M3 – ukázková písemka Příjmení a jméno:

1. Je dána funkce
$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

a) Napište rozvoj funkce do moc. řady se středem v bodě nula (napište obecný předpis a první 4 členy rozvoje). [5b]
b) Určete obor (bodové) konvergence. [3b]
c) Pomocí výsledku z bodu a) určete $\lim_{x\to 0} f(x)$. [2b]
d) Pomocí výsledku z bodu a) **vyčíslete** přibližně hodnotu integrálu $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ s chybou menší než 10^{-3} (napište, kolik členů řady je potřeba nejméně sečíst, aby byla dosažena požadovaná přesnost). [4b]

14b.

---

2. Je dána rovnice $y' + 2\frac{y}{x} = 2\frac{x^3}{y}$.

a) Vyšetřete, ve kterých bodech není zaručena existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy. [2b]
b) Nalezněte obecné řešení rovnice (vyjádřete jej v explicitním tvaru). [7b]
c) Určete partikulární řešení pro $y(-1) = 2$ a uveďte interval, na kterém je toto řešení definováno. [2b]

11b.

---

3. Určete obecné řešení rovnice $y'' + 10y' + 29y = 58x - 9 + 41\cos(2x)$. **12b.**

---

4. a) Určete obecné řešení systému rovnic [11b]

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3\,, \\ y_2' &= y_1 + y_3\,, \\ y_3' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

a dále určete řešení splňující počáteční podmínky $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$ (NÁPOVĚDA: Jeden kořen charakteristického polynomu je $\lambda_1 = -1$).

b) Rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy (svůj závěr zdůvodněte!!). [2b] **13b.**

---

5. Formulujte integrální kritérium. Pomocí něj pak rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k+1}}$.

6b.

---

6. Aproximujte řešení poč. úlohy $y'' + 3\frac{x}{y} = y$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ polynomem 4. stupně (rozvoj se středem v bodě 1). **6b.**

---

7. Funkci
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{pro} \quad 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{pro} \quad 2 < x \le 4\,. \end{cases}$$
rozviňte na intervalu $(0,4)$ do **sínové** trigonometrické řady.

a) Napište příslušnou sinovou řadu včetně vzorců pro koeficienty této řady (ty však nepočítejte) . [4b]
b) Načrtněte součet řady na intervalu $(-12, 12)$ a rozhodněte o typu konvergence. [4b]

8b.

---

8. Formulujte

a) libovolnou počáteční úlohu pro nelineární ODR 3. řádu. [3b]
b) libovolnou lineární homogenní PDR 2. řádu na $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. [2b]

5b.

PIŠTE ČITELNĚ!!! NA ZADÁNÍ ZAKROUŽKUJTE ČÍSLA PŘÍKLADŮ, KTERÉ JSTE POČÍTALI. ČÍSLA PŘÍKLADŮ, KTERÉ JSTE VŮBEC NEŘEŠILI, PŘEŠKRTNĚTE.