Zadání semestrální práce DU4

Řešte konvektivně-difuzní úlohu

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = 1, \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Přesné řešení

$$u(x) = x - \frac{1 - e^{x/\varepsilon}}{1 - e^{1/\varepsilon}} \tag{3}$$

Snadno ověříme, že $\lim_{\varepsilon \to 0} u(x) = x$ pro $x \in \langle 0, 1)$.

Diskretizujte úlohu (1)-(2) diferenční metodou. Zvolte rovnoměrné dělení s krokem $h = 1/N$ a uzly $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Přibližné řešení v uzlu x_i označme jako U_i.

Diferenční schémata pro výpočet první derivace

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} + O(h), \quad i = 1, \ldots, N-1, \qquad \text{:: zpětné ==> upwind} \tag{4}$$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + O(h), \quad i = 1, \ldots, N-1, \qquad \text{:: dopředné} \tag{5}$$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + O(h^2), \quad i = 1, \ldots, N-1. \qquad \text{:: centrální} \tag{6}$$

$$u'(x_i) = \begin{cases} \dfrac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + O(h^2), & i = 1, \\ \dfrac{3u(x_i) - 4u(x_{i-1}) + u(x_{i-2})}{2h} + O(h^2), & i = 2, \ldots, N-1. \quad \text{:: upwind} \end{cases} \tag{7}$$

$$u'(x_i) = \begin{cases} \dfrac{-2u(x_{i-1}) - 3u(x_i) + 6u(x_{i+1}) - u(x_{i+2})}{6h} + O(h^3), & i = 1, \\ \dfrac{u(x_{i-2}) - 6u(x_{i-1}) + 3u(x_i) + 2u(x_{i+1})}{6h} + O(h^3), & i = 2, \\ \dfrac{-2u(x_{i-3}) + 9u(x_{i-2}) - 18u(x_{i-1}) + 11u(x_i)}{6h} + O(h^3), & i = 3, \ldots, N-1. \quad \text{:: upwind} \end{cases} \tag{8}$$

Diferenční schémata pro výpočet druhé derivace

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{9}$$

$$u''(x_i) = \begin{cases} \dfrac{11u(x_{i-1}) - 20u(x_i) + 6u(x_{i+1}) + 4u(x_{i+2}) - u(x_{i+3})}{12h^2} + O(h^3), & i = 1, \\ \dfrac{-u(x_{i-2}) + 16u(x_{i-1}) - 30u(x_i) + 16u(x_{i+1}) - u(x_{i+2})}{12h^2} + O(h^4), & i = 2, \dots, N-2, \\ \dfrac{-u(x_{i-3}) + 4u(x_{i-2}) + 6u(x_{i-1}) - 20u(x_i) + 11u(x_{i+1})}{12h^2} + O(h^3), & i = N-1. \end{cases} \tag{10}$$

Vyzkoušejte tyto kombinace schémat:

1. (4) + (9), řádu 1, h bez omezení
2. (5) + (9), řádu 1, $h < \varepsilon$
3. (6) + (9), řádu 2, $h < 2\varepsilon$
4. (7) + (9), řádu 2, h bez omezení
5. (8) + (10), řádu 3, h bez omezení

Testování řádu p lze provést na základě vztahu

$$e_k \equiv \|\mathbf{U}_k - \mathbf{u}_k\|_\infty \doteq C h_k^p, \tag{11}$$

kde

$$\mathbf{U}_k = (U_0^{(k)}, U_1^{(k)}, \dots, U_{N_k}^{(k)})^T$$

je přibližné řešení pro dělení na N_k dílcích s krokem $h_k = 1/N_k$ a

$$\mathbf{u}_k = (u(0), u(h_k), \dots, u(N_k h_k))^T$$

je přesné řešení na tomtéž dělení. Počet dílků $\{N_k\}_{k=1}^n$ volíme

$$N_k = a + bk, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

pro vhodné konstanty a, b a n, třeba $a = 50$, $b = 25$, $n = 10$.

Experimentální určení řádu. Logaritmováním vztahu (11) dostaneme

$$\ln(e_k) = \ln(C) + p \cdot \ln(h_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Řád p tedy získáme přibližně jako směrnici přímky, která ve smyslu metody nejmenších čtverců aproximuje data $[X_k, Y_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, kde $X_k = \ln(h_k)$, $Y_k = \ln(e_k)$. V Matlabu lze k tomu účelu použít funkci `polyfit`. Je-li

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n), \quad Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n),$$

pak po provedení příkazu `P=polyfit(X,Y,1)` dostaneme $p \doteq$ `P(1)`, viz popis funkce `polyfit`.

Druhou možností, jak odhadnout řád metody p, je následující postup. Z (11) dostaneme

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \doteq \left(\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)^p.$$

Tento vztah logaritmujeme a definujeme

$$q_k = \frac{\ln(e_{k+1}/e_k)}{\ln(h_{k+1}/h_k)}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Měli byste zjistit, že $|p - q_1| > |p - q_2| > \dots > |p - q_{n-1}| \approx 0$.