

PÍSEMNÁ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY M2–K

PŘÍKLAD 1. (definiční obor, 10 bodů)

Vyšetřete definiční obor funkce $f(x, y)$. Obrázek nakreslete podle konvence.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{|x| + y}}{\ln(5 - x^2 - y^2)}.$$

PŘÍKLAD 2. (Taylorův polynom, 10 bodů)

Vypočtěte Taylorův polynom prvního řádu funkce $f(x, y)$ v bodě A .

$$f(x) = \frac{e^{1-x}}{1+y^2}, \quad A = [1, -1].$$

PŘÍKLAD 3. (lokální extrémy, 10 bodů)

Určete lokální extrémy funkce $f(x, y)$.

$$f(x, y) = 2 \ln(x) - x^2 - y^2.$$

PŘÍKLAD 4. (dvojměrný integrál – Fubiniho věta, 10 bodů)

Vypočtěte dvojměrný integrál funkce $f(x, y)$ na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Nakreslete obrázek množiny M .

$$\iint_M x \, dx dy, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 3, (x - 1)^2 + y \leq 4\}.$$

PŘÍKLAD 5. (trojměrný integrál – transformace souřadnic, 10 bodů)

Transformací trojměrného integrálu do válcových souřadnic vypočtěte objem $V(T)$ tělesa $T \subseteq \mathbb{R}^3$. Nakreslete obrázek tělesa T .

$$V(T) = \iiint_T dx dy dz, \quad T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \leq 1 + x^2 + y^2, z \geq 0\}.$$

PŘÍKLAD 6. (diferenciální rovnice prvního řádu, 15 bodů)

Vyřešte lineární diferenciální rovnici prvního řádu s počáteční podmínkou.

$$y' + y = e^x, \quad y(0) = 2.$$

PŘÍKLAD 7. (diferenciální rovnice druhého řádu, 10 bodů)

Vyřešte diferenciální rovnici druhého řádu s počátečními podmínkami.

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$