

## Vzorové zadání druhé zápočtové písemky z SA1 (2019)

Okruhy otázek:

- Polynomy (kořeny, rozklad na kořenové činitele a na ireducibilní polynomy v reálném oboru, Hornerovo schéma);
- Racionální lomené funkce (rozklad na parciální zlomky);
- Limita a spojitost funkce reálné proměnné;
- Derivace a diferenciál funkce (tečna a normála, derivace a diferenciály vyšších řádů);
- Taylorův polynom, l'Hospitalovo pravidlo;
- Aplikace diferenciálního počtu (lokální a globální extrémy, průběh funkce);
- Neurčitý integrál (primitivní funkce, metoda per-partes a substituční metody).

Jedna otázka bude ryze teoretická – je potřeba znát:

- Definice limity funkce a formulace Heineho podmínky;
- Definice spojitosti funkce v bodě a na intervalu, definice stejnoměrné spojitosti na intervalu, Heineho–Cantorova věta, Weierstrassovy a Bolzanovy věty;
- Definice derivace funkce v bodě a definice derivace funkce na intervalu;
- Definice diferencovatelnosti a diferenciálu funkce v bodě;
- Věta Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova, l'Hospitalovo pravidlo, Taylorova věta;
- Definice primitivní funkce a neurčitého integrálu.

1. a) Zjistěte násobnost kořene  $\alpha = 2$  polynomu

$$x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16$$

a napište rozklad na ireducibilní polynomy (v reálném oboru).

b) Napište také rozklad na kořenové faktory.

2. a) Vypočtěte limitu (libovolným způsobem)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}.$$

b) Jedno z následujících tvrzení není pravdivé. Rozhodněte které a uveďte protipříklad.

- (i) Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $(a; b)$ , pak je na tomto intervalu ohraničená;
- (ii) Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pak je na tomto intervalu ohraničená.

3. a) Napište Taylorův polynom 3-ho stupně funkce  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$  v bodě  $x_0 = 0$  a pomocí výsledku určete přibližně hodnotu  $\ln 3$  (tuto hodnotu není třeba vyčíslit, stačí, když bude správně dosazeno).

b) Určete dále odhad chyby, které se uvedenou aproximací hodnoty  $\ln 3$  dopustíme.

5. Vyšetřete průběh funkce (včetně náčrtku)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x}.$$

6. Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

7. Výše zmíněná teoretická otázka.