Soustavy diferenciálních rovnic

$$y_1' = y_1 + 4y_2$$
$$y_2' = y_1 + y_2$$

$$A-\lambda E = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}}_{A-\lambda E}$$

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vyřešíme charakteristickou rovnici $\det(A-\lambda E) = 0$. (tj. nalezneme vlastní čísla matice A)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4-4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

2. Ke každému vlastnímu číslu λ vypočteme vlastní vektor h. (vl. vektor h splňuje

$$Ah = \lambda E h \iff (A-\lambda E)h = o, \quad o = (0,0)^T$$
$$h = (h_1, h_2)^T$$

a) $\lambda = 3$

$$(A-\lambda E)h = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h_1 + 4h_2 \\ h_1 - 2h_2 \end{bmatrix} = o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soustava je čtvercová a det matice soustavy $\neq 0$.
$\Rightarrow$ (ZS lineární algebra) soustava má ∞ řešení
Máme tedy 1 rovnici pro 2 neznámé

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & | & 0 \\ 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ -2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{/2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$h_1 - 2h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = 2h_2$, h_2 volím za parametr $h_2 = t \Rightarrow$ soustava má řešení
$\mathcal{X} = \{[2t, t], t \in \mathbb{R}\}$. Zvolím $t = 1$. $\Rightarrow (2,1)$

Partikulární řešení soustavy $u(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} = \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$.

b) $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad h_1 + 2h_2 = 0$$

$$h_1 = -2h_2$$

Volím $h_2 = t \Rightarrow h_1 = -2t$

$\mathcal{X} = \{[-2t, t], t \in \mathbb{R}\}$

opačná volba $h_1 = s \Rightarrow -2h_2 = s \Rightarrow h_2 = \frac{-s}{2}$

$\mathcal{Y} = \{[s, -\frac{s}{2}], s \in \mathbb{R}\}$.

Zřejmě $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. Volbou $t = 1$ máme $[-2, 1]$

Volbou $s = -2$ máme $[-2, 1]$.

$$v(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}.$$

3. Obecné řešení je

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 u(x) + C_2 v(x) = \cancel{C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{= C_1 \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} + C_2}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-x} \\ C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

$y_1 = 2C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-x}$, $y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$y_1' = -7y_1 + y_2$$
$$y_2' = -2y_1 - 5y_2$$

1. $A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (-7-\lambda)(-5-\lambda)+2 = 35+7\lambda+5\lambda+\lambda^2+2 =$$
$$= \lambda^2+12\lambda+37 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-\overset{148}{4\cdot 37}}}{2} = \frac{-12\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{-12\pm 2i}{2}$$
$$\lambda_{1,2} = -6 \pm i$$

Vlastní čísla matice A jsou komplexní

2. Vypočteme příslušné vlastní vektory

a) $\lambda = -6+i$

$$(A-\lambda E)h = o \iff \begin{bmatrix} -7-(-6+i) & 1 \\ -2 & -5-(-6+i) \end{bmatrix} h = o$$

$$\iff \begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix} h = o \qquad \begin{aligned} (-1-i)h_1 + h_2 &= 0 \\ -2h_1 + (1-i)h_2 &= 0 \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme $1-i$

$$(-1-i)h_1 + h_2 = 0 \;/\; 1-i$$
$$-(1+i)(1-i)h_1 + (1-i)h_2 = 0$$
$$-(1-\underbrace{i^2}_{-1})h_2 + (1-i)h_2 = 0$$
$$-2h_2 + (1-i)h_2 = 0$$ což je druhá rovnice

Máme tedy opět jen jednu rovnici

$$(-1-i)h_1 + h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = (1+i)h_1.$$

Zvolíme h_1 za parametr a položme $h_1 = 1$. ($h_1 = t$)

$\mathcal{X} = \{[t, (1+i)t], t \in \mathbb{R}\}$ jedno z řešení je $h = [1, 1+i]^T$

$$w(x) = e^{\lambda x} \cdot h = e^{(-6+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{-6x} \cdot e^{ix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$= e^{-6x} (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ (\cos x + i \sin x)(1+i) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ \cos x + i \cos x + i \sin x + \underbrace{i^2}_{=-1} \sin x \end{pmatrix} = e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ \cos x - \sin x + i(\cos x + \sin x) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-6x} \left[\begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \underbrace{e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}}_{u(x)} + i \underbrace{e^{-6x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}}_{v(x)}$$

$$w(x) = u(x) + i v(x)$$

Je-li $u(x) + i v(x)$ řešení $\Rightarrow$ $u(x) - i v(x)$ řešení

Obecné řešení

$$y = C_1 u(x) + C_2 v(x) \qquad u(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}, v(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

$$y_1 = e^{-6x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y_2 = e^{-6x} \left[(C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x \right], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_1' = -3y_1 - y_2$$
$$y_2' = y_1 - y_2$$

1. $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda, & -1 \\ 1, & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (-3-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = (3+\lambda)(1+\lambda) + 1 =$$
$$= 3 + 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda+2)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -2.$$

Existuje dvojnásobný reálný koren

2. Vypočítame vlastní vektory

a) $(A-\lambda E)h = o \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} h = o$

$\lambda = -2 \qquad h_1 + h_2 = 0 \quad h_2 = -h_1$

vlastní vektor získáme volbou $t = 1$

$\mathcal{X} = \{[t, -t], t \in \mathbb{R}\} \qquad h = (1, -1)^T$

$$u(x) = e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) z charakteristické rovnice více nezískáme

Druhé řešení $v(x)$ má tvar

$$v(x) = e^{-2x}\begin{pmatrix} P(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = e^{-2x}\begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix}$$

lineární polynomy

$v(x)$ dosadíme do zadání:

$$y_1 = e^{-2x}(ax+b) \Rightarrow y_1' = -2e^{-2x}(ax+b) + e^{-2x} \cdot a$$
$$= e^{-2x}(-2ax - 2b + a).$$
$$y_2 = e^{-2x}(cx+d) \Rightarrow$$
$$y_2' = -2e^{-2x}(cx+d) + e^{-2x}(c) = e^{-2x}(-2cx - 2d + c).$$

$$e^{-2x}(-2ax-2b+a) = -3e^{-2x}(ax+b) - e^{-2x}(cx+d)$$
$$e^{-2x}(-2cx-2d+c) = e^{-2x}(ax+b) - e^{-2x}(cx+d)$$

Vytknu e^{-2x} a pokrátím:

$$-2ax-2b+a = -3ax-3b-cx-d$$
$$-2cx-2d+c = ax+b-cx-d$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x

(1) $-2a = -3a - c$, (2) $-2b+a = -3b-d$

(3) $-2c = a - c$, (4) $-2d+c = b-d$

4 rovnice 4 neznámé (soustava)

Rce (1) a (3) $a + c = 0 \Rightarrow c = -a$

Rce (2) a (4) $a+b+d=0$, $-c+b+d=0$

$$\Downarrow$$

$$a+b+d=0$$

Jsou to vlastně pouze 2 rovnice

$$a+c=0 \Leftrightarrow c=-a$$
$$a+b+d=0$$

Volíme 2 parametry $[a, b, -a, -a-b]$

$a=1$, $b=0 \Rightarrow [1, 0, -1, -1]$

Odtud

$$v(x) = e^{-2x}\begin{pmatrix} x \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

$$y = C_1 u(x) + C_2 v(x)$$

$$\Downarrow$$

Celkem

$$y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$
$$y_2 = (-C_1 - C_2 - C_2 x)e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_1' = 2y_1 + 4y_2 + \cos x$$
$$y_2' = -y_1 - 2y_2 + \sin x$$

Mezikroky dopočítejte !!

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad A - \lambda E = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = -4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4$

$= \lambda^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 0$ dvojnás. vlastní hodnota

2. a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to -h_1 - 2h_2 = 0 \Leftrightarrow h_1 = -2h_2$

pro $\lambda = 0$: $(A - \lambda E)h = 0$ volíme $h_2 = -1 \Rightarrow h_1 = 2$

$h = (2, -1)^T$

$$u(x) = e^{\lambda x} \cdot h = e^0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) $v(x) = \begin{pmatrix} 2x + a \\ -x + b \end{pmatrix}$ $\quad y_1 = 2x + a \quad y_2 = -x + b \quad y_1' = 2 \quad y_2' = -1$

dosadíme do zadání

$2 = 2(2x + a) + 4(-x + b) \Rightarrow 2 = 2a + 4b$

$-1 = -(2x + a) - 2(-x + b) \Rightarrow -1 = -a - 2b$

$\underline{a + 2b = 1}$

volíme $b = 0 \Rightarrow a = 1$

celkem

$$v(x) = \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ -x \end{pmatrix}$$

Řešení zhomogenizované soustavy je

$$y_H = C_1 u(x) + C_2 v(x) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ -x \end{pmatrix}$$

3 Hledáme partikulární řešení y_p

$$y_p = C_1(x)u(x) + C_2(x)v(x) =$$

$$= C_1(x)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + C_2(x)\begin{pmatrix}2x+1\\-x\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 2x+1\\-1 & -x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1'(x)\\C_2'(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos x\\\sin x\end{bmatrix}$$

$$C_1'(x) = -2x\sin x - x\cos x - \sin x$$

$$C_2'(x) = 2\sin x + \cos x$$

CRAMER DOPOČTĚTE

Per partes

ZINTEGRUJTE per partes

$$C_1(x) = 2x\cos x - (x+2)\sin x + C_1$$

$$C_2(x) = -2\cos x + \sin x + C_2$$

Závěr

$$y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2x+1\\-x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\cos x - 3\sin x\\2\sin x\end{pmatrix}$$