1 Funkce zadané implicitně – implicitní funkce

Často užívaný výraz „implicitní funkce“ je nepřesný, vznikl zkrácením výrazu „funkce zadané implicitně rovnicí“. V nejjednodušším případě rovnice $F(x, y) = 0$ určuje množinu $\mathscr{F}$ bodů $[x, y]$ v rovině splňujících danou rovnici. Množina $\mathscr{F}$ však obvykle není grafem nějaké funkce, protože často není splněna podmínka definice, že funkce každému bodu x z definičního oboru $\mathscr{D}$ přiřadí právě jednu hodnotu y z oboru hodnot $\mathscr{H}$. Z množiny $\mathscr{F}$ lze často vybrat nekonečně mnoho podmnožin, které jsou grafem nějaké funkce. Budeme se zabývat otázkou, kdy daným bodem $[x_0, y_0] \in \mathscr{F}$ prochází graf nějaké spojité funkce $y = f(x)$ definované v okolí bodu x_0 splňující $F(x, f(x)) = 0$. Dále určíme derivace a případně další vlastnosti funkce $f(x)$ bez toho, abychom znali explicitní vyjádření funkce $f(x)$.

V obecnějším případě rovnice $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ určuje množinu $\mathscr{F}$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ a budeme zkoumat, ve kterých bodech lze vybrané proměnné vyjádřit pomocí ostatních proměnných, například $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$, aby platilo

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0.$$

V obecném případě řešíme úlohu, kdy ze soustavy rovnic

$$F_i(x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_m) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

lze proměnné $u_1, \ldots, u_m$ vyjádřit jako funkce proměnných $x_1, \ldots, x_n$.

1.1 Implicitní funkce v rovině

Rovnice $F(x, y) = 0$ určuje množinu

$$\mathscr{F} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}. \tag{1}$$

Tato množina může být křivkou, v případě $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ je to kružnice. Může to však být také kus plochy, např. pro $F(x, y) \equiv \sqrt{x^2y^2} - xy = 0$ je množina $\mathscr{F}$ celý první a třetí kvadrant včetně souřadných os x a y. Může to být také jeden bod $[0, 0]$ v případě $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 = 0$, nebo pro $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 1 = 0$ množina prázdná.

Definice 1.1 Funkci $y = f(x)$ na intervalu $I = (a, b)$ nazveme **funkcí danou implicitně rovnicí** $F(x, y) = 0$, jestliže funkce $f(x)$ je spojitá na I a platí

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad \forall\, x \in I. \tag{2}$$

Navíc se obvykle předpokládá, že v okolí U každého bodu grafu $(x, f(x))$, $x \in I$ nejsou jiné body množiny $\mathscr{F}$, tj. pro každé $x \in I$ existují čísla $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že

$$\mathscr{F} \,\cap\, (x - \delta, x + \delta) \times (f(x) - \Delta, f(x) + \Delta) = \left\{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (x - \delta, x + \delta)\right\}.$$

Příklad 1.2 Rovnice $F(x, y) = x^2+y^2-4 = 0$ určuje kružnici $\mathscr{F}$ se středem $[0, 0]$ a poloměrem $r = 2$. V okolí každého bodu $[x_0, \sqrt{4 - x_0^2}]$, $x_0 \in (-2, 2)$ horní části kružnice lze množinu $\mathscr{F}$ popsat funkcí $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ pro $x \in (a, b)$ splňující $-2 < a < x_0 < b < 2$. Podobně v okolí bodů dolní částí kružnice lze množinu $\mathscr{F}$ popsat pomocí funkce $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ pro $x \in (a, b)$ splňující $-2 < a < x_0 < b < 2$. Jediné dva body, v jejichž okolí množinu $\mathscr{F}$ nelze popsat jako graf funkce $y = f(x)$ jsou body $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Pozor, kdybychom vypustili požadavek, že funkce $f(x)$ je spojitá, rovnici $x^2 + (f(x))^2 - 4 = 0$ by vyhovovalo i nekonečně mnoho nespojitých funkcí: pro libovolnou množinu $M^+ \subset (a, b)$ položme $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ pro $x \in M^+$ a $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ pro $x \in M^- = (a, b) \setminus M^+$. Hodnoty těchto funkcí „přeskakují" z horní na dolní a z dolní na horní část kružnice.

Otázku, kterými body množiny $\mathscr{F}$ prochází graf nějaké spojité funkce, řeší následující věta:

Věta 1.3 *Nechť funkce $F(x, y)$ je spojitá a má spojité parciální derivace v oblasti Ω, množina $\mathscr{F}$ je neprázdná a bod $[x_0, y_0] \in \mathscr{F}$. Jestliže*

$$F'_y(x_0, y_0) \neq 0, \tag{3}$$

potom bodem $[x_0, y_0]$ prochází funkce $f(x)$ daná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, tj. existuje $\delta > 0$ a spojitá funkce $f(x)$ definovaná v okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ taková, že $f(x_0) = y_0$ a

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Náznak důkazu. Nechť $f(x_0, y_0) = 0$ a $f'_y(x_0, y_0) > 0$. Potom existuje $\Delta > 0$, že $f(x_0, y_0+\Delta) > 0$ a $f(x_0, y_0 - \Delta) < 0$. Vzhledem ke spojitosti funkce $f(x, y)$, tato nerovnost bude zachována i v okolí těchto bodů, tj. existuje $\delta > 0$, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $f(x, y_0 + \Delta) > 0$ a $f(x, y_0 - \Delta) < 0$. Pro libovolné $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ funkce $\varphi_x(y) = F(x, y)$ je spojitá a nabývá záporné hodnoty pro $y = y_0 - \Delta$ a kladné hodnoty pro $y = y_0 + \Delta$. Funkce $\varphi_x(y)$ je spojitá, proto musí uvnitř intervalu $(y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ procházet nulou v (alespoň jednom) bodě, který označíme $f(x)$, tj. $\varphi_0(f(x)) = F(x, f(x)) = 0$. Vzhledem ke spojitosti $F(x, y)$ je i funkce $f(x)$ spojitá, odkud plyne tvrzení. Pokud by bodů $f(x)$ bylo více než jeden, nutno je navíc vybírat tak, aby funkce $f(x)$ byla spojitá. □

Co se děje v bodech, kde $F'_y(x_0, y_0) = 0$? Pokud současně $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, křivka v tomto bodě má tečnu $x = x_0$, tj. rovnoběžnou s osou y. Jestliže také $F'_x(x_0, y_0) = 0$, tj. obě parciální derivace jsou nulové, mohou nastat různé situace:

- v bodě se mohou křížit dvě křivky, například v bodě $[0, 0]$ funkce $x^2 - y^2 = 0$ se protínají přímky $y = x$ a $y = -x$,
- může to být izolovaný bod, například bod $[0, 0]$ rovnice $x^2 + y^2 = 0$,
- může to být i funkce, například rovnice $x^3 - y^3 = 0$ i v bodě $[0, 0]$ určuje funkci $y = x$.

Derivace funkce $y = f(x)$ zadané implicitně

Podmínku (3) odvodíme z definiční rovnosti $F(x, f(x)) = 0$. Tuto rovnost derivujme podle proměnné x. Protože F závisí na x také prostřednictvím druhé proměnné y složené s $f(x)$ dostáváme rovnost:

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0. \tag{4}$$

Pokud derivace $F'_y(x, f(x))$ není nulová, lze jí dělit a z poslední rovnosti vyjádříme derivaci

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \ . \tag{5}$$

Z posledního vztahu je také vidět smysl podmínky (3): pokud F'_y je nenulová v bodě $[x_0, f(x_0)]$, díky spojitosti je nenulová i v okolí tohoto bodu a lze jí vydělit ve vzorci (5).

Dalším derivováním rovnosti (4) podle x, v druhém členu derivujeme součin dvou funkcí, dostáváme

$$F''_{xx} + F''_{xy} \cdot f' + \left(F''_{yx} + F''_{yy} \cdot f'\right) f' + F'_y \cdot f'' = 0,$$

kde pro přehlednost jsme vynechali argument $(x, f(x))$ u derivací funkce F a argument (x) u derivací funkce f. Úpravou dostáváme rovnost

$$F''_{xx} + 2\, F''_{xy} \cdot f' + F''_{yy} \cdot (f')^2 + F'_y \cdot f'' = 0, \tag{6}$$

z které opět díky $F'_y \neq 0$ lze vyjádřit vztah pro druhou derivaci

$$f'' = -\frac{F''_{xx} + 2\, F''_{xy} \cdot f' + F''_{yy} \cdot (f')^2}{F'_y} \tag{7}$$

a případně dále dosazením za f' z (5)

$$f'' = -\frac{F''_{xx} \cdot (F'_y)^2 - 2\, F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot (F'_x)^2}{(F'_y)^3} \ . \tag{8}$$

Dalším derivováním rovnosti (6) podle x po úpravě dostaneme

$$F'''_{xxx} + 3\, F'''_{xxy} \cdot f' + 3\, F'''_{xyy} \cdot (f')^2 + F'''_{yyy}(f')^3 + 2\, F''_{xy} \cdot f'' + 2\, F''_{yy} \cdot f' \cdot f'' + F'_y \cdot f''' = 0,$$

z které už lze vyjádřit třetí derivaci f'''

$$f''' = -\frac{F'''_{xxx} + 3\, F'''_{xxy} \cdot f' + 3\, F'''_{xyy} \cdot (f')^2 + F'''_{yyy}(f')^3 + 2\, F''_{xy} \cdot f'' + 2\, F''_{yy} \cdot f' \cdot f''}{F'_y} \ .$$

Tímto postupem lze vyjádřit i další derivace.

Derivace funkce $x = g(y)$ dané implicitně

Dosud jsme hledali funkce typu $y = f(x)$. Záměnou proměnných můžeme studovat funkce $x = g(y)$ s nezávislou proměnnou y na ose y. Podmínka $F'_x(x, y) \neq 0$ a $F(x, y) = 0$ zaručí, že bodem $[x, y]$ prochází funkce $x = g(y)$. Tato funkce je spojitá a splňuje $F(g(y), y) = 0$. Derivováním této rovnice dostáváme

$$F'_x(g(y), y) \cdot g'(y) + F'_y(g(y), y) = 0, \tag{9}$$

odkud lze za podmínky $F'_x \neq 0$ spočítat derivaci funkce $x = g(y)$:

$$g' = -\frac{F'_y}{F'_x}. \tag{10}$$

Dalším derivováním (9) dostáváme rovnost, z které lze vyjádřit druhou derivaci

$$g'' = -\frac{F''_{xx} \cdot (g')^2 + 2\, F''_{xy} \cdot g' + F''_{yy}}{F'_x} \tag{11}$$

Obvyklý postup při vyšetřování implicitní funkce

Pokud zadání úlohy nežádá něco jiného, při vyšetřování množiny $\mathscr{F}$ dané rovnicí $F(x,y)=0$ zjistíme několik druhů bodů množiny $\mathscr{F}$:

(a) body, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou x
(b) body, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou y.
(c) případně další výjimečné body, např. průsečíky s osou x nebo osou y.
(d) případně body, kde jsou obě derivace F'_x i F'_y nulové.
(e) případně omezenost nebo neomezenost množiny $\mathscr{F}$.

Předpokládáme, že funkce $F(x,y)$ má spojité parciální derivace. Body, ve kterých parciální derivace neexistují, je nutné vyšetřit zvlášť.

Nejprve spočítáme parciální derivace F'_x, F''_{xx}, F'_y a F''_{yy}.

(a) Řešením soustavy rovnic

$$F'_x(x,y)=0\,, \qquad F(x,y)=0 \tag{12}$$

dostaneme body $[x_i,y_i]$. Pokud parciální derivace $F'_y(x_i,y_i)\neq 0$, množina $\mathscr{F}$ má v tomto bodě tečnu rovnoběžnou s osou x. V těchto bodech díky $f'(x)=0$ se vzorec (7) zjednoduší na tvar

$$f''(x)=-\frac{F''_{xx}(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{13}$$

Znaménko f'' v bodě $[x_i,y_i]$ proto určí, jak je křivka prohnutá, pokud je kladná, funkce $f(x)$ v tomto bodě je konvexní, tj. prohnutá jako „$\cup$“, je zde lokální minimum. Pokud f'' je záporná, křivka je konkávní, tj. prohnutá jako „$\cap$“, a je zde lokální maximum. Pokud je druhá derivace f'' nulová, lze vyšetřit třetí derivaci f'''.

(b) Řešením soustavy rovnic

$$F'_y(x,y)=0\,, \qquad F(x,y)=0 \tag{14}$$

dostaneme body $[x_i,y_i]$, v jejichž okolí podle Věty 1.2 není určena žádná funkce. Pokud současně $F'_x(x_i,y_i)\neq 0$, množina $\mathscr{F}$ má v tomto bodě tečnu rovnoběžnou s osou y. Analogicky předchozímu případu výraz

$$g''(y)=-\frac{F''_{yy}(x,y)}{F'_x(x,y)} \tag{15}$$

dává druhou derivaci funkce $x=g(y)$ a určuje tak prohnutí křivky $\mathscr{F}$ v tomto bodě: pokud je hodnota kladná, křivka je prohnutá jako „(“, pokud je záporná, křivka je prohnutá jako „)“.

(c) V bodech $\mathscr{F}$, kde jsou obě parciálních derivace nulové (pokud existují), tj.

$$F'_x(x,y)=0\,, \qquad F'_y(x,y)=0 \ \text{ a } \ F(x,y)=0 \tag{16}$$

se může dít cokoliv: mohou se tam křivky křížit, může to být izolovaný bod, může to být i bod množiny $\mathscr{F}$. V těchto bodech zkoumáme funkci $z=F(x,y)$ z hlediska lokálních extrémů. Náš bod je stacionárním bodem funkce $F(x,y)$ a platí $F(x,y)=0$. Z matice druhých derivací

$$\mathrm{D}^2F(x,y)=\begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy}\end{pmatrix}(x,y)$$

zjistíme, zda v bodě je extrém. Pokud determinant matice D^2F je kladný, potom je zde ostré maximum nebo minimum a bod $[x, y]$ je izolovaným bodem množiny $\mathscr{F}$. Pokud determinant matice D^2F je záporný, v bodě je sedlo a protínají se zde dvě křivky.

Spočítané body s tečnami a „prohnutím" zakreslíme do grafu. Potom často už tyto body lze „spojit" a množinu $\mathscr{F}$ načrtnout. Využijeme přitom skutečnosti, že mimo tyto body křivka nemůže mít tečnu rovnoběžnou s osou x ani s osou y. Důležitým poznatkem je také skutečnost, zda množina $\mathscr{F}$ je nebo není omezená. V případě neomezené množiny $\mathscr{F}$ pomůže také výpočet asymptoty.

Příklady

V následujících příkladech určíme postupně body předchozích typů (a), (b) a případně (c), zakreslíme je do grafu a načrtneme množinu $\mathscr{F}$.

Příklad 1.4 *Vyšetřete množinu $\mathscr{F}$ určenou implicitně rovnicí $F(x, y) \equiv x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.*

Řešení: Funkce $F(x, y)$ má všechny parciální derivace spojité. Spočítáme parciální derivace

$$F'_x(x, y) = 2x\,, \quad F'_y(x, y) = 18y\,, \quad F''_{xx} = 2\,, \quad F''_{yy} = 18\,.$$

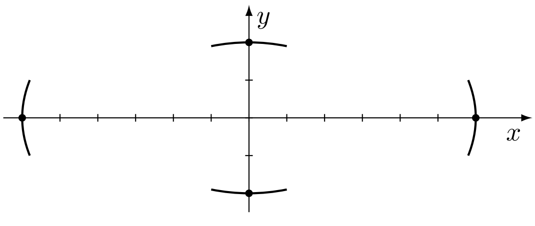
(a) Řešíme rovnice (12). Z $2x = 0$ plyne $x = 0$ a tudíž $9y^2 = 36$, odkud $y = \pm 2$. Protože $F'_y(0, \pm 2) \neq 0$, dostali jsme body $[0, 2]$ a $[0, -2]$, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou x. Dosazením do (13) vychází $f''(x) = -2/18y$, v bodě $[0, 2]$ je křivka konkávní a v $[0, -2]$ konvexní.

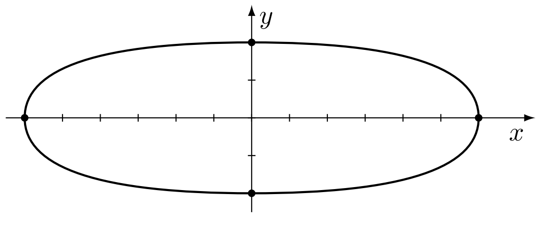
(b) Řešíme rovnice (14). Z $18y = 0$ plyne $y = 0$ a $x^2 = 36$ dává $x = \pm 6$. Protože $F'_x(\pm 6, 0) \neq 0$ v bodech $[6, 0]$ a $[-6, 0]$ je tečna rovnoběžná s osou y. Dosazením do (15) vychází $g''(y) = -18/2x$, v bodě $[-6, 0]$ je křivka prohnutá vpravo a v $[6, 0]$ vlevo.

Body typu (c) zde nejsou. Z rovnice $F(x, y) = 0$ plyne, že množina $\mathscr{F}$ je omezená:

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + 9y^2 = 36 \qquad \Longrightarrow \qquad \|[x, y]\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 6.$$

Vykreslíme-li tyto hodnoty do grafu, snadno je spojíme do elipsy:





Příklad 1.5 *Vyšetřete implicitní funkci $F(x, y) \equiv x^2 + xy + y^2 + x - y - 11 = 0$.*

Řešení: Spočítáme parciální derivace

$$F'_x(x, y) = 2x + y + 1\,, \quad F'_y(x, y) = x + 2y - 1\,, \quad F''_{xx} = 2\,, \quad F''_{yy} = 2\,.$$

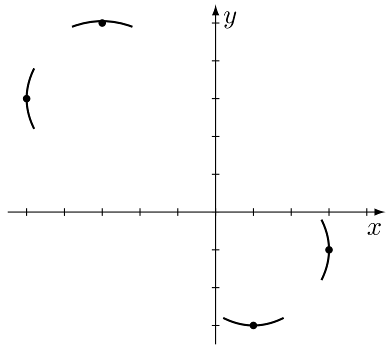
(a) Řešíme rovnice (12). Z $2x + y + 1 = 0$ plyne $y = -2x - 1$. Dosazením do $F(x, y) = 0$ dostáváme $3x^2 + 6x - 9 = 0$, odkud máme $x = -1 \pm 2$. Dopočítáním souřadnice y dostáváme dva body $[-3, 5]$ a $[1, -3]$, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou x. Dosazením do (13) vychází $f''(x) = -2/(x + 2y - 1)$. V bodě $[-3, 5]$ je tedy křivka konkávní a v $[1, -3]$ konvexní.

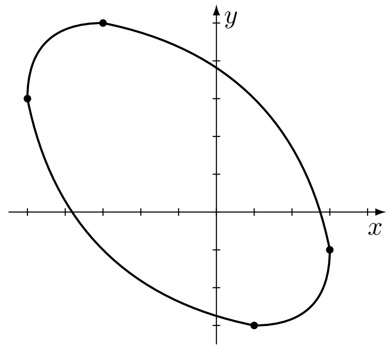
(b) Řešíme rovnice (14). Z $x + 2y - 1 = 0$ plyne $x = 1 - 2y$. Dosazením do $F(x, y) = 0$ dostáváme rovnici $3y^2 - 6y - 9 = 0$ s kořeny $y = 1 \pm 2$. Dopočítáním x-souřadnic dostáváme body $[-5, 3]$ a $[3, -1]$, ve kterých je tečna rovnoběžná s osou y. Dosazením do (15) vychází $g''(y) = -2/(2x + y + 1)$, v bodě $[-5, 3]$ je křivka prohnutá vpravo a v $[3, -1]$ vlevo.

Body typu (c) zde nejsou. Z rovnice $F(x, y) = 0$ plyne, že množina $\mathscr{F}$ je omezená:

$$\frac{1}{2}\left[(x+1)^2 + (y-1)^2\right] \le \frac{1}{2}\left[(x+1)^2 + (x+y)^2 + (y-1)^2\right] = 11.$$

Vykreslíme-li tyto hodnoty do grafu, snadno je spojíme do elipsy:





Příklad 1.6 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x, y) \equiv x^2 - 3xy + 2y^2 + 1 = 0$.

Řešení: Spočítáme parciální derivace

$$F'_x(x, y) = 2x - 3y\,, \quad F'_y(x, y) = -3x + 4y\,, \quad F''_{xx} = 2\,, \quad F''_{yy} = 4\,.$$

Dál už počítejte sami. V tomto případě je množina $\mathscr{F}$ neomezená, je to hyperbola.

Příklad 1.7 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$.

Příklad 1.8 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = 0$.

Příklad 1.9 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x, y) \equiv x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 = 0$.

Příklad 1.10 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x, y) \equiv x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + .5 = 0$.

Příklad 1.11 *Vyšetřete implicitní funkci* $F(x, y) \equiv x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2 + 1 = 0$.

1.2 Implicitní funkce v $\mathbb{R}^3$ – plochy

Rovnice $F(x, y, z) = 0$ opět určuje množinu v $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{F} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}. \tag{17}$$

Předpokládáme, že tato množina je neprázdná a funkce $F(x, y, z)$ má spojité derivace. Potom část množiny $\mathscr{F}$ je grafem nějaké spojité funkce $z = f(x, y)$:

Definice 1.12 *Funkci* $z = f(y, z)$ *na oblasti* $U \subset \mathbb{R}^2$ *nazveme funkcí danou implicitně rovnicí* $F(x, y, z) = 0$, *jestliže* $f(x, y)$ *je spojitá na* U *a platí*

$$F(x, y, f(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U. \tag{18}$$

Ne každým bodem (x_0, y_0, z_0) množiny $\mathscr{F}$ však prochází nějaká funkce $z = f(x, y)$.

VĚTA 1.13 *Nechť* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{F}$ *a funkce* F *má spojité první derivace. Jestliže* $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$*, potom bodem* (x_0, y_0, z_0) *prochází funkce* $z = f(x, y)$*.*

Body (pokud existují), kterými neprochází funkce, tvoří obvykle jednorozměrnou množinu, tj. křivku. Podobně jako v rovinném případě spočítáme derivace funkce $f(x, y)$. Derivováním rovnosti (18) podle x a podle y dostáváme rovnice

$$F'_x + F'_z \cdot f'_x = 0\,, \qquad F'_y + F'_z \cdot f'_y = 0\,, \tag{19}$$

odkud v případě $F'_z \neq 0$ lze vyjádřit parciální derivace funkce $f(x, y)$

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}\,, \qquad f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}\,. \tag{20}$$

Vyhledáme stacionární body funkce, tj. body, ve kterých je gradient $\nabla\varphi = (0, 0)$, tj. tečná rovina je kolmá na osu z. Tyto body jsou řešením soustavy rovnic

$$F'_x(x, y, z) = 0, \qquad F'_y(x, y, z) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0. \tag{21}$$

V těchto bodech lze také určit „prohnutí“ plochy pomocí druhých parciálních derivací funkce $f(x, y)$. Dalšími derivováním rovnic (19) dostáváme rovnice, z nichž lze odvodit vzorce pro druhé parciální derivace funkce $f(x, y)$. Ve stacionárních bodech díky $F'_x = 0$ a $F'_y = 0$ jsou se vzorce zjednoduší na

$$f''_{xx} = -\frac{F''_{xx}}{F'_z}, \qquad f''_{xy} = -\frac{F''_{xy}}{F'_z}, \qquad f''_{yy} = -\frac{F''_{yy}}{F'_z}, \tag{22}$$

odkud lze určit, zda funkce $f(x, y)$ má v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Podobně lze vyšetřovat stacionární body a „prohnutí“ funkce typu $y = g(x, z)$ definované rovnicí $F(x, g(x, z), z) = 0$ a také funkce typu $x = h(y, z)$ definované rovnicí $F(h(y, z), y, z) = 0$.

PŘÍKLAD 1.14 Vyšetřete funkce $z = \varphi(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$F(x, y, z) \equiv \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Řešení: Implicitní funkce je elipsoid se středem v počátku a poloosami délky 3, 2 a 1. Podmínka $F'_z = 0$ dává $z = 0$ odkud po dosazení do $F(x, y, z) = 0$ vidíme, že body, ve kterých rovnice neurčuje funkci $z = f(x, y)$, tvoří elipsu $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ a $z = 0$. Dalším výpočtem zjistíme, že stacionárními body funkce jsou body $[0, 0, 1]$, kde je maximum a bod $[0, 0, -1]$, kde je minimum. Analogicky můžeme zjistit stacionární body funkcí $y = g(x, z)$ a $x = h(y, z)$.

1.3 Jednorozměrné funkce v $\mathbb{R}^3$ - křivky

V tomto případě implicitní funkce $\mathscr{F}$ je určena dvěmi rovnicemi:

$$F(x, y, z) = 0\,, \qquad G(x, y, z) = 0. \tag{23}$$

Funkci zadanou implicitně v tomto případě definujeme jako spojitou vektorovou funkce se souřadnicemi $y = f(x)$, $z = g(x)$ pro $x \in (a, b)$ splňující

$$F(x, f(x), g(x)) = 0\,, \qquad G(x, f(x), g(x)) = 0. \tag{24}$$

Derivováním těchto rovností podle x dostáváme rovnice

$$F'_x + F'_y f' + F'_z g' = 0 \qquad G'_x + G'_y f' + G'_z g' = 0, \tag{25}$$

které představují soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé f', g'. Pokud matice soustavy

$$\begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix} \tag{26}$$

je regulární, soustava má řešení, které lze pomocí inverzní matice vyjádřit ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix}. \tag{27}$$

V tomto případě platí tvrzení:

VĚTA 1.15 *Nechť funkce F, G mají spojité parciální derivace a v bodě $[x_0, y_0, z_0] \in \mathscr{F}$ je matice (26) je regulární. Potom tímto bodem prochází funkce typu $y = f(x), z = g(x)$. Její derivace je dána vztahem (27).*

Analogicky lze definovat funkce typu $x = h(y), z = k(y)$ a také typu $x = p(z)$, $y = q(z)$. Podmínkou existence funkce procházející daným bodem $[x_0, y_0, z_0]$ je regulárnost příslušné matice parciálních derivací v tomto bodě.