I. Prostory funkcí – přehled

V této kapitole stručně shrneme pojmy a výsledky, které budeme potřebovat k zavedení pojmu zobecněného řešení a jeho analýze. Mnohé výsledky již byly probírány v předchozích ročnících, viz skripta [F-FA1, Ž-SP].

Na rozdíl od klasické formulace, kdy řešení představuje funkce splňující diferenciální rovnici v jednotlivých bodech, při zobecněné formulaci přistupujeme k úloze globálně: řešením je pro nás prvek určitého prostoru funkcí definovaných na dané oblasti. Proto nejprve uvedeme řadu pomocných výsledků; specifikujeme typ oblasti a zavedeme prostory funkcí, ve kterých budeme hledat řešení.

1. Základní pojmy prostorů funkcí

Budeme se zabývat prostory funkcí. Jsou to zejména metrické, Banachovy a Hilbertovy prostory, které byly studovány v předmětu Funkcionální analýza I. Připomeňme proto definice základních pojmů.

Metrické prostory

Metrický prostor (P, ρ) je libovolná neprázdná množina P prvků x, které nazýváme *body*, na které je definované zobrazení $\rho : P \times P \to \langle 0, \infty)$ zvané *metrika*, které splňuje následující tři axiomy (pro všechny body $x, y, z \in P$):

- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(symetrie)*,
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost)*,
- $\rho(x, y) = 0$, právě když $x = y$ *(metrika rozlišuje body, axiom totožnosti)*.

Metrický prostor, poměrně jednoduchý objekt, umožňuje zavést bohatou strukturu dalších pojmů: okolí, otevřené a uzavřené množiny, konvergentní a cauchyovské posloupnosti, úplný prostor, kompaktní množiny, spojitá zobrazení a řadu dalších.

Koule a okolí, vnitřní a hraniční body

Pomocí metriky definujeme *kouli* $\mathrm{B}(x_0, r)$ o středu x_0 a poloměru r:

$$\mathrm{B}(x_0, r) = \{x \in P \,\big|\, \rho(x_0, x) < r\};$$

písmeno B pochází z anglického „ball“. *Okolí bodu* x_0 je (neprázdná) koule $\mathrm{B}(x_0, r)$ pro $r > 0$ a také libovolná množina obsahující otevřenou kouli $\mathrm{B}(x_0, r)$ pro nějaké $r > 0$.

Rozlišujeme tři druhy bodů vzhledem k množině $M \subset P$ Bod $x_0 \in P$ nazveme

- *vnitřním bodem* M, pokud existuje $r > 0$ takové, že $\mathrm{B}(x_0, r) \subset M$,
- *vnějším bodem* M, pokud existuje $r > 0$ takové, že $\mathrm{B}(x_0, r) \cap M = \emptyset$ a
- *hraničním bodem* M, pokud $\forall\, r > 0$ platí $\mathrm{B}(x_0, r) \cap M \neq \emptyset$ a také $\mathrm{B}(x_0, r) \setminus M \neq \emptyset$.

Otevřené množiny

Vnitřek množiny M je množina všech vnitřních bodů M, označujeme ho symbolem M°. Množinu A nazveme *otevřenou*, pokud všechny její body jsou body vnitřní, tj. $A = A^\circ$. Připomeňme důležitou charakteristiku otevřených množin:

Sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina,

ale *průnik pouze konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina,*

například průnik otevřených množin $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ je bod 0, což není otevřená množina.

Uzavřené množiny

Vzdálenost bodu x od množiny M je infimum jeho vzdálenosti od bodů množiny: $\rho(x, M) = \inf\{\rho(x, a) \mid a \in M\}$. Množina všech bodů P, které mají od množiny M nulovou vzdálenost, je *uzávěr* $\overline{M}$ množiny M: $\overline{M} = \{x \in P \mid \rho(x, M) = 0\}$. Množinu B nazveme *uzavřenou*, pokud je rovna svému uzávěru $B = \overline{B}$. Přitom platí:

Doplněk $P \setminus A$ *otevřené množiny* A *je množina uzavřená*

a naopak: *doplněk* $P \setminus B$ *uzavřené množiny* B *je množina otevřená.*

Pro sjednocení a průnik uzavřených množin platí obráceně:

Průnik libovolného počtu uzavřených množin množina uzavřená,

ale *sjednocení pouze konečně mnoha uzavřených množin je množina uzavřená,*

například sjednocením uzavřených množin $B_n = \langle \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n} \rangle$ je otevřený interval $(0, 3)$.

Hranice množiny

Hranice množiny M je množina všech hraničních bodů množiny. Jsou to body uzávěru množiny, které nejsou vnitřními body, tj. $\partial M = \overline{M} - M^\circ$; jsou to body prostoru P, které mají nulovou vzdálenost jak od M, tak od doplňku $P - M$, tj. $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(P \setminus M)}$.

Pro operaci vnitřku a uzávěru množiny platí: druhý vnitřek nebo uzávěr je stejná množina jako první: $(M^\circ)^\circ = M^\circ$, $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$. Pro operaci hranice toto neplatí, množiny $M, \partial M, \partial(\partial M)$ mohou být různé, například množina $M = \langle 0, 1 \rangle \cap \mathbb{Q}$ má za hranici celou úsečku $\partial M = \langle 0, 1 \rangle$, druhá hranice však jsou už jen dva body $\partial(\partial M) = \{0, 1\}$.

Obojetné a souvislé množiny

Množiny, které jsou současně otevřené a uzavřené nazýváme *obojetné*. Každý neprázdný metrický prostor obsahuje alespoň dvě obojetné množiny: celý prostor a prázdnou množinu. Pokud jsou to jediné obojetné množiny, prostor nazýváme prostorem *souvislým*. Každá neprázdná podmnožina metrického prostoru tvoří také metrický prostor, metriku pouze zúžíme z P na M. Proto můžeme mluvit také o *souvislé* množině.

V prostoru, který není souvislý, je více obojetných množin. Souvislé obojetné podmnožiny nazýváme *komponentami* prostoru.

Izolované a hromadné body množiny

Bod x množiny M je *hromadný*, pokud v každém jeho okolí existuje kromě x ještě další bod množiny A (potom v každém jeho okolí už je nekonečně mnoho bodů z M). Pokud bod x má okolí $\mathrm{B}(x, r)$, $r > 0$, ve kterém už žádný jiný bod množiny A kromě bodu x není, nazveme ho *izolovaným* bodem: $\mathrm{B}(x, r) \cap M = \{x\}$. Poznamenejme, že množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá *derivací* množiny.

Posloupnosti konvergentní a cauchyovské, úplný prostor

Posloupnost bodů $\{x_n\}$ prostoru P *konverguje* k bodu $x_0 \in P$, píšeme $x_n \to x_0$, jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$. Pomocí „epsilon-en" definice zní: $x_n \to x_0$ *jestliže*

pro každé $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0, *že pro každé* $n > n_0$ *platí* $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$.

V metrickém prostoru však existují posloupnosti, které vypadají jako konvergentní, ale limitu nemají. Tyto posloupnosti nazýváme *cauchyovské*: $\{x_n\}$ *je cauchyovská, jestliže*

pro každé $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0, *že pro každé* $n, m > n_0$ *platí* $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Každá konvergentní posloupnost je i posloupností cauchyovskou, obráceně to však neplatí. Pokud v prostoru jsou všechny cauchyovské posloupnosti konvergentní, prostor nazveme *úplným prostorem.*

Protože každou podmnožinu M metrického prostoru P můžeme považovat za metrický prostor, mluvíme také o úplné množině M. Každá úplná množina $M \subset P$ je současně množinou uzavřenou. Obráceně uzavřená množina nemusí být úplná, záleží na prostoru P. Pokud P je úplný prostor, potom každá uzavřená množina je také úplná.

Množina hustá, separabilní, totálně omezená

Množinu $S \subset P$ nazveme *hustou* v množině $M \subset P$, pokud její uzávěr obsahuje M, tj. $M \subset \overline{S}$. Prostor P nazveme *separabilní*, pokud existuje spočetná množina $S \subset P$ hustá v P. Podobně množinu M nazveme separabilní, pokud existuje spočetná množina $S \subset P$, takový, že $M \subset \overline{S}$. Každá podmnožina separabilní množiny nebo prostoru je separabilní.

Množina $M \subset P$ je *omezená*, také se říká *ohraničená*, pokud existuje-li $d > 0$, že $\rho(x, y) < d$ pro každé $x, y \in M$. Ekvivalentní charakteristikou je, že M se „vejde" do nějaké koule (s konečným poloměrem), tj. existují $x_0 \in P$ a $R > 0$, že $M \subset \mathrm{B}(x_0, R)$.

Množinu $M \subset P$ nazveme *totálně omezenou* (nebo také prekompaktní), pokud každá její posloupnost obsahuje cauchyovskou podposloupnost.

Sítě a antisítě

Pojem ε-sítě charakterizuje totálně omezenou a separabilní množinu. Množinu $S \subset P$ nazveme *ε-sítí* množiny M, pokud ke každému bodu $x \in M$ existuje bod $s \in S$ takový, že $\rho(x, s) < \varepsilon$, nebo ekvivalentně sjednocení ε-okolí bodů množiny S pokryje množinu M: $M \subset \cup_{s\in S}\mathrm{B}(s, \varepsilon)$.

Množina $M \subset P$ *je totálně omezená, pokud pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje konečná* ε*-síť* M,

množina $M \subset P$ *je separabilní, jestliže pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje spočetná* ε*-síť* M.

Pro důkaz, že množina není totálně omezená nebo separabilní je vhodný následující pojem: Množinu A *nazveme* ε*-antisíť* (neznám vhodnější termín), pokud

každé dva různé body A *mají vzdálenost alespoň* 2ε,

nebo ekvivalentně: *koule* $\mathrm{B}(a, \varepsilon)$, $a \in A$ *jsou navzájem disjunktní*, tj.

$\mathrm{B}(a_i, \varepsilon) \cap \mathrm{B}(a_j, \varepsilon) = \emptyset$ *pro každé dva* $a_i, a_j \in A$, $a_i \neq a_j$.

Snadno lze dokázat, že platí:

Množina není totálně omezená, pokud obsahuje nekonečnou antisíť,

a *množina není separabilní, pokud obsahuje nespočetnou antisíť*,

protože ke každému bodu a antisítě A by byl potřebný alespoň jeden bod s případné sítě S, která proto nemůže mít menší mohutnost než antisíť A.

Kompaktní množiny

Uveďme nejprve definici pomocí posloupností. Množinu (nebo prostor) nazveme *kompaktní*, pokud *každá její posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost.*

Z příslušných definic přímo plyne tvrzení:

Množina je kompaktní, právě když je úplná a totálně omezená.

V obecnějších topologických prostorech, ve kterých nemusí být metrika, se kompaktnost množiny definuje pomocí tzv. *otevřeného pokrytí*, tj. systému otevřených množin, jejichž sjednocení obsahuje (pokrývá) danou množinu:

Množina je kompaktní, jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat pokrytí konečně mnoha otevřenými množinami.

Poznamenejme, že množina v $\mathbb{R}^n$ s obvyklou metrikou je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Spojitá zobrazení

Zobrazení mezi metrickými prostory (P, ρ) a (Q, σ):

$$f : P \to Q\,, \qquad \text{tj.} \qquad f : x \in P \;\mapsto\; y = f(x) \in Q$$

nazveme spojitým, pokud zachovává konvergenci:

$$x_n \to x \text{ v } P \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x) \text{ v } Q\,, \qquad \text{tj.} \quad \rho(x_m, x) \to 0 \;\Rightarrow\; \sigma(f(x_n), f(x)) \to 0\,.$$

Definici lze také zapsat ve tvaru ε, δ–definice, užitečná je však charakteristika:

Zobrazení je spojité, pokud vzor každé otevřené množiny je množina otevřená.

nebo také *vzor každé uzavřené množiny je množina uzavřená.*

Pozor, obrácená tvrzení neplatí: *Obraz otevřené množiny ve spojitém zobrazení nemusí být otevřený*, ani *Obraz uzavřené množiny nemusí být uzavřený*, zato *Obraz kompaktní množiny je opět kompaktní.* Důsledkem toho je tvrzení:

Spojitá reálná funkce $f : M \to \mathbb{R}$ na kompaktní množině M je omezená zdola i shora a nabývá svého minima i maxima na M.

Další příjemnou vlastností spojitého zobrazení je skutečnost, že složení spojitých zobrazení je opět zobrazení spojité.

Banachova věta o pevném bodu kontraktivního zobrazení

Existenci řešení rovnice $f(x) = 0$ lze často dokázat pomocí vět o pevném bodě. *Pevný bod* zobrazení $T : P \to P$ je bod, kterým zobrazení nepohne, tj. $T(x) = x$. Hledání řešení rovnice $f(x) = 0$ lze přeformulovat na hledání pevného bodu zobrazení $T(x) = x - f(x)$. Zobrazení T nazveme *lipschitzovské* s konstantou $L > 0$, pokud platí:

$$\rho(T(x), T(y)) \le L\,\rho(x, y)\,.$$

Konečně zobrazení je *kontraktivní*, pokud je lipschitzovské s konstantou $c < 1$, tj. „stejnoměrně“ zmenšuje vzdálenost bodů. Větu, která se často využívá v aplikacích pak lze formulovat jednoduše:

Kontraktivní zobrazení na úplném metrickém prostoru má pevný bod.

Věta je navíc konstruktivní: dává i metodu výpočtu pevného bodu, který je řešením rovnice $f(x) = 0$. Skutečně, iterace $x_{n+1} = T(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ z libovolného bodu x_0 konvergují k řešení, iteracemi lze tak spočítat řešení s libovolnou přesností.

Lineární prostory

Lineární prostor, také *vektorový prostor*, nad tělesem $\mathbb{T}$ tzv. skalárů (obvykle $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) je neprázdná množina X s body x, na které jsou definovány dvě operace:

- sčítání: $+ \ : \ X \times X \to X$,
- násobení *skalárem*: $\mathbb{T} \times X \to X$,

přičemž množina X s operací sčítání tvoří *komutativní grupu*, tj. operace $+$ je

- *komutativní*: $x + y = y + x$,
- *asociativní*: $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- *má nulový (neutrální) prvek* 0, splňující $x + 0 = 0 + x = x$,
- *každý $x \in X$ má opačný (inverzní) prvek* $-x$, že platí $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

operace násobení skalárem $\mathbb{T} \times X \to X$ splňuje

- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- $1x = x$

a obě operace jsou spojeny distributivními zákony

- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

přičemž rovnosti platí pro všechna $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$.

Pokud bereme $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ mluvíme o *reálném* lineárním prostoru, pokud $\mathbb{T} = \mathbb{C}$ mluvíme o *komplexním* lineárním prostoru. Dále se budeme zabývat hlavně reálnými prostory.

Pozor, na rozdíl od metrického prostoru, ne každá podmnožina X_0 lineárního prostoru X je lineární podprostor, lineární podprostor musí být uzavřený vzhledem k oběma operacím lineárního prostoru: tj. splňuje implikaci

$$x_1, x_2 \in X_0 \,, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in X_0.$$

Lineární kombinace, nezávislost, báze, dimenze

Pro $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ výraz $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ nazveme lineární kombinací bodů $x_1, x_2, \dots, x_n$. Body $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazveme *závislými*, pokud některý z nich lze napsat jako *lineární kombinaci* ostatních, pokud to nelze, nazveme je nezávislými. Obvyklá definice říká, že $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou nezávislé, jestliže jediná kombinace prvků, která dává nulový prvek, je kombinace nulová:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\,.$$

Skutečně, kdyby například $\alpha_1 \neq 0$, potom $x_1 = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)$, tj. x_1 je závislé na ostatních. V případě nekonečně mnoha bodů řekneme, že jsou nezávislé, pokud každá konečná podmnožina z nich je nezávislá.

Báze prostoru X je množina nezávislých bodů $B \subset X$ bodů b_ι, $\iota \in I$, ke které už nelze žádný další (nezávislý) bod přidat. Ekvivalentní definice říká, že každý prvek prostoru lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci konečně mnoha prvků báze.

Dimenze prostoru je maximální počet nezávislých bodů v prostoru, tj. počet prvků báze. Pokud je tento počet konečný, mluvíme o *prostoru konečné dimenze*. Každý reálný lineární prostor dimenze n můžeme identifikovat s prostorem $\mathbb{R}^n$; v případě komplexního prostoru s $\mathbb{C}^n$. Pokud v prostoru je nekonečně mnoho lineárně nezávislých bodů, báze prostoru je nekonečná, mluvíme o prostoru nekonečné dimenze. Tyto prostory však s $\mathbb{R}^\infty$ obvykle identifikovat nelze.

Lineární funkcionály

Funkcionálem na X je libovolné zobrazení $F : X \to \mathbb{R}$ (v případě komplexního prostoru $F : X \to \mathbb{C}$). Funkcionál na prostoru X určíme tím, že řekneme, jaké hodnoty $F(x)$ dává pro každý bod $x \in X$. Funkcionál F *je lineární*, pokud zachovává obě operace lineárního prostoru: operaci sčítání i skalárního násobku, tj.

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)\,, \qquad F(\alpha x) = \alpha F(x)\,.$$

Lineární funkcionály lze sčítat a skalárně násobit:

$$(F_1 + F_2)(x) := F_1(x) + F_2(x)\,, \qquad (\alpha F)(x) := \alpha F(x)\,;$$

tvoří proto opět lineární prostor, který nazveme (algebraickým) *duálním prostorem* nebo také *adjungovaným prostorem*, označuje se $X^\sharp$. V případě reálného prostoru konečné dimenze n má duální prostor stejnou dimenzi n; jak prostor, tak jeho duál lze identifikovat s $\mathbb{R}^n$. Každý funkcionál F na $\mathbb{R}^n$ lze reprezentovat pomocí bodu $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$, tj. pro každý funkcionál F existuje právě jeden $f \in \mathbb{R}^n$ takový, že

$$F(x) = f_1 x_1 + \cdots + f_n x_n \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Poznamenejme, že v případě prostoru nekonečné dimenze je situace mnohem složitější.

Normované (lineární) prostory

Na samotných lineárních prostorech nelze měřit vzdálenost bodů a tím ani definovat konvergenci a další pojmy, které známe z metrických prostorů. Na lineární prostor zavedeme „lepší“ metriku, která bude v souladu s operacemi lineárního prostoru. Tato metrika by se neměla měnit s posunutím, tj. být nezávislá na translaci: $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$. Vzhledem k operaci sčítání vzdálenost dvou bodů $x, y \in X$ převedeme na vzdálenost bodu $y - x$ od bodu 0. Vzdálenosti prvku x od nulového bodu nazveme normou $\|x\| = \rho(x, 0)$, která má tak jenom jeden argument. Navíc budeme vyžadovat soulad normy se skalárním násobkem a axiom symetrie nahradíme axiomem nepřesně zvaným homogennost.

Norma

Normovaný lineární prostor je lineární prostor X, na kterém je definován reálný funkcionál $\|\cdot\| : X \to \langle 0, \infty)$ zvaný *norma*, který splňuje následující axiomy:

- $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|\,,$ *(norma je „pozitivně“ homogenní)*,
- $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|\,,$ *(splňuje trojúhelníkovou nerovnost)* a
- $\|x\| = 0$, právě když $x = 0\,,$ *(rozlišuje body)*:

Pokud funkcionál splňuje pouze první dva axiomy a nerozlišuje body, nazývá se *seminormou* a označuje se stejně jako absolutní hodnota $|\cdot|$.

Na normovaném lineárním prostoru jsou definovány všechny pojmy z metrických prostorů (pouze metriku $\rho(x, y)$ nahradíme normou $\|x - y\|$), např. máme otevřenou, uzavřenou a obojetnou množinu, konvergenci, úplné, separabilní, kompaktní množiny, ...; i pojmy z lineárních prostorů: nezávislost, dimenze, báze, lineární funkcionál. V aplikacích se pracuje obvykle s úplným normovaným lineárním prostorem, který se nazývá *Banachův prostor*.

Schauderova báze

Na lineárním prostoru nekonečné dimenze máme algebraickou bázi, která umožňuje každý prvek napsat jako konečnou kombinaci prvků báze. V normovaném lineárním prostoru máme navíc konvergenci a můžeme prvky vyjadřovat pomocí nekonečné kombinace prvků báze, čímž vystačíme s mnohem méně početnou bází. Můžeme však brát pouze spočetné kombinace prvků báze, přičemž příslušná řada musí konvergovat. Budeme to využívat v případě prostoru se skalárním součinem.

Spojité lineární funkcionály

Podle definice funkcionál $F : X \to \mathbb{R}$ je spojitý, jestliže zachovává konvergenci, tj. $x_n \to x_0 \;\Rightarrow F(x_n) \to F(x_0)$. V případě lineárního funkcionálu spojitost pro $x_n \to x_0$ lze převést na spojitost pro $(x_n - x_0) \to 0$. Proto lineární funkcionál, který je spojitý v jednom bodě je už spojitý ve všech bodech.

Funkce $f(x)$ je omezená na množině M pokud $|f(x)| \leq k$ pro všechna $x \in M$. Podle této definice by byl na $\mathbb{R}$ omezený jedině nulový funkcionál. Proto definici upravíme a řekneme, že funkcionál je *omezený*, jestliže omezené množiny zobrazuje na množiny omezené. Lineární funkcionál F je proto omezený, pokud existuje konstanta $K > 0$ taková, že $\forall\, x \in X$ platí $|F(x)| \leq K\,\|x\|$. Nejmenší možnou konstantu K nazýváme normou funkcionálu F, lze ji definovat přímo kterýmkoliv z následujících vzorců:

$$\|F\|_* = \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} |F(x)| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|\,.$$

Víme, že lineární funkcionály tvoří lineární prostor, s právě zavedenou normou $\|\cdot\|$. Je to normovaný lineární prostor, který je úplný i když prostor X úplný není, a proto je to Banachův prostor. Nazývá se (topologický[1]) duální (nebo také adjungovaný) prostor a budeme ho značit symbolem X^*, užívá se také symbol X'.

Slabá konvergence

Konvergenci v normovaném lineárním prostoru určuje norma. Vedle této tzv. silné konvergence zvané také konvergencí v normě lze pomocí spojitých lineárních funkcionálů zavést tzv. *slabou konvergenci*, která měří „blížení se“ pomocí funkcionálů:

$$x_n \rightharpoonup x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad F(x_n - x_0) \;\to\; 0 \qquad \forall F \in X^*\,.$$

Každá silně konvergentní posloupnost je i slabě konvergentní, obráceně to platí pouze v prostorech konečné dimenze, kde obě konvergence splývají.

Uveďme příklad posloupnosti, která konverguje slabě, ale nekonverguje silně. Vezměme prostor ℓ^2 nekonečných posloupností $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ s normou $\|\cdot\|_2$:

$$\ell^2 = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^\infty \,\middle|\, \|\mathrm{x}\|_2 < \infty \right\}\,, \qquad \|\mathrm{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq \infty \right]^{1/2}\,.$$

[1] Abychom ho odlišili od algebraického duálního prostoru.

Lineární funkcionál $F \in (\ell^2)^*$ lze zapsat jako $F(\mathrm{x}) = \sum_i f_i x_i$, kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, \dots) \in \ell^2$. Protože součet nezáporných f_i^2 je konečný, posloupnost f_i musí konvergovat k nule.

Uvažujme nyní tzv. posloupnost „putující“ jedničky: bod $\mathrm{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ je posloupnost nul, která má na i-tém místě jedničku. V posloupnosti $\{\mathrm{e}_n\}_n^\infty$ jednička „putuje“ mezi nulami při $n \to \infty$ do nekonečna. Platí $\|\mathrm{e}_n\|_2 = 1$ a $\|\mathrm{e}_n - \mathrm{e}_m\|_2 = \sqrt{2}$ pro $n \neq m$. Posloupnost tedy není cauchyovská, a proto nemůže konvergovat silně. Na druhé straně $F(\mathrm{e}_n) = \sum_i f_i e_i^n = f_n \to 0$, protože v sumě $f_i e_i^n$ zbyl jediný sčítanec f_n. Posloupnost $\{\mathrm{e}_n\}$ tak konverguje slabě k nulové posloupnosti.

Druhý duál, prostor reflexivní a kompaktnost

Podobně jako na prostoru X lze uvažovat i spojité lineární funkcionály Φ na duálním prostoru X^*, které lze normovat analogicky

$$\|\Phi\|_{**} = \sup_{F \neq 0} \frac{|\Phi(F)|}{\|F\|_*} \,.$$

Je to tzv. druhý duál $(X^*)^* \equiv X^{**}$. Pomocí tzv. kanonického vnoření lze bodům z X přiřadit funkcionál z X^{**}: každému bodu $x \in X$ lze přiřadit funkcionál $\Phi_x \in X^{**}$ vztahem

$$\Phi_x(F) = F(x) \qquad \forall\, F \in X^* \,.$$

Pokud tímto způsobem získáme všechny funkcionály prostoru X^{**}, prostor X nazveme *reflexivním.* Tento pojem je důležitý pro aplikace, jak naznačíme v dalším.

V prostoru konečné dimenze n každá omezená posloupnost obsahuje podposloupnost konvergentní. Naznačme důkaz tohoto tvrzení. Omezená posloupnost prvků $\{\mathrm{x}_i\}_{i=1}^\infty = \{(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)\}_{i=1}^\infty$ má omezené první složky $\{x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots\}$. Z posloupnosti $\{\mathrm{x}_i\}$ proto vybereme podposloupnost $\{\mathrm{x}_{i_1}\}$ tak, aby konvergovaly první složky. V druhém kroku z $\{\mathrm{x}_{i_1}\}$ vybereme podposloupnost $\{\mathrm{x}_{i_2}\}$ tak, aby konvergovaly také druhé složky. Po n-tém vybrání podposloupnosti v získané podposloupnosti $\{\mathrm{x}_{i_n}\}$ již budou konvergovat všechny složky, bude tedy konvergovat silně.

V prostoru nekonečné dimenze omezená posloupnost nemusí obsahovat konvergentní podposloupnost, viz příklad posloupnosti $\{\mathrm{e}_n\}$ s „putující“ jedničkou.

V reflexivním prostoru nekonečné dimenze však lze dokázat, že omezené množiny jsou kompaktní vzhledem ke slabé konvergenci:

Každá ohraničená posloupnost obsahuje slabě konvergentní podposloupnost.

Naznačme ideu důkazu. V případě, že duální prostor X^* je separabilní, existuje spočetná hustá množina spojitých funkcionálů $\{F_n\}$, pomocí kterých budeme postupně vybírat podposloupnosti tak, aby $\{F_n(x_i)\}_{i=1}^\infty$ konvergovaly. Při n-ém vybírání n-tý prvek vybrané posloupnosti vložíme do finální posloupnosti, která bude konvergovat slabě, protože bude konvergovat pro každý funkcionál F_n z posloupnosti funkcionálů F_n, která je hustá v X^*.

Uvedená kompaktnost je důležitá pro aplikace: při řešení okrajové úlohy pro diferenciální rovnici, což je rovnice v prostoru nekonečné dimenze, dokážeme existenci posloupnosti přibližných řešení. Pokud tato posloupnost je omezená, obsahuje podposloupnost konvergující slabě. Dále budeme dokazovat, že tato podposloupnost má limitu, která bude přesným řešením původní diferenciální rovnice.

Prostory se skalárním součinem

Na některých normovaných lineárních prostorech lze zavést skalární součin. Je to zobecnění skalárního součinu vektorů: $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v} = |\mathrm{u}|\cdot|\mathrm{v}|\cos\phi$, pomocí kterého lze určovat i úhel, který vektory svírají.

Skalární součin v reálném případě je zobrazení: $(\cdot,\cdot) : X\times X \to \mathbb{R}$ splňující následující axiomy:

- $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$ *(je lineární v první proměnné)*
- $(x, y) = (y, x)$ *(je symetrický)*
- $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$ a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(příslušná norma rozlišuje body)*:

Poznamenejme, že z prvních dvou axiomů plyne linearita také v druhé proměnné:

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)\,, \quad (x, \alpha y) = \alpha(x, y).$$

V případě komplexního lineárního prostoru $(\cdot,\cdot) : X\times X \to \mathbb{C}$, druhý axiom $(x, y) = (y, x)$ nutno upravit na $(x, y) = \overline{(y, x)}$, přičemž pruh značí komplexně sdružené číslo. Skalární součin v druhé proměnné tak zachovává součet $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$, pro skalární násobek však platí $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$.

Skalární součin lze odhadnout pomocí normy, odhadu se říká *Schwarzova nerovnost*, také *Cauchyova* a *Bunjakovského nerovnost*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Na prostoru bereme normu určenou skalárním součinem. Ne každá norma má „svůj“ skalární součin. Norma odpovídající skalárnímu součinu splňuje *rovnoběžníkovou rovnost*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\,,$$

kterou lze snadno ověřit rozepsáním pomocí skalárního součinu. Pokud tato nerovnost je splněna, na reálném normovaném prostoru X lze zavést skalární součin kterýmkoliv z následujících vztahů:

$$\begin{aligned}
(x, y) &= \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\,,\\
(x, y) &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2\|y\|^2 - \|x - y\|^2\right)\,,\\
(x, y) &= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)\,.
\end{aligned}$$

V případě komplexním prostoru je vztah složitější:

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} + \mathbf{i}\,\frac{\|\mathbf{i}\,x - y\|^2 - \|\mathbf{i}\,x + y\|^2}{4}\,.$$

Lineární prostor se skalárním součinem nekonečné dimenze se nazývá také *unitárním prostorem*, pokud je úplný, říká se mu *Hilbertův prostor*.

Ortogonální posloupnosti a Fourierovy řady

Stejně jako v geometrii skalární součin umožňuje určit úhel φ dvou prvků vektorů:

$$\varphi = \arccos\frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}\,.$$

Speciálně, pokud $(x, y) = 0$, úhel φ je pravý a řekneme, že body x, y jsou na sebe kolmé, ortogonální. Posloupnost bodů $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ nazveme *ortogonální*, pokud body e_i jsou nenulové a navzájem kolmé, tj. $(e_i, e_j) = 0$ pro $i \neq j$. Pokud navíc $(e_i, e_i) = \|e_i\|^2 = 1$, posloupnost nazveme *ortonormální*.

Pokud ortogonální posloupnost nelze doplnit dalším nenulovým bodem, nazývá se *úplná* a tvoří tak tzv. *ortogonální bázi* v následujícím smyslu: konečné lineární kombinace prvků této báze tvoří hustou podmnožinu Hilbertova prostoru. V důsledku toho každý prvek x prostoru X lze vyjádřit ve tvaru konvergentní řady

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i\,, \quad \text{kde} \quad c_i = \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2}\,.$$

Této řadě se říká Fourierova řada nebo rozvoj bodu x podle ortogonální posloupnosti $\{e_i\}$. Pro koeficienty c_i řady platí obecně *Besselova nerovnost*, v případě, že ortogonální posloupnost je úplná, platí Parsevalova rovnost:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \|e_i\|^2\,, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \|e_i\|^2\,.$$

Duální prostor

Na Hilbertově prostoru X máme opět spojité lineární funkcionály, které tvoří duální prostor X^*. Pro tyto funkcionály platí Rieszova věta, podle které každý spojitý lineární funkcionál F na prostoru X reprezentovat pomocí prvku $f \in X$ a skalárního součinu:

$\forall\, F \in X^*$ *existuje právě jeden* $f \in X$, *že* $\forall x \in X$ *platí* $F(x) = (f, x)\,.$

Věta dává vzájemně jednoznačné zobrazení mezi prostorem X a jeho duálem X^*, tj. $X \approx X^*$. Větu můžeme použít i na duální prostor X^*, odkud plyne $X^* \approx X^{**}$. Platí tedy $X \approx X^{**}$, proto každý Hilbertův prostor je už reflexivní.

2. Nerovnosti

Zobecněné řešení je definováno pomocí integrální identity. Protože požadujeme, aby integrály v identitě byly konečné, odhady těchto integrálů budou velmi častou součástí našich úvah. Budeme je využívat jak pro ověření, že daná formulace je korektní, tak pro důkaz existence řešení, případně pro další analýzu. Shrneme vybrané nerovnosti, které budeme později využívat.

Nerovnosti pro konečné posloupnosti čísel

Nejjednodušší nerovnost

$$|a\,b| \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) \tag{2.1}$$

je důsledkem nerovnosti $(a - b)^2 \geq 0$. Podobně nerovnost $(\sqrt{\varepsilon}a - b/\sqrt{\varepsilon})^2 \geq 0$ dává

$$|a\,b| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\,b^2 \qquad (\varepsilon > 0)\,. \tag{2.2}$$

Také nerovnost $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ je důsledkem (2.1). Může být zobecněna pro n členů

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\,. \tag{2.3}$$

Důkaz opět plyne odhadem členů $2a_ia_j$ pomocí nerovnosti (2.1). Podobný odhad platí také pro p-tou mocninu ($p > 1$):

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|^p \le c \cdot (|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p)\,, \tag{2.4}$$

kde c je kladná konstanta závislá na n a p. Uveďme jednoduchý důkaz dávající konstantu $c = n^p$. Označme $M = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$. V první nerovnosti využijeme $|a_i| \le M$, v druhé potom přidáme zbývající členy $|a_i|^p \ge 0$

$$|a_1 + \cdots + a_n|^p \le |M + \cdots + M|^p = n^p\, M^p \le n^p\,(|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p)\ .$$

Odhad platí i s „lepší“ konstantou c, důkaz však je složitější.

Nerovnosti pro integrály

V dalším budeme předpokládat, že všechny výrazy mají smysl; zejména že Ω je oblast[2] v $\mathbb{R}^N$, funkce jsou měřitelné a integrovatelné v Lebesgueově smyslu.

Začneme Schwarzovou nerovností (Cauchyova-Buňakovského nerovnost pro integrály)

$$\int_\Omega |f\,g|\,\mathrm{d}x \le \left[\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \cdot \left[\int_\Omega |g|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}\,, \tag{2.5}$$

která je zvláštním případem Hölderovy nerovnosti

$$\int_\Omega |f\,g|\,\mathrm{d}x \le \left[\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \cdot \left[\int_\Omega |g|^{p'}\,\mathrm{d}x\right]^{1/p'}\,, \tag{2.6}$$

kde $p, p' \in (1, \infty)$ jsou sdružené exponenty splňující $1/p + 1/p' = 1$, tj. $p' = p/(p-1)$. Důkazy obou nerovností lze najít například v [F-FA1]. Jestliže v nerovnosti (2.6) zvolíme funkci $g = 1$ a míru množiny Ω označíme $\mathrm{m}(\Omega)$, dostáváme:

$$\left|\int_\Omega f\,\mathrm{d}x\right| \le \left[\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \mathrm{m}(\Omega)^{1-1/p}\ . \tag{2.7}$$

Hölderovu nerovnost lze zobecnit na více funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_k$:

$$\left|\int_\Omega f_1 \cdots f_k\,\mathrm{d}x\right| \le \left[\int_\Omega |f_1|^{p_1}\,\mathrm{d}x\right]^{1/p_1} \cdots \left[\int_\Omega |f_k|^{p_k}\,\mathrm{d}x\right]^{1/p_k}\,, \tag{2.8}$$

kde exponenty $p_i \in (1, \infty)$ splňují

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} = 1\,.$$

Nerovnost lze snadno dokázat několikanásobným použitím Hölderovy nerovnosti.

Pro úplnost zmíníme ještě Minkowského nerovnost, důkaz je také v [F-FA1], ze které plyne trojúhelníková nerovnost normy v Lebesgueových prostorech:

$$\left[\int_\Omega |f_1 + f_2|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \le \left[\int_\Omega |f_1|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega |f_2|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}. \tag{2.9}$$

[2] Zde by stačilo, že Ω je měřitelná množina v $\mathbb{R}^N$.

3. Lebesgueovy prostory integrovatelných funkcí

Mezi normované prostory vedle prostorů nekonečných posloupností ℓ^p patří prostory spojitých funkcí $C(\Omega)$, zejména prostory integrovatelných funkcí, zvané Lebesgueovy prostory. Tyto prostory použijeme pro zavedení prostorů s integrovatelnými derivacemi tzv. Sobolevovy prostory, ve kterých budeme hledat zobecněná řešení.

Říkáme, že funkce je integrovatelná, jestliže její integrál existuje a je konečný. Aby prostor integrovatelných funkcí byl úplný, Riemannův ani Newtonův integrál nestačí, budeme potřebovat obecnější integrál Lebesgueův, kterému je věnována část skript [F-FA1]. Připomeňme konstrukci Lebesgueovy míry a integrálu.

Lebesgueova míra a integrál

Obecná definice říká, že *prostor s mírou je trojice* $(X, \mathscr{S}, \mu)$, kde

(a) X je *základní prostor*, tj. libovolná neprázdná množina,

(b) $\mathscr{S}$ je *σ-algebra podmnožin* X, tj. systém podmnožin základního prostoru X splňující následující tři axiomy:

- *systém obsahuje prázdnou množinu*, tj. $\emptyset \in \mathscr{S}$,
- *systém je uzavřen na doplňky*, tj. $A \in \mathscr{S} \;\Rightarrow\; X \setminus A \in \mathscr{S}$,
- *systém je uzavřen na spočetná sjednocení*, tj.

$$A_j \in \mathscr{S},\ j \in J \subset \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \textstyle\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathscr{S}.$$

Množiny ze systému $\mathscr{S}$ se nazývají *měřitelné množiny.*

(c) *Množinová funkce* $\mu : \mathscr{S} \to \langle 0, \infty\rangle$ zvaná *míra* na X je *σ-aditivní*, tj. pro spočetný systém navzájem disjunktních množin $A_i \in \mathscr{S}$, $i \in I$, platí rovnost

$$\mu\left(\textstyle\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \textstyle\sum_{j\in J} \mu(A_j)\,.$$

Konstrukce Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}^N$

Otevřený N-rozměrný interval I v $\mathbb{R}^N$ je kartézký součin omezených otevřených intervalů (a_i, b_i) a jeho míra je součin délek intervalů:

$$I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N)\,, \quad \mathrm{m}(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N)\,,$$

kde $-\infty < a_i < b_i < \infty$. Množinu všech takovýchto intervalů označíme $\mathscr{O}$. Vnější míra $\mathrm{m}^*(\cdot)$ libovolné množiny A je infimum součtu měr nejvýše spočetně mnoha otevřených intervalů I_j $j \in J$ pokrývajících A, tj.

$$\mathrm{m}^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j\in J} \mathrm{m}(I_j) \;\middle|\; I_j \in \mathscr{O}\,,\ A \subset \bigcup_{j\in J} I_j \right\}.$$

Tato míra je nezáporné číslo případně nekonečno. Řekneme, že množina A je *měřitelná*, jestliže pro každou N-rozměrnou krychli $Q_r = (-r, r)^N$ platí

$$\mathrm{m}^*(Q_r \cap A) + \mathrm{m}^*(Q_r \setminus A) = \mathrm{m}(Q_r) \equiv (2r)^N$$

a její míra je rovna její vnější míře: $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}^*(A)$. Systém všech měřitelných podmnožin $\mathbb{R}^N$ označme $\mathfrak{M}$. Lze ověřit, že $\mathfrak{M}$ je σ-algebra a $\mathrm{m}(\cdot)$ je σ-aditivní funkce na $\mathfrak{M}$, tj. míra v $\mathbb{R}^n$. Množinu, jejíž míra je nula, nazveme nulovou množinou. Důležitou vlastností je, že sjednocení nejvýše spočetně mnoha nulových množin je opět nulová množina.

Takto konstruovaná míra je navíc *úplná*, tj. každá podmnožina nulové množiny je opět měřitelná (a také nulová). Je také *σ-konečná*, tj. celý prostor $\mathbb{R}^N$ lze napsat jako sjednocení spočetně mnoha množin konečné míry.

Každá otevřená i uzavřená množina je měřitelná, každá konečná i spočetná množina je měřitelná. Měřitelné jsou i množiny, které lze z otevřených a uzavřených množin získal spočetně mnoha operacemi sjednocení, průniku a doplňku.

Na „rozumných“ podmnožinách nižší dimenze $k < N$, například na hranici otevřené množiny, lze zavést k-rozměrnou míru, kterou označíme $\mathrm{m}_k(\cdot)$.

Měřitelné funkce

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je měřitelná množina. Funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nazveme *měřitelnou*, pokud její tzv. *hladinové množiny* $\{x \in \Omega \,|\, f(x) > c\}$ *jsou měřitelné pro každé* $c \in \mathbb{R}$. Poznamenejme, že měřitelné funkce lze charakterizovat vlastností:

vzor každé otevřené množiny je množina měřitelná,

což je podobné definici spojitých funkcí:

vzor každé otevřené množiny je množina otevřená.

Z toho plyne:

každá spojitá funkce je měřitelná,

protože každá otevřená množina je měřitelná.

Množinu všech měřitelných funkcí na Ω označíme $\Lambda(\Omega)$. Na množině měřitelných funkcí $\Lambda(\Omega)$ zavedeme relaci $f \approx g$, pokud se funkce liší jen na množině míry nula, tj.

$$f \approx g \;\text{ pokud }\; \mathrm{m}\big(\{x \in \Omega \,\big|\, f(x) \neq g(x)\}\big) .$$

Tato relace je ekvivalence a o funkcích $f \approx g$ budeme říkat, že jsou si *rovny skoro všude.*

Množina měřitelných funkcí $\Lambda(\Omega)$ je uzavřená na suprema, infima i bodové limity: supremum, infimum i bodová limita posloupnosti funkcí z $\Lambda(\Omega)$ zůstává v $\Lambda(\Omega)$.

Lebesgueův integrál

Lebesgueův integrál zavedeme ve třech krocích: nejprve pro tzv. jednoduché funkce, potom pro nezáporné měřitelné funkce a nakonec pro všechny měřitelné funkce.

(1) Funkci $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme *jednoduchou*, pokud je měřitelná a nabývá jen konečně mnoho nezáporných hodnot. Jednoduchou funkci lze napsat ve tvaru součtu kladných násobků konečně mnoha charakteristických[3] funkcí $\chi_{A_j}(x)$ navzájem disjunktních měřitelných množin A_j a její integrál je součet součinů konstant $c_i > 0$ a měr $\mathrm{m}(A_j)$, tj.

$$\varphi(x) = c_1\,\chi_1(x) + \cdots + c_k\,\chi_k(x)\,, \qquad \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}x = c_1\,\mathrm{m}(A_1) + \cdots + c_k\,\mathrm{m}(A_k) \;.$$

(2) Ke každé měřitelné nezáporné funkci f existuje neklesající posloupnost jednoduchých funkcí $\{\varphi_n\}$ tak, že pro každé $x \in \Omega$ neklesající posloupnost $\{\varphi_n(x)\}$ konverguje k hodnotě $f(x)$. Posloupnost příslušných integrálů je opět neklesající a má tedy limitu. Ve druhém kroku proto definujeme integrál měřitelné funkce jako limitu integrálů jednoduchých funkcí:

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

[3]charakteristická funkce $\chi_A(x)$ množiny A dává $\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$, pro $x \notin A$ je $\chi_A(x) = 0$.

(3) Funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}$ rozložíme na kladnou $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ a zápornou část $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Obě části jsou nezáporné a $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, proto položíme

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Každá měřitelná funkce tak má Lebesgueův integrál s výjimkou funkcí jejíchž kladná i záporná část má nekonečný integrál.

V dalším se budeme zabývat měřitelnými funkcemi, které mají konečný integrál, budeme jim říkat *funkce integrovatelné*.

Zavedení Lebesgueových prostorů

Funkce měřitelné na oblasti[4] Ω vzhledem k Lebesgueově míře $\mathrm{m}(\cdot)$ označíme $\Lambda(\Omega)$. Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ definujeme funkcionál $\|\cdot\|_p$ vztahem

$$\|u\|_p \equiv \|u\|_{p;\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_\Omega |u(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \tag{3.1}$$

a uvažujeme podmnožinu množiny měřitelných funkcí $\Lambda(\Omega)$

$$\mathscr{L}^p(\Omega) = \left\{u \in \Lambda(\Omega) \;\middle|\; \|u\|_p < \infty\right\}\,.$$

Množina $\mathscr{L}^p(\Omega)$ tvoří lineární prostor, tj. je uzavřená vzhledem k součtu a násobku reálným číslem:

$$u_i \in \mathscr{L}^p(\Omega)\,,\quad \alpha_i \in \mathbb{R}\quad i = 1,2 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \mathscr{L}^p(\Omega)\,.$$

Funkcionál $\|\cdot\|_p$ splňuje na lineárním prostoru $\mathscr{L}^p(\Omega)$ první dva axiomy normy: homogennost a trojúhelníkovou nerovnost, viz Minkowského nerovnost (2.9),

$$\|\alpha\, u\|_p = |\alpha| \cdot \|u\|_p\,,\quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \qquad\qquad \|u_1 + u_2\|_p \le \|u_1\|_p + \|u_2\|_p\,,$$

nesplňuje však třetí axiom $\|u\|_p = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$, protože $\|u\|_p = 0$ splňuje každá funkce u, která je rovná nule na $\Omega - \mathcal{N}$, kde $\mathcal{N}$ je množina míry nula; stručně říkáme funkce je rovná nule „skoro všude“, zkráceně s. v.[5] Měřitelné funkce u, které se navzájem liší nejvýše na množině míry nula, mají stejnou normu $\|u\|_p$, při operacích sčítání i násobku dávají opět funkce navzájem skoro všude rovné. Proto v prostoru $\mathscr{L}^p(\Omega)$ pomocí rovnosti skoro všude (zkráceně budeme psát $\stackrel{s.v.}{=}$), ztotožníme funkce, které se navzájem liší nejvýše na množině míry nula. Dostaneme tak Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$,

$$L^p(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega)\big|_{\stackrel{s.v.}{=}}\,,$$

jehož prvky jsou třídy funkcí, které se navzájem liší nejvýše na množině míry nula[6]. V dalším budeme prvky Lebesgueových prostorů nazývat funkcemi, nebudeme zdůrazňovat, že se ve skutečnosti jedná o třídy funkcí. Symbolem $L^p(\Omega)$ budeme rozumět lineární prostor funkcí vybavený normou $\|\cdot\|_p$, která určuje konvergenci na tomto prostoru.

[4]Oblast je otevřená souvislá množina. Lebesgueovy prostory lze definovat na libovolné měřitelné množině; jen v některých případech (např. Lemma 3.3 o hustotě hladkých funkcí) je nutné, aby Ω byla otevřená množina.

[5]Užívá se také výrazu „téměř všude“, zkráceně t. v., v angličtině „almost everywhere“, zkratkou a. e.

[6]Protože každou funkci z dané třídy můžeme pozměnit na množině míry nula, hodnota v izolovaném bodě není určena, při grafickém znázornění nemusíme vyznačit hodnotu v bodě nespojitosti (skoku). Připouštíme také hodnotu nekonečno na množině míry nula; říkáme, že funkce jsou skoro všude konečné.

Prostor $L^\infty(\Omega)$

Prostor $L^p(\Omega)$ integrovatelných funkcí zobecníme pro případ $p = \infty$. Prostor skoro všude omezených měřitelných funkcí (přesněji tříd funkcí skoro všude navzájem rovných) označíme $L^\infty(\Omega)$. Za normu prostoru $L^\infty(\Omega)$ prohlásíme funkcionál

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| \equiv \inf_{\mathrm{m}(\mathcal{N})=0} \ \sup_{x\in\Omega-\mathcal{N}} |u(x)|\,,$$

protože je definován pro všechny skoro všude omezené funkce a splňuje axiomy normy. Konzistentnost definice potvrzuje i skutečnost, že v případě oblasti konečné míry pro ohraničenou f platí $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$, viz [KFJ], Věta 2.11.4.

Nerovnosti

V následujících nerovnostech vždy předpokládáme, že funkce jsou v příslušných prostorech. Vedle již zmíněné trojúhelníkové nerovnosti $\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$, která platí pro všechna $p \in \langle 1, \infty\rangle$, budeme využívat Schwarzovu nerovnost (2.5) a její obecnější případ Hölderovu nerovnost (2.6), kterou můžeme přepsat pomocí norem

$$\int_\Omega |u\,v|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_2 \cdot \|v\|_2\,, \qquad \int_\Omega |u\,v|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_p \cdot \|v\|_{p'}\,. \tag{3.2}$$

V druhé nerovnosti je p, p' dvojice sdružených exponentů splňující $1/p + 1/p' = 1$, přičemž připouštíme i dvojice exponentů $1, \infty$ a $\infty, 1$.

Přepisem nerovnosti (2.7) pomocí norem dostáváme nerovnost pro integrál součinu tří funkcí s trojicí exponentů splňujících $1/p + 1/q + 1/r = 1$

$$\int_\Omega |u\,v\,w|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_p \cdot \|v\|_q \cdot \|w\|_r \tag{3.3}$$

nebo obecně k funkcí $u_1, \dots, u_k$ s k-ticí exponentů splňujících $1/p_1 + \cdots + 1/p_k = 1$

$$\int_\Omega |u_1 \dots u_k|\,\mathrm{d}x \le \|u_1\|_{p_1} \dots \|u_k\|_{p_k}\,.$$

Závislost na oblasti Ω a parametru p

Lebesgueovy prostory nezávisí na geometrii oblasti Ω, jenom na její míře. Rozeznáváme případ prostoru na oblasti Ω konečné nebo nekonečné míry. Stačí proto studovat prostory funkcí na jednorozměrné oblasti konečné míry $(0,1)$ a nekonečné míry např. $(1,\infty)$.

Nechť $1 \le p_1 < p_2 < \infty$. Aplikujme Hölderovu nerovnost s exponenty $p = p_2/p_1$ a $p' = p_2/(p_2 - p_1)$ na integrál s funkcemi $u := |u|^{p_1}$ a $v := 1$. Dostáváme tak nerovnost, která po p_1-odmocnění dává

$$\|u\|_{p_1} \le \|u\|_{p_2}\, \mathrm{m}(\Omega)^{1/p_1 - 1/p_2}\,. \tag{3.4}$$

Platí také $\|u\|_p \le \|u\|_\infty \cdot \mathrm{m}(\Omega)^{1/p}$. Důsledkem těchto nerovností je následující tvrzení:

Lemma 3.1 *Nechť Ω je oblast (stačí měřitelná množina) konečné míry, tj. $\mathrm{m}(\Omega) < \infty$. Potom pro exponenty $1 < p_1 < 2 < p_2 < \infty$ platí*

$$L^1(\Omega) \supset L^{p_1}(\Omega) \supset L^2(\Omega) \supset L^{p_2}(\Omega) \supset L^\infty(\Omega)\,.$$

Poznamenejme, že v žádné z předchozích inkluzí neplatí rovnost. V případě oblasti nekonečné míry $\mathrm{m}(\Omega) = \infty$ neplatí ani tyto ani obrácené inkluze.

Pro oblast $\Omega = (0, \infty)$ a $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ protipříkladem je funkce $f_1(x) = x^{-1/p_1}$ pro $x > 1$ a $f_1(x) = 0$ pro $x \in (0, 1\rangle$, která splňuje $f_1 \in L^{p_2}(\Omega)$, ale $f_1 \notin L^{p_1}(\Omega)$.

Na druhé straně funkce $f_2(x) = x^{-1/p_2}$ pro $x \in (0, 1)$ a $f_2(x) = 0$ pro $x \geq 1$ splňuje $f_2 \in L^{p_1}(\Omega)$, ale $f_2 \notin L^{p_2}(\Omega)$.

Vlastnosti prostorů

Uveďme některé vlastnosti prostorů integrovatelných funkcí, důkazy viz např. [KFJ].

Lemma 3.2 *Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$ konečné nebo nekonečné míry. Potom $L^p(\Omega)$ je*

- **(a)** *Banachův prostor v případě $p \in \langle 1, \infty\rangle$,*
- **(b)** *separabilní prostor v případě $p \in \langle 1, \infty)$ a není separabilní pro $p = \infty$,*
- **(c)** *Hilbertův prostor v případě $p = 2$ se skalárním součinem $(u, v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$.*

Poznámka Rozložme omezenou oblast Ω na spočetný systém disjunktních podmnožin $\{\Omega_i\}_{i=1}^\infty$ s kladnou mírou $\mathrm{m}(\Omega_i) > 0$ – například interval $(0, 1)$ rozdělíme na nekonečně mnoho intervalků $\Omega_i = \langle \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i})$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Uvažujme systém všech funkcí nabývajících na každé podmnožině Ω_i hodnotu 0 nebo 1. Takových funkcí je nespočetně mnoho $\aleph_1 = 2^\infty$. Protože každé tyto dvě různé funkce $\varphi \neq \psi$ se liší alespoň na jednom intervalku Ω_i kladné míry, je $\|\varphi - \psi\|_\infty = 1$. Je to tedy nespočetná antisíť a $L^\infty(\Omega)$ nemůže být separabilní.

Poznamenejme, že pro $p < \infty$ tento protipříklad neprojde: výše uvedený nespočetný systém je sice ve všech L^p, ale neexistuje $c > 0$ splňující $\|\varphi - \psi\| \geq c$ pro všechny $\varphi \neq \psi$.

Lemma 3.3 (o hustotě hladkých funkcí)

Hladké C^∞ funkce jsou husté v Lebesgueových prostorech s $p < \infty$ a oblasti Ω, přesněji: pro $p < \infty$ je prostor $C^\infty(\overline{\Omega})$ i $C_0^\infty(\Omega)$ hustý v $L^p(\Omega)$.

Důsledkem je skutečnost, že uzávěr podmnožiny hladkých funkcí v daném prostoru je už celý prostor. Každou funkci $f \in L^p(\Omega)$ lze totiž libovolně přesně aproximovat hladkou funkcí. Jinými slovy: ke každé $f \in L^p(\Omega)$ a $\varepsilon > 0$ existuje hladká funkce $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ (resp. $C_0^\infty(\Omega)$), taková, že $\|f - \varphi_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. Jinými slovy ke každé $f \in L^p(\Omega)$ existuje posloupnost funkcí $\{\varphi_n\} \subset C^\infty(\Omega)$ (resp. $C_0^\infty(\Omega)$) konvergujících v normě k funkci f: $\|\varphi_n - f\|_p \to 0$.

V případě $p = \infty$ se norma $\|\cdot\|_\infty$ na spojitých funkcích shoduje s maximovou (supremovou) normou určující stejnoměrnou konvergenci. Hladké funkce jsou proto husté pouze v prostoru spojitých funkcí $C(\overline{\Omega})$, který je uzavřeným podprostorem prostoru $L^\infty(\Omega)$.

Idea důkazu Nechť $f \in L^p(\Omega)$, tuto funkci doplníme nulou na celé $\mathbb{R}^N - \Omega$. Pro $\varepsilon > 0$ potřebujeme najít hladkou funkci f_ε splňující $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$. Takovou funkci získáme zhlazením funkce f pomocí konvoluce s funkcí $\varphi_\delta(x)$ s vhodně zvoleným $\delta = \delta(\varepsilon, N)$

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi_\delta(x - y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Funkce $\varphi_\delta(x)$ je nezáporná a hladká v $\mathbb{R}^N$, nulová mimo kouli $B(0, \delta)$, přičemž integrál $\int \varphi_\delta \, \mathrm{d}x = 1$. Takovou funkci dostaneme například vztahem $\varphi_\delta(x) = \varphi(\frac{x}{\delta})/\delta^N$ z hladké funkce $\varphi(x)$ definované

$$\varphi(x) = c_N \exp\left(-\frac{1}{1 - |x|^2}\right) \text{ pro } x \in B(0, 1) \text{ a rozšířené na } \mathbb{R}^N \text{ nulou.}$$

Funkce $\exp(-\frac{1}{1-|x|^2})$ má pro $|x| \to 1$ limitu 0 i nulové limity všech derivací, proto prodloužení $\varphi(x)$ nulou z B(0,1) dává C^∞ funkci na celém $\mathbb{R}^N$.

Konstanta c_N je zvolena tak, aby $\int \varphi \, \mathrm{d}x = 1$. Proto také $\int \varphi_\delta \, \mathrm{d}x = 1$. Díky této vlastnosti se průměr funkce při konvoluci nemění.

Při derivování f_ε se derivuje pouze jádro $\varphi_\delta(x)$ za integrálem, toto jádro má všechny derivace spojité. Proto f_ε je hladká funkce. Nutno ještě dokázat že pro $\delta \to 0$ platí $\|f - f_\varepsilon\|_p \to 0$. □

S hustotou hladkých funkcí souvisí následující tvrzení, které budeme často využívat:

Věta 3.4 (Testovací lemma) *Nechť f je spojitá funkce na Ω. Jestliže platí*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

potom $f = 0$ v Ω.

<u>*Důkaz*</u> Testovací lemma dokážeme sporem. Předpokládejme, že funkce f není všude nulová. Nechť například pro $x_0 \in \Omega$ platí $f(x_0) = k > 0$. Protože f je spojitá v x_0, je nenulová i v nějakém okolí. Vezmeme menší okolí $B(x_0, \delta)$, kde f je odražena od nuly, tj. platí $f(x) \geq k/2$ pro $x \in B(x_0, \delta)$. Do testující rovnosti dosadíme za φ například funkci $\varphi(x) = \varphi_\delta(x - x_0)$ z předcházejícího důkazu a snadno dojdeme ke sporu:

$$0 = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{B(x_0,\delta)} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \geq \frac{k}{2} \int_{B(0,\delta)} \varphi_\delta(x) \, \mathrm{d}x = \frac{k}{2}.$$

□

Poznámky

(a) Uvedené tvrzení je speciálním případem Lemmatu Du Boisova Reymondova, které místo spojitosti funkce f předpokládá pouze, že f je lokálně integrovatelná, tj. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. V tvrzení ovšem dostáváme potom jenom $f = 0$ skoro všude v Ω.

(b) Z důkazu je zřejmé, že není potřeba vyžadovat testovací identitu $\int f\varphi \, \mathrm{d}x = 0$ pro všechny funkce z $C_0^\infty(\Omega)$. Stačí mít systém funkcí s následující vlastností: pro libovolně malé okolí každého bodu x uvnitř Ω (například $B(x,\delta) \subset \Omega$) máme k dispozici funkci kladnou uvnitř tohoto okolí a nulovou vně $B(x,\delta)$.

Spojité lineární funkcionály a duální prostor

Připomeňme, že funkcionál F na normovaném lineárním prostoru V je zobrazení z V do $\mathbb{R}$. Jeho hodnotu na prvku $u \in V$ budeme kromě $F(u)$ značit také $\langle F, u\rangle$. Tento funkcionál je lineární, jestliže zachovává součet a skalární násobek:

$$\langle F, u + v\rangle = \langle F, u\rangle + \langle F, v\rangle \qquad \langle F, \alpha u\rangle = \alpha \langle F, u\rangle \qquad u, v \in V \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

a spojitý, pokud zachovává konvergenci, tj. z $u_n \to u$ plyne $\langle F, u_n\rangle \to \langle F, u\rangle$. Protože funkcionál je lineární, je spojitý právě když je omezený, tj. existuje taková konstanta $c \geq 0$, že $|\langle F, u\rangle| \leq c\|u\|$ platí pro všechna $u \in V$.

Spojité lineární funkcionály na normovaném lineárním prostoru tvoří opět lineární prostor. Součet $F + G$ a násobek αF je definován vztahy

$$\langle F + G, u\rangle = \langle F, u\rangle + \langle G, u\rangle, \qquad \langle \alpha F, u\rangle = \alpha\langle F, u\rangle \qquad u, v \in V \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nejmenší konstanta c z podmínky ohraničenosti funkcionálu $|\langle F, u\rangle| \le c\,\|u\|$ definuje tzv. *přirozenou normu*

$$\|F\| \equiv \|F\|_{V^*} = \sup_{u\ne 0} \frac{|\langle F, u\rangle|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|\le 1} |\langle F, u\rangle| = \sup_{\|u\|=1} |\langle F, u\rangle| \,.$$

Prostor spojitých lineárních funkcionálů na V značíme hvězdičkou V^* (někdy se užívá apostrof V'). Tento prostor se nazývá *duální* nebo *adjungovaný* prostor k prostoru V. Duální prostor je vždy úplný, tj. Banachův,i v případě, kdy původní prostor V úplný nebyl, díky tomu, že $\mathbb{R}$ je úplný prostor.

Poznamenejme, že duální prostor V^* závisí jak na prvcích množiny V, tak na uvažované normě, která určí, které lineární funkcionály budou spojité.

Prvky V^* jsou funkcionály. Projevují se tím, jaké hodnoty dávají na prvcích $u \in V$. Proto je vhodné nahradit je jednoduššími objekty. V případě Lebesgueových prostorů funkcí na oblasti Ω jsou to opět integrovatelné funkce na Ω: řekneme, žefunkcionál $F \in V^*$ je *reprezentován* integrovatelnou funkcí f, jestliže platí

$$\langle F, u\rangle = \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall u \in V\,. \tag{3.5}$$

Řekneme, že V^* lze *reprezentovat* prostorem funkcí W prostřednictvím (3.5), jestliže pro každý funkcionál $F \in V^*$ existuje $f \in W$ splňující (3.5) a jestliže každé $f \in W$ určuje funkcionál $F \in V^*$. Jestliže se navíc shodují i normy tj. $\|F\|_{V^*} = \|f\|_W$, existuje mezi těmito prostory izometricky izomorfní zobrazení a píšeme $V^* \approx W$.

Hölderova nerovnost $\int fu\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{p'} \cdot \|u\|_p$ je základem důkazu následující věty:

Věta 3.5 (o duálních prostorech) *Nechť $p, p' \in (1, \infty)$ je dvojice sdružených exponentů, tj. čísla splňující $1/p + 1/p' = 1$. Potom platí*

$$(L^p(\Omega))^* \approx L^{p'}(\Omega)\,, \qquad (L^1(\Omega))^* \approx L^\infty(\Omega)\,, \qquad (L^\infty(\Omega))^* \supset L^1(\Omega)\,.$$

Poznámka Ve třetím vztahu platí pouze inkluze, protože existují funkcionály na $L^\infty(\Omega)$, které nelze reprezentovat pomocí funkce z $L^1(\Omega)$.

Uveďme příklad takového funkcionálu. Spojité funkce $C(\overline{\Omega})$ tvoří uzavřený podprostor $L^\infty(\Omega)$, přičemž norma $\|\cdot\|_\infty$ splývá s maximovou normou na $C(\overline{\Omega})$. Nechť $x_0 \in \Omega$ a definujme funkcionál F vztahem $\langle F, u\rangle = u(x_0)$ pro spojité funkce. Zřejmě funkcionál je lineární a omezený, a proto také spojitý na $C(\overline{\Omega})$. Podle Hahnovy-Banachovy věty lze takový funkcionál spojitě prodloužit na spojitý funkcionál na celém prostoru $L^\infty(\Omega)$. Toto rozšíření však není jednoznačné, protože prostor $C(\overline{\Omega})$ není hustý v $L^\infty(\Omega)$.

Předpokládejme, že by tento funkcionál bylo možno reprezentovat pomocí intregrovatelné funkce f. Potom však pro spojité funkce u splňující $u(x_0) = 0$ by platilo $\langle F, u\rangle = \int fu\,\mathrm{d}x = 0$ a podle Testovacího lemmatu 2.4 také $f(x) = 0$ pro každé $x \ne x_0$, tj. funkce f by byla skoro všude nulová. Definovala by tak nulový funkcionál, což je ve sporu se skutečností, že funkcionál F nulový není. $\square$

Pro $p = 2$ lze duální prostor k $L^2(\Omega)$ reprezentovat pomocí funkcí stejného prostoru $L^2(\Omega)$, což také tvrdí Rieszova věta o Hilbertových prostorech $(L^2(\Omega))^* \approx L^2(\Omega)$.

Druhý duál a reflexivita

Můžeme uvažovat také spojité lineární funkcionály na duálním prostoru V^*. Tyto funkcionály tvoří také Banachův prostor, který se nazývá druhý duál a značí $V^{**} = (V^*)^*$.

Existuje kanonické (přirozené) vnoření $\mathscr{I}$ prostoru V do V^{**}, které prvku $u \in V$ přiřadí funkcionál $\mathscr{I}(u) \equiv \varphi_u \in V^{**}$ určený vztahem

$$\langle \varphi_u, f \rangle = \langle f, u \rangle \qquad f \in V^*.$$

Obecně $\mathscr{I}(V) \subset V^{**}$. Pokud zobrazení $\mathscr{I}$ je surjektivní tj. $\mathscr{I}(V) = V^{**}$, prostor V nazveme *reflexivní*. Podle předchozí věty pro sdružené indexy $p, p' \in (1, \infty)$ platí

$$(L^p(\Omega))^{**} \approx \left(L^{p'}(\Omega)\right)^* \approx L^p(\Omega)\,,$$

odkud plyne:

Věta 3.6 (o reflexivitě) *Prostor $L^p(\Omega)$ je reflexivní v případě $p \in (1, \infty)$, v případě $p = 1$ nebo $p = \infty$ prostor reflexivní není.*

Důležitou vlastností reflexivního prostoru je kompaktnost jejich omezených podmnožin vzhledem ke slabé konvergenci:

Lemma 3.7 (vlastnost reflexivních prostorů) *Nechť $\{u_n\}$ je omezená posloupnost v prostoru V, tj. $\|u_n\|_V \le R$. Potom existuje podposloupnost $\{u_{n'}\} \subset \{u_n\}$ a prvek $u \in V$, $\|u\| \le R$ takový, že $\{u_{n'}\}$ slabě konverguje k prvku u.*

Příklad V prostoru $L^2((0, \pi))$ posloupnost $u_n(x) = \sin(nx)$ je omezená, konverguje slabě k $u_0(x) = 0$, ale nekonverguje silně.

4. Zobecněné funkce

Potřebujeme zobecnit pojem derivace funkce, abychom mohli derivovat integrovatelné funkce, které nemusejí mít derivaci ve všech bodech. Získáme tak *zobecněné funkce*, které lze derivovat tzv. *ve smyslu distribucí*.

Zobecněné funkce budeme konstruovat následujícím způsobem. Využijeme duální prostor — prostor spojitých lineárních funkcionálů. Za základní prostor zvolíme co nejmenší prostor — hladkých funkcí nulových v okolí hranice a nenulových pouze na omezené podmnožině v Ω. Na tomto prostoru zvolíme co „nejpřísnější“ konvergenci: čím méně bude konvergentních posloupností, které testují spojitost funkcionálu, tím více funkcionálů bude spojitých. Do prostoru těchto funkcionálů ovšem musíme vnořit prostor integrovatelných funkcí, abychom dostali zobecnění pojmu funkce.

Základní prostor

Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$. Zavedeme prostor $\mathscr{D}(\Omega)$. Prostor má stejné prvky jako $C_0^\infty(\Omega)$, tj. hladké funkce s kompaktním[7] nosičem[8]. Symbolem $\mathscr{D}(\Omega)$ označujeme $C_0^\infty(\Omega)$ se speciální konvergencí, kterou budeme značit $\xrightarrow{\mathscr{D}}$. Řekneme, že φ_n konverguje k φ v $\mathscr{D}$ jestliže:

(a) existuje množina K kompaktní v Ω obsahující nosič všech φ_n tj. $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K$,

[7]Množina v $\mathbb{R}^N$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

[8]Nosič funkce φ je uzávěr v $\mathbb{R}^N$ množiny bodů x, ve kterých funkce φ má nenulové hodnoty tj. $\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N \mid \varphi(x) \neq 0\}}$.