right| \leqq \frac{1}{\sin\sigma}\left\{\varepsilon\left[\frac{27}{2 P_1' Q_2'}\left(1 + \frac{1}{4}c\right) + \sqrt{2} + \frac{3}{a'} + 1\right] + \left(\frac{9c}{64 P_1' Q_2'} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6}\right) M_4 c^3\right\}$$

where σ is the angle between the directions s_1 and s_2. As $\beta<\sigma<\pi-\gamma$ it holds $\frac{1}{\sin\sigma}<\frac{1}{\sin\alpha}$ and letting $\varepsilon\to 0+$ we obtain

$$\left|\frac{\partial\varphi(Q_2)}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{9c}{64\,P_1Q_2}+\frac{7}{18}\right)M_4c^3.$$

By elementary considerations it is easy to prove that $\frac{c}{P_1Q_2}<2$. Hence

$$\left|\frac{\partial\varphi(Q_2)}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{9}{32}+\frac{7}{18}\right)M_4c^3.$$

The same inequality is true for the mid points Q_1, Q_3. Setting $\psi=\partial\varphi/\partial x_j$ and applying Lemma 7 we get

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|\leqq\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{193}{48}M_4c^3+M_4c^3\leqq\frac{5}{\sin\alpha}M_4c^3.$$

To prove the remaining inequality let us consider the parallel to the x_1-axe going through an arbitrary point $P\in T$. One of the intersections of this line with the boundary of T, say $\overline{P}$, lies in a distance not greater than $\frac{1}{2}c$ from P. Thus from

$$\varphi(P)=\varphi(\overline{P})+\int_{\bar{x}_1}^{x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_1$$

it follows

$$|\varphi(P)|\leqq|\varphi(\overline{P})|+\frac{1}{2}c\,\frac{5}{\sin\alpha}M_4c^3.$$

The values of φ on the boundary of T can be estimated by means of Lemma 5, the bound being $\frac{1}{96}M_4c^4$. The last inequality gives

$$|\varphi(P)|\leqq\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{96}\sin\alpha\right)M_4c^4\leqq\frac{3}{\sin\alpha}M_4c^4.$$

4. Fourth Order Equations

For the sake of brevity we restrict ourselves to the Dirichlet problem for the biharmonic equation:

$$\Delta^2u=f(x_1,x_2),\qquad (x_1,x_2)\in\Omega,\tag{19}$$

$$u|_\Gamma=\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_\Gamma=0.\tag{20}$$

However, we remind that the procedure and results, which will be proved, remain the same for more general equations and for other boundary conditions which do not make any troubles. This is certainly an advantage of the finite element method against the usual finite difference method.

The solution $u(x_1,x_2)$ of the Dirichlet problem (19), (20) minimizes the functional

$$F_3(v)=\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2v}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2v}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}\right)^2-2f(x_1,x_2)\,v\right]dx\tag{21}$$

in the class $\mathring{W}_2^{(2)}(\Omega)$. If we want to approximate the solution in the triangles by polynomials we must choose such polynomials that the resulting trial functions are not only continuous in $\overline{\Omega}$ but they have continuous derivatives in $\overline{\Omega}$. They will then belong to $\overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}$ as their second order derivatives will be piecewise continuous. To this end let us consider a polynomial of the fifth degree

$$p(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \cdots + \alpha_{20} x_1 x_2^4 + \alpha_{21} x_2^5 .$$

To determine such a polynomial we need 21 conditions. We choose them in the following way: we prescribe the values $D^i p(P_j)$, $|i| \leqq 2$, $j = 1, 2, 3$, and the values $\frac{\partial p(Q_i)}{\partial \nu}$, $j = 1, 2, 3$. P_j and Q_j have the same meaning as before, i.e. P_j are vertices of the triangle T and Q_j are midpoints of the sides; ν is the normal to the boundary of T. It follows easily from Theorem 3 introduced later that the polynomial $p(x_1, x_2)$ is uniquely determined by these values. We show that the functions defined in $\overline{\Omega}$ and equal in the triangles to the corresponding polynomials are continuously differentiable and have piecewise continuous second order derivatives in $\overline{\Omega}$. It is sufficient to show that on a common side $P_j P_k$ of two triangles the corresponding polynomials assume the same values and the same value of the normal derivative. Now if we consider the polynomials on the side $P_j P_k$ as functions of a parameter $s \in \langle 0, l \rangle$ we know that they assume the same values at the ends of the interval $\langle 0, l \rangle$ and the first and second derivatives with respect to s at the ends of $\langle 0, l \rangle$ are the same. As they are polynomials of the fifth degree in s they assume the same values on the whole side $P_j P_k$. The normal derivatives assume the same values at the points $s = 0, \frac{1}{2} l, l$ of the interval $\langle 0, l \rangle$ and they assume the same value of the derivative with respect to s at the ends of $\langle 0, l \rangle$ because at the ends of $\langle 0, l \rangle$ the second order derivatives of the polynomials have the same values. Thus being polynomials of the fourth degree in s they assume the same values in $\langle 0, l \rangle$.

We consider the values $D^i p(P_j)$ and $\partial p(Q_j)/\partial \nu$ ($|i| \leqq 2$, $j = 1, 2, 3$) as parameters. Only in the case of boundary nodes the situation is different. We must take into account the boundary conditions. After a simple analysis which we do not carry out here we would find out that some of the boundary parameters are equal to zero and some are multiples of another boundary parameter. Denote by $\overset{\circ}{H}_5(\Omega)$ the class of functions defined on $\overline{\Omega}$ which on the particular triangles of the given triangulation are equal to just introduced polynomials. $\overset{\circ}{H}_5$ is a finite dimensional subspace of $\overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}$. The approximate solution $U(x_1, x_2)$ is defined as that function from $\overset{\circ}{H}_5$ which minimizes the functional (21) in the class $\overset{\circ}{H}_5$. We can prove as before the existence and uniqueness of $U(x_1, x_2)$.

To find an estimate for the discretization error let us introduce the notation

$$J_0(z) = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx .$$

Then it holds (see [13])

$$\begin{aligned} J_0(U - u) &= F_3(U) - F_3(u) = \min_{v \in \overset{\circ}{H}_5} F_3(v) - F_3(u) \\ &= \min_{v \in \overset{\circ}{H}_5} J_0(v - u) \leqq J_0(u - \tilde{u}) \end{aligned}$$

where $\tilde{u}$ is the function from $\mathring{H}_5$ such that the values of $D^i \tilde{u}$ for $|i| \leq 2$ at the vertices of the triangles and the values $\partial \tilde{u}/\partial \nu$ at the midpoints of the sides are the same as those of the solution $u(x_1, x_2)$. To estimate $J_0(u-\tilde{u})$ we use the following

Theorem 3. Let $\varphi(x_1, x_2)$ be twice continuously differentiable on the closed triangle $\overline{T}$ and have bounded derivatives of the sixth order in the interior of T,

$$|D^i \varphi(x_1, x_2)| \leq M_6, \quad |i| = 6.$$

Further let

$$D^i \varphi(P_j) = \frac{\partial \varphi(Q_j)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{for} \quad |i| \leq 2, \ j = 1, 2, 3.$$

Then it holds in $\overline{T}$

$$|D^i \varphi(x_1, x_2)| \leq \frac{C}{(\sin \alpha)^{|i|}} M_6 c^{6-|i|}, \quad |i| \leq 4,$$

where α is the smallest angle and c the greatest side of the triangle T and C is a constant independent of the triangle T and the function φ [3].

Applying Theorem 3 to the function $\varphi = u - \tilde{u}$ and taking into account that $D^i(u-\tilde{u}) = D^i u$ for $|i| = 6$ we easily get an estimate

$$[J_0(U-u)]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sin^2 \vartheta} M_6 h^4,$$

M_6 being now the bound for $|D^i u|$, $|i| = 6$. Using twice Friedrichs inequality we obtain the same estimate for $\|u-U\|_{W_2^{(2)}}$. We come to the following statement:

If the solution $u(x_1, x_2)$ has bounded derivatives of the sixth order in Ω, $|D^i u| \leq M_6$ for $|i| = 6$, then it holds

$$\|u-U\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leq \frac{C}{\sin^2 \vartheta} M_6 h^4 \tag{22}$$

where the constant C does not depend on the triangulation. By Sobolev's lemma [4] *it also holds*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u-U| \leq \frac{C}{\sin^2 \vartheta} M_6 h^4. \tag{23}$$

5. Some Lemmas and Proof of Theorem 3

First we introduce Sobolev's lemma in a form which we need. By $\widetilde{W}_2^{(k)}(\Omega)$ we denote the space consisting of functions which together with all generalized derivatives of the order k belong to $L_2(\Omega)$. The norm is given by

$$\|u\|^2_{\widetilde{W}_2^{(k)}(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|i|=k} \|D^i u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Sobolev's lemma. Let $0 \leq m < k-1$ and $u(x_1, x_2) \in \widetilde{W}_2^{(k)}(\Omega)$. Then $u(x_1, x_2) \in C^{(m)}(\overline{\Omega})$ and

$$\max_{(x_1, x_2) \in \overline{\Omega},\ |i| \leq m} |D^i u(x_1, x_2)| \leq C \|u\|_{\widetilde{W}_2^{(k)}(\Omega)} \tag{24}$$

where the constant C does not depend on $u(x_1, x_2)$.

[3] It is possible to get a numerical value of C; we do not try it as we do not need it.

[4] See next section.

Sobolev's lemma is usually stated for the spaces $W_2^{(k)}$ (actually for more general spaces $W_p^{(k)}$). But for domains which are starlike with respect to a disc, and we shall use Sobolev's lemma for our domain Ω and the triangle T only, the spaces $\widetilde{W}_2^{(k)}$ and $W_2^{(k)}$ consist of the same set of functions and the norms are equivalent (see [15]).

Next we state without proofs three lemmas of the same character as lemmas 2—6. For further applications we may suppose $l \leqq 1$.

Lemma 8. Let $g^{(j)}(0)=\eta_1^{(j)}$, $g^{(j)}(l)=\eta_2^{(j)}$, $j=0, 1, 2$, and $|g^{(6)}(s)| \leqq K_6$ in $(0, l)$. Then

$$|g(s)| \leqq C_1 \max(|\eta_1^{(j)}|, |\eta_2^{(j)}|) + \frac{1}{2^6 \cdot 6!} K_6 l^6,$$

$$|g'(s)| \leqq C_2 l^{-1} \max(|\eta_1^{(j)}|, |\eta_2^{(j)}|) + \frac{1}{2^1 \cdot 5!} K_6 l^5$$

where the constants C_1, C_2 are absolute constants, i.e. in this case constants independent on $g(s)$ and l [5].

Lemma 9. Let $g^{(j)}(0)=\eta_1^{(j)}$, $g^{(j)}(l)=\eta_2^{(j)}$, $j=0, 1$, $g(\frac{1}{2}l)=\eta_3$ and $|g^{(5)}(s)| \leqq K_5$ in $(0, l)$. Then

$$|g(s)| \leqq C_3 \max(|\eta_1^{(j)}|, |\eta_2^{(j)}|, |\eta_3|) + \frac{4\sqrt{5}}{10^3 \cdot 5!} K_5 l^5,$$

$$|g''(s)| \leqq C_4 l^{-2} \max(|\eta_1^{(j)}|, |\eta_2^{(j)}|, |\eta_3|) + \frac{1}{6} K_5 l^3.$$

Lemma 10. Let $g^{(j)}(0)=\eta_1^{(j)}$, $j=0, \ldots, 3$, $g^{(j)}(l)=\eta_2^{(j)}$, $j=0, 1$ and $|g^{(6)}(s)| \leqq K_6$ in $(0, l)$. Then

$$|g(s)| \leqq C_5 \max\{\max|\eta_1^{(j)}|, \max|\eta_2^{(j)}|\} + \frac{1}{5 \cdot 3^8} K_6 l^6.$$

Proof of Theorem 3. We construct again a triangle $P_1' P_2' P_3'$ lying inside T with sides a', b', c' which are parallel to the sides of T and lie in a distance δ. We choose δ so small that $|D^i \varphi(P_j')| \leqq \varepsilon/2$, $|i| \leqq 2$, $j=1, 2, 3$. We consider the function $g=\varphi|_{P_1' P_2'}$ as a function of a parameter $s \in \langle 0, c' \rangle$. As $\left|\frac{\partial^6 \varphi}{\partial l_1 \ldots \partial l_6}\right| \leqq 2^3 M_6$ for arbitrary directions l_j $(j=1, \ldots, 6)$ it holds $|g^{(6)}(s)| \leqq 2^3 M_6$ and obviously

$$\left|\frac{d^j g(0)}{ds^j}\right| \leqq \varepsilon, \quad \left|\frac{d^j g(c')}{ds^j}\right| \leqq \varepsilon, \quad j=0, 1, 2.$$

By Lemma 8 we have on $P_1' P_2'$

$$|\varphi| \leqq C_1 \varepsilon + \frac{1}{2^3 \cdot 6!} M_6 c'^6, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right| \leqq C_2 \varepsilon \frac{1}{c'} + \frac{1}{2 \cdot 5!} c'^5.$$

Letting $\varepsilon \to 0+$ we see that on the side $P_1 P_2$ it holds

$$|\varphi| \leqq \frac{1}{2^3 \cdot 6!} M_6 c^6,$$

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right| \leqq \frac{1}{2 \cdot 5!} M_6 c^5. \tag{25}$$

[5] In the sequel we shall denote by C_j absolute constants, i.e. constants independent on functions considered, on the interval $\langle 0, l \rangle$ and on the triangle T.

The same estimates are true for the other sides. As $\frac{\partial \varphi(Q_j)}{\partial \nu} = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ we obtain from the last estimate and Lemma 1 that

$$\left|\frac{\partial \varphi(Q_j)}{\partial x_k}\right| \leqq \frac{1}{2 \cdot 5!} M_6 c^5, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2. \tag{26}$$

Now by translation of the origin of coordinates we achieve that the vertex P_1 lies in the origin. Let α_1 and α_2 be the angles between the side $P_1 P_2$ and $P_1 P_3$, respectively, and the x_1-axe. Then $|\alpha_2 - \alpha_1| = \alpha$ and we can assume that $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Let us introduce new coordinates ξ_1, ξ_2 by the linear transformation

$$\xi_1 = \frac{1}{c \sin \alpha}(x_1 \sin \alpha_2 - x_2 \cos \alpha_2), \quad \xi_2 = \frac{1}{b \sin \alpha}(-x_1 \sin \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_1)$$

so that

$$x_1 = c \cos \alpha_1 \cdot \xi_1 + b \cos \alpha_2 \cdot \xi_2, \quad x_2 = c \sin \alpha_1 \cdot \xi_1 + b \sin \alpha_2 \cdot \xi_2.$$

The triangle $\overline{T}$ is mapped on the triangle $\overline{T}_1$ with vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ and the points Q_j are transformed in the mid points of the sides, i.e. in the points $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$. We denote the new vertices by R_j and the new mid points of the sides by S_j. Let us consider the function $\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{\varphi(x_1, x_2)}{c^6 M_6}$. This function is four times continuously differentiable on $\overline{T}_1$ as it belongs to $\widetilde{W}_2^{(6)}(T_1)$ and it holds

$$\begin{gathered} |D^i \psi(\xi_1, \xi_2)| \leqq 8, \quad |i| = 6, \quad (\xi_1, \xi_2) \in T_1, \\ D^i \psi(R_j) = 0, \quad |i| \leqq 2, \quad j = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{27}$$

Further, from (25) and (26) we have

$$|\psi| \leqq \frac{1}{2^3 \cdot 6!} \tag{28}$$

on the boundary of T_1 and

$$\left|\frac{\partial \psi(S_j)}{\partial \xi_k}\right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 5!}, \quad j = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2. \tag{29}$$

We shall prove that it follows from these estimates

$$|\psi(\xi_1, \xi_2)| \leqq C_6 \quad \text{for} \quad (\xi_1, \xi_2) \in \overline{T}_1. \tag{30}$$

Then from (27), (30) and from Sobolev's lemma ($k = 6$ so that $0 \leqq m < 5$) we get $|D^i \psi(\xi_1, \xi_2)| \leqq C_7$, $|i| \leqq 4$. If we return to the function $\varphi(x_1, x_2)$ we see that it holds

$$|D^i \varphi(x_1, x_2)| \leqq \frac{C_8}{(\sin \alpha)^{|i|}} M_6 c^{6-|i|}, \quad |i| \leqq 4, \quad (x_1, x_2) \in \overline{T}.$$

To prove (30) let us consider a triangle $R_1' R_2' R_3'$ lying inside T_1 with sides parallel to the sides of T in a distance δ. We choose δ so small that $|D^i \psi(R_j')| \leqq \varepsilon$, $|i| \leqq 2$, $\left|\frac{\partial \psi(S_j')}{\partial \xi_k}\right| \leqq \varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 5!}$, $k = 1, 2$ and we consider the function $g = \left.\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}\right|_{R_1' R_2'}$. Obviously $s = \xi_1$, $|g^{(j)}(0)| \leqq \varepsilon$, $|g^{(j)}(l)| \leqq \varepsilon$ for $j = 0, 1$, $\left|g\left(\frac{1}{2} l\right)\right| \leqq \varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 5!}$ by (29) and $|g^{(5)}(\xi_1)| \leqq 8$ by (27). Using Lemma 9 and letting $\varepsilon \to 0+$ we get

$$\left| \frac{\partial^3 \psi(\xi_1, 0)}{\partial \xi_1^3} \right| \leqq C_4 \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 5!} + \frac{8}{6} = C_9 .$$

Considering the function $g = \left.\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}\right|_{R_1' R_3'}$, we prove $\left| \frac{\partial^3 \psi(0, \xi_2)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} \right| \leqq C_{10}$. These estimates are simultaneously true in the point $R_1 = (0, 0)$ and can be proved also for the remaining derivatives of the third order so that it holds

$$|D^i \psi(0, 0)| \leqq C_{11}, \quad |i| = 3. \tag{31}$$

Further by similar arguments it can be proved that

$$\left| \frac{\partial \psi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_k} \right| \leqq C_{12} \quad \text{on} \quad R_2 R_3, \quad k = 1, 2. \tag{32}$$

Now let R be an arbitrary point of T_1 and R_4 be the point of the side $R_2 R_3$ which lies on the line going through the origin R_1 and the point R. The length of the segment $R_1 R_4$ is not greater than 1. Let us consider the function $g = \psi|_{R_1 R_4}$ as a function of a parameter s. It holds $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$, $|g^{(3)}(0)| \leqq 2\sqrt{2}\, C_{11}$ by (31), $|g(l)| \leqq \frac{1}{2^3 \cdot 6!}$ by (28), $|g'(l)| \leqq \sqrt{2}\, C_{12}$ by (32), $|g^{(6)}(s)| \leqq 2^3 \cdot 8$ by (27) and $l \leqq 1$. Hence (30) follows from Lemma 10.

References

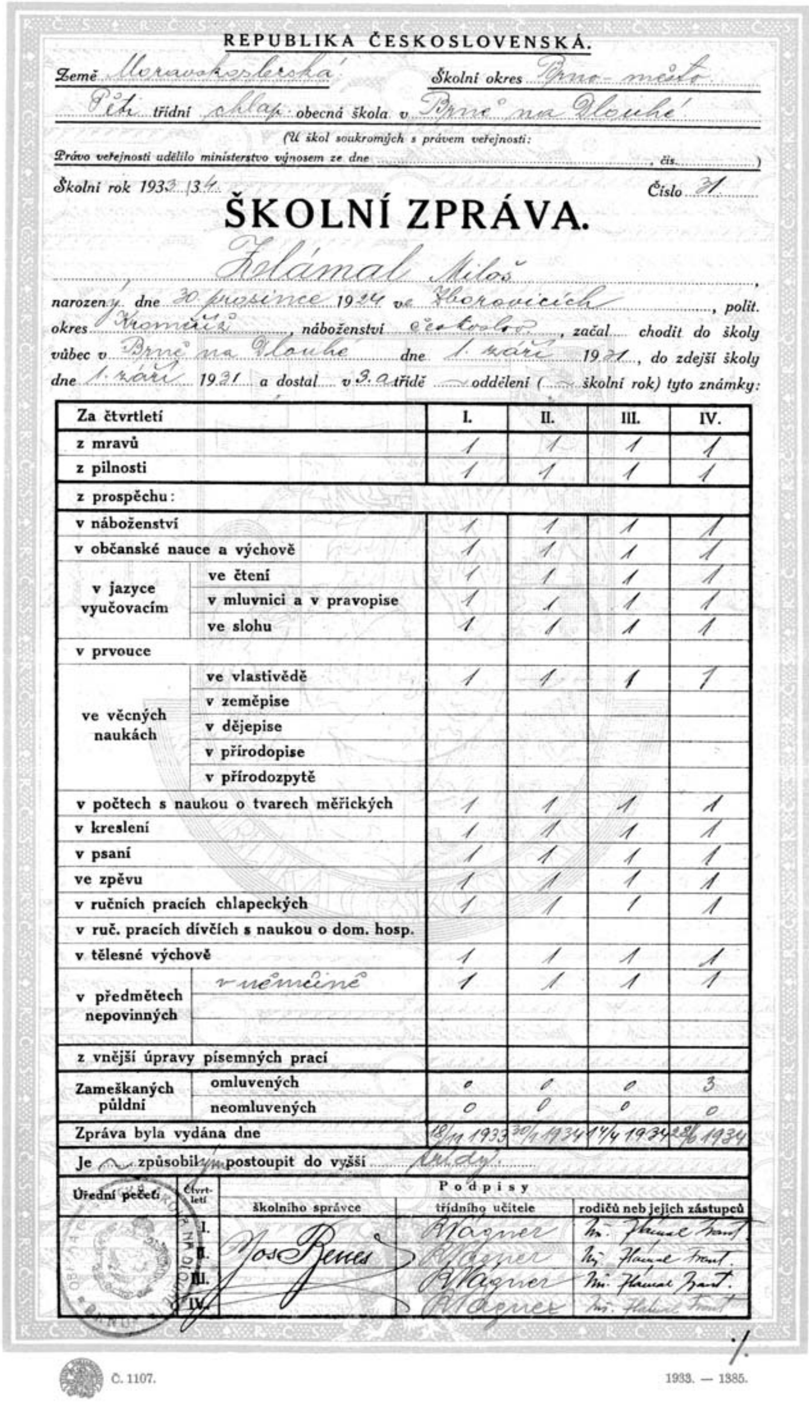
1. Aubin, J.-P.: Approximation des espaces de distributions et des opérateurs differentiels. Bull. Soc. Math. France, Mémoire **12** (1967).
2. Berezin, I. S., and N. P. Židkov: Computing methods, vol. I. English translation. Oxford: Pergamon Press 1965.
3. Birkhoff, G., M. H. Schultz, and R. S. Varga: Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations. Numer. Math. **11**, 232–256 (1968).
4. Céa, J.: Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **14**, 345–444 (1964).
5. Ciarlet, P. G.: Variational methods for non-linear boundary value problems. Thesis, Case Institute of Technology, June 1966.
6. — M. H. Schultz, and R. S. Varga: Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. I. One dimensional problem. Numer. Math. **9**, 394–430 (1967).
7. Clough, R. W., and J. L. Tocher: Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Dayton, Ohio, Oct. 1965.
8. Courant, R.: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 1–23 (1943).
9. Fraeijs de Veubeke, B.: Displacement and equilibrium models in the finite element method, chap. 9 of Stress analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister. London: Wiley 1965.
10. — A conforming finite element for plate bending. Int. J. Solids Structures **4**, 95–108 (1968).
11. Friedrichs, K.: Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung. Math. Annalen **98**, 205–247 (1928).
12. Friedrichs, K. O., and H. B. Keller: A finite difference scheme for generalized Neumann problems. Numerical solution of partial differential equations. Proceedings of a Symposium held at the University of Maryland, ed. by J. H. Bramble. New York: Academic Press 1966.

13. Michlin, S. G., and H. L. Smolickiĭ: Approximate methods for solution of differential and integral equations. English translation. New York: Elsevier 1967.
14. Oganesjan, L. A.: Convergence of difference schemes in case of improved approximation of the boundary. [In Russian.] Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **6**, 1029—1042 (1966).
15. Smirnov, V. I.: A course in higher mathematics, vol. V. English translation. Oxford: Pergamon Press 1964.
16. Varga, R. S.: Hermite interpolation-type Ritz methods for two-point boundary value problems. Numerical solution of partial differential equations. Proceedings of a Symposium held at the University of Maryland, ed. by J. H. Bramble. New York: Academic Press 1966.
17. Zienkiewicz, O. C.: The finite element method in structural and continuum mechanics. London: McGraw Hill 1967.

Prof. Dr. M. Zlámal
Technical University
Obránců míru 21
Brno, Czechoslovakia

ČSSM
PRO MECHANIKU
PŘI ČSAV
MILOŠI ZLÁMALOVI DrSc.
ALMA MATER CAROLINA PRAGENSIS
VUT

Dokumenty a ocenění


REPUBLIKA ČESKOSLOVENSKÁ.

Země Moravskoslezská Školní okres Brno-město

Pěti třídní chlap. obecná škola v Brně na Dlouhé

(U škol soukromých s právem veřejnosti:
Právo veřejnosti udělilo ministerstvo výnosem ze dne ...., čís. ....)

Školní rok 1933/34 Číslo 31

ŠKOLNÍ ZPRÁVA.

Zlámal Miloš

narozeny dne 30. prosince 1924 ve Zborovicích, polit. okres Kroměříž, náboženství českoslov., začal chodit do školy vůbec v Brně na Dlouhé dne 1. září 1931, do zdejší školy dne 1. září 1931 a dostal v 3. a třídě — oddělení (— školní rok) tyto známky:

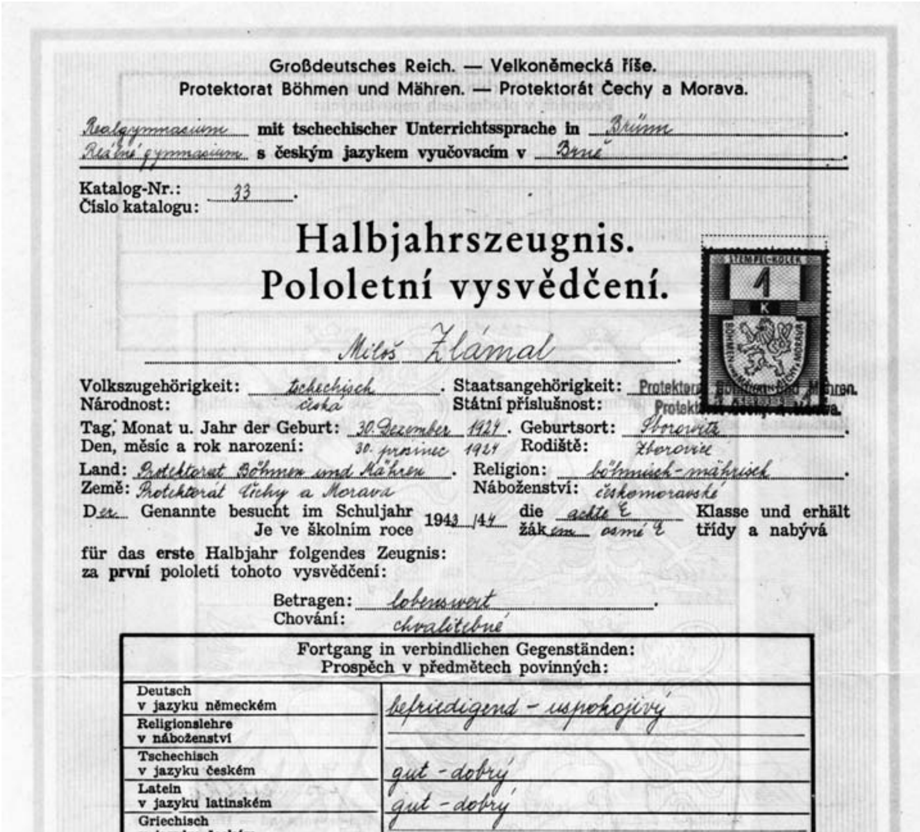
Za čtvrtletí		I.	II.	III.	IV.
z mravů		1	1	1	1
z pilnosti		1	1	1	1
z prospěchu:					
v náboženství		1	1	1	1
v občanské nauce a výchově		1	1	1	1
v jazyce vyučovacím	ve čtení	1	1	1	1
	v mluvnici a v pravopise	1	1	1	1
	ve slohu	1	1	1	1
v prvouce					
ve věcných naukách	ve vlastivědě	1	1	1	1
	v zeměpise				
	v dějepise				
	v přírodopise				
	v přírodozpytě				
v počtech s naukou o tvarech měřických		1	1	1	1
v kreslení		1	1	1	1
v psaní		1	1	1	1
ve zpěvu		1	1	1	1
v ručních pracích chlapeckých		1	1	1	1
v ruč. pracích dívčích s naukou o dom. hosp.					
v tělesné výchově		1	1	1	1
v předmětech nepovinných	v němčině	1	1	1	1
z vnější úpravy písemných prací					
Zameškaných půldní	omluvených	0	0	0	3
	neomluvených	0	0	0	0
Zpráva byla vydána dne		18/11 1933	30/1 1934	14/4 1934	28/6 1934

Je ~ způsobilým postoupit do vyšší třídy.

Úřední pečeť	Čtvrtletí	Podpisy školního správce	Podpisy třídního učitele	Podpisy rodičů neb jejich zástupců
	I.	Jos. Beneš	B. Wagner	Hanák Frant.
	II.		B. Wagner	Hanák Frant.
	III.		B. Wagner	Hanák Frant.
	IV.		B. Wagner	Hanák Frant.

Č. 1107. 1933. — 1385.

D1 Školní zpráva — vysvědčení ze třetí třídy obecné školy.



Großdeutsches Reich. — Velkoněmecká říše.
Protektorat Böhmen und Mähren. — Protektorát Čechy a Morava.

Realgymnasium mit tschechischer Unterrichtssprache in Brünn.
Reálné gymnasium s českým jazykem vyučovacím v Brně.

Katalog-Nr.:
Číslo katalogu: 33.

Halbjahrszeugnis.
Pololetní vysvědčení.

Miloš Zlámal.

Volkszugehörigkeit: tschechisch. Staatsangehörigkeit: Protektorat Böhmen und Mähren.
Národnost: česká. Státní příslušnost: Protektorát Čechy a Morava.
Tag, Monat u. Jahr der Geburt: 30. Dezember 1924. Geburtsort: Zborowitz.
Den, měsíc a rok narození: 30. prosince 1924. Rodiště: Zborovice.
Land: Protektorat Böhmen und Mähren. Religion: böhmisch-mährisch.
Země: Protektorát Čechy a Morava. Náboženství: českomoravské.
Der Genannte besucht im Schuljahr 1943/44 die achte E Klasse und erhält
Je ve školním roce 1943/44 žákem osmé E třídy a nabývá
für das erste Halbjahr folgendes Zeugnis:
za první pololetí tohoto vysvědčení:

Betragen: lobenswert.
Chování: chvalitebné

Fortgang in verbindlichen Gegenständen: Prospěch v předmětech povinných:	
Deutsch v jazyku německém	befriedigend - uspokojivý
Religionslehre v náboženství	
Tschechisch v jazyku českém	gut - dobrý
Latein v jazyku latinském	gut - dobrý
Griechisch v jazyku řeckém	
Französisch v jazyku francouzském	befriedigend - uspokojivý
v jazyku	
v Konversation konversaci	
Geschichte - ~~Vaterlandskunde~~ v dějepise - ~~ve vlastivědě~~	befriedigend - uspokojivý
Erdkunde v zeměpise	befriedigend - uspokojivý
Mathematik v matematice	sehr gut - velmi dobrý
Biologie v biologii	befriedigend - uspokojivý
Chemie v chemii	
Physik ve fysice	sehr gut - velmi dobrý
Geometrisches Zeichnen v rýsování	
Darstellende Geometrie v deskriptivní geometrii	sehr gut - velmi dobrý
Zeichnen v kreslení	
Leibeserziehung v tělesné výchově	gut - dobrý

805-70 (Rg.—Rrg.—(G. V.—VIII.) (R. VI.—VIII.) — Schulverlagsanstalt. 1944. — 2-92.

D2 Poslední válečné — pololetní vysvědčení z 8. třídy Reálného gymnázia s českým jazykem vyučovacím v Brně. V druhém pololetí byl totálně nasazen v Breslau (Vratislav), maturitu složil až po osvobození 1945.

AKČNÍ VÝBOR
přírodovědecké fakulty Masarykovy
university v Brně
Č.j. 320/48

V Brně, 13. května 1948.

Pan

Miloš Zlámal,

Brno, Kartouzská 8.

Akční výbor přírodovědecké fakulty M.U. Vám dává na vědomí, že je plně informován o Vašem dřívějším, lidpvě demokratickému zřízení nepřátelském a protisocialistickém smýšlení a doufá, že změnu názorů plně projevíte tím, že se přihlásíte na šestitýdenní brigádu na stavbě mládeže u Vizovic. Termín si volte tak, abyste brigádu mohl absolvovati během hlavních prázdnin v tomto roce.

Splníte-li uloženou povinnost, prokážete tám, že chcete odčiniti to, čím jste se v minulé době provinil proti lidově demokratickému zřízení našeho státu. Jedině na podkladě splnění této výzvy může akční výbor posouditi změnu Vašeho postoje a nevyvodí žádné další důsledky.

AKČNÍ VÝBOR
přírodovědecké fakulty Masarykovy
university v Brně

Dr.V.Morávek. předseda

Dr. Zd. Vavřín, jednatel.

D3 Typický dokument doby po únoru 1948.

Q. F. F. F. Q. S.

UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS

SUMMIS AUSPICIIS SUPREMAE POTESTATIS REI PUBLICAE BOHEMOSLOVENICAE

UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS

CUM AUCTORITATEM SUAM NOBIS EXSEQUENDAM MANDAVISSET, NOS

FRANTIŠEK TRÁVNÍČEK

PHILOSOPHIAE DOCTOR, GRAMMATICAE LINGUAE BOHEMICAE AD DIALECTOLOGIAM BOHEMOSLOVENICAM SPECTANTIS PROFESSOR ORDINARIUS ETC.

RECTOR MAGNIFICUS

VLADIMÍR MORÁVEK

RERUM NATURALIUM DOCTOR ET PHARMACIAE MAGISTER, PHYSIOLOGIAE CHEMICAE PROFESSOR ORDINARIUS ETC.

FACULTATIS RERUM NATURALIUM DECANUS

FRANTIŠEK TOUL

RERUM NATURALIUM DOCTOR, CHEMIAE ANORGANICAE PROFESSOR ORDINARIUS ETC.

PROMOTOR RITE CONSTITUTUS

IN VIRUM CLARISSIMUM

MILOŠ ZLÁMAL

NATUM IN ZBOROVICE

POSTQUAM ET DISSERTATIONE, QUAE »O POSTAČUJÍCÍCH PODMÍNKÁCH PRO JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ SYSTÉMU $y_\nu' = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ A POSLOUPNOSTECH SOUVISÍCÍCH S TÍMTO SYSTÉMEM« INSCRIBITUR, ET EXAMINIBUS LEGITIMIS EMINENTEM IN MATHEMATICA ANALYSI ET ALGEBRA NEC NON IN MECHANICA ANALYTICA DOCTRINAM PROBAVIT

DOCTORIS RERUM NATURALIUM

NOMEN ET HONORES, IURA ET PRIVILEGIA CONTULIMUS IN EIUSQUE REI FIDEM HASCE LITTERAS UNIVERSITATIS SIGILLO SANCIENDAS CURAVIMUS

DATUM BRUNAE DIE 10. M. FEBRUARII 1949

Dr L. Seifert
PRORECTOR

Prof. Dr Vladimír Morávek
DECANUS

Prof. Dr František Toul
PROMOTOR RITE CONSTITUTUS

D4 Diplom doktora přírodních věd Masarykovy univerzity v Brně.

PRESIDENT ČESKOSLOVENSKÉ SOCIALISTICKÉ REPUBLIKY

UDĚLUJE

PROF. RNDR. MILOŠI ZLÁMALOVI, DRSC.

ZA VYPRACOVÁNÍ A ROZVINUTÍ MATEMATICKÉ TEORIE KONEČNÝCH PRVKŮ
A ZA JEJÍ APLIKACI V TECHNICKÉ PRAXI

STÁTNÍ CENU KLEMENTA GOTTWALDA

S ČESTNÝM TITULEM

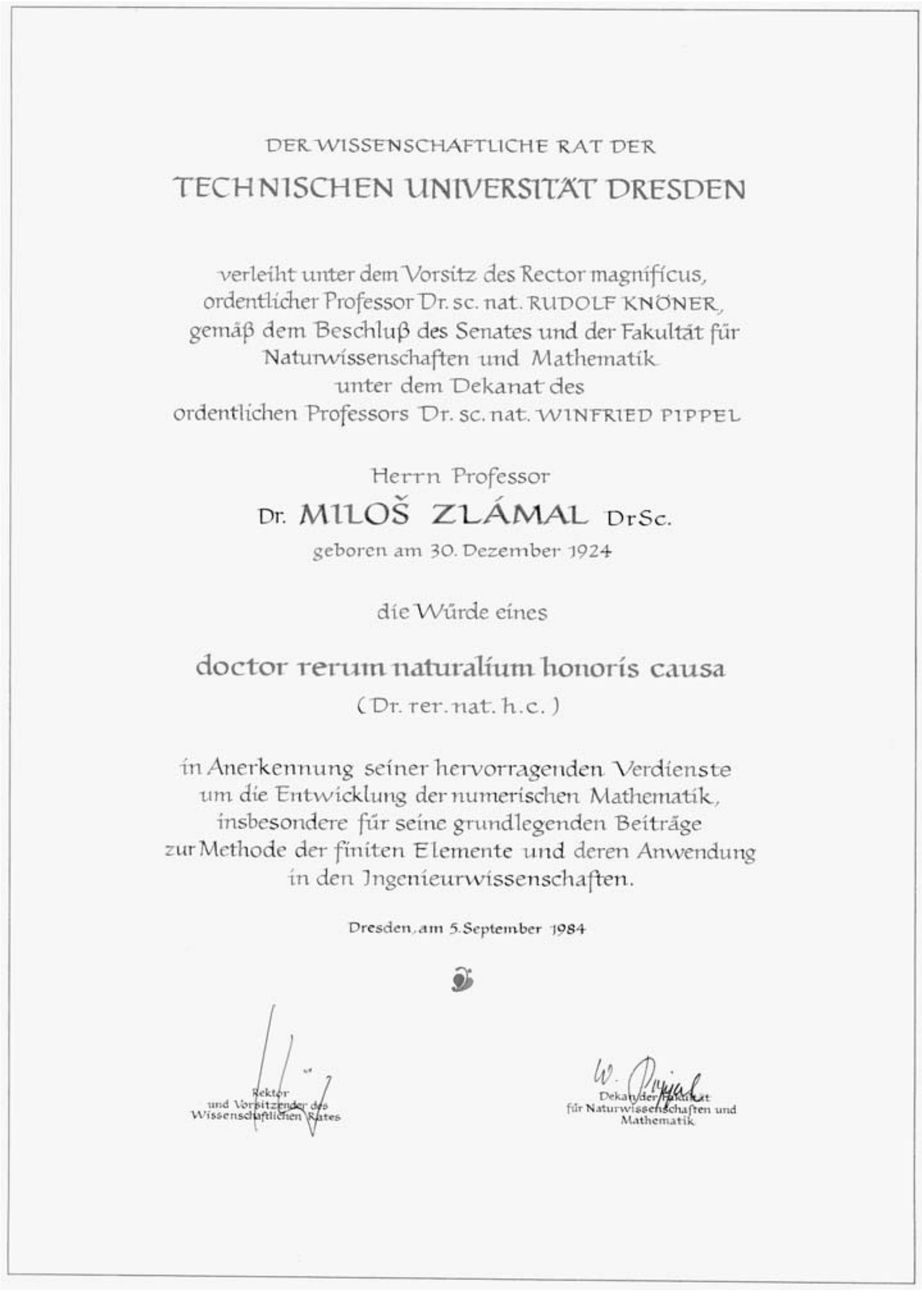
LAUREÁT STÁTNÍ CENY KLEMENTA GOTTWALDA

V PRAZE DNE 30. DUBNA 1974

PŘEDSEDA VLÁDY ČSSR

D5 Diplom o udělení Státní ceny Klementa Gottwalda.

D6 Diplom o jmenování členem korespondentem Československé akademie věd.



DER WISSENSCHAFTLICHE RAT DER

TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN

verleiht unter dem Vorsitz des Rector magnificus,
ordentlicher Professor Dr. sc. nat. RUDOLF KNÖNER,
gemäß dem Beschluß des Senates und der Fakultät für
Naturwissenschaften und Mathematik
unter dem Dekanat des
ordentlichen Professors Dr. sc. nat. WINFRIED PIPPEL

Herrn Professor

Dr. MILOŠ ZLÁMAL DrSc.

geboren am 30. Dezember 1924

die Würde eines

doctor rerum naturalium honoris causa

(Dr. rer. nat. h.c.)

in Anerkennung seiner hervorragenden Verdienste
um die Entwicklung der numerischen Mathematik,
insbesondere für seine grundlegenden Beiträge
zur Methode der finiten Elemente und deren Anwendung
in den Ingenieurwissenschaften.

Dresden, am 5. September 1984

Rektor
und Vorsitzender des
Wissenschaftlichen Rates

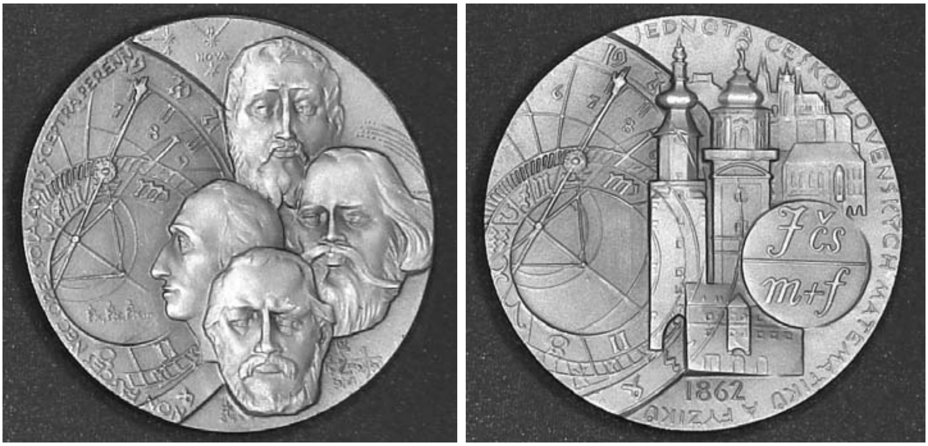
W. Pippel
Dekan der Fakultät
für Naturwissenschaften und
Mathematik

D7 Diplom čestného doktora Technické univerzity v Drážďanech.

D8 Bronzová medaile VUT 1969.

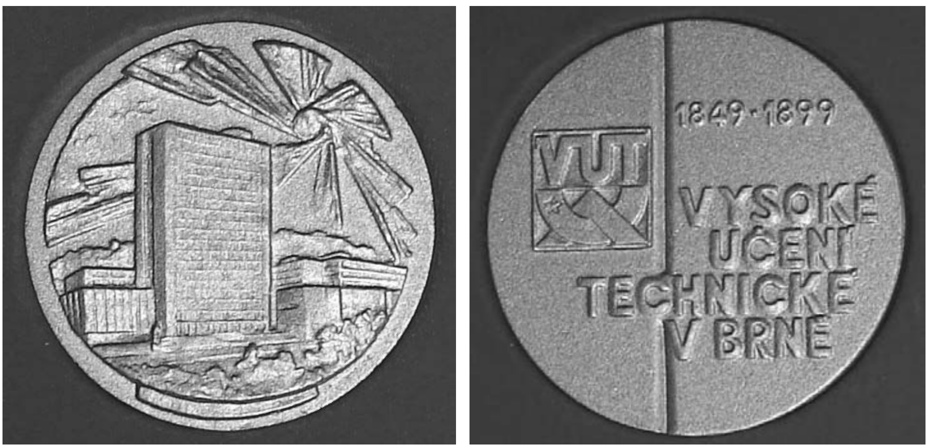
D9 Uznání z průmyslu — Cena Jiřího Dimitrova — ČKD Blansko.

D10 Zlatá plaketa Bernarda Bolzana Československé akademie věd.



D11 Pamětní medaile Jednoty československých matematiků a fyziků.

D12 Pamětní medaile Československé společnosti pro mechaniku.



D13 Pamětní medaile Vysokého učení technického v Brně.

D14 Pamětní medaile Univerzity Karlovy.

D15 Pamětní medaile Matematicko-fyzikální fakulty.

D16 Pamětní medaile Masarykovy univerzity.

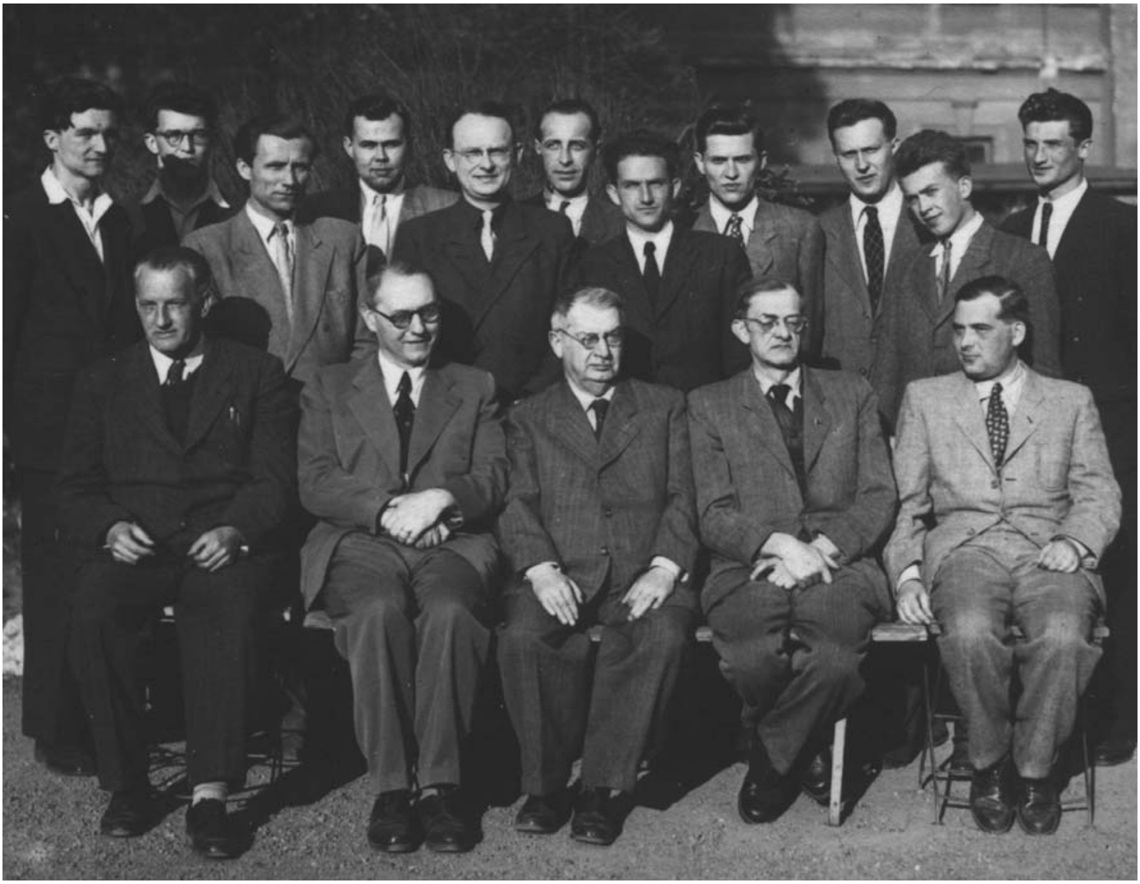
Fotografická příloha

F1 Učitelé Ústavu matematiky Vysoké školy technické Dr. Beneše v Brně asi 1949–1950. Stojící (zleva): Jiří Čermák, Jan Polášek, Miloš Mikulík, František Šik, Miloš Zlámal, sedící: Sylva Šantavá, prof. Josef Kaucký a Miroslav Novotný.

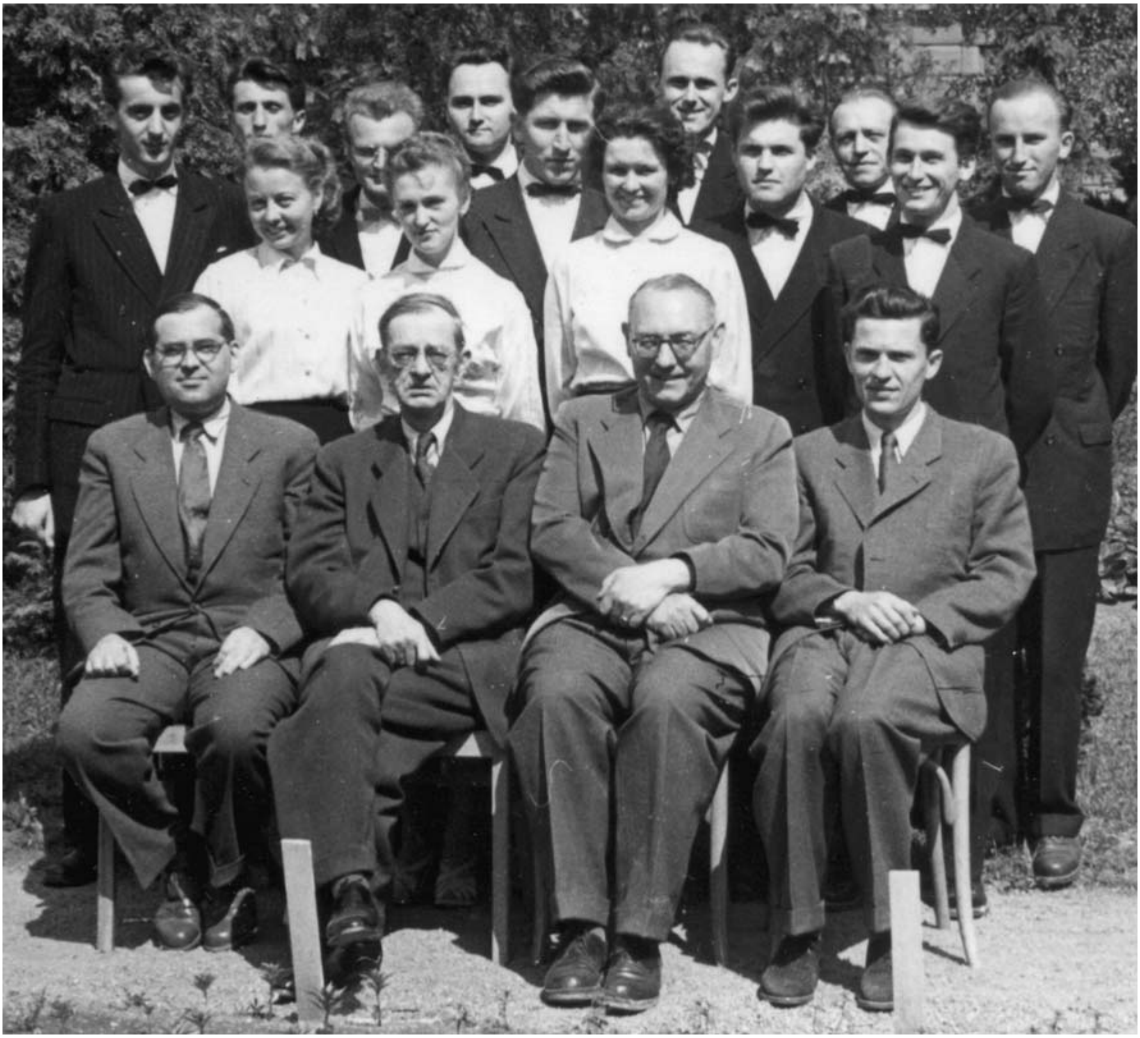
F2 Uprostřed Miloš Zlámal, asi 1946 – 1948.

F3 Z povinné základní vojenské služby 1951/1952, první stojící vlevo.

F4 Portrét z roku 1955.



F5 Učitelé matematického ústavu přírodovědecké fakulty 22. 4. 1953. Zleva sedící: Jan Srb, Otakar Borůvka, Ladislav Seifert, Karel Koutský, Miroslav Novotný; stojící: Květoslav Stach, Karel Čulík, František Šik, Ladislav Horák, Josef Škrášek, Karel Svoboda, Erich Barvínek, Miloš Zlámal, Miroslav Laitoch, Milan Sekanina, Miloš Ráb.



F6 Absolventi Přírodovědecké fakulty Univerzity v Brně se svými učiteli v červnu 1957. Sedící (zleva): doc. Miroslav Novotný, prof. Karel Koutský, prof. Otakar Borůvka, doc. Miloš Zlámal. Stojící páni (zleva): Josef Miklíček, Miloš Husička, Bohumil Hrůza, Václav Polák, Alois Urbanec, Jaromír Vosmanský, Stanislav Koukal, Jan Otčenášek, Jindřich Veverka, Antonín Popelka; dámy: Jindřiška Miklíčková, Jitka Zemanová (r. Kučerová), Elvíra Snášelová.

F7 Z iniciativy profesora Borůvky se každoročně konaly tzv. „Matematické výlety“. Během těchto výletů, které střídavě organizovali matematici z brněnské a bratislavské univerzity, se navazovaly neformální vztahy mezi studenty a učiteli z Brna, Bratislavy i dalších měst, které často přešly v celoživotní přátelství.
Fotografie jsou z Matematického výletu v roce 1957 na Malou Fatru. Nahoře: Karel Čulík, Otakar Borůvka, Miloš Zlámal, Zdena Rábová a dva studenti; dole: Karel Čulík, Miloš Zlámal a Otakar Borůvka.

F8 Z otevírání výpočetního střediska Fakulty elektrotechnické VUT, které proběhlo v dubnu 1976. Zleva: Ing. Jiří Křístel, prof. Jan Blatný, prof. Miloš Zlámal a doc. Karel Křivý.

F9 M. Zlámal v rozhovoru s členy Mezinárodní organizace novinářů.

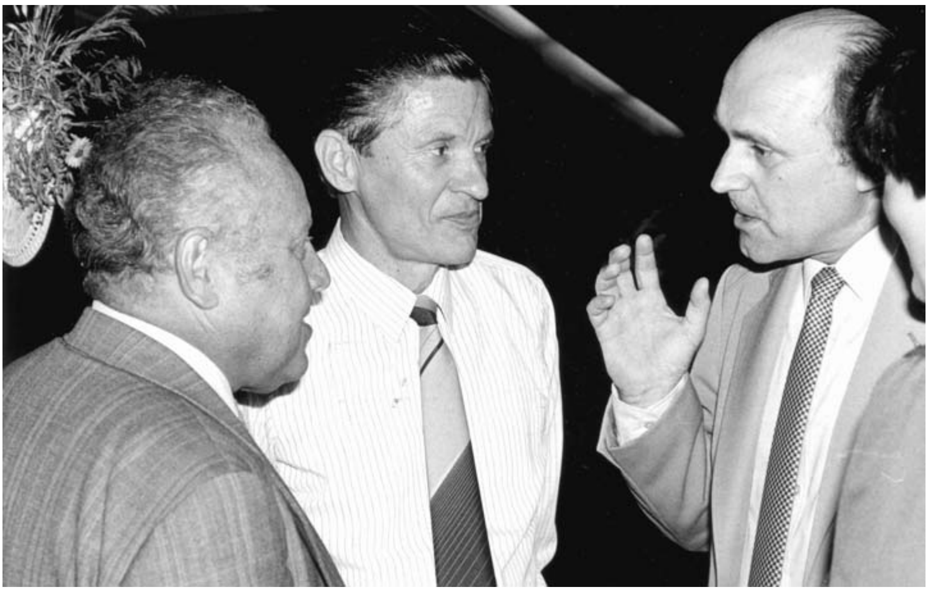
F10 Z předávání Stříbrné plakety Bernarda Bolzana v Praze 1979.
Nahoře: Jindřich Bačkovský, Miloš Zlámal, Josef Novák a Jiří Nedoma;
dole: Václav Koutník, Miloš Zlámal a Jindřich Bačkovský.

F11 Ze slavnostního předávání čestného doktorátu profesoru Miloši Zlámalovi na Technické univerzitě v Drážďanech v roce 1984.

F12 Zlatou plaketu Bernarda Bolzana Československé akademie věd předával prof. Zlámalovi v roce 1984 na Ústavu fyzikální metalurgie ČSAV v Brně akademik Přemysl Ryš; vlevo: prof. Zlámal se svojí paní Ludmilou.
Vpravo nahoře: Josef Nedoma, Karel Segeth, Miroslav Fiedler, prorektor Halaxa; uprostřed: Miloš Zlámal, Přemysl Ryš; dole: Ludmila Zlámalová, František Šik, Ivan Kolář, Jiří Hřebíček.

F13 Mezinárodní *Československá konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích* EQUADIFF 6 se konala v Brně 26.– 30. srpna 1985, předsedou organizačního výboru byl M. Zlámal.

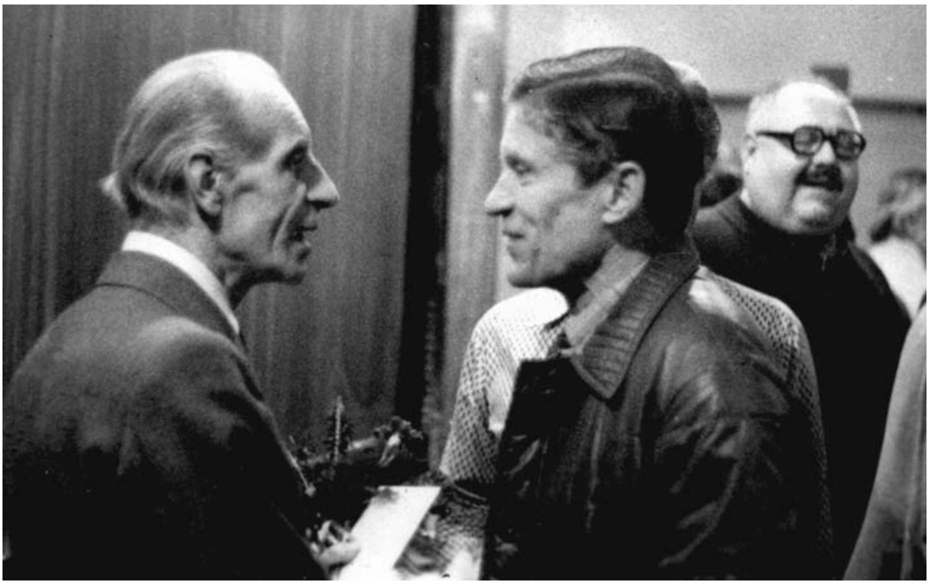
Nahoře: slavnostní zahájení (zleva): Jaroslav Kurzweil, Jaroslav Sýkora (prorektor UJEP), Miloš Zlámal, Karol Filakovský (děkan FS VUT), Alois Kufner; dole: Miloš Zlámal v diskusi s prorektorem Sýkorou a Jaromírem Vosmanským.



F13a Z přijetí delegace konference u primátora města Brna. Nahoře: na radnici u kulatého stolu: Miloš Zlámal, Miroslav Bartušek, xy, V. N. Maslennikova, Jean Mawhin, Jaromír Vosmanský, Jaroslav Sýkora, xy, xy, Roberto Conti, Ravi P. Agarwal, Czeslaw Olech, Lothar Collatz; dole: na nádvoří radnice: Lothar Collatz, Avner Friedman, Miroslav Bartušek, Ravi P. Agarwal, Miloš Zlámal, Jean Mawhin, Jaroslav Sýkora, Roberto Conti, xy, Vera N. Maslennikova, Jaromír Vosmanský, Czeslaw Olech.

F14 Ze semináře „Numerické metody ve fyzikální metalurgii“, který se konal v Blansku v květnu 1988.

Zleva: Jiří Hřebíček, Ivo Marek, Miloš Zlámal a Ivan Hlaváček.

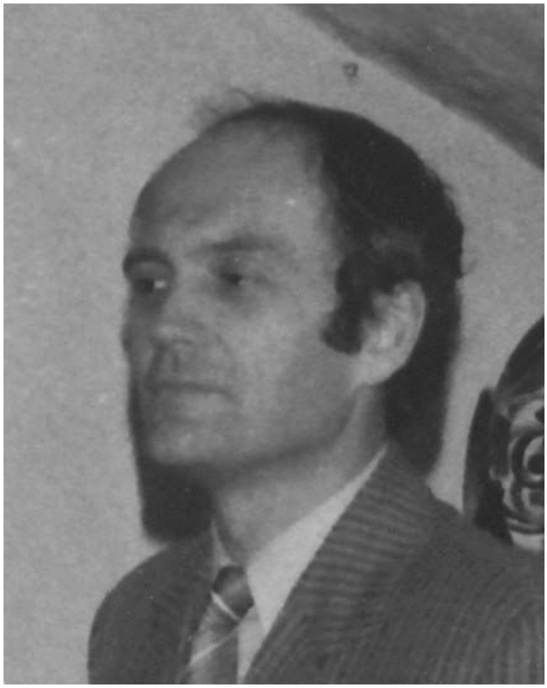


F15 Prof. M. Zlámal v rozhovoru s geometrem prof. Karlem Svobodou, vzadu statistik Dr. Pavel Osecký.

F16 Fyzik František Lukeš, astronom Bedřich Onderlička a M. Zlámal.

F17 M. Zlámal, statistik Jiří Polách a fyzik Pavel Neusser z Mnichova při návštěvě Brna 25. 3. 1989.

F18 Profesor Zlámal a jeho spolupracovníci z Oblastního výpočetního centra na oslavě narozenin doc. Heleny Růžičkové 28. února 1989. Nahoře pánové zleva: Miroslav Novák, prof. Alexander Ženíšek, Ing. Libor Holuša, doc. Jiří Kopřiva; dole: doc. Josef Nedoma a prof. Miloš Zlámal.

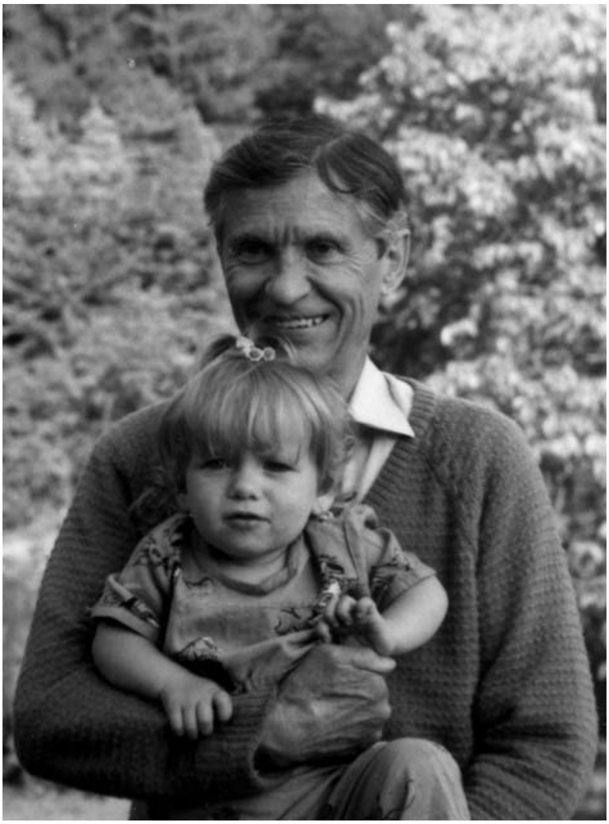


Nahoře: doc. Helena Růžičková a doc. Libor Čermák, dole: Ing. Libor Holuša a prof. Ladislav Mejzlík.

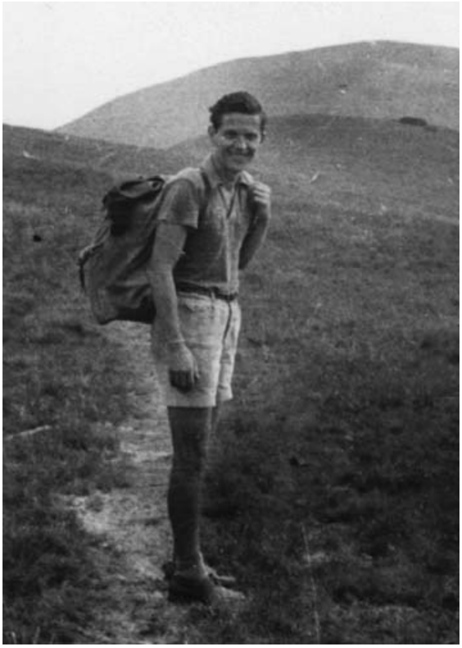
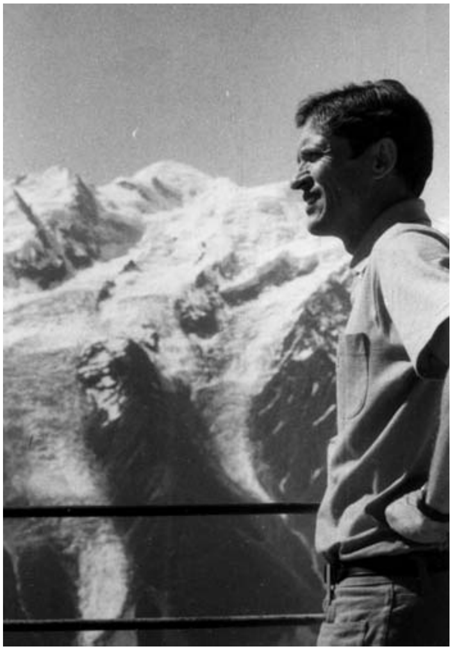
F19 Svatební fotografie 19. 1. 1952 — Miloš Zlámal a Ludmila rozená Vichrová.

Manželé Zlámalovi se synem.

F20 M. Zlámal s paní Ludmilou a vnuky Davidem a Terezkou.



M. Zlámal s vnučkou Terezkou.

F21 K zálibám profesora Zlámala patřily hory (s vrcholem Mont Blancu při návštěvě Chamonix), rád také hrával tenis a lyžoval.

F22 Léta se scházel s přáteli při karetní hře taroky (kterou hrával vždy s velkým nasazením) a v sauně, přičemž nechyběl humor, pošťuchování a recese: na snímku Jiří Polách předává vlastnoručně vyrobený diplom k narozeninám, přihlíží Karel Pellant.

F23 Portrét po roce 1990

English summary

Memorial afternoon

December 30, 2004 was the 80th anniversary of the birth of Professor Miloš Zlámal (December 30, 1924 – June 22, 1997), a world known scientist, significant professor of Brno University of Technology. He laid foundations to the mathematical theory of the Finite Element Method; he also contributed to propagation of using computers and computing methods and informatics in education and industry.

On this occasion a Memorial Afternoon took place in the University Hall of the Centre of Brno University of Technology (BUT) on January 12, 2005. The Afternoon was organized under auspices of the rector of BUT Professor Jan Vrbka by the Institute of Mathematics of Faculty of Mechanical Engineering of, BUT, by the Czech Mathematical Society and Brno Local Chapter of the Union of Czech Mathematicians and Physicists.

The aim of the Afternoon was to commemorate this world known scientist, his work and era of development of the finite element method in Brno.

The seminar was opened by the rector of BUT Professor Jan Vrbka. In a personal remembrance he briefly appreciated Professor Zlámal's contribution to BUT. Later, Professor Alexander Ženíšek from the Institute of Mathematics, Faculty of Mechanical Engineering, BUT explained how Professor Zlámal had got to the finite element method. After a short video-recording of Zlámal's lecture Professor Michal Křížek from the Mathematical Institute in Prague of the Academy of Sciences of the

Czech Republic spoke about super-convergence phenomena in the finite element method, to which Professor Zlámal also contributed.
After a break Professor Jiří Kratochvíl from the Institute of Water Structures, Faculty of Civil Engineering, BUT spoke about his cooperation with mathematician professor Zlámal from the point of view of an engineer, and ing. Libor Holuša from the Faculty of Informacics, Masaryk University in Brno mentioned the point of view of a computer programmer. In the last contribution Professor Ivo Marek (Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague) brought a view from abroad. He associated various mathematical papers of Professor Zlámal to the famous music works composed by Antonín Dvořák.
Between the contributions Professor Jiří Jan from the Department of Biomedical Engineering, FEEC BUT, performed short baroque organ pieces.
The Memorial Afternoon was closed by a toast and snack (sponsored by Professor Jiří Hřebíček) in the Assemble Hall of the Centre.
On this occasion an exhibition of historical photographs, documents and diplomas were prepared. Also a faksimile of the famous 1968 paper was displayed. It laid foundations of the finite element method mathematical theory and brought the author appreciation worldwide. The seminar, as well as the exhibition was prepared and moderated by Jan Franců.
The nice setting of the BUT Center offered good condition s for this modest reminder of this world-known scientist, significant professor at BUT and an excellent man.

The booklet contains all contributions presented during the Memorial Afternoon and the documents and photographs displayed on four panels. In selected pictures the editor wished to commemorate also the atmosphere of the time, Zlámal's fellows and friends. Mrs. Ludmila Zlámalová (Professor Zlámal,s wife) lent all photos and documents, and also many colleagues have lent further pictures, helped with recognition of persons in the photos and advised the editor in editing the booklet.

The Editor

Biografical dates

December 30, 1924	born in Zborovice in Moravia close to Kroměříž
1936 – 1944	attended 3rd real gymnasium (comprehensive secondary school) in Brno
1944 – 1945	forced war labour in Breslau (now in Poland)
September 15, 1945	secondary school final examination in Brno
February 6, 1946	enrolled to Faculty of Science of Masaryk University in Brno
April 1, 1948	assistant at Institut of Mathematics, Dr. Eduard Beneš Technical University in Brno (now BUT)
February 10, 1949	graduated from the Fakulty of Science, Masaryk University with the title RNDr., defended the paper *On sufficient conditions for solution uniqueness of a system* $y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \dots, y_\nu))$ $(\nu = 1, \dots, n)$ *and sequences with this system*
1950 – 1951	postgraduate studies at the of the Matematical Institut, Czechoslovak Academy of Science in Prague
January 19, 1952	married Ludmila Vichrová
1951 – 1952	compulsory military service
1952	fellow at Faculty of Science, Brno University (now again Masaryk Univerzity)
1955	scientific degree *Candidate of Science* (Ph.d. equivalent) at the Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences; defending the paper *Study of oscilatory a asymptotic properties of solution to linear differential equations* supervised by prof. Dr. O. Borůvka

June 1, 1956	appointed "docent" (associate professor) at the Faculty of Science, Brno University
1956 – 1984	editorial board member of the scientific journal *Aplikovaná matematika* (now *Applications of Mathematics*)
September 1, 1961	moved to the Faculty of Mechanical Engineering of BUT
November 1, 1961	appointed head of the *Computing Machine Laboratory*, FME BUT
1963	appointed director of the *Computing Machine Laboratory* (later *Regional Computing Centre*)
April 17, 1963	obtained scientific degree of *Doctor of Science* (DrSc.) at the Mathematical Institute, Czechoslovak Academy of Sciences; defended the paper *Mixed problem for hyperbolic equations with a small parameter*
July 28, 1965	appointed full professor of mathematics
1968	published a paper *On the Finite Element Method*
March 16, 1981	appointed Member Correspondent of the Czechoslovak Academy of Sciences
1983 – 1992	president of Scientific Board for Mathematics of the Czechoslovak Academy of Sciences
1990	moved to Department of Mathematics of Faculty of Mechanical Engineering, BUT
1995	retired
June 22, 1997	died in Brno.

The complete list of Professor Zlámal's scientific publications is on pages 48-52 in this booklet.

Awards

November 19, 1969	Memorial bronze medal of BUT
April 30, 1974	Klement Gottwald State awards of *for creating and developing of the finite element mathematical theory and its application in engineering* (awarded the by President of the Republic)
June 15, 1974	George Dimitrov prize (awarded by industrial concern ČKD Blansko)
December 30, 1979	Bernard Bolzano silver plaque of the Czechoslovak Academy of Sciences
March 1981	Medal commemorating 35th anniversary of restoring University in Olomouc
September 5, 1984	Doctorate honoris causa at Technical University in Dresden
December 30, 1984	Bernard Bolzano golden plaque of the Czechoslovak Academy of Sciences
December 30, 1984	Golden memorial medal of BUT
1984	Golden medal of Palacky University in Olomouc
August 22, 1987	Honourable member of the Union of Czechoslovak Mathematicians and Physicists
December 9, 1987	Medal of Czechoslovak Society for Mechanics
1989	Memorial medal of BUT
1992	Memorial medal of Charles University in Prague *for significant contribution to the development and application of the finite element method*
1994	Silver medal of Masaryk University
1995	Honorable appreciation of the Faculty of Mechanical Engineering, BUT

In Memoriam Professor Miloš Zlámal[1]

Libor Čermák, Josef Nedoma, Alexander Ženíšek

On June 22, 1997, a prominent Czech mathematician Professor RNDr. Miloš Zlámal, DrSc., died unexpectedly at the age of 73 years.

Miloš Zlámal was born on December 30, 1924 in Zborovice near Kroměříž. He started his studies at 3rd secondary school (gymnasium) in Brno. After his final exams he entered the Faculty of Science of the Masaryk University in Brno to study Mathematics and Physics. He obtained his doctorate in 1949 and became Assistant Professor at the Technical University in Brno. In the academic year 1950/51 he was a postgraduate student in the Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences in Prague and, after fulfilling his military service, at the Faculty of Science, Masaryk University. After obtaining the scientific degree of Candidate of Science he remained at the Faculty till 1961, first as Assistant and later Associated Professor (Docent) of Mathematics.

Since 1961 his professional career but also his life were permanently connected with the Technical University in Brno. Here he worked briefly as Associated Professor at the Faculty of Mechanical Engineering. During 1963–90 he was director of the Regional Computation Centre and in 1990–95 he acted as Professor of Mathemaics in the Institute of Mathematics of the Faculty of Mechanical Engineering. Even when retired he was unable to imagine his life without mathematics and never stopped cooperating with the Faculty.

[1]Slightly revised paper published in the Czechoslovak Mathematical Journal 48 (123) (1998), 185–191, reprinted with permission of the Editor.

While working at the Technical University he obtained in 1963 the degree of Doctor of Science and in 1965 was appointed full professor. In 1980 he was awarded the Bernard Bolzano Silver Medal of the Academy of Sciences, in 1984 the Brno Technical University Golden Medal and doctorate honoris causa at Technical University in Dresden. In 1992 he obtained the Charles University Memorial Medal for his significant contribution to the development and application of the Finite Elements Method. In the period 1983–92 he held the chair of the Scientific Board for Mathematics of the Czechoslovak Academy of Sciences.

Professor Zlámal spent the major part of his extremely fruitful scientific career as head of the Computation Centre of the Technical University in Brno. Starting from its foundation, he was its director full 27 years. Originally a small computer centre developed under his leadership into one of the most important institutes within the frame of institutions of higher education in the country and played a considerable role in introducing modern computational methods and the computers themselves into practical use. Professor Zlámal lectured for a number of years for postgraduate engineering students about the most recent computational methods. More than 30 years he led a seminar for specialists in numerical methods both for Czechoslovak and foreign participants. Professor Zlámal engaged himself also in the education of a number of young scientists — most of them are now professors or researchers at various institutions of higher education.

As a young mathematician Miloš Zlámal worked in the theory of differential equations, first the ordinary and later the partial ones. Till the year 1967 he published 23 original papers from this field. Among the most important results from that period we should mention the theory of hyperbolic equations with small parameter at the highest derivative which became the topic of his thesis published in 1960. The essential part of this thesis was published in [13]. The most important period of his creative work started when in 1967 he became acquainted, through his collaboration with engineers, with the newly developing Finite Elements Method. He published his research concerning the method in 47 papers and his results brought him respect and fame all over the world.

Professor Zlámal was endued with an ability which is not quite common among mathematicians: he had lively interest in problems stemming from engineering practice, was able to listen to engineers, collaborate with them and use their problems as a starting point for his highly scientifically grounded research. So e. g. the topic of his thesis arose from his discussions with Professor V. Hálek, DrSc. His first information about the Finite Elements Method came from Professor J. Kratochvíl, DrSc., from the

Faculty of Civil Engineering of Technical University in Brno. Professor Zlámal recognized in the procedure used by engineers certain connections with a half-forgotten paper by R. Courant (Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc. *49*(1943), 1–23) and with variational methods generally. At first he intended to write only a short note on convergence of Veubecke's element, but new ideas and impulses coming in the course of work resulted in the paper [24], one of the papers most frequently cited in the Finite Elements Method.

In his seminar Professor Zlámal gradually formed a group of people fully engaged in the newly expanding Finite Elements Method. This gave rise to the Brno school of the method. It had the advantage of being directly connected with the computational practice: algorithms and foundations of software for the method were being developed parallelly with solving mathematical problems. In this direction, programmer's erudition of L. Holuša as well as practical experience of Professor Kratochvíl with the application of the method represented a considerable contribution. The software system was being developed for many years and, besides being used for practical applications, it served also for immediate verification of theoretical results.

The period 1967–73 could be called "the elliptic period"in Zlámal's work in the Finite Elements Method. The above mentioned paper [24] started a series of 18 papers which can be considered the best textbook of the Finite Elements Method of that time. For example, Professor Raviart from Paris claimed that he had learned the method from Zlámal's early papers.

Since 1973 (except for the period 1977–79 when he analyzed the superconvergence and reduced integration in the Finite Elements Method) M. Zlámal devoted himself to evolution problems. At first he treated linear parabolic equations, paying special attention to multistep methods. Since 1976 he systematically studied nonlinear problems, first of all again the parabolic equations. The two most important papers from this period are [50] where he studied the convergence of twostep A-stable difference methods and [56] where he dealt with the equation with a nonlinearity also in the term with time derivative.

During 1979–82 M. Zlámal studied mainly the parabolic-elliptic nonlinear equation, which has many applications in the solution of nonlinear magnetic fields. In particular, the papers [61] and [63] are of principal importance.

During 1983–90 M. Zlámal studied problems related to the numerical solution of equations describing processes in the production of semiconductors and their operation. The papers [65] and [69] should be mentioned as being of the greatest significance in this field.

During the last period of his life Professor Zlámal was engaged in the box method.

Professor Zlámal always did his best to verify his theoretical results in the Finite Elements Method numerically. This led gradually to the creation of programs for the solution of thin plates, for problems of plane elasticity with various kinds of elements mutually connected by interface elements, for heat transfer equations, magnetic fields, simulation of semiconductor production and basic semiconductor equations.

He always chose problems which were then topical not only from the theoretical but primarily from the practical point of view. In his papers he solved problems of basic significance and therefore his methods and proofs can be modified and extended to related fields, as we have seen for many a time. Thus careful reading of Zlámal's papers has often become an unexpected but extremely pleasant start of further creative work.

Only when looking back at the sum of scientific, pedagogical and organizing activities of Professor Miloš Zlámal we realize how much he has left to us and how much we will miss him. In Miloš Zlámal, Czech scientific community has lost one of its most prominent mathematicians and Institute of Mathematics of the Faculty of Mechanical Engineering his outstanding member.

List of Documents and Photographs

Page 7–8 Invitation to the Memorial Afternoon

Page 42 Memorial Afternoon January 12, 2005.

Up: Four panels with documents were displyed in the corridor. Prof. Miloš Ráb watching the panel with photographs.

Down, from the left: Ing. Ivo Zlámal (the son), Dr. Aleš Zlámal (nephew), Ludmila Zlámalová (wife of M. Zlámal), doc. Jan Franců and prof. Jiří Hřebíček.

Page 43 Up left: Prof. Jiří Kratochvíl from the Faculty of Civil Engineering spoked about cooperation of the engineer with the mathematician; right: Prof. Jiří Jan from Department of Biomedical Engineering, FEEC BUT, played short organ pieces.

Down: After the official programme the Memorial Afternoon continued in informal discussions with a toast and snack in the Assemble Hall, BUT Centre.

List of documents, pages 78–87

D1 School report from the third class of Elementary School.

D2 The last war — mid-year school report from the 8th class of the Comprehensive secondary school with Czech language in Brno. In the second semester he was forced to war labour in Breslau. He passed his school-leaving examinations in 1945 after the liberation.

D3 A typical document of the period after the communist coup d'état in February 1948. Many student were accused of antisocialist opinions and many of them were excluded from the University.

D4 Diploma of "Rerum Naturalium Doctor" (RNDr.) at Masaryk University in Brno.

D5 Diploma accompanying the Klement Gottwald State Award *for the creating and developing of the finite element mathematical theory of and its application in engineering practice.*

D6 Diploma of Corresponding Member of the Czechoslovak Academy of Sciences.

D7 Diploma of Doctor honoris causa awarded by the Technical University in Dresden.

D8 Bronz medal of Brno University of Technology 1969.

D9 Award from an industrial concern — George Dimitrov Prize.

D10 Golden plaque of Bernard Bolzano of the Czechoslovak Academy of Sciences.

D11 Memorial medal of the Union of Czechoslovak Mathematicians and Physicists.

D12 Memorial medal of the Czechoslovak Society for Mechanics.

D13 Memorial medal of Brno University of Technology.

D14 Memorial medal of Charles University in Prague.

D15 Memorial medal of Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague.

D16 Memorial medal of Masaryk University in Brno.

List of photographs, pages 37–57

The persons in the photographs are cited from the left to the right.

F1 Teachers of Institute of Mathematics, Dr. Eduard Beneš Technical University in Brno (now BUT) in about 1949–1950. Standing, sitting — for names see the text in Czech.

F2 In the middle Miloš Zlámal, about 1946–1948.

F3 During Compulsory military service 1951/1952. M. Zlámal is the first standing on the left hand side.

F4 A portrait from 1955.

F5 Teachers of the Institute of Mathematics, Faculty of Sciences, Masaryk University, April 22, 1953. Standing, sitting — for names see the text in Czech.

F6 New graduates from the Faculty of Sciences, Brno University (now again Masaryk University) with their teachers in June 1957. Sitting:

teachers, standing: students gentlemen and ladies, for names see the text in Czech.

F7 Initiated by professor Borůvka, the so-called Mathematical trip was taking place every year. During these trips, organized alternatively by mathematicians form university in Brno and Bratislava, informal contacts between students and teachers from Brno, Bratislava and other cities came into being. These contacts often transformed into life-long friendships. Pictures are from the Mathematical trip in 1957 to Malá Fatra Mountains in Slovakia. Up: Karel Čulík, Otakar Borůvka, Miloš Zlámal, Zdena Rábová and two students, down: Karel Čulík, Miloš Zlámal and Otakar Borůvka.

F8 From the opening of the Computing Center of Faculty of Electrical Engineering, BUT in April 1976. In the picture are Ing. Jiří Křístel, prof. Jan Blatný, prof. Miloš Zlámal and doc. Karel Křivý.

F9 M. Zlámal in a discussion with journalists of the International Journalists' Organization.

F10 From the award ceremony of the Bolzano Silver Plaque in Prague 1981. Up: Jindřich Bačkovský, Zlámal, Josef Novák and Jiří Nedoma; down: Václav Koutník, Zlámal and Jindřich Bačkovský.

F11 From the award ceremony of the doctorate honoris causa at Technical University in Dresden in 1984.

F12 From the award ceremony of the Bernard Bolzano Golden plaque of the Czechoslovak Academy of Sciences at the Institute of Physical Metalurgy in Brno in 1984. Up: Miloš Zlámal, Přemysl Ryš. Left: Zlámal and his wife Ludmila. En face up: Josef Nedoma, Karel Segeth, Miroslav Fiedler, vice-rector Halaxa; in the middle Miloš Zlámal, Přemysl Ryš; down: Ludmila Zlámalová, František Šik, Ivan Kolář, Jiří Hřebíček.

F13 International *Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications* EQUADIFF 6 took place in Brno on August 26 – 30, 1985. Prof. Zlámal was chairman of the Organizing Committee. Up: opening ceremony: Jaroslav Kurzweil, Jaroslav Sýkora (vice-rector of the University), Miloš Zlámal, Karol Filakovský (dean of FME BUT) and Alois Kufner; down: Miloš Zlámal in a discussion with Jaroslav Sýkora and Jaromír Vosmanský.
En face: The conference delegation was met by the Mayor of Brno. Up: delegation by a round table at the town hall, down: delegation on the town hall court by a fountain. For participants' names see the text in Czech.

F14 From the Seminar "Numerical Methods in Physical Metalurgy", in Blansko in May 1988. In the picture: Jiří Hřebíček, Ivo Marek, Miloš Zlámal and Ivan Hlaváček.

F15 Prof. Zlámal in discussion with geometer prof. Karel Svoboda, at the back Dr. Pavel Osecký, statistician.

F16 Physicist František Lukeš, astronomer Bedřich Onderlička and Zlámal.

F17 Miloš Zlámal, statistician Jiří Polách a physicist Pavel Neusser from Munich during his visit in Brno on March 25, 1989.

F18 Professor Zlámal and his collaborators from the Regional Computing Center during celebration of doc. Helena Růžičková birthday on February 28, 1989. Up gentlemen: Miroslav Novák, Alexander Ženíšek, Libor Holuša, Jiří Kopřiva. Down: Josef Nedoma and Zlámal.
En face — up: doc. Helena Růžičková and doc. Libor Čermák; down: Ing. Libor Holuša and Prof. Ladislav Mejzlík.

F19 Wedding photograph — January 19, 1952, Miloš Zlámal and Ludmila nee Vichrová; married couple with their small son Ivo.

F20 Up: Miloš Zlámal with his wife Ludmila and grandchildren David and Tereza; down: Miloš Zlámal with his granddaughter Tereza.

F21 Mountains were Miloš Zlámal's hobby [at Brevent (in back the summit of Mont Blanc) during a visit to Chamonix], he also liked playing tenis and downhill skiing.

F22 For many years he used to meet friends to play tarok (card play) and take sauna. The meetings were full of good humour, cheerfulness and rag. In the picture from sauna Jiří Polách awards Zlámal a diploma for his birthday, Karel Pellant is standing by.

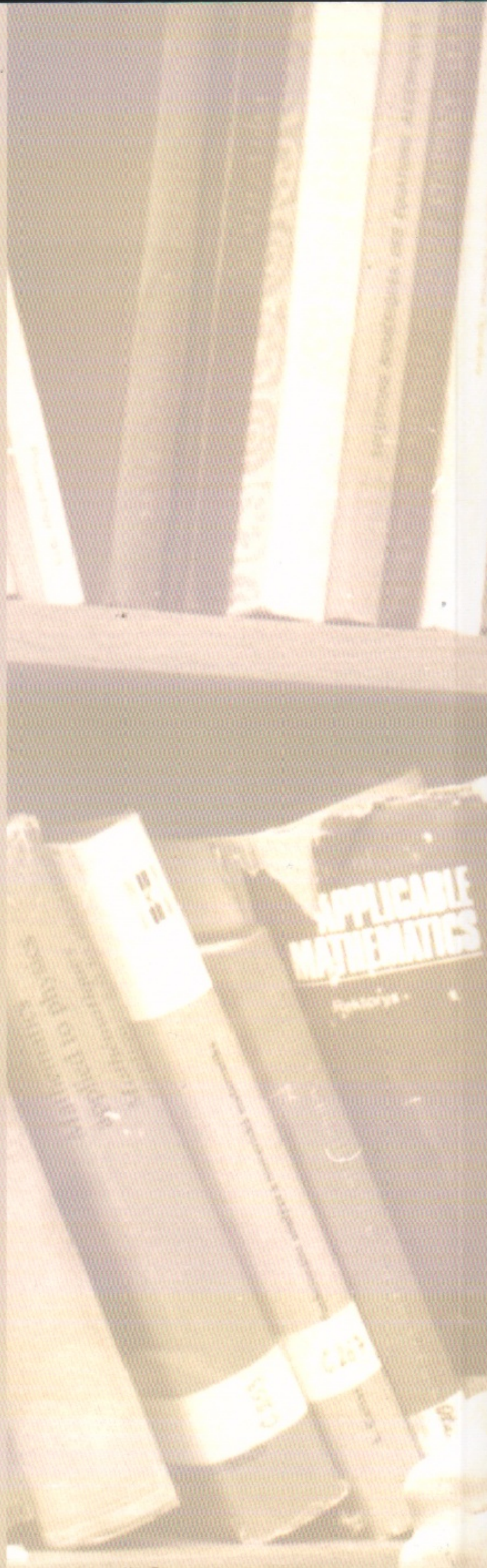
F23 A portrait after 1990.

Obsah

Miloš Zlámal

ZAKLADATEL
MATEMATICKÉ
TEORIE
METODY
KONEČNÝCH
PRVKŮ

Editor Jan Franců
Autoři textů Libor Holuša, Jiří Kratochvíl,
Michal Křížek, Ivo Marek, Alexander Ženíšek
Návrh obálky a vstupních stran Eva Lufferová
Vydalo Vysoké učení technické v Brně,
nakladatelství VUTIUM, Antonínská 1, 601 90 Brno
v roce 2006
Vydání první
Tisk Reprocentrum Blansko
ISBN 80-214-2920-8



ISBN 80-214-2920-8

9 788021 429208