Algebraická teorie řízení

26. dubna 2018

Obsah

1 Úvod do teorie řízení **2**
- 1.1 Základy lineárních dynamických systémů 2
- 1.2 Pravidla blokové algebry 3
- 1.3 Diskrétní lineární dynamické systémy 8

2 Teorie okruhů **9**
- 2.1 Polynomy 11
- 2.2 Formální mocninné řady 15

3 Vnitřní a vnější popis soustavy **17**

4 Přímovazební deterministické řízení **22**
- 4.1 Konečné časově optimální řízení 22

5 Zpětnovazební obvod **36**
- 5.1 Pravý a levý nesoudělný rozklad 37
- 5.2 Částečné přenosy 37

A Řešené příklady **42**
- A.1 Počítání s polynomy 42
- A.2 Konečně časově optimální řízení jednoduché soustavy. 46
- A.3 Charakteristický polynom zpětnovazebného obvodu 50

1 Úvod do teorie řízení

1.1 Základy lineárních dynamických systémů

Lineárním spojitým dynamickým systémem se vstupem $u(t)$ a výstupem $y(t)$ rozumíme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} & a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ & = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u, \end{aligned} \tag{1}$$

kde výraz $f^{(i)}$ znamená i-tou derivaci funkce $f(t)$ přičemž předpokládáme, že platí $m \leq n$. Tato podmínka se v teorii řízení uvádí jako podmínka realizovatelnosti. Spojitý lineární dynamický systém se řeší aparátem Laplaceovy transformace (viz. [5]) definované vztahem

$$L\{f\} = \int_0^\infty f(t) e^{st} \mathrm{d}t.$$

Přímočarým výpočtem odvodíme Laplaceovy obrazy

$$\begin{aligned} L\{a\} &= \frac{a}{s} \\ L\{t\} &= \frac{1}{s^2} \\ L\{e^{-at}\} &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

a především pravidla, linearity

$$L\{af + bg\} = aL\{f\} + bL\{g\}$$

a derivace

$$L\{f^{(1)}\} = sL\{f\} - f\{0\}.$$

Tyto dvě pravidla aplikujeme na rovnici spojitého lineárního dynamického systému (1) doplněného o počáteční podmínky pro řešení
$y^{(n)}(0) = y^{(n-1)}(0) = y^{(1)}(0) = y(0) = 0$
a počáteční podmínky pro vstup
$u^{(m)}(0) = u^{(m-1)}(0) = u^{(1)}(0) = u(0) = 0$
Z čehož celkově dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} & a_n s^n L\{y\} + a_{n-1} s^{n-1} L\{y\} + \cdots + a_1 s L\{y\} + a_0 L\{y\} \\ & = b_m s^m L\{u\} + b_{m-1} s^{m-1} L\{u\} + \cdots + b_1 L\{u\} + b_0 L\{u\}. \end{aligned}$$

Po jednoduché úpravě dostaneme racionální lomenou funkci, v teorii řízení označovanou jako přenos dynamického systému

$$G(s) := \frac{L\{y\}}{L\{u\}} = \frac{b_m s^n + b_{m-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \tag{2}$$

Z definice přenosu (2) je zřejmé, že pokud na vstup systému přivedeme signál u stačí přenosem G vynásobit jeho Laplaceův obraz $L\{u\}$ a dostaneme Laplaceův obraz výstupu $L\{y\} = G(s)L\{u\}$. Dále, odezva systému na (Diracův) jednotkový impuls $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{-\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

se v teorii řízení označuje jako impulsní funkce $g(t)$ a její graf impulsní charakteristika. Protože Laplaceův obraz Diracova impulzu je $L\{\delta(t)\} = 1$ dostáváme interpretaci přenosu

$$G(s) = \frac{L\{y\}}{L\{u\}} = \frac{L\{g\}}{L\{\delta\}} = L\{g\}$$

jako Laplaceova obrazu impulsní funkce. Odezva systému na jednotkový skok $\eta(t)$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

se nazývá přechodová funkce $h(t)$ a její Laplaceův obraz je $L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}$. Přechodová charakteristika je pak grafem přechodové funkce. Vzájemný vztah impulzní a přechodové funkce je pak vidět z následujících výpočtů

$$G(s) = \frac{L\{y\}}{L\{u\}} = \frac{L\{h\}}{L\{\eta\}} = \frac{H(s)}{\frac{1}{s}} = s \cdot H(s)$$

$$\frac{1}{s}G(s) = H(s) = L\{h(t)\} \Rightarrow h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$G(s) = s \cdot H(s) = L^{-1}\{h^{(1)}\} \Rightarrow g(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow h(t) = \int_0^t g(t)\mathrm{d}t$$

1.2 Pravidla blokové algebry

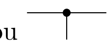
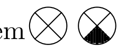
Základní pravidla

Přenosový člen $G(s)$ znázorňujeme obdélníkovým blokem

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

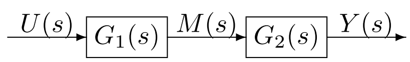
a pokud máme více přenosových členů tvoříme z nich blokové diagramy, přičemž používáme následující pravidla:

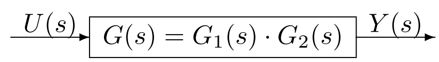
- složitější systémy lze rozdělit na spojení elementárních členů
- přenosový člen znázorňujeme obdélníkovým blokem $\boxed{G(s)}$, který je popsán svým přenosem $G(s)$
- vstup znázorněn šipkou do bloku, výstup šipkou z bloku $\longrightarrow \boxed{} \longrightarrow$

- místo, kde se signál rozdvojuje se značí tečkou 
- místo, kde se signál sčítá (odčítá) se značí kolečkem s křížkem 
  - pokud se daný signál odečítá, pak příslušné „čtvrtkolečko“ vybarvíme
  - pokud se přičítá, pak je ponecháme bílé

Návrh blokových schémat

Sériové zapojení Sériové zapojení je zapojení členů „za sebou“ – viz následující schéma:





Přenos levého členu je:

$$G_1(s) = \frac{M(s)}{U(s)} \Rightarrow M(s) = G_1(s) \cdot U(s)$$

Přenos pravého členu je:

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} \Rightarrow Y(s) = G_2(s) \cdot M(s)$$

Nyní dosadíme vztah odvozený z přenosu levého členu do vztahu odvozeného z přenosu pravého členu:

$$Y(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot U(s)$$

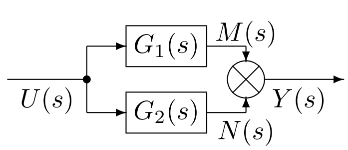
Z čehož lze snadno vyjádřit přenos celého zapojení následovně:

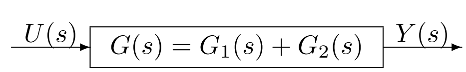
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

resp. obecně jako:

$$G(s) = \prod G_i(s)$$

Paralelní zapojení Paralelní zapojení je zapojení členů „vedle sebe“ – viz následující schéma:





Přenos horního členu je:

$$G_1(s) = \frac{M(s)}{U(s)} \Rightarrow M(s) = G_1(s) \cdot U(s)$$

Přenos dolního členu je:

$$G_2(s) = \frac{N(s)}{U(s)} \Rightarrow N(s) = G_2(s) \cdot U(s)$$

Nyní dosadíme výstupy obou členů (vyjádřené pomocí jejich vstupu a jejich přenosů) jako vstup sčítacího (resp. odčítacího) členu:

$$Y(s) = \pm M(s) \pm N(s) = (\pm G_1(s) \pm G_2(s)) \cdot U(s)$$

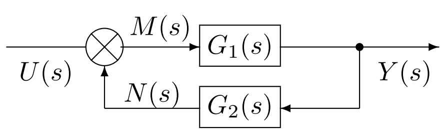
Z čehož lze snadno vyjádřit přenos celého zapojení následovně:

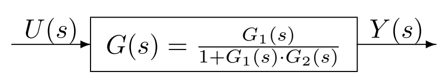
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \pm G_1(s) \pm G_2(s)$$

resp. obecně jako:

$$G(s) = \sum G_i(s)$$

Antiparalelní (zpětnovazebné) zapojení Paralelní zapojení je zapojení členů do obvodu s tzv. „zpětnou vazbou“ tedy takovým způsobem, kdy z výstupu odebíráme signál a kterým upravujeme signál vstupní – viz následující schéma:





Přenos členu v přímé větvi je:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} \Rightarrow M(s) = \frac{Y(s)}{G_1(s)}$$

Přenos členu ze zpětné vazby je:

$$G_2(s) = \frac{N(s)}{Y(s)} \Rightarrow N(s) = Y(s) \cdot G_2(s)$$

Odčítací (sčítací) člen se chová následovně:

$$M(s) = U(s) \mp N(s).$$

Z čehož dosazením vztahů plynoucích z přenosu v přímé větvi a ve zpětné vazbě můžeme vyjádřit:

$$\frac{Y(s)}{G_1(s)} = U(s) \mp Y(s) \cdot G_2(s)$$

Osamostatníme-li vstupní signál, dostáváme:

$$U(s) = \frac{Y(s)}{G_1(s)} \pm Y(s) \cdot G_2(s) = Y(s) \left(\frac{1}{G_1(s)} \pm G_2(s) \right) = Y(s) \frac{1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)}{G_1(s)}$$

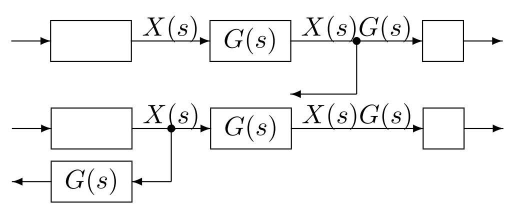
A odtud vylomením Laplaceova obrazu výstupu Laplaceovým obrazem vstupu dostaneme přenos celého zapojení:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

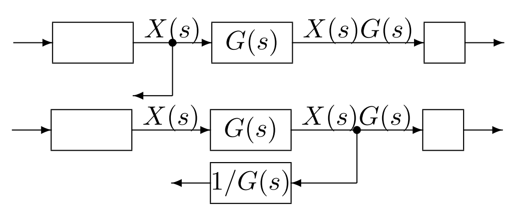
Překřížené vazby

- Pokud lze obvod rozdělit na bloky, v nichž je jedno ze zmíněných zapojení, pak není problém takový obvod popsat jeho přenosem - viz předchozí odstavce.
- Nelze-li obvod rozdělit na bloky, znamená to, že jsou překříženy vazby v paralelních nebo zpětnovazebných zapojeních (tzn. že se zpětná vazba vazba odvedená po ukončení jiného zpětnovazebného zapojení vrací do jeho přímé větve)
- Řešením je přesun vhodných bloků - buď po, nebo proti směru signálu, tak abychom mezi zapojeními v jednotlivých blocích získali jen nám již známé a výše popsané, kterým tak lze snadno určit jejich výsledný přenos.

posunutí proti směru signálu



posunutí po směru signálu



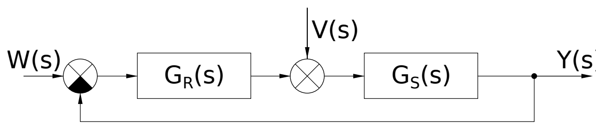
Spojité a diskrétní obvody

Pravidla blokové algebry byla představena pro spojité systémy, pro diskrétní však platí stejné. V diskrétním obvodu se však může objevit i spojitý člen a s ním se objevují i vzorkovače. Podle polohy vzorkovače se pak rozlišují různá zapojení s různým přenosem.

Standardní zapojení

Pravidla blokové algebry platí pro obecná bloková schémata, můžeme je tedy aplikovat pro případ regulačního obvodu.

Přenos řízení



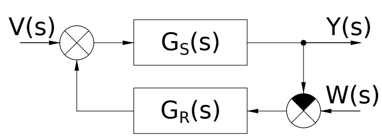
Obrázek 1: Blokové schéma obvodu zpětnovazebného řízení uspořádané pro výpočet přenosu řízení

Přenos řízení $G_W(s)$ - viz obr. 1. pro $V(s) = 0$

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_S(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)},$$

kde $G_0(s) = G_S(s) \cdot G_R(s)$ je tzv. přenos rozpojeného obvodu

Přenos poruchy

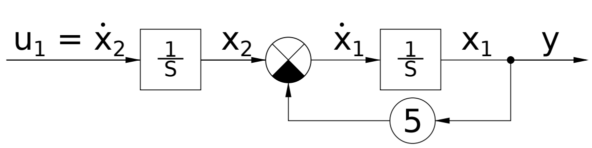


Obrázek 2: Blokové schéma obvodu zpětnovazebného řízení uspořádané pro výpočet přenosu poruchy

Přenos řízení $G_V(s)$ - viz obr. 2. pro $W(s) = 0$

$$G_V(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)}$$

Příklad 1 *Přenos* $\frac{5}{s(s+5)}$ *můžeme rozložit na parciální zlomky* $\frac{5}{s(s+5)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+5}$ *a to odpovídá schématu:*



Obrázek 3: Blokové schéma obvodu odpovídajícího vypočtenému přenosu

1.3 Diskrétní lineární dynamické systémy

Diskrétní lineární dynamické systémy jsou určeny diferenční rovnicí

$$\begin{aligned} &a_0 y_n(kT) + a_1 y_{n-1}(kT) + \cdots + a_{n-1} y_1(kT) + a_n y(kT) \\ &= b_0 u_m(kT) + b_1(kT) u_{m-1} + \cdots + b_{m-1} u_1(kT) + b_m u(kT), \end{aligned} \tag{3}$$

kde $y(kT)$ a $u(kT)$ jsou diskrétní funkce (posloupnosti hodnot v diskrétně snímaných časových okamžicích) pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ a $T > 0$ je perioda vzorkování. Stejnou roli jako Laplaceova transformace pro spojité systémy hraje pro diskrétní systémy Z-transformace

$$Z\{f\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

pro kterou platí diskrétní verze linearity a vztah pro Z-obraz diference (jež je analogií vztahu pro Laplaceův obraz derivace známý ze spojitých obvodů) takže dostáváme pro nulovou vstupní podmínku diskrétní přenos

$$\begin{aligned} G(z) = \frac{Z\{y\}}{Z\{u\}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} = \\ \frac{b_0 z^{n-m} + b_1 z^{n-(m+1)} + \cdots + b_{m-1} z^{-(m-1)} + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} =: G(z^{-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Diskrétní impulsní funkce $g(kT)$ je pak odezva systému na diskrétní jednotkový impuls $\delta(kT)$

$$\delta(kT) = \begin{cases} \infty & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-\infty} \delta(kT) = 1$$

a její Z–obraz je $Z\{\delta(kT)\} = 1$. Impulsní charakteristika je opět graf impulsní funkce a dostáváme

$$G(z) = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}} = \frac{Z\{g(kT)\}}{Z\{\delta(kT)\}} = Z\{g(kT)\}.$$

Z–přenos je tedy Z–obraz diskrétní impulsní funkce. Dále, přechodová funkce $h(kT)$ je odezva systému na jednotkový skok $\eta(kT)$

$$\eta(kT) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

ale její Z–transformace se tentokrát od Laplaceovy transformace liší

$$Z\{\eta(kT)\} = \frac{z}{z-1}$$

Přechodová charakteristika je opět graf přechodové funkce a je vidět, že

$$G(z) = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}} = \frac{Z\{h(kT)\}}{Z\{\eta(kT)\}} = \frac{H(z)}{\frac{z}{z-1}}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot H(z) \Rightarrow \frac{z}{z-1} G(z) = H(z) = Z\{h(kT)\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1} G(z)\right\}$$

2 Teorie okruhů

Pro pochopení dalších souvislosti je nutné vybudovat algebraický aparát teorie okruhů. Jedná se o zobecnění pojmu reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jako množiny se dvěma binárními operacemi. Obecně mějme nějakou množinu M se dvěma binárními operacemi, tedy mějme množinu M a dvě zobrazení přiřazující uspořádané dvojici prvků z množiny M prvek z množiny M, tj. zobrazení

$$\begin{aligned} + &: M \times M \to M, \\ \cdot &: M \times M \to M. \end{aligned}$$

Dobře známým příkladem jsou kromě číselného oboru reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ také například číselný obor celých čísel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nebo přirozených čísel s nulou $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$. Okruh netvoří například množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ s operací sčítání. Příkladem s konečnou množinou může být binární aritmetika $\{0, 1\}$, tedy konečné těleso $\mathbb{Z}_2$ chápané jako množina $\{0, 1\}$ spolu s operacemi definovanými následovně:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Jinými slovy symbol $\mathbb{Z}_2$ znamená, že na množině $\{0, 1\}$ počítáme modulo 2 (počítáme zbytek po dělení číslem 2), tedy například

$$1 \cdot 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 1, \text{ nebo } -1 = 1, \ldots$$

Operace $+$ je tedy vlastně operací XOR a operace $\cdot$ operací AND. Počítání modulo můžeme zobecnit na libovolný základ, například v množině $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ počítáme modulo 5 tedy za výsledek vezmeme zbytek po dělení číslem pět což je právě jedno z čísel množiny $\mathbb{Z}_5$. Například $3 \cdot 3 = 9 = 1 \cdot 5 + 4 = 4 (\mathrm{mod}\ 5)$. Obecně $\mathbb{Z}_n$ znamená, že na množině $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ počítáme modulo n. Všechny tyto množiny tvoří spolu s definovanými operacemi takzvaný okruh, který si obecně zadefinujeme axiomaticky. Mějme množinu M spolu s definovanými operacemi $+, \cdot$ a následující axiomy:

(A1) $a+b \in M,\ a,b \in M$ (uzavřenost)

(A2) $(a+b)+c = a+(b+c),\ a,b,c \in M$ (asociativita)

(A3) $a+b = b+a, \quad a,b,c \in M$ (komutativita)

(A4) $\exists 0 \in M$ takový, že $0+a=a$ (nulový prvek)

(A5) $\forall a \in M \exists -a \in M$ takový, že $a+(-a)=0$ (opačný prvek)

Množina s jednou binární operací $(M,+)$ splňující axiomy (A1–5) se nazývá komutativní (či též Abelovská) grupa. Z příkladů výše tvoří abelovské grupy množiny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ spolu s operací sčítání. Množina přirozených čísel nesplňuje pro sčítání axiom (A5). Zbytkové třídy tvoří komutativní grupu pro sčítání při jakémkoli základu, například v $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ jsou opačné prvky popořadě $\{0,4,3,2,1\}$, tedy $\mathbb{Z}_5$ splňuje axiom (A5). Pro struktury se dvěma operacemi uvažujeme ještě následující axiomy pro násobení:

(M1) $a \cdot b \in M,\ a,b \in M$ (uzavřenost)

(M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad a,b,c \in M$ (asociativita)

(M3) $a \cdot b = b \cdot a \in, \quad a,b \in M$ (komutativita)

(M4) $\exists 1 \in M$ takový, že $1 \cdot a = a$ (jednička)

(M5) $\forall a \in M,\ a \neq 0,\ \exists a^{-1} \in M$ takový, že $a \cdot (a^{-1}) = 1$ (inverzní prvek)

a jako poslední přidáme axiom svazující obě binární operace

(D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c,\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributivita).

Dále množinu se dvěma binárními operacemi $(M,+,\cdot)$ nazýváme

(O) Okruh pokud splňuje axiomy A1-5, M1-2, M4, D

(KO) Komutativní okruh pokud splňuje axiomy A1-5, M1-4, D

Všimněme si, že pokud $0=1$ dostaneme $a = 1a = 0a = 0$ a tedy $M=\{0\}$. Takový okruh se nazývá triviální, pokud $0 \neq 1$ pak netriviální.

(T) Těleso splňuje axiomy A1-5, M1-5, D, $0 \neq 1$.

Příklady nekonečných těles jsou $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, konečná tělesa jsou například $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo. Komutativní okruh který není tělesem je například $\mathbb{Z}_4$, kde prvek 2 nemá inverzi, skutečně

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 &= 0 \\ 2 \cdot 1 &= 2 \\ 2 \cdot 2 &= 0 \\ 2 \cdot 3 &= 2 \end{aligned}$$

tedy neexistuje $a \in \mathbb{Z}_4$ takové, že $2a = 1$, čímž je porušen axiom (M5), celkově $\mathbb{Z}_4$ tvoří komutativní okruh. Příkladem nekonečného okruhu, který není tělesem, jsou například matice 2×2 nad reálnými čísly $\mathbb{R}_{2,2}$. Připomeňme, že čtvercová matice je invertibilní (existuje k ní inverze) právě tehdy když má nenulový determinant a v případě matic z $\mathbb{R}_{2,2}$ můžeme inverzi vyjádřit předpisem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

kde výraz $ad - bc$ je determinant matice 2×2. Tedy například nenulová matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má determinant nula a není tedy invertibilní, navíc matice nejsou obecně komutativní, například máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a okruh $\mathbb{R}_{2,2}$ tedy není ani komutativní.

Nakonec definujeme dělitele nuly, jako prvky $a \in M$ pro které existuje $b \in M$, $b \neq 0$ takové, že $ab = 0$, nebo $ba = 0$ (levý resp. pravý dělitel nuly).

(OI) Obor integrity je komutativní okruh, $1 \neq 0$, kde 0 je jediný dělitel nuly.

Tedy například $\mathbb{Z}_4$ není (OI), protože prvek 2 je dělitelem nuly, skutečně $2 \cdot 2 = 0$. Stejně tak okruh $\mathbb{R}_{2,2}$ obsahuje dělitele nuly, například

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podstatné, je že v (OI) platí zákony o krácení, tj. pokud platí rovnost $ax = ay$, kde $a \neq 0$ pak platí rovnost $x = y$. Skutečně, v okruhu platí $ax = ay \Rightarrow ax - ay = 0 \Rightarrow a(x - y) = 0$ a v oboru integrity pak buď $a = 0$, nebo $x - y = 0$ tedy pokud $a \neq 0$ platí $x = y$. Obráceně, pokud je splněn zákon o krácení pak protože v okruhu můžeme rovnost $ab = 0$ přepsat na $ab = a0$ a použitím zákona o krácení dostaneme $b = 0$. Tedy 0 je jediný dělitel nuly. Tato vlastnost je důležitá pro řešení rovnic. Například v $\mathbb{Z}_{10}$, který není (OI) je prvek 2 dělitel nuly a skutečně rovnice $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 9 = 8$ která triviálně platí by musela implikovat rovnici $4 = 9$, která zjevně neplatí.

2.1 Polynomy

Polynomem s proměnnou z^{-1} nad reálnými čísly $\mathbb{R}$ rozumíme formální zápis tvaru

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-n},$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, n je stupeň polynomu, píšeme $\partial p = n$. Množinu takových polynomů označujeme $\mathbb{R}[z^{-1}]$. Řádem polynomu rozumíme index nejmenšího nenulového koeficientu α_i a značíme $\eth p = i$. Tedy například pro $p = z^{-3} + 2z^{-5}$ máme $\partial p = 5$ a $\eth p = 3$.

Následující pojmy jsou platné obecně pro teorii okruhů:

- Jednotkou okruhu rozumíme takový prvek $e \in M$ pro který $\exists e^{-1} \in M$
- Asociované prvky jsou takové prvky $a, b \in M$ pro které existuje jednotka e taková, že $a = be$, píšeme $a \sim b$.
- Prvek $b \in M$ je dělitel prvku $a \in M$ pokud $\exists c$ takové, že $a = bc$, píšeme $b \mid a$.
- Největší společný dělitel dvou prvků $a, b \in M$ je prvek $c \in M$ pro který platí $(c \mid a) \wedge (c \mid b)$ a současně $(d \mid a) \wedge (d \mid b) \Rightarrow d \mid c$, píšeme $c = (a, b)$.
- Říkáme, že prvky $a, b \in M$ jsou nesoudělné pokud platí, že $(a, b) = 1$
- Ireducibilní prvek $d \in M$ je takový prvek, který není jednotka a současně platí $c \mid d \Rightarrow c \sim d$.

Reálná čísla tvoří těleso a jednotkou je tam každý nenulový prvek, v celých číslech jsou jednotky jen ± 1. V reálných číslech jsou spolu asociované všechny nenulové prvky a samostatně nula sama se sebou. V celých čísel jsou asociované prvky $\pm p$. V polynomech $\mathbb{R}[z^{-1}]$ jsou jednotky konstantní nenulové polynomy, protože pokud

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_n z^{-m})(\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_n z^{-n}) \\ &= \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)z^{-1} + \cdots + \alpha_0\beta_0 z^{-(m+n)} \end{aligned}$$

se má rovnat konstantnímu polynomu 1, musí $m + n = 0$, protože $\mathbb{R}$ je (OI) a $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$. Asociované prvky jsou tedy násobky nenulových polynomů a nulový polynom sám se sebou. Násobení polynomů je komutativní a pokud vynásobíme polynom p stupně n a polynom q stupně m dostaneme polynom stupně $n + m$. Ukážeme, že okruh $\mathbb{R}[z^{-1}]$ tvoří (OI). Konkrétně máme $p \cdot q = (a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n})(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}) = a_0 b_0 + \cdots + a_n b_m z^{-m-n}$ a protože $a_n, b_m \in \mathbb{R}$ a tedy pokud $a_n \neq 0$ a $a_n b_m = 0$ pak $b_m = 0$ a tedy postupně dostaneme $b_i = 0$, $i = 0, \ldots, m$ protože $\mathbb{R}$ je obor integrity.

V (OI) platí, že pokud $(a, b) = d$, kde $a, b, d \in M$ existují prvky okruhu $p, q \in M$ takové, že platí

$$ap + bq = d,$$

této rovnici se říká Bezoutova rovnost a prvkům $p, q \in M$ se říká Bezoutovy koeficienty. Současně platí, že existují prvky $r, s \in M$ okruhu takové, že platí

$$ar + bs = 0.$$

Algoritmus pro výpočet největšího společného dělitele, koeficientů Bezoutovy rovnosti $p, q \in M$ a prvků $r, s \in M$ je následující. Mějme polynomy $a, b \in \mathbb{T}[z^{-1}]$. Sestrojíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

a pomocí řádkových elementárních úprav ji převedeme na matici tvaru

$$\begin{pmatrix} p & q & d \\ r & s & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $d = (a, b)$, polynomy p a q jsou koeficienty Bezoutovy rovnosti a prvky r a s koeficienty rovnice výše.

Algoritmus napřed demonstrujme nad $\mathbb{Z}$. Mějme $253, 575$ a sestavíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 253 \\ 0 & 1 & 575 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 253 \\ -1 & 1 & 322 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 253 \\ -2 & 1 & 69 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & 46 \\ -2 & 1 & 69 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & 46 \\ -2 & 1 & 69 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & 46 \\ -9 & 4 & 23 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & 23 \\ 7 & -3 & 46 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & 23 \\ 25 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

A následně ověříme

$$ap + bq = 253 \cdot (-9) + 575 \cdot 4 = -2277 + 2300 = 23,$$
$$ar + bs = 253 \cdot 25 + 575 \cdot (-11) = 6325 - 3625 = 0.$$

Příklad 2 *Nalezněte NSD a Bezoutovy koeficienty pro prvky* $z^{-3} - 2z^{-2} - z^{-1} + 2, z^{-2} - 2z^{-1} \in \mathbb{R}[z^{-1}]$. *Prvky naskládáme do matice předepsaným způsobem a pomocí řádkových elementárních úprav převedeme na požadovaný tvar:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (z^{-3} - 2z^{-2} - z^{-1} + 2) \\ 0 & 1 & (z^{-2} - 2z^{-1}) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} & (-z^{-1} + 2) \\ z^{-1} & -z^{-2} + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A tedy musí platit následující identity,

$$1(z^{-3} - 2z^{-2} - z^{-1} + 2) - z^{-1}(z^{-2} - 2z^{-1}) = (-z^{-1} + 2)$$
$$z^{-1}(z^{-3} - 2z^{-2} - z^{-1} + 2) + (-z^{-2} + 1)(z^{-2} - 2z^{-1}) = 0$$

Skutečně, kromě toho, že z Bezoutovy věty existují koeficienty p, q existují i koeficienty r, s takové, že

$$ar + bs = 0.$$

Toto tvrzení je triviální, protože můžeme volit například $r = b$ a $s = -a$ (nebo $r = -b$ a $s = a$). Polynomy a, b musí tedy splňovat soustavu rovnic určenou rozšířenou maticí soustavy:

$$\begin{pmatrix} p & q & d \\ r & s & 0 \end{pmatrix}.$$

Soustava $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ má triviálně řešení a, b a pokud rozšířenou matici soustavy převedeme pomocí řádkových elementárních úprav množinu řešení tím nezměníme. Řešením $\begin{pmatrix} p & q & d \\ r & s & 0 \end{pmatrix}$ je tedy opět a, b. Pro takto nalezené koeficienty p, q, r, s, d platí

$$ap + bq = d$$
$$ar + bs = 0$$

Ukážeme, že $d = (a, b)$, pokud nějaký prvek d_0 dělí a i b musí dělit i d, stačí tedy ověřit, že $d|a$ a $d|b$. Protože jsme při úpravě, používali řádkové elementární úpravy, jsou naše úpravy invertibilní a protože původní matice soustavy je jednotková (tedy invertibilní) je matice $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ také invertibilní, existuje tedy matice $\begin{pmatrix} u & t \\ v & w \end{pmatrix}$ taková, že platí

$$\begin{pmatrix} u & t \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} ud \\ vd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

dostaneme tedy fakt, že $d|a$ a $d|b$ čímž jsme hotovi.

Připomeňme algoritmus dělení polynomu se zbytkem na následujícím příkladě:

$$\begin{aligned}
(z^{-5} + 2z^{-4} - z^{-3} - 3z^{-2} + 1) &: (z^{-4} + 2z^{-3} + 2z^{-2} + 2z^{-1} + 1) = z^{-1} \\
-(z^{-5} + 2z^{-4} + 2z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1}) & \\
= -3z^{-3} - 5z^{-2} - z^{-1} + 1. &
\end{aligned}$$

v dalším kroku dělíme $z^{-4}+2z^{-3}+2z^{-2}+2z^{-1}+1$ předešlým zbytkem $-3z^{-3} - 5z^{-2} - z^{-1} + 1$

$$\begin{aligned}
(z^{-4} + 2z^{-3} + 2z^{-2} + 2z^{-1} + 1) &: (-3z^{-3} - 5z^{-2} - z^{-1} + 1) = -\frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{9} \\
-(z^{-4} + \frac{5}{3}z^{-3} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{3}z^{-1}) & \\
= \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{5}{3}z^{-2} + \frac{7}{3}z^{-1} + 1 & \\
-(\frac{3}{9}z^{-3} + \frac{5}{9}z^{-2} + \frac{1}{9}z^{-1} - \frac{1}{9}) & \\
= \frac{10}{9}z^{-2} + \frac{20}{9}z^{-1} + \frac{10}{9} &
\end{aligned}$$

A nakonec

$$\begin{aligned}
(-3z^{-3} - 5z^{-2} - z^{-1} + 1) &: (\frac{10}{9}z^{-2} + \frac{20}{9}z^{-1} + \frac{10}{9}) = -\frac{27}{10}z^{-1} + \frac{9}{10} \\
-(-3z^{-3} - 6z^{-2} - 3z^{-1}) & \\
= (z^{-2} + 2z^{-1} + 1) & \\
-(z^{-2} + 2z^{-1} + 1) & \\
= 0 &
\end{aligned}$$

Platí tedy, že

$$(z^{-5} + 2z^{-4} - z^{-3} - 3z^{-2} + 1, z^{-4} + 2z^{-3} + 2z^{-2} + 2z^{-1} + 1) = 1z^{-2} + 2z^{-1} + 1$$

a příslušné Bezoutovy koeficienty bychom mohli dostat postupným zpětným dosazováním. Dělení polynomu se zbytkem můžeme tedy použít pro nalezení NSD a následně Bezoutových koeficientů, postupným dělením. Největší společný dělitel můžeme vypočítat opakovaným použitím dělení polynomů polynomem. Pro $a, b \in \mathbb{R}[z^{-1}]$ vydělíme polynomy se zbytkem

$$a = bp_1 + r_1$$

a v dalším kroku pak podělíme se zbytkem polynomy b s r_1, tedy dostaneme

$$b = r_1 p_2 + r_2$$

v dalším kroku pak podělíme se zbytkem polynomy r_1 a r_2 a dělení opakujeme dokud $r_i \neq 0$. Pokud $r_i = 0$ pak

$$(a, b) = r_{i-1}.$$

2.2 Formální mocninné řady

Formální mocninnou řadou nad tělesem $\mathbb{R}$ rozumíme formální zápis

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-n} + \cdots$$

kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, množinu formálních mocninných řad označujeme $\mathbb{R}(z^{-1})$. Formální mocninnou řadu můžeme zapisovat ve formě posloupnosti jejich koeficientů

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}.$$

Řádem formální mocninné řady rozumíme index nejmenšího nenulového koeficientu α_i a značíme $\eth p = i$. Na okruhu $\mathbb{R}(z^{-1})$ definujeme operaci sčítání

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\} + \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots\} = \{\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots\}$$

a násobení

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\} \cdot \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots\} = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots\},$$

kde $\gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j$. Formální mocninné řady s výše definovanými operacemi tvoří okruh, a to dokonce komutativní. Důkaz se provede ověřením axiomů (KO), ukážeme si například, že nulou okruhu je prvek $o = 0 = \{0, 0, \dots\}$, opačným prvek k prvku $p = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ je prvek $-p = \{-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots\}$, jedničkou okruhu je prvek $e = 1 = \{1, 0, 0, \dots\}$, atd.

Další otázkou je, zda se jedná i o obor integrity. Nejprve ověříme, zda tento okruh má dělitele nuly (různé od nuly okruhu). Chceme tedy dokázat, že

$$p \cdot q = 0 \Rightarrow p = 0 \vee q = 0.$$

Nechť $p = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $q = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ a dále označme $p \cdot q = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $c_k = 0$, $\forall k$. Předpokládejme např. že $a_0 \neq 0$ (případná opačná volba nemá vzhledem ke komutativitě vliv).

$$\begin{aligned} 0 = c_0 &= a_0 \cdot b_0 && \Rightarrow b_0 = 0 \\ 0 = c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_1 && \Rightarrow b_1 = 0 \\ 0 = c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_2 && \Rightarrow b_2 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

obdobně lze dokázat, že $b_k = 0, \ \forall k$. Předpokládejme nyní, že $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = c_0 &= 0 \cdot b_0 \\ 0 = c_1 &= 0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = a_1 \cdot b_0 && \Rightarrow b_0 = 0 \\ 0 = c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = a_1 \cdot b_1 && \Rightarrow b_1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tedy celkem musí být $a_k = 0 \ \forall k$. Z toho vyplývá, že $\mathbb{R}(z^{-1})$ je (OI). Nyní hledáme jednotky okruhu, tedy invertibilní prvky: $p \cdot q = 1$. Nechť $p = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $q = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ a dále označme $p \cdot q = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $c_0 = 1$ a $c_k = 0, \ \forall k > 0$

$$\begin{aligned} 1 = c_0 &= a_0 \cdot b_0 && \Rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0} \\ 0 = c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot \tfrac{1}{a_0} && \Rightarrow b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2} \\ 0 = c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_2 - \tfrac{a_1^2}{a_0^2} + \tfrac{a_2}{a_0} && \Rightarrow b_2 = \frac{-a_2}{a_0^2} + \frac{a_1^2}{a_0^3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

tedy celkem, jednotkami okruhu $\mathbb{R}(z^{-1})$ jsou mocninné řady $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, takové, že $\alpha_0 \neq 0$, tj. $\eth p = 0$

Příklad 3 *Spočítejte inverzi k mocninné řadě*

$$p = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots .$$

Řešení: *Máme* $a_0 = a_1 = \cdots = 1$ *a tedy*

$$\begin{aligned} b_0 &= \tfrac{1}{a_0} = \tfrac{1}{1} = 1 \\ b_1 &= \tfrac{-a_1}{a_0^2} = \tfrac{-1}{1^2} = -1 \\ b_2 &= \tfrac{-a_2}{a_0^2} + \tfrac{a_1^2}{a_0^3} = \tfrac{-1}{1^2} + \tfrac{1^2}{1^3} = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

tedy $p^{-1} = 1 - z^{-1} + 0z^{-2} + \cdots$

Formální mocninné řady jsou zobecněním pojmu polynomy, tak jak jsou popsány v předchozí kapitole a můžeme psát

$$\mathbb{R}[z^{-1}] \subseteq \mathbb{R}(z^{-1})$$

Definice 1 *Polynom $p \in \mathbb{R}[z^{-1}]$ nazveme kauzální, pokud $\exists$ jemu příslušná mocninná řada $p^{-1} \in \mathbb{R}(z^{-1})$, která je jemu inverzí*

Příklad 4 *Uvažujme přenos zadaný jako podíl dvou polynomů, čitatel zlomku označme p, jmenovatel q.*

$$S = \frac{p}{q} = \frac{z^{-1}+1}{z^{-2}+1}$$

Převeďte tento přenos do tvaru formální mocninné řady.

Řešení: *Vidíme, že polynom ve jmenovateli má nenulový konstantní člen a je tedy jednotkou v okruhu mocninných řad. Nalezneme jeho inverzi a vynásobíme polynom z čitatele touto inverzí. Tím získáme vyjádření pomocí formální nekonečné řady. Koeficienty polynomu q a vypočítané koeficienty jeho inverze q^{-1} jsou následující*

$$\begin{array}{rllll} q: & a_0 = 1 & a_1 = 0 & a_2 = 1 & \\ q^{-1}: & b_0 = 1 & b_1 = 0 & b_2 = -1 & b_3 = 0 \dots \end{array}$$

a tudíž:

$$S = \frac{p}{q} = p \cdot q^{-1} = (z^{-1}+1)(1 - z^{-2} + \cdots) = 1 + z^{-1} - z^{-2} + \cdots$$

Poznámka 1 *V polynomu jmenovatele musí být absolutní člen, aby byl tento polynom invertibilní. Pak ovšem lze takový polynomiální zlomek přepsat na formální mocninnou řadu, která má fyzikální význam přenosu po diskretizaci.*

3 Vnitřní a vnější popis soustavy

Pod pojmem diskrétní rozumíme spíše spojitou soustavu pozorovanou v diskrétních okamžicích než soustavu diskrétní svou povahou. Pokud tedy hovoříme o diskrétní soustavě myslíme tím spojitou soustavu s pevně zvolenou periodou vzorkování. Pracujeme nad nějakým pevně zvoleným tělesem $\mathbb{T}$, tělesa můžou být $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, případně $\mathbb{F}_{p^n}$. My budeme pracovat s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ a ukážeme si příklad o pro dvouprvkové konečné těleso $\mathbb{Z}_2$. Po zvolení příslušného tělesa $\mathbb{T}$ definujeme množiny:

$$\begin{aligned} \text{Vstup: } & I = \mathbb{T}^m \\ \text{Výstup: } & O = \mathbb{T}^l \\ \text{Prostor stavů: } & X = \mathbb{T}^n \end{aligned}$$

a zobrazení

$$
\begin{aligned}
A &:= X \to X,\\
B &:= I \to X,\\
C &:= C \to O,\\
D &:= I \to O,
\end{aligned}
$$

t.ž. pro $x_i \in X$, $u_i \in I$ a $y_i \in O$ máme diferenční rovnice:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k,\\
y_k &= Cx_k + Du_k.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Čtveřici $\{A, B, C, D\}$ nazýváme vnitřní popis soustavy a pokud jsou zobrazení $\{A, B, C, D\}$ matice příslušných rozměrů nazýváme tuto soustavu lineární.

Příklad 5

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}
$$

Podíváme se co se v kroku k děje na prostoru stavů

$$
\begin{pmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k^2 \\ x_k^1 + x_k^2 + u_k \end{pmatrix}
$$

a na výstupu

$$
y_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \end{pmatrix} = x_k^2
$$

V případě, že volíme $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ dostáváme pro vstup $u_k = 0$ na výstupu takzvanou Fibonacciho posloupnost

$$
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \ldots
$$

a v případě volby $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_2$ diskrétní periodickou posloupnost

$$
1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \ldots
$$

kterou dostaneme přepočtem modulo 2.

V dalším budeme pracovat nad reálnými čísly, tedy $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Vnějším popisem rozumíme polynomiální zlomek (racionální lomenou funkci), který vypočteme pomocí vzorce:

$$
S = D + z^{-1}C(I_n - z^{-1}A)^{-1}B,
$$

kde I_n je jednotková matice příslušné dimenze. Vskutku, použitím Z–transformace převedeme rovnice (5) na rovnice

$$
zX_k + zX_0 = AX_k + BU_k, \tag{6}
$$

$$
Y_k = CX_k + DU_k. \tag{7}
$$

a protože předpokládáme $X_0 = 0$ dostaneme

$$(zI_n - A)X_k = zX_k - AX_k = BU_k$$

a

$$Y_k = CX_k + DU_k = C(zI_n - A)^{-1}BU_k + DU_k = (C(zI_n - A)^{-1}B + D)U_k$$

a celkově

$$S = \frac{Y_k}{U_k} = C(zI_n - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}(z).$$

My bychom ale chtěli přenos vyjádřit jako prvek $\mathbb{R}(z^{-1})$ Připomeňme, že inverzní matici k matici M můžeme vyjádřit jako $\frac{1}{det(M)}M^*$ kde M^* je matice adjungovaná. Platí, že

$$(z^{-1}M)^* = M^*(z^{-1}I_n)^* = M^*z^{-(n-1)}I_n$$

a tedy

$$(z^{-1}M)^{-1} = \frac{1}{det(M)z^{-n}}M^*z^{-(n-1)}I_n = zM^{-1}.$$

Celkově dostaneme

$$S = z^{-1}C(I_n - z^{-1}A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}(z^{-1}).$$

Příklad 6 *Pokračujme v analýze soustavy z příkladu 5. a připomeňme, že inverzní matici k matici typu* 2×2 *je možné vyjádřit předpisem:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a tedy dostaneme

$$(I_2 - z^{-1}A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} \\ -z^{-1} & 1 - z^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1(1 - z^{-1}) - (-z^{-1})(-z^{-1})}\begin{pmatrix} 1 - z^{-1} & z^{-1} \\ z^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$S = D + z^{-1}C(I_n - z^{-1}A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}\begin{pmatrix} 1 - z^{-1} & z^{-1} \\ z^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

Hodnota

Hodnotou na tělese $\mathbb{T}$ rozumíme zobrazení $H : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, které splňuje následující čtyři axiomy:

(H1) $H(a) \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$

(H2) $H(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(H3) $H(ab) = H(a)H(b), \ \forall a, b \in \mathbb{T}$

(H4) $H(a+b) \leq H(a) + H(b), \ \forall a, b \in \mathbb{T}$

Na okruhu reálných čísel $\mathbb{R}$ můžeme zavést dvě kanonické hodnoty:

$$
\begin{aligned}
H_1(x) &= |x|, \\
H_2(x) &= 1, \text{ pro } x \neq 0, \\
&= 0, \text{ pro } x = 0.
\end{aligned}
$$

Stabilitou rozumíme schopnost soustavy vrátit se po vychýlení zpět do rovnovážného stavu. Formálně hovoříme o soustavě jako stabilní pokud posloupnost

$$x_0, Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, \ldots$$

konverguje k nule vzhledem ke zvolené hodnotě. To v případě H_1 znamená, že se hodnota na vnitřních stavech zmenšuje, v případě H_2 musí být nulová po konečném počtu kroků.

Příklad 7 *Soustava z příkladu 5. není stabilní vůči žádné z norem H_i.*

Nakonec řekneme, že formální mocninná řada je stabilní vzhledem k hodnotě H_i pokud posloupnost jejich koeficientů $\{a_0, a_1, \ldots\}$ konverguje k nule vzhledem k hodnotě H_i. Množinu všech kauzálních stabilních mocninných řad označujeme $\mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$. Polynom p nazveme stabilní pokud jeho inverze je stabilní formální mocninná řada.

Polynom $\det(zI_n - A)$ se nazývá charakteristický polynom soustavy a jeho stabilita souvisí se stabilitou systému. Polynom $\det(I_n - z^{-1}A)$ se nazývá pseudocharakeristický polynom soustavy a také souvisí se stabilitou, rozdíl je následující, například pro matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dostaneme

$$\det(zI_n - A) = \det\left(\begin{pmatrix} z & -1 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) = z^2$$

jako charakteristický polynom a $\det(I_n - z^{-1}A) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$ je pseudocharakteristický polynom. Rozdíl je v tom, že v případě pseudocharakteristického polynomu se sice část informace ztrácí, ale je vhodný pro analýzu stability. Charakteristický polynom nemusí být invertibilní i když je soustava stabilní, jako například vidíme v našem případě:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Přenos ve formě podílu dvou polynomů, kde ve jmenovateli máme máme kauzální polynom (podmínka realizovatelnosti) můžeme napsat ve tvaru formální kauzální mocninné řady. V dalším budeme rozlišovat s pro reprezentaci přenosu formální mocninou řadou a S pro reprezentací polynomiálním zlomkem.

Takzvané časově diskrétní zpoždění ve formě mocninné řady můžeme vyjádřit i maticově jako

$$s = \Sigma_0 + \Sigma_1 z^{-1} + \Sigma_2 z^{-2} + \cdots \tag{8}$$

kde dostaneme pomocí vzorců:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= D \\ \Sigma_k &= CA^{k-1}B, \text{ kde k= 1, 2, } \ldots \end{aligned}$$

Příklad 8 *Pokračujeme v analýze soustavy z příkladu 5. Pro volbu* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *dostaneme*

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$CAB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a protože

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a například

$$CA^3B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

dostaneme

$$s = 0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 2z^{-3} + \cdots$$

kde koeficienty jsou opět koeficienty Fibonacciho posloupnosti. Pro volbu $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_2$ *dostaneme jednoduše propočtem modulo dva:*

$$s = 0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 0z^{-3} + 1z^{-4} + \cdots$$

Vnitřní popis soustavy tedy jednoznačně určuje vnější, opak obecně neplatí, klíčovým pojmem je minimální realizace. Čtveřice $\{A, B, C, D\}$, kde $A \in \mathbb{R}_n$ je minimální realizace, pokud platí, že hodnost blokových matic $(B, AB, \ldots A^{n-1}B)$ a $(C, CA, C \ldots A^{n-1})^T$ je n. Například pro čtveřici 5

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \right\}$$

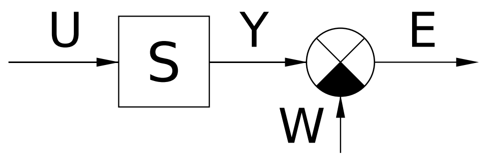
máme

$$h \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) = 2, \quad h \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right)^T = 2,$$

kde symbolem $h(M)$ rozumíme hodnost matice M.

4 Přímovazební deterministické řízení

V případě přímovazebního deterministického řízení hledáme vstupní posloupnost U takovou, že výstup Y postupně konverguje k žádané posloupnosti W.



Obrázek 4: Přímovazební obvod

Přímovazební deterministické řízení je určeno definicemi

$$
\begin{aligned}
\text{Přenos soustavy} &- S \\
\text{Žádaná posloupnost} &- W \\
\text{Řídící posloupnost} &- U \\
\text{Výstupní posloupnost} &- Y \\
\text{Odchylka řízení} &- E
\end{aligned}
$$

a rovnicemi

$$
\begin{aligned}
E &= W - Y \\
Y &= SU
\end{aligned}
$$

4.1 Konečné časově optimální řízení

Hledáme U takové, že E je konečná posloupnost trvale nulová po uplynutí minimální doby. Připomeňme, že lineární diofantická rovnice

$$ax + by = c$$

má řešení právě tehdy když $(a,b)|c$ a pokud x_0, y_0 je partikulární řešení pak všechna řešení jsou ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{b}{(a,b)}t \\
y &= y_0 - \frac{a}{(a,b)}t
\end{aligned}
$$

kde $t \in \mathbb{T}[z^{-1}]$, více informací je možné nalézt v [2]. Skutečně se jedná o řešení

$$a\left(x_0 + \frac{b}{(a,b)}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{(a,b)}t\right) = ax_0 + \frac{ab}{(a,b)}t + by_0 - \frac{ba}{(a,b)}t = ax_0 + by_0 = c$$

Partikulární řešení (x_0, y_0) nalezneme pomocí koeficientů Bezoutovy rovnosti $(\bar{x}, \bar{y})$, pro které platí

$$a\bar{x} + b\bar{y} = d := (a, b)$$

jako:

$$x_0 = \frac{\bar{x}c}{d}, \ \ y_0 = \frac{\bar{y}c}{d}$$

a všechna řešení jsou pak ve tvaru:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}c}{d} + \frac{b}{d}t \\ y &= \frac{\bar{y}c}{d} - \frac{a}{d}t \end{aligned}$$

Skutečně

$$a(\frac{\bar{x}c}{d} + \frac{b}{d}t) + b(\frac{\bar{y}c}{d} - \frac{a}{d}t) = (a\bar{x} + b\bar{y})\frac{c}{d} = d\frac{c}{d} = c,$$

klíčové je, že $(a, b)|c$ a tedy výraz $\frac{c}{d}$ je polynom $\mathbb{R}[z^{-1}]$.

Naším cílem, je pro soustavu s přenosem $S = \frac{\beta}{\alpha}$ nastavit řídící posloupnost U tak aby chyba řízení pro požadovanou posloupnost $W = \frac{\delta}{\gamma}$ měla tvar polynomu minimálního stupně (konečné časově optimální řízení). Volíme $\alpha_0 = \frac{\alpha}{(\alpha,\gamma)}$, $\gamma_0 = \frac{\gamma}{(\alpha,\gamma)}$ a dostaneme

$$E = W - SU = \frac{\delta\alpha_0 - \gamma_0\beta U}{\gamma\alpha_0} \in \mathbb{T}[z^{-1}]$$

tedy

$$\delta\alpha_0 - \gamma_0\beta U = \gamma\alpha_0 E$$

z toho je vidět, že α_0 musí dělit U a můžeme vyjádřit

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0}u_0$$

a postupnými úpravami rovnice dostaneme:

$$\delta\alpha_0 - \gamma_0\beta\frac{\alpha_0}{\gamma_0}u_0 = \gamma\alpha_0 E$$

$$\delta\alpha_0 - \beta\alpha_0 u_0 = \gamma\alpha_0 E$$

po vydělení α_0

$$\delta - \beta u_0 = \gamma E$$

a nakonec Diofantickou rovnici napíšeme ve tvaru

$$\gamma E + \beta u_0 = \delta$$

kterou vyřešíme.

Příklad 9 *Mějme přenos*

$$S = \frac{z^{-3} + 3z^{-2} + z^{-1} - 2}{1 + z^{-1}}$$

a žádanou posloupnost

$$W = \frac{z^{-2} + 4z^{-1} + 4}{z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1} + 2}$$

tedy

$$\begin{aligned}
\beta &= z^{-3} + 3z^{-2} + z^{-1} - 2 \\
\alpha &= 1 + z^{-1} \\
\delta &= z^{-2} + 4z^{-1} + 4 \\
\gamma &= z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1} + 2
\end{aligned}$$

a diofantická rovnice má tvar

$$(z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1} + 2)E + (z^{-3} + 3z^{-2} + z^{-1} - 2)u_0 = z^{-2} + 4z^{-1} + 4$$

máme tedy pro tvar $ax + by = c$ volbu

$$\begin{aligned}
a &= z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1} + 2 \\
b &= z^{-3} + 3z^{-2} + z^{-1} - 2 \\
c &= z^{-2} + 4z^{-1} + 4 \\
x &= E \\
y &= u_0
\end{aligned}$$

Hledáme tedy největšího společného dělitele (a, b) a koeficienty Bezoutovy rovnosti $\bar{x}$ a $\bar{y}$. Upravujeme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1} + 2) \\ 0 & 1 & (z^{-3} + 3z^{-2} + z^{-1} - 2) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & (-z^{-2} + 4) \\ 0 & 1 & (z^{-3} + 3z^{-2} + z^{-1} - 2) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & (-z^{-2} + 4) \\ z^{-1} + 3 & -2 - z^{-1} & (5z^{-1} + 10) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z^{-2} + \frac{3}{5}z^{-1} + 1 & -\frac{1}{5}z^{-2} - \frac{2}{5}z^{-1} - 1 & (2z^{-1} + 4) \\ z^{-1} + 3 & -2 - z^{-1} & (5z^{-1} + 10) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z^{-2} + \frac{1}{5}z^{-1} - \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}z^{-2} + \frac{2}{5}z^{-1} - \frac{1}{5} & 0 \\ z^{-1} + 3 & -2 - z^{-1} & (5z^{-1} + 10) \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
d &= 5z^{-1} + 10 \\
\bar{x} &= z^{-1} + 3 \\
\bar{y} &= -2 - z^{-1}
\end{aligned}$$

a všechna řešení jsou pak ve tvaru:

$$x = \frac{(z^{-1}+3)(z^{-2}+4z^{-1}+4)}{(5z^{-1}+10)} + \frac{(z^{-3}+3z^{-2}+z^{-1}-2)}{(5z^{-1}+10)}t$$
$$y = \frac{(-2-z^{-1})(z^{-2}+4z^{-1}+4)}{(5z^{-1}+10)} - \frac{(z^{-3}+2z^{-2}+z^{-1}+2)}{(5z^{-1}+10)}t$$

Po úpravě

$$x = \frac{1}{5}(z^{-2}+5z^{-1}+6) + \frac{1}{5}(z^{-2}+z^{-1}-1)t$$
$$y = -\frac{1}{5}(z^{-2}+4z^{-1}+4) - \frac{1}{5}(z^{-2}+1)t$$

tj.

$$E = \frac{1}{5}(z^{-2}+5z^{-1}+6) + \frac{1}{5}(z^{-2}+z^{-1}-1)t$$
$$u_0 = -\frac{1}{5}(z^{-2}+4z^{-1}+4) - \frac{1}{5}(z^{-2}+1)t$$

Minimalizujeme E tedy hledáme $t \in \mathbb{T}[z^{-1}]$ aby E byl polynom nejnižšího stupně. stupeň t může být maximálně nula a pokud zvolíme $\tau_= -1$ dostaneme

$$E = \frac{1}{5}(z^{-2}+5z^{-1}+6) + \frac{1}{5}(z^{-2}+z^{-1}-1)(\tau_0) = -\frac{4}{5}z^{-1} + \frac{7}{5}$$

a příslušné u_0 je

$$u_0 = -\frac{1}{5}(z^{-2}+4z^{-1}+4) - \frac{1}{5}(z^{-2}+1)(-1) = -\frac{4}{5}z^{-1} - \frac{3}{5}$$

Hledaná řídící posloupnost je pak tvaru

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0}u_0 = \frac{(1+z^{-1})(-\frac{4}{5}z^{-1}-\frac{3}{5})}{z^{-3}+2z^{-2}+z^{-1}+2} = \frac{-\frac{4}{5}z^{-2}-\frac{7}{5}z^{-1}-\frac{3}{5}}{z^{-3}+2z^{-2}+z^{-1}+2},$$

kde

$$\alpha_0 = 1+z^{-1}$$
$$\gamma_0 = z^{-3}+2z^{-2}+z^{-1}+2,$$

protože $(\alpha,\gamma) = 1$.

Příklad 10 *Mějme přenos*

$$S = \frac{z^{-2} - 1}{z^{-3} - 2z^{-2} - 4z^{-1} + 8} = \frac{\beta}{\alpha}$$

a žádanou posloupnost

$$W = \frac{z^{-2} - 2z^{-1} - 3}{z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6} = \frac{\delta}{\gamma}$$

tedy:

$$\begin{aligned} \alpha &= z^{-3} - 2z^{-2} - 4z^{-1} + 8 \\ \beta &= z^{-2} - 1 \\ \gamma &= z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6 \\ \delta &= z^{-2} - 2z^{-1} - 3 \end{aligned}$$

Chceme-li soustavu s přenosem S uřídit na požadovanou posloupnost W, tak řešíme diofantickou rovnici ve tvaru $\gamma \cdot E + \beta \cdot u_0 = \delta$ tedy rovnici:

$$(z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6) \cdot E + (z^{-2} - 1) \cdot u_0 = (z^{-2} - 2z^{-1} - 3)$$

což je rovnice $a \cdot x + b \cdot y = c$ pro volbu:

$$\begin{aligned} a &= z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6 \\ b &= z^{-2} - 1 \\ c &= z^{-2} - 2z^{-1} - 3 \\ x &= E \\ y &= u_0 \end{aligned}$$

Připomeňme, že tato rovnice má řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x} \cdot c}{d} + \frac{b}{d} t \\ y &= \frac{\bar{y} \cdot c}{d} - \frac{a}{d} t \end{aligned}$$

Hledáme tedy největšího společného dělitele $d = (a, b) = (\gamma, \beta)$ a koeficienty Bezoutovy rovnosti $\bar{x}$ a $\bar{y}$. Upravujeme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6 \\ 0 & 1 & z^{-2} - 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

od prvního řádku odečteme z^{-1}-násobek druhého.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} & 6z^{-2} + 12z^{-1} + 6 \\ 0 & 1 & z^{-2} - 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

od prvního řádku odečteme 6-násobek druhého.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1}-6 & 12z^{-1}+12 \\ 0 & 1 & z^{-2}-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

od 12-násobku druhého řádku odečteme z^{-1}-násobek druhého.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1}-6 & 12z^{-1}+12 \\ -z^{-1} & z^{-2}+6z^{-1}+12 & -12z^{-1}-12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

nakonec první řádek přičteme k druhému

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1}-6 & 12z^{-1}+12 \\ 1-z^{-1} & z^{-2}+5z^{-1}+6 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

tedy hledaný největší společný dělitel a koeficienty Bezoutovy rovnice jsou:

$$\begin{aligned} d = (a,b) = (\gamma,\beta) &= 12(z^{-1}+1) \\ \bar{x} &= 1-z^{-1} \\ \bar{y} &= z^{-2}+5z^{-1}+6 \end{aligned}$$

Na tomto místě je vhodné ověřit, že jsme počítali správně. Proveďme proto dvojici zkoušek:

$$\begin{aligned} 1\cdot(z^{-3}+6z^{-2}+11z^{-1}+6)+(-z^{-1}-6)\cdot(z^{-2}-1) = \\ = (z^{-3}+6z^{-2}+11z^{-1}+6)+(-z^{-3}-6z^{-2}+1z^{-1}+6) = 12z^{-1}+12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-z^{-1})\cdot(z^{-3}+6z^{-2}+11z^{-1}+6)+(z^{-2}+5z^{-1}+6)\cdot(z^{-2}-1) = \\ = (-(z^{-4}+6z^{-3}+11z^{-2}+6z^{-1})+(z^{-3}+6z^{-2}+11z^{-1}+6)) \\ +((z^{-4}+5z^{-3}+6z^{-2})-(z^{-2}+5z^{-1}+6)) \\ = 0 \end{aligned}$$

Dále je vhodné ověřit zda $d|c$ tedy zda $(\gamma,\beta)|\delta$:

$$\begin{array}{l} (z^{-2}-2z^{-1}-3) : 12(z^{-1}+1) = \dfrac{1}{12}(z^{-1}-3) \\ \underline{-(z^{-2}+z^{-1})} \\ \qquad\quad 3z^{-1}-3 \\ \qquad \underline{-(3z^{-1}-3)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \ zb. \end{array}$$

Pokud by tato dělitelnost nebyla splněna, tak je to známkou toho, že vstupní sekvenci, která by soustavu uřídila na požadovanou posloupnost, nelze nalézt.

Všechna řešení jsou pak ve tvaru:

$$x = \frac{1 \cdot (z^{-2} - 2z^{-1} - 3)}{12(z^{-1}+1)} + \frac{z^{-2} - 1}{12(z^{-1}+1)}t$$
$$y = \frac{(-z^{-1} - 6) \cdot (z^{-2} - 2z^{-1} - 3)}{12(z^{-1}+1)} - \frac{z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6}{12(z^{-1}+1)}t$$

Po úpravě:

$$x = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (z^{-1} - 3) + \frac{1}{12}(z^{-1} - 1)t$$
$$y = \frac{1}{12}(-z^{-1} - 6) \cdot (z^{-1} - 3) - \frac{1}{12}(z^{-2} + 5z^{-1} + 6)t$$

Po další úpravě:

$$x = \frac{1}{12}\left((z^{-1} - 3) + (z^{-1} - 1)t\right)$$
$$y = \frac{1}{12}\left((-z^{-2} - 3z^{-1} + 18) - (z^{-2} + 5z^{-1} + 6)t\right)$$

Snažíme se minimalizovat $E = x = \frac{1}{12}\left((z^{-1} - 3) + (z^{-1} - 1)t\right)$, tedy hledáme $t \in \mathbb{T}[z^{-1}]$ aby E byl polynom nejnižšího stupně. Stupeň polynomu t může být maximálně nula. V našem případě minimalizaci provedeme volbou $t = -1$, minimalizovaný polynom $E = -\frac{1}{6}$. Tomu odpovídá

$$u_0 = y = \frac{1}{12}\left((-z^{-2} - 3z^{-1} + 18) - (z^{-2} + 5z^{-1} + 6) \cdot (-1)\right) = \frac{1}{12}\left(2z^{-1} + 24\right)$$

Hledaná řídící posloupnost je pak tvaru

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0}u_0 \text{ kde } \alpha_0 = \frac{\alpha}{(\alpha, \gamma)} \text{ a } \gamma_0 = \frac{\gamma}{(\alpha, \gamma)}$$

Musíme spočítat nejmenšího společného dělitele (α, γ) - použijeme nám známý algoritmus, s tím rozdílem, že nás nyní nezajímají koeficienty Bezoutovy rovnosti, takže nám stačí vést algoritmus pouze pro třetí sloupec:

$$\begin{pmatrix} z^{-3} - 2z^{-2} - 4z^{-1} + 8 \\ z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8z^{-3} - 16z^{-2} - 32z^{-1} + 64 \\ 8z^{-2} + 15z^{-1} - 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -31z^{-2} - 30z^{-1} + 64 \\ 8z^{-2} + 15z^{-1} - 2 \end{pmatrix}$$

Mohli bychom samozřejmě v algoritmu pokračovat, ale lze také vyslovit domněnku, že tyto polynomy jsou nesoudělné, tedy že jejich největší společný dělitel je (až na násobnost) 1, tedy konstantní polynom.

Chceme-li tuto domněnku ověřit, můžeme postupovat následovně: polynomy v obou řádcích matice jsou druhého stupně, takže můžeme pomocí determinantu určit jejich kořeny (popř. rozložit na součin polynomů prvního stupně jiným *způsobem) a porovnáním takto získaných kořenů dojdeme k závěru, zda jsou soudělné či nikoliv. Jsou-li soudělné, pak rovnou dostáváme i dvojčlen, který je společným dělitelem.*

Jiný způsob spočívá v získání kořenů jednoho z polynomů výše uvedeným způsobem a následné dosazení druhého z nich, čímž ověříme, zda jsou případně i jeho kořeny.

Vezměme tedy například spodní polynom a počítejme jeho determinant: $D = B^2 - 4AC = 15^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-2) = 225 + 64 = 289$. *Počítejme nyní jeho kořeny:* $x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{-15 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 8} = \frac{-15 \pm 17}{16} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{1}{8}$. *Nyní se tyto kořeny pokusíme dosadit do horního polynomu. Vskutku zjistíme, že kořen* x_1 *je i kořenem horního polynomu, neboť* $-31 \cdot (-2)^2 - 30 \cdot (-2) + 64 = -124 + 60 + 64 = 0$ *(podobně lze ověřit i to, že druhý kořen,* x_2*, spodního polynomu není kořenem horního). V tom případě můžeme dvojčlenem* $(z^{-1} - x_1) = (z^{-1} + 2)$ *horní polynom vydělit:*

$$
\begin{array}{l}
(-31z^{-2} - 30z^{-1} + 64) : (z^{-1} + 2) = -31z^{-1} + 32 \\
\underline{-(31z^{-2} - 62z^{-1})} \\
\qquad\qquad 32z^{-1} + 64 \\
\qquad\quad \underline{-(32z^{-1} + 64)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \ zb.
\end{array}
$$

Úlohu hledání největšího společného dělitele (α, γ)*, tedy největšího společného dělitele polynomů* $z^{-3} - 2z^{-2} - 4z^{-1} + 8$ *a* $z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6$ *jsme výše převedli (zjednodušili) na úlohu hledání největšího společného dělitele polynomů* $-31z^{-2} - 30z^{-1} + 64$ *a* $8z^{-2} + 15z^{-1} - 2$*, kterou jsme ovšem právě vyřešili a tímto největším společným dělitelem je polynom* $z^{-1} + 2$.

Nyní tedy můžeme spočítat „zkrácené" polynomy α_0 *a* γ_0*:*

$$
\begin{array}{l}
\alpha_0 = \dfrac{\alpha}{(\alpha, \gamma)} = (z^{-3} - 2z^{-2} - 4z^{-1} + 8) : (z^{-1} + 2) = z^{-2} - 4z^{-1} + 4 \\
\qquad\qquad \underline{-(z^{-3} - 2z^{-2})} \\
\qquad\qquad\qquad -4z^{-2} - 4z^{-1} \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-4z^{-2} - 8z^{-1})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4z^{-1} + 8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(4z^{-1} + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \ zb.
\end{array}
$$

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{(\alpha,\gamma)} = (z^{-3} + 6z^{-2} + 11z^{-1} + 6) : (z^{-1} + 2) = z^{-2} + 4z^{-1} + 3$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(z^{-3} + 2z^{-2})} \\
\qquad\quad 4z^{-2} + 11z^{-1} \\
\qquad \underline{-(-4z^{-2} + 8z^{-1})} \\
\qquad\qquad\qquad 3z^{-1} + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(3z^{-1} + 6)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \ zb.
\end{array}$$

Hledaná řídící posloupnost je pak tvaru

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} u_0 = \frac{1}{12} \frac{z^{-2} - 4z^{-1} + 4}{z^{-2} + 4z^{-1} + 3} \left(2z^{-1} + 24\right) = \frac{(z^{-2} - 4z^{-1} + 4)(z^{-1} + 12)}{6(z^{-2} + 4z^{-1} + 3)}$$

Příklad 11 *Mějme přenos*

$$S = \frac{z^{-3} + z^{-2} - z^{-1} - 1}{z^{-3} - 4z^{-2} + 5z^{-1} - 2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

a žádanou posloupnost

$$W = \frac{z^{-3} + 2z^{-2} - z^{-1} - 2}{z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} + 1} = \frac{\delta}{\gamma}$$

tedy:

$$\begin{aligned}
\alpha &= z^{-3} - 4z^{-2} + 5z^{-1} - 2 \\
\beta &= z^{-3} + z^{-2} - z^{-1} - 1 \\
\gamma &= z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} + 1 \\
\delta &= z^{-3} + 2z^{-2} - z^{-1} - 2
\end{aligned}$$

Chceme-li soustavu s přenosem S uřídit na požadovanou posloupnost W, tak řešíme diofantickou rovnici ve tvaru $\gamma \cdot E + \beta \cdot u_0 = \delta$ tedy rovnici:

$$(z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} + 1) \cdot E + (z^{-3} + z^{-2} - z^{-1} - 1) \cdot u_0 = (z^{-3} + 2z^{-2} - z^{-1} - 2)$$

což je rovnice $a \cdot x + b \cdot y = c$ pro volbu:

$$\begin{aligned}
a &= z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} + 1 \\
b &= z^{-3} + z^{-2} - z^{-1} - 1 \\
c &= z^{-3} + 2z^{-2} - z^{-1} - 2 \\
x &= E \\
y &= u_0
\end{aligned}$$

Připomeňme, že tato rovnice má řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\bar{x} \cdot c}{d} + \frac{b}{d}t \\
y &= \frac{\bar{y} \cdot c}{d} - \frac{a}{d}t
\end{aligned}$$

Hledáme tedy největšího společného dělitele $d = (a, b) = (\gamma, \beta)$ a koeficienty Bezoutovy rovnosti $\bar{x}$ a $\bar{y}$. Upravujeme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} + 1 \\ 0 & 1 & z^{-3} + z^{-2} - z^{-1} - 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

od prvního řádku odečteme druhý.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2z^{-2} + 2 \\ 0 & 1 & z^{-3} + z^{-2} - z^{-1} - 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

k dvojnásobku druhého řádku přičteme z^{-1}-násobek prvního.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2z^{-2}+2 \\ z^{-1} & 2-z^{-1} & 2z^{-2}-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

nakonec první řádek přičteme k druhému.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2(1-z^{-2}) \\ 1+z^{-1} & 1-z^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

tedy hledaný největší společný dělitel a koeficienty Bezoutovy rovnice jsou:

$$\begin{aligned} d = (a,b) = (\gamma,\beta) &= 2(1-z^{-2}) \\ \bar{x} &= 1+z^{-1} \\ \bar{y} &= 1-z^{-1} \end{aligned}$$

Na tomto místě je možné ověřit, že jsme počítali správně, toto ověření ponecháváme laskavému čtenáři jako cvičení.

Dále je vhodné ověřit zda $d|c$ tedy zda $(\gamma,\beta)|\delta$:

$$\begin{array}{l} (z^{-3}+2z^{-2}-z^{-1}-2) : 2(z^{-2}-1) = \frac{1}{2}(z^{-1}+1) \\ \underline{-(z^{-3} \qquad\quad -z^{-1})} \\ \qquad\quad 2z^{-2} \qquad\quad -2 \\ \qquad \underline{-(2z^{-2} \qquad\quad -2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \ zb. \end{array}$$

Pokud by tato dělitelnost nebyla splněna, tak je to známkou toho, že vstupní sekvenci, která by soustavu uřídila na požadovanou posloupnost, nelze nalézt.

Všechna řešení jsou pak ve tvaru:

$$\begin{aligned} E = x &= -1 \cdot \frac{1}{2}(z^{-1}+2) + \frac{1}{2}(z^{-1}+1)t \\ u_0 = y &= 1 \cdot \frac{1}{2}(z^{-1}+2) - \frac{1}{2}(z^{-1}-1)t \end{aligned}$$

Snažíme se minimalizovat $E = x = \frac{1}{12}\big((z^{-1}-3)+(z^{-1}-1)t\big)$, tedy hledáme $t \in \mathbb{T}[z^{-1}]$ aby E byl polynom nejnižšího stupně. Stupeň polynomu t může být maximálně nula. V našem případě minimalizaci provedeme volbou $t=1$, minimalizovaný polynom $E = -\frac{1}{2}$. Tomu odpovídá

$$u_0 = y = \frac{1}{2}(z^{-1}+2) - \frac{1}{2}(z^{-1}-1)\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

Hledaná řídící posloupnost je pak tvaru

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0}u_0 \text{ kde } \alpha_0 = \frac{\alpha}{(\alpha,\gamma)} \text{ a } \gamma_0 = \frac{\gamma}{(\alpha,\gamma)}$$

Musíme spočítat nejmenšího společného dělitele (α, γ) - použijeme nám známý algoritmus, s tím rozdílem, že nás nyní nezajímají koeficienty Bezoutovy rovnosti, takže nám stačí vést algoritmus pouze pro třetí sloupec:

$$\begin{pmatrix} z^{-3} - 4z^{-2} + 5z^{-1} - 2 \\ z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} + 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3z^{-2} + 6z^{-1} - 3 \\ z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} + 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3z^{-2} + 6z^{-1} - 3 \\ 3z^{-2} - 6z^{-1} + 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3z^{-2} - 6z^{-1} + 3 \end{pmatrix}$$

Nyní tedy můžeme spočítat „zkrácené“ polynomy α_0 a γ_0:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{(\alpha, \gamma)} = (z^{-3} - 4z^{-2} + 5z^{-1} - 2) : 3(z^{-2} - 2z^{-1} + 1) = \frac{1}{3}(z^{-1} - 2)$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(z^{-3} - 2z^{-2} + z^{-1})} \\ -2z^{-2} + 4z^{-1} - 2 \\ \underline{-(-2z^{-2} + 4z^{-1} - 2)} \\ 0 \ \textit{zb.} \end{array}$$

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{(\alpha, \gamma)} = (z^{-3} - z^{-2} - z^{-1} + 1) : (3(z^{-2} - 2z^{-1} + 1)) = \frac{1}{3}(z^{-1} + 1)$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(z^{-3} - 2z^{-2} + z^{-1})} \\ z^{-2} - 2z^{-1} + 1 \\ \underline{-(z^{-2} - 2z^{-1} + 1)} \\ 0 \ \textit{zb.} \end{array}$$

Hledaná řídící posloupnost je pak tvaru

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} u_0 = \frac{3}{2} \frac{z^{-1} - 2}{z^{-1} + 1}$$

Příklad 12 *Mějme přenos jednoduché soustavy*

$$S = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{a + z^{-1}} = \frac{b}{a}, \ \ W = \frac{q}{p}$$

a tedy diofantickou rovnici

$$(1 + z^{-1} + z^{-2})x + y = z^{-2}$$

Partikulární řešení dostaneme:

$$x_1 = 1, \ \ \ y_1 = 1 + z^{-1}$$

a máme pak

$$U = \frac{a_0 x_1}{p_0} = 1 + z^{-1}$$

a $E = y_1$ *a*

$$\begin{aligned} k &= 0 \ \textit{pro} \ E = 0 \\ &= \partial e \ \textit{pro} \ E \neq 0 \end{aligned}$$

Pro soustavy, které nejsou jednoduché, tedy pro soustavy, kde přenosem není polynomiální zlomek, ale matice polynomiálních zlomků musíme prvně vyjádřit matici přenosu ve tvaru rozkladu

$$S = B_1 A_2^{-1},$$

kde

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

kde všechny matice jsou příslušných rozměrů a matice B_{11} je plné sloupcové hodnosti. Pak $W = \frac{Q}{p}$, kde $(p, Q) = 1$ po složkách.

$$E = W - SU = W - B_1 A_2^{-1} U = W - \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \end{pmatrix} A_2^{-1} U = \frac{Q}{p} - B_{11} U =: Y$$

a Y musí být polynomiální matice. Zavedeme $A_2^{-1} U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ a dostaneme

$$pY = Q - pB_{11} U_1$$

a vyjádříme $U_1 = \frac{X}{p}$ pak řešíme diofantickou rovnici

$$B_{11} X + pY = Q$$

Příklad 13 *Mějme*

$$S = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ z^{-3} & z^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - z^{-1} & -(1 - z^{-1})(1 - z^{-2}) \\ 0 & 1 - z^{-1} \end{pmatrix}, \ \ W = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1 - z^{-1}}$$

Řešíme tedy Diofantickou rovnici:

$$\begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ z^{-3} & z^{-5} \end{pmatrix} X + Y(1-z^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešením jsou pak polynomiální matice

$$X = \begin{pmatrix} 1+(1-z^{-1})t_1 \\ -1+(1-z^{-1})t_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1-z^{-1}t_1 \\ -z^{-3}-z^{-4}-z^{-3}t_2-z^{-5}t_2 \end{pmatrix}$$

pro volbu $t=-1-z^{-1}$ *a* $t_2=0$ *dostaneme*

$$X = \begin{pmatrix} z^{-2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1+z^{-1}+z^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

a

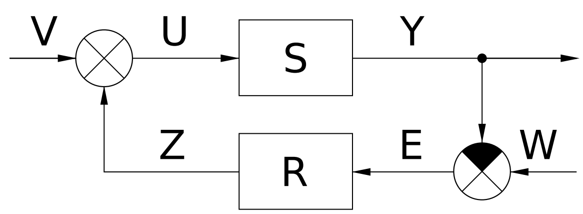
$$U_1 = \frac{\begin{pmatrix} z^{-2} \\ -1 \end{pmatrix}}{1-z^{-1}}$$

Celkově

$$U = \begin{pmatrix} 1-z^{-1} & -(1-z^{-1})(1-z^{-2}) \\ 0 & 1-z^{-1} \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} z^{-2} \\ -1 \end{pmatrix}}{1-z^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5 Zpětnovazební obvod

Zpětnovazební obvod je určený následujícím diagramem, máme řízenou soustavu se vstupem U a výstupem Y a požadovanou výstupní posloupnost W. Chyba výstupní posloupností je pak vstupem pro řídící soustavu.



Obrázek 5: Zpětnovazební obvod

Příslušné rovnice řídícího systému jsou pak v následujícím tvaru:

$$Y = SU, \quad Z = RE,$$
$$E = W - Y, \quad U = V + Z.$$

tedy

$$W = E + Y = E + SU,$$
$$V = U - Z = U - RE,$$

a maticově

$$\begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S \\ -R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ U \end{pmatrix}$$

Ověříme, že následující bloková matice je k matici předešlé soustavy inverzní

$$\begin{pmatrix} (I+SR)^{-1} & -S(I+RS)^{-1} \\ R(I+SR)^{-1} & (I+RS)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ -R & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a současně platí

$$R(I+SR)^{-1} = (I+SR)^{-1}R$$
$$S(I+SR)^{-1} = (I+SR)^{-1}S$$

tedy dostaneme

$$\begin{pmatrix} E \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S \\ -R & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{1+SR} \begin{pmatrix} 1 & -S \\ R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix}$$

dostaneme přenos $\mathcal{K} = K_{W,V/E,U}$.

5.1 Pravý a levý nesoudělný rozklad

Pro matici kauzálních formálních mocninných řad S můžeme najít polynomiální matice příslušných rozměrů A_1, A_2, B_1 a B_2 takové že

$$S = A_1^{-1}B_2 = B_1A_2^{-1}$$

Dvojici A_1, B_2 říkáme levý nesoudělný rozklad matice S a Dvojici A_2, B_1 říkáme pravý nesoudělný rozklad matice S. Pravý nesoudělný rozklad vypočteme tak, že matici formálních mocninných řad vyjádříme ve tvaru $S = \frac{B}{a}$, kde B je polynomiální matice a a je kauzální polynom. Pak můžeme psát $S = A^{-1}B$ kde A je diagonální matice s polynomem a na diagonále. Dále nalezneme koeficienty pro levý největší společný dělitel

$$AP_2 + BQ_2 = D$$
$$AR_2 + BS_2 = D$$

pak platí, že $AR_2 = -BS_2 \Rightarrow R_2S_2^{-1} = A^{-1}B = S$.

5.2 Částečné přenosy

Mějme levý a pravý nesoudělný rozklad matic S a R

$$S = A_1^{-1}B_2 = B_1A_2^{-1}$$
$$R = F_1^{-1}G_2 = G_1F_2^{-1}$$

pak následující matice

$$L_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ -G_2 & F_1 \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} F_2 & B_1 \\ -G_2 & A_2 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

tvoří pravý a levý nesoudělný rozklad přenosu $\mathcal{K}$, tedy $\mathcal{K} = L_1K_2^{-1} = K_1^{-1}L_2$. Můžeme ukázat, že pseudocharakteristický polynom $c \sim |K_1| \sim |K_2|$. Dále můžeme problém nalezení pseudocharakteristického polynomu převést na vypočet determinantu nižšího řádu zavedeme pomocné matice

$$C_1 = A_1F_2 + B_2G_1$$
$$C_2 = F_1A_2 + G_2B_1$$

pro které platí, že pseudocharakteristický polynom c je asiociovaný determinantu matice C_1 což je asiociovaný polynom determinantu matice C_2.

Pseudocharakteristický polynom c zpětnovazebního obvodu není roven čitateli výrazu $\det(1 + SR)$ ani $\det(1 + RS)$. Například

$$S = \frac{1}{1 - z^{-2}} \begin{pmatrix} 1 + z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 - z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z^{-1} & -1 \\ 1 - z^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - z^{-2} & -1 + z^{-1} \\ 1 - z^{-2} & 1 + z^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$
$$R = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(I + RS) = -\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \qquad c = (1 - z^{-1})(3 + z^{-1}).$$

Dále se podíváme na částečné přenosy, například pro $K_{W,E}$, protože máme

$$\begin{pmatrix} E \\ U \end{pmatrix} = \frac{1}{1+SR} \begin{pmatrix} 1 & -S \\ R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+SR} \begin{pmatrix} W \\ RW \end{pmatrix}$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} K_{W,E} &= (1+SR)^{-1} = (1+SR)^{-1} = (A_1^{-1}(A_1F_2 + B_2G_1)F_2^{-1})^{-1} \\ &= F_2(A_1F_2 + B_2G_1)^{-1}A_1 = F_2C_1^{-1}A_1 \end{aligned}$$

a následně

$$\begin{aligned} K_{W/Z} &= G_1C_1^{-1}A_1, \quad & K_{V/E} &= -F_2C_1^{-1}B_2, \\ K_{V/Z} &= -G_1C_1^{-1}B_2, \quad & K_{V/U} &= A_2C_2^{-1}F_1, \\ K_{W/U} &= A_2C_2^{-1}G_2, \quad & K_{V/Y} &= B_1C_2^{-1}F_1, \\ K_{W/Y} &= B_1C_2^{-1}G_2. \end{aligned}$$

Pro soustavu $\mathcal{S}$ mějme přenos ve tvaru pravého a levého nesoudělného rozkladu

$$S = \begin{pmatrix} z^{-1} \\ z^{-1} - z^{-2} \end{pmatrix} \left(1 - 2z^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2z^{-1} & 0 \\ -1+z^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

a pro regulátor $\mathcal{R}$ mějme přenos ve tvaru pravého a levého nesoudělného rozkladu

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1+z^{-1} \end{pmatrix} = \left(1\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 - z^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Určíme pseudocharakteristický polynom pomocí pomocných matic

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1-2z^{-1} & 0 \\ -1+z^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1-z^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1} & 1-2z^{-1} \\ 1 & -2+2z^{-1} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \left(1 - 2z^{-1}\right)$$

a dostaneme

$$|C_1| \sim |C_2| \sim 1 - 2z^{-2}$$

Jako další příklad si ukážeme jak souvisí minimální realizace se stablitou. Mějme $S = \frac{1}{1-2z^{-1}} \begin{pmatrix} z^{-1} & -z^{-1} + 2z^{-2} \end{pmatrix}$ a $R = \begin{pmatrix} 1-2z^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$, dostaneme

$$(1+SR) = \left(1 + \frac{1}{1-2z^{-1}} \begin{pmatrix} z^{-1} & -z^{-1} + 2z^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2z^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

a tedy $K_{W,E} = 1$, $K_{W,Z} = R$ a $K_{W,Y} = 0$. Tedy reakce zpětnovazebního obvodu na W je stabilní na všech potenciálních výstupech E, Z a Y. Pseudocharakteristický polynom je $1-2z^{-1}$ a není stabilní. V čem je problém? V tomto případě může být minimální realizace přenosu $\mathcal{S}$ například

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a minimální realizace přenosu $\mathcal{R}$ například

$$F = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\mathcal{K}$ dostaneme realizaci

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

která, ale není mimimální.

Příklad 1.

Mějme přenos $\mathcal{S}$, $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ určený polynomiální maticí a vypočtěte charakteristický polynom zpětnovazebného systému.

$$S = R = \frac{1}{z^{-1} - 1} \begin{pmatrix} z^{-2} + z^{-1} + 1 & 0 \\ z^{-1} - 2 & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} = \frac{B}{a}$$

Zvolíme se tedy například C_1, potřebujeme tedy spočítat matice A_1, F_2, B_2 a G_1, tedy levý rozklad $S = A_1^{-1} B_2$ a pravý rozklad $R = G_1 F_2^{-1}$.

Stabilizace jednorozměrné soustavy

Mějme $s = \frac{b}{a} \in \mathbb{R}\{z^{-1}\}$, $r = \frac{g}{f} \in \mathbb{R}\{z^{-1}\}$, kde $a, b, f, g \in \mathbb{R}[z^{-1}]$ a $(ab) = (f, g) = 1$. Pro dílčí přenosy máme

$$k_{W,Y} = s(1+sr)^{-1} r = \frac{b}{a}\left(1 + \frac{b}{a}\frac{g}{f}\right)^{-1}\frac{g}{f} = \frac{b}{a}\left(\frac{af+bg}{af}\right)^{-1}\frac{g}{f} = \frac{b}{a}\frac{af}{af+bg}\frac{g}{f} = \frac{bg}{af+bg}$$

$$k_{W,E} = (1+sr)^{-1} = \left(1 + \frac{b}{a}\frac{g}{f}\right)^{-1} = \left(\frac{af+bg}{af}\right)^{-1} = \frac{af}{af+bg}$$

a protože $\mathbb{R}\{z^{-1}\}$ je komutativní okruh máme levý i pravý rozklad $s = ba^{-1} = a^{-1}b$, $r = gf^{-1} = f^{-1}g$ a pseudo charakteristický polynom je determinant matice K_1:

$$\left| \begin{pmatrix} f & b \\ -g & a \end{pmatrix} \right| = fa + bg \sim c,$$

tedy

$$k_{W,Y} = \frac{bg}{c}$$
$$k_{W,E} = \frac{af}{c}$$

Platí, že zpětnovazební obvod je stabilní právě tehdy když přenosy $k_{W,Y}$, a $k_{W,E}$ lze psát ve tvaru $k_{W,Y} = bm$, a $k_{W,E} = an$, kde $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$.

Skutečně pokud je zpětnovazební obvod stabilní pak $c \in \mathbb{R}^+[z^{-1}]$ a tedy můžeme volit $m = \frac{g}{c}$, $n = \frac{f}{c}$. opačně pokud máme $k_{W,Y} = bm$, a $k_{W,E} = an$, kde $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$. pak $m = \frac{g}{c}$ a $n = \frac{f}{c}$ a pokud c má nestabilní faktor, tj. $c = c_0 e$ kde $e \notin \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$ pak ale protože $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$ musí $e|f$ a současně $e|g$, ale to je spor s $(f, g) = 1$.

Důsledkem tohoto faktu je, že zpětnovazební obvod je stabilní právě když $r = \frac{m}{n}$, kde $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$, a $bm + an = 1$. Skutečně pokud je obvod stabilní pak $m = \frac{g}{c}$, $n = \frac{f}{c}$, kde $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$, pak

$$\frac{m}{n} = \frac{g}{c}\frac{c}{f} = \frac{g}{f} = r$$
$$bm + an = b\frac{g}{c} + a\frac{f}{c} = \frac{bg + af}{c} = 1$$

Opačně, pokud máme takové $m, n \in \mathbb{R}^+\{z^{-1}\}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
k_{W,Y} &= s(1+sr)^{-1}r = \frac{b}{a}\left(1 + \frac{b}{a}\frac{m}{n}\right)^{-1}\frac{m}{m} = \frac{b}{a}\left(\frac{an+bm}{af}\right)^{-1}\frac{m}{n} \\
&= \frac{b}{a}\left(\frac{1}{af}\right)^{-1}\frac{m}{n} = \frac{b}{a}am\frac{m}{n} = bm \\
k_{W,E} &= (1+sr)^{-1} = \left(1 + \frac{b}{a}\frac{m}{m}\right)^{-1} = \left(\frac{an+bm}{an}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{an}\right)^{-1} = an
\end{aligned}$$

a zpětnovazební obvod je stabilní.

Bez důkazu uvedeme analogii poslední věty pro mnoharozměrné soustavy. Mějme nesoudělné rozklady

$$A = B_1 A_2^{-1} = A_1^{-1} B_2$$
$$R = G_1 F_2^{-1} = F_1^{-1} G_2$$

pak zpětnovazební systém je stabilní krávě když následující maticové přenosy lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned}
K_{W,Y} &= B_1 M_1 \\
K_{W,E} &= N_1 A_1 \\
K_{V,U} &= A_2 N_2 \\
K_{V,Z} &= -M_2 B_2
\end{aligned}$$

pro nějaké matice M_1, N_1, N_2 a M_2 patřící do oboru integrity stabilních matic nad formálními mocninnými řadami příslušného řádu $\mathbb{R}^+_{*,*}\{z^{-1}\}$.

Dále zpětnovazební obvod je stabilní právě tehdy když $R = M_2 N_1^{-1}$, kde matice M_2, N_1 patří do oboru integrity stabilních matic nad formálními mocninnými řadami příslušného řádu $\mathbb{R}^+_{*,*}\{z^{-1}\}$ a platí

$$A_1 N_1 + B_2 M_2,$$

nebo $R = N_2^{-1} M_1$, kde matice M_2, N_1 patří do oboru integrity stabilních matic nad formálními mocninnými řadami příslušného řádu $\mathbb{R}^{+}_{*,*}\{z^{-1}\}$ a platí

$$N_2 A_2 + M_1 B_1.$$

A Řešené příklady

A.1 Počítání s polynomy

Příklad 14 *Uveďte příklad komutativního okruhu, který není oborem integrity.*

Řešení 1: *Jednou z možností je okruh* $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$

$\mathbb{Z}_6 = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$*. Že se jedná o okruh lze ověřit z tabulek operací* $+$ *a* $\cdot$*. Podobně lze v tabulce multiplikativní operace zjistit, že se jedná o okruh komutativní. V téže tabulce lze nalézt, že tento okruh má jednotku, kterou je třída* C_5*, neboť* $C_5 \cdot C_5 = C_1$*. Jedná se tedy o okruh s jednotkou. Ovšem lze také nalézt, že* $C_2 \cdot C_3 = C_0$*, tedy nula okruhu (v tomto případě třída* C_0*) není jediným dělitelem nuly. Okruh proto není oborem integrity*

Řešení 2: *Jinou možností je okruh* $(\mathbb{D}_1, +, \cdot)$*, kde symbolem* $\mathbb{D}_1$ *se rozumí množina polynomů typu* $(a + b \cdot x)$ *splňující* $(a_1 + b_1 \cdot x) \cdot (a_2 + b_2 \cdot x) = a_1 \cdot a_2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot x$

Příklad 15 *Spočtěte největšího společného dělitele a koeficienty Bezoutovy rovnosti pro následující polynomy:* $a = z^{-3} - 2z^{-2} - z^{-1} + 2$ *a* $b = z^{-2} - 2z^{-1}$

Řešení: *K prvnímu řádku přičteme* $-z^{-1}$*-násobek druhého řádku. K druhému řádku přičteme* z^{-1}*-násobek prvního řádku.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & z^{-3} - 2z^{-2} - z^{-1} + 2 \\ 0 & 1 & z^{-2} - 2z^{-1} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} & -z^{-1} + 2 \\ 0 & 1 & z^{-2} - 2z^{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} & -z^{-1} + 2 \\ z^{-1} & 1 - z^{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} p & q & d \\ r & s & 0 \end{pmatrix}$$

Zkouška: *provedeme dělení a ověříme, že skutečně* $d|a$ *a* $d|b$

$a : d$*:*

$$\begin{array}{l} (z^{-3} - 2z^{-2} - z^{-1} + 2) : (-z^{-1} + 2) = -z^{-2} + 1 \\ -\underline{(z^{-3} - 2z^{-2})} \\ \qquad\qquad -z^{-1} + 2 \\ \qquad\quad -\underline{(-z^{-1} + 2)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 zb. \end{array}$$

$b : d$

$$\begin{array}{l} (z^{-2} - 2z^{-1}) : (-z^{-1} + 2) = -z^{-2} + 1 \\ -\underline{(z^{-2} - 2z^{-1})} \\ \qquad\qquad 0 zb. \end{array}$$

Příklad 16

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & z^{-5}+2z^{-4}-z^{-3}-3z^{-2}+1 \\ 0 & 1 & z^{-4}+2z^{-3}+2z^{-2}+2z^{-1}+1 \end{pmatrix} \sim$$

od prvního řádku odečteme z^{-1}*-násobek druhého řádku*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} & -3z^{-3}-5z^{-2}-z^{-1}+1 \\ 0 & 1 & z^{-4}+2z^{-3}+2z^{-2}+2z^{-1}+1 \end{pmatrix} \sim$$

k druhému řádku přičteme z^{-1}*-násobek prvního řádku*

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} & -3z^{-3}-5z^{-2}-z^{-1}+1 \\ z^{-1} & 1-z^{-1} & z^{-3}+4z^{-2}+7z^{-1}+3 \end{pmatrix} \sim$$

od prvního řádku odečteme 3*-násobek druhého řádku*

$$\sim \begin{pmatrix} 1-3z^{-1} & z^{-2}+z^{-1}-3 & -17z^{-2}-22z^{-1}-8 \\ z^{-1} & 1-z^{-1} & z^{-3}+4z^{-2}+7z^{-1}+3 \end{pmatrix} \sim$$

k 3*-tinásobku druhého řádku přičteme* z^{-1}*-násobek prvního řádku*

$$\sim \begin{pmatrix} 1-3z^{-1} & z^{-2}+z^{-1}-3 & -17z^{-2}-22z^{-1}-8 \\ -3z^{-2}+18z^{-1} & z^{-3}-16z^{-2}-3z^{-1}+17 & 46z^{-2}+111z^{-1}+21 \end{pmatrix} \sim$$

k 17*-tinásobku druhého řádku přičteme* 46*-tinásobek prvního řádku*

$$\sim \left(\begin{array}{c|c|c} & & -17z^{-2}-22z^{-1}-8 \\ & & 875z^{-1}-11 \end{array}\right) \sim$$

k 875*-tinásobku prvního řádku přičteme* $17z^{-1}$*-násobek druhého řádku*

$$\sim \left(\begin{array}{c|c|c} & & 19437z^{-1}-8 \\ & & 875z^{-1}-11 \end{array}\right) \sim$$

od 875*-tinásobku prvního řádku odečteme* 19437*-násobek druhého řádku*

$$\sim \left(\begin{array}{c|c|c} & & 206807 \\ & & 875z^{-1}-11 \end{array}\right) \sim$$

od 206807*-tinásobku prvního řádku odečteme* $875z^{-1}$*-násobek druhého řádku*

$$\sim \left(\begin{array}{c|c|c} & & 206807 \\ & & -11 \cdot 206807 \end{array}\right) \sim$$

k druhému řádku přičteme 11*-tinásobek prvního řádku*

$$\sim \left(\begin{array}{c|c|c} & & 206807 \\ & & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} p & q & d \\ r & s & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 17 $k \in 1,2$ *(máme 2 stavy)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 + u_1 \\ \dot{x_2} &= -3x_2 + u_2 \\ y &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Příklad 18 *Zadání:*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 - 5x_1 \\ \dot{x_2} &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

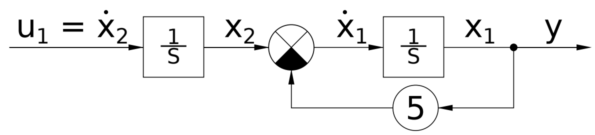
Výsledek:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 19 *Pro obvod z předchozího příkladu (příklad 18) nalezněte jeho schéma.*
Řešení 1.:

$$\begin{aligned} G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+5 & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s(s+5)} \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s+5)} \end{aligned}$$

což odpovídá schématu:

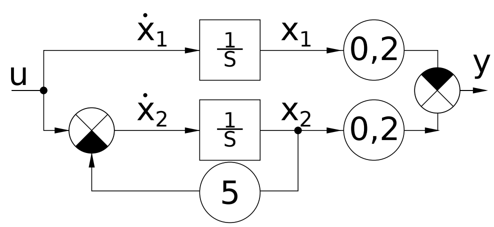


Obrázek 6: Blokové schéma obvodu odpovídajícího vypočtenému přenosu

Řešení 2.: přenos získaný v předchozí části lze rozkladem na parciální zlomky přepsat na tvar:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+5)} = \frac{1}{5s} - \frac{1}{5(s+5)}$$

což odpovídá schématu:



Obrázek 7: Blokové schéma obvodu odpovídajícího vypočtenému přenosu

pozn.: pokud z takto získaného schématu budeme chtít získat popis systému pomocí diferenciálních rovnic, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u \\ \dot{x_2} &= u - 5x_2 \\ y &= 0,2(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

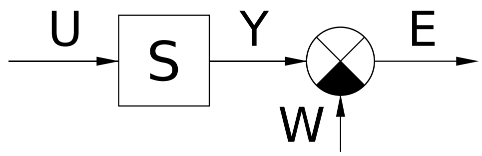
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} G(s) &= C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D \\ &= \begin{pmatrix} 0,2 & -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s+5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{0,2}{s(s+5)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{0,2\cdot}{s(s+5)} = \frac{1}{s(s+5)} \end{aligned}$$

A.2 Konečně časově optimální řízení jednoduché soustavy.

Přenos soustavy $\mathcal{S}$ označujeme symbolem S, žádaná posloupnost symbolem W, řídící posloupnost označujeme symbolem U, výstupní posloupnost označujeme symbolem Y a odchylku řízení symbolem E (viz obrazek 8).



Obrázek 8: Přímovazební obvod

Fungování systému je určeno rovnicemi

$$E = W - Y$$
$$Y = SU$$

Našim úkolem je najít řídící posloupnost U takovou, že odchylka řízení E je konečný polynom co nejnižšího stupně. Postupujeme tak, že označíme čitatele a jmenovatele přenosu S a žádané posloupnosti W

$$S = \frac{\beta}{\alpha},\ W = \frac{\delta}{\gamma}$$

a řešíme Diofantickou rovnici

$$\gamma E_0 + \beta u_0 = \delta$$

Výsledné u_0 je pak partikulární (jedno náhodné) řešení a všechna další řešení jsou tvaru

$$u = u_0 - \frac{\alpha}{(\alpha, \beta)} \cdot t,$$

kde t je polynom $\mathbb{R}[z^{-1}]$. E je partikulární odchylka a všechny další odchylky jsou tvaru

$$E = E_0 + \frac{\beta}{(\alpha, \beta)} \cdot t,$$

kde t je polynom $\mathbb{R}[z^{-1}]$. Zvolíme t tak aby E bylo nejnižšího stupně a dopočítáme pak hodnotu u. Nakonec použijem vztah pro řídící posloupnost

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} u_0,$$

kde $\gamma_0 = \frac{\gamma}{(\gamma,\alpha)}$ a $\alpha_0 = \frac{\alpha}{(\gamma,\alpha)}$.

Příklad 1.

Zadání tvoří přenos soustavy a žádaná posloupnost:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1 + z^{-1} - 3z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 4z^{-2}} = \frac{\beta}{\alpha}, \\ W &= \frac{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}} = \frac{\delta}{\gamma}. \end{aligned}$$

Řešení: Sestavíme diofantickou rovnici $\gamma E + \beta u_0 = \delta$, v našem případě

$$(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3})E + (1 + z^{-1} - 3z^{-2} - 2z^{-3})u_0 = (1 + 3z^{-1} + 2z^{-2})$$

a řešíme ji maticovým algoritmem pro výpočet největšího společného dělitele (NSD). Sestavíme matici kde poslední sloupec tvoří prvky γ, β a první dva soupce tvoří jednotkovou matici. Pak pomocí řádkových elementárních uprav vynulujem prvek v druhém řádku a třetím sloupci. Postupujeme tak, že se pomocí největší mocniny v prvním řádku (vždy třetím sloupci) pokusíme vynulovat největší mocninu v druhém řádku. Konkrétně pomocí $2z^{-3}$ nulujeme $-2z^{-3}$. Tedy první řádek jen jedenkrát přičteme k druhému (úprava "A"). V dalším kroku pomocí $4z^{-1}$ vynulujeme $2z^{-3}$ (bereme vždy řádek s menší největší mocninou). Napřed si řádek podělíme dvěma (úprava "B") a pak $-z^{-2}$ násobek druhého řádku přičteme k prvnímu (úprava "C"). Postup opakujeme pokud se ve druhém řádku a třetím sloupci neobjeví nula.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} \\ 0 & 1 & 1 + z^{-1} - 3z^{-2} - 2z^{-3} \end{pmatrix} \overset{A}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} \\ 1 & 1 & 2 + 4z^{-1} \end{pmatrix} \overset{B}{\rightsquigarrow} \\ &\overset{B}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 + 2z^{-1} \end{pmatrix} \overset{C}{\rightsquigarrow} \\ &\overset{C}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 + 2z^{-1} \\ 1 - \frac{1}{2}z^{-2} & -\frac{1}{2}z^{-2} & 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 + 2z^{-1} \\ 1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} & -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} & 1 + 2z^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 + 2z^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V prvním řádku a třetím sloupci pak dostaneme největší společný dělitel. Můžeme tedy psát

$$(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}, 1 + z^{-1} - 3z^{-2} - 2z^{-3}) = 1 + 2z^{-1}$$

a první řádek dokonce tvoří Bezoutvy koeficienty, tj. musí platit Bezoutova rovnice

$$\frac{1}{2}(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}) + \frac{1}{2}(1 + z^{-1} - 3z^{-2} - 2z^{-3}) = 1 + 2z^{-1}, \qquad (9)$$

což lehce ověříme.

Obecně aby diofantycká rovnice měla řešení musí největší společný dělitel vypočtený výše dělit pravou stranu, tj.

$$(1 + 2z^{-1})|(1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}).$$

Jako další krok podělíme se zbytkem pravou stranu příslušným největším společným dělitelem, tedy podělíme polynomy

$$\begin{array}{l} (1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}) : (1 + 2z^{-1}) = z^{-1} + 1 \\ \quad \underline{z^{-1} + 2z^{-2}} \\ \qquad 1 + 2z^{-1} \end{array}$$

a vidíme, že zbytek vyšel nula, tedy největší společný dělitel dělí pravou stranu a pokud dopočítaným podílem vynásobíme Bezoutovu rovnici (9) dostaneme řešení diofantické rovnice

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(z^{-1} + 1)(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}) + \frac{1}{2}(z^{-1} + 1)(1 + z^{-1} - 3z^{-2} - 2z^{-3}) \\ &= (z^{-1} + 1)(1 + 2z^{-1}) = (1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}). \end{aligned}$$

Jedno z možných řešení pro odchylka (tzv. partikulární řešení) je tedy

$$u_0 = \frac{1}{2}(z^{-1} + 1)$$

a současně platí, že všechna řešení jsou tvaru

$$E = \frac{1}{2}(z^{-1} + 1) + \frac{\beta}{(\alpha, \beta)}t.$$

Eukliedovým algoritmem založeném na postupném dělení se zbytkem najdeme největší společný dělitel (α, β).

1.krok

$$\begin{array}{l} (2z^{-3} + 3z^{-2} + 3z^{-1} + 1) : (-4z^{-2} + 1) = -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{3}{4} \\ \qquad \underline{2z^{-3} - \frac{1}{2}z^{-1}} \\ \quad 3z^{-2} + \frac{7}{2}z^{-1} + 1 \\ \qquad \underline{3z^{-2} - \frac{3}{4}} \\ \qquad \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{7}{2} \end{array}$$

2.krok

$$\begin{array}{l}(-4z^{-2}+1):(2z^{-1}+1) = -2z^{-1}+1 \\ \underline{-4z^{-2}-2z^{-1}} \\ \quad 2z^{-1}+1 \\ \quad \underline{2z^{-1}+1} \\ \qquad\quad 0\end{array}$$

takže $(\alpha,\beta) = 2z^{-1}+1$ a vypočteme $\frac{\beta}{(\alpha,\beta)}$ jako

$$\begin{array}{l}(1+z^{-1}-3z^{-2}-2z^{-3}):(1+2z^{-1}) = -z^{-2}-z^{-1}+1 \\ \qquad \underline{-z^{-2}-2z^{-3}} \\ \quad 1+z^{-1}-2z^{-2} \\ \qquad \underline{-z^{-1}-2z^{-2}} \\ \qquad\quad 1+2z^{-1}.\end{array}$$

Nyní víme, že všechna řešení mají chybu

$$E = \frac{1}{2}(z^{-1}+1) + (-z^{-2}-z^{-1}+1)t$$

a minimalizujeme-li stupeň polynomu E volbou t musíme volit $t=0$. Dostáváme tedy všechna řešení tvaru

$$u_0 = \frac{z^{-2}+1}{2} - \frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}\cdot 0 = \frac{z^{-2}+1}{2}$$

(POZOR. Protože $t=0$ nemusíme dopočítávat $\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}$, to ale obecně platit nemusí.)

Zbývá dopočítat U ze vztahu

$$U = \frac{\alpha_0}{\gamma_0}u_0,$$

kde $\alpha_0 = \frac{\alpha}{(\alpha,\gamma)}$ a $\gamma_0 = \frac{\gamma}{(\alpha,\gamma)}$. Počítáme (α,γ):

1.krok

$$\begin{array}{l}(2z^{-3}+3z^{-2}+3z^{-1}+1):(-4z^{-2}+1) = -\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{3}{4} \\ \qquad \underline{2z^{-3}-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ \quad 3z^{-2}+\frac{7}{2}z^{-1}+1 \\ \qquad\quad \underline{3z^{-1}-\frac{3}{4}} \\ \qquad\quad \frac{7}{2}z^{-1}+\frac{7}{4}\end{array}$$

2.krok

$$
\begin{array}{l}
(-4z^{-1}+1):(2z^{-1}+1) = -2z^{-1}+1 \\
\underline{-4z^{-2}-2z^{-1}} \\
\qquad 2z^{-1}+1
\end{array}
$$

tedy $(\alpha, \gamma) = 2z^{-1} + 1$ a

$$
\begin{array}{l}
\alpha_0 = (-4z^{-1}+1):(2z^{-1}+1) = -2z^{-1}+1 \\
\quad \underline{-4z^{-2}-2z^{-1}} \\
\qquad 2z^{-1}+1
\end{array}
$$

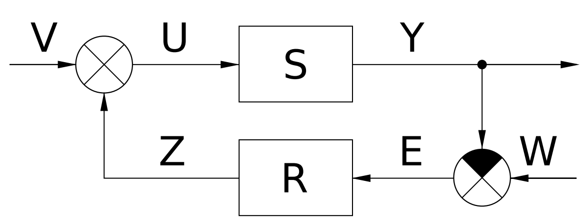
$$
\begin{array}{l}
\gamma_0 = (2z^{-3}+3z^{-2}+3z^{-1}+1):(2z^{-1}+1) = z^{-2}+z^{-1}+1 \\
\qquad \underline{2z^{-3}+z^{-2}} \\
\qquad 2z^{-2}+3z^{-1}+1 \\
\qquad \underline{2z^{-2}+z^{-1}} \\
\qquad\quad 2z^{-1}+1.
\end{array}
$$

Celkem dostaneme

$$U = \frac{-2z^{-1}+1}{z^{-2}+z^{-1}+1}\frac{z^{-1}+1}{2} = \underline{\underline{\frac{-2z^{-2}-z^{-1}+1}{2z^{-2}+2z^{-1}+2}}}.$$

A.3 Charakteristický polynom zpětnovazebného obvodu

Zpětnovazební obvod je určený následujícím diagramem, máme řízenou soustavu se vstupem U a výstupem Y a požadovanou výstupní posloupnost W. Chyba výstupní posloupností je pak vstupem pro řídící soustavu.



Obrázek 9: Zpětnovazební obvod

Příslušné rovnice řídícího systému jsou pak v následujícím tvaru:

$$Y = SU, \quad Z = RE,$$
$$E = W - Y, \quad U = V + Z.$$

Mějme levý a pravý nesoudělný rozklad matic S a R:

$$S = A_1^{-1}B_2 = B_1A_2^{-1}$$
$$R = F_1^{-1}G_2 = G_1F_2^{-1}$$

Definujeme

$$C_1 = A_1F_2 + B_2G_1$$
$$C_2 = F_1A_2 + G_2B_1$$

Našim úkolem je spočítat charakteristický polynom zpětnovazebného systému, který je definovaný jako determinant matice C_1 což je stejné číslo jako determinant matice C_2.

Příklad 1.

Mějme přenos $\mathcal{S}$, $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ určený polynomiální maticí a vypočtěte charakteristický polynom zpětnovazebného systému.

$$S = R = \frac{1}{z^{-1}-1}\begin{pmatrix} z^{-2}+z^{-1}+1 & 0 \\ z^{-1}-2 & z^{-1}-1 \end{pmatrix} = \frac{B}{a}$$

Zvolíme se tedy například C_1, potřebujeme tedy spočítat matice A_1, F_2, B_2 a G_1, tedy levý rozklad $S = A_1^{-1}B_2$ a pravý rozklad $R = G_1F_2^{-1}$.

1. Levý rozklad vede na hledání pravého NSD, tedy řešení rovnic

$$PA + QB = D$$
$$RA + SB = 0,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} z^{-1}-1 & 0 \\ 0 & z^{-1}-1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} z^{-2}+z^{-1}+1 & 0 \\ z^{-1}-2 & z^{-1}-1 \end{pmatrix}.$$

Postupujeme tak, že sestavíme matici tak, že napíšeme matici B, nad ní napíšeme diagonální maticí s prvkem a na diagonále. Diagonální matice je vždy čtvercová a pokud má matice B dva sloupce musí to být matice 2×2. Doleva od takto vzniklé matice napíšeme matici jednotky. V případě, kdy je matice B typu 2×2 vždy vyjde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & B_{1,1} & B_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

konkrétně v našem případě vyjde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z^{-1}-2 & z^{-1}-1 \end{pmatrix}.$$

Takto vzniklou matici pak pomocí vhodného přičítání násobku jednoho řádku k jinému řádku převedeme na tvar, kde se vpravo dole objeví nulová matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z^{-1}-2 & z^{-1}-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & z^{-1}-2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0 \\ -z^{-1} & 0 & 1 & 0 & 2z^{-1}+1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3z^{-1} & -2z^{-1} & 1 & 2z^{-1} & 1 & 0 \\ 1-z^{-1} & -z^{-1} & 0 & z^{-1} & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3z^{-1}-1 & -2z^{-1}-1 & 1 & 2z^{-1}+1 & 0 & 0 \\ 2-z^{-1} & -z^{-1}+1 & 0 & z^{-1}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé bloky ve výsledné matici pak tvoří hledané matice řešené soustavy, v našem případě tedy:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & z^{-1}-1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$R = \begin{pmatrix} -3z^{-1}-1 & -2z^{-1}-1 \\ 2-z^{-1} & -z^{-1}+1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 2z^{-1}+1 \\ 0 & z^{-1}-1 \end{pmatrix}$$

Výsledek můžeme ověřit tak, že dosadíme matice do soustavy

$$PA + QB = D$$
$$RA + SB = 0.$$

V našem případě tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^{-1}-1 & 0\\ 0 & z^{-1}-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^{-2}+z^{-1}+1 & 0\\ z^{-1}-2 & z^{-1}-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & z^{-1}-1\\ -z^{-1}+1 & -z^{-1}+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ z^{-1}-2 & z^{-1}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & z^{-1}-1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3z^{-1}-1 & -2z^{-1}-1\\ 2-z^{-1} & -z^{-1}+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^{-1}-1 & 0\\ 0 & z^{-1}-1\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}1 & 2z^{-1}+1\\ 0 & z^{-1}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^{-2}+z^{-1}+1 & 0\\ z^{-1}-2 & z^{-1}-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-3z^{-2}+2z^{-1}+1 & -2z^{-2}+z^{-1}+1\\ -z^{-2}+3z^{-1}-2 & -z^{-2}+2z^{-1}-1\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}3z^{-2}-2z^{-1}-1 & 2z^{-2}-z^{-1}-1\\ z^{-2}-3z^{-1}+2 & z^{-2}-2z^{-1}-1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

a vidíme, že obě rovnice platí. Můžeme tedy levý rozklad určit podle vztahů:

$$A_1=S=\begin{pmatrix}1 & 2z^{-1}+1\\ 0 & z^{-1}-1\end{pmatrix},\quad B_2=-R=\begin{pmatrix}3z^{-1}+1 & 2z^{-1}+1\\ -2+z^{-1} & z^{-1}-1\end{pmatrix},$$

a konečně ho můžeme ověřit výpočtem:

$$A_1^{-1}B_2=\begin{pmatrix}1 & 2z^{-1}+1\\ 0 & z^{-1}-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3z^{-1}+1 & 2z^{-1}+1\\ -2+z^{-1} & z^{-1}-1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{z^{-1}-1}\begin{pmatrix}z^{-1}-1 & -2z^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3z^{-1}+1 & 2z^{-1}+1\\ -2+z^{-1} & z^{-1}-1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{z^{-1}-1}\begin{pmatrix}z^{-2}+z^{-1}+1 & 0\\ -2+z^{-1} & z^{-1}-1\end{pmatrix}$$

1. Pravý rozklad vede na hledání levého největšího společného dělitele, tedy hledáme řešení rovnic

$$AP+BQ=D$$
$$AR+BS=0,$$

kde

$$A=\begin{pmatrix}z^{-1}-1 & 0\\ 0 & z^{-1}-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}z^{-2}+z^{-1}+1 & 0\\ z^{-1}-2 & z^{-1}-1\end{pmatrix}$$

Postupujeme tak, že sestavíme matici tak, že napíšeme matici B, vedle ní napíšeme diagonální maticí s prvkem a na diagonále. Diagonální matice je vždy čtvercová a pokud má matice B dva řádky musí to být matice 2×2. Nad takto vzniklou matici napíšeme matici jednotky. V našem případě tedy vyjde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ z^{-1}-1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & 0 \\ 0 & z^{-1}-1 & z^{-1}-2 & z^{-1}-1 \end{pmatrix}$$

Následující postup je, že takto vzniklou matici transponujeme a provedeme stejný typ úprav jako v předešlém kroku a opět je naším cílem nulová bloková matice vpravo dole.

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\
z^{-1}-1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & 0\\
0 & z^{-1}-1 & z^{-1}-2 & z^{-1}-1
\end{pmatrix}^T \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1\\
0 & 0 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & z^{-1}-2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z^{-1}-1
\end{pmatrix} \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1\\
1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & -1\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix}
0 & -1 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & -1\\
0 & 1-z^{-1} & z^{-1} & 0 & z^{-3}+z^{-2}+z^{-1} & -1\\
1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix}
0 & -1 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & -1\\
0 & 2-z^{-1} & z^{-1}-1 & 0 & z^{-3}-1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix}
0 & -1 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & -1\\
1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0\\
-z^{-2} & 2-z^{-1} & z^{-1}-1 & 0 & z^{-2}-1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix}
0 & -1 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & -1\\
1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0\\
-z^{-1}-z^{-2} & 2-z^{-1} & z^{-1}-1 & 0 & z^{-1}-1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix}
0 & -1 & 1 & 0 & z^{-2}+z^{-1}+1 & -1\\
1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1}-1 & 0\\
-z^{-1}-z^{-2}-1 & 2-z^{-1} & z^{-1}-1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Stejně jako v předešlém případě pak jednotlivé bloky tvoří hledané matice, jen je potřeba je ještě transponovat, tedy nám vyšlo:

$$
P^T = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D^T = \begin{pmatrix} z^{-2}+z^{-1}+1 & -1\\ z^{-1}-1 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
R^T = \begin{pmatrix} -z^{-1}-z^{-2}-1 & 2-z^{-1}\\ 0 & -1 \end{pmatrix}, S^T = \begin{pmatrix} z^{-1}-1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

a po transponování dostáváme konečný výsledek

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} z^{-2} + z^{-1} + 1 & z^{-1} - 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} -z^{-1} - z^{-2} - 1 & 0 \\ 2 - z^{-1} & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} z^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opět můžeme ověřit, že jsou obě rovnice splněny

$$\begin{aligned} AP + BQ &= D \\ AR + BS &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} z^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{-2} + z^{-1} + 1 & 0 \\ z^{-1} - 2 & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & z^{-1} - 1 \\ -z^{-1} + 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{-2} + z^{-1} + 1 & 0 \\ z^{-1} - 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-2} + z^{-1} + 1 & z^{-1} - 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} z^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z^{-1} - z^{-2} - 1 & 0 \\ 2 - z^{-1} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{-2} + z^{-1} + 1 & 0 \\ z^{-1} - 2 & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -z^{-3} + 1 & 0 \\ -z^{-2} + 3z^{-1} - 2 & -z^{-1} + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{-3} - 1 & 0 \\ z^{-2} - 3z^{-1} + 2 & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A zvolit rozklad jako $B_1 = R$, $A_2 = -S$. Nakonec ověříme, že pravý rozklad opravdu funguje

$$\begin{aligned} B_1 A_2^{-1} &= \begin{pmatrix} -z^{-1} - z^{-2} - 1 & 0 \\ 2 - z^{-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z^{-1} + 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -z^{-1} - z^{-2} - 1 & 0 \\ 2 - z^{-1} & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{z^{-1} - 1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -z^{-1} + 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z^{-1} - 1} \begin{pmatrix} z^{-1} + z^{-2} + 1 & 0 \\ -2 + z^{-1} & z^{-1} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Našim cílem bylo spočítat charakteristický polynom zpětnovazebního systému, tedy determinant matice C_1 (poznamenejme, že jsme si rozklad zpětné vazby původně značili $G_1 F_2^{-1}$), tedy dostaneme matici

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2z^{-1} + 1 \\ 0 & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z^{-1} + 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3z^{-1} + 1 & 2z^{-1} + 1 \\ -2 + z^{-1} & z^{-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z^{-1} - z^{-2} - 1 & 0 \\ 2 - z^{-1} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -z^{-1} + 1 & -2z^{-1} - 1 \\ 0 & -z^{-1} + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3z^{-3} - 6z^{-2} - 3z^{-1} + 1 & -2z^{-1} - 1 \\ -z^{-3} + 4z^{-1} + 1 & -z^{-1} + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3z^{-3} - 6z^{-2} - 4z^{-1} + 2 & -4z^{-1} - 2 \\ -z^{-3} + 4z^{-1} + 1 & -2z^{-1} + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a její determinant je

$$\begin{aligned}|C_1| &= (-3z^{-3} - 6z^{-2} - 4z^{-1} + 2)(-2z^{-1} + 2) - (-z^{-3} + 4z^{-1} + 1)(-4z^{-1} - 2) \\ &= (6z^{-4} + 12z^{-3} + 8z^{-2} - 4z^{-1}) + (-6z^{-3} - 12z^{-2} - 8z^{-1} + 4) \\ &+ (-4z^{-4} + 16z^{-2} + 4z^{-1}) + (-2z^{-3} + 8z^{-1} + 2) \\ &= \underline{\underline{2z^{-4} + 4z^{-3} + 10z^{-2} + 6}}\end{aligned}$$

Reference

[1] V.Kučera, *Algebraická teorie diskrétního lineárního řízení*, Academia, Praha, 1978

[2] J.Karásek, J.Šlapal, *Teorie okruhů pro diskrétní lineární řízení*, FSI VUT v Brně, 2000 (učební text)

[3] V. Kučera, *Algebraic Theory of Discrete-Time Linear Control* Academia, Praha 1978.

[4] J.Karásek, J.Šlapal, *Polynomy a zobecněné polynomy v teorii řízení*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007

[5] Luděk Nechvátal *Laplaceova transformace a stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic* , učební text VUT 2014, dostupné na mathonline.fme.vutbr.cz