AUTOR TEXTU: JIŘÍ KLAŠKA
VUT BRNO

POKRAČOVÁNÍ ŠESTÉ 5.4 – 8.4. 2020

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

Zadání: Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu:

$$\int_C \frac{ds}{x-y}$$, kde C je úsečka určená body $A=[0,-2]$, $B=[4,0]$

Řešení: Použijeme definiční vzorec:

$$\int_C f(x,y)\,ds := \int_a^b f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt,$$

kde křivka C je dána parametrizací

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$.

Napsat parametrizaci úsečky AB lze více různými postupy. Ukážeme některé:

a) Napíšeme rovnici přímky AB a parametr t omezíme na interval $\langle 0,1\rangle$.

$X = A + t(B-A) = [0,-2] + t(4,2)$, $X=[x,y]$, $t\in\langle 0,1\rangle$

vektorová rovnice

$x = 4t$
$y = -2+2t$, $t\in\langle 0,1\rangle$ (Parametrické rovnice získáme po složkách rozepsáním)

$x' = 4$
$y' = 2$

$$\int_C \frac{ds}{x-y} = \int_0^1 \frac{1}{4t-(-2+2t)} \sqrt{4^2+2^2}\, dt =$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{20}}{2t+2}\, dt = \frac{\sqrt{20}}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}}{2}\Big[\ln|t+1|\Big]_0^1 =$$

$$\sqrt{5}\cdot\big(\ln|2| - \underbrace{\ln|1|}_{=0}\big) = \underline{\underline{\sqrt{5}\cdot\ln 2}}.$$

b) Z parametrických rovnic můžeme vyloučit parametr t a obdržíme

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x}{4} \\ t &= \frac{y+2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y+2}{2} \Big/ \cdot 4$$

$$x = 2y+4$$

$$2y = x-4$$

$$y = \frac{x-4}{2} = \frac{x}{2} - 2$$

Jiná možná parametrizace je tedy

$x = t$

$y = \frac{t}{2} - 2$, kde $t \in \langle 0, 4 \rangle$. Pak $x' = 1$, $y' = \frac{1}{2}$

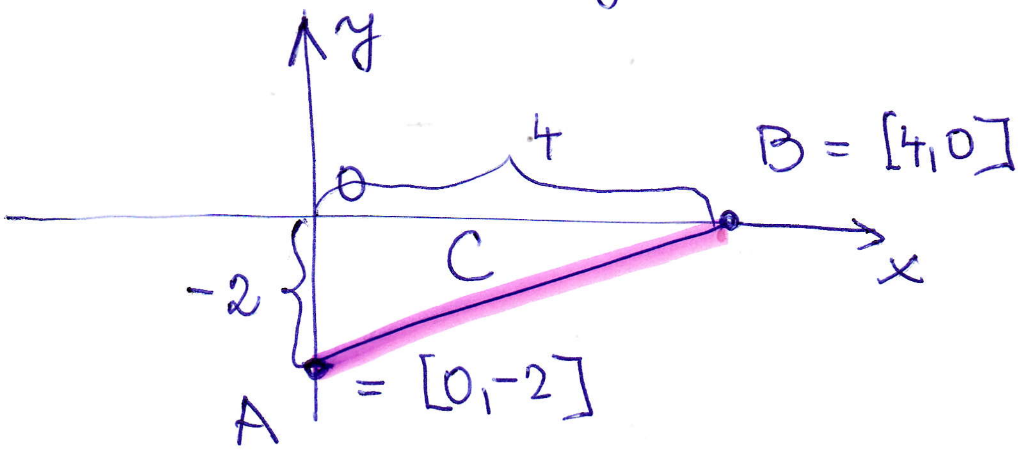
$$\int_C \frac{ds}{x-y} = \int_0^4 \frac{1}{t-(\frac{t}{2}-2)} \cdot \sqrt{1^2 + (\tfrac{1}{2})^2}\, dt =$$

$$\int_0^4 \frac{1}{\frac{t}{2}+2}\sqrt{\frac{5}{4}}\, dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 \frac{dt}{\frac{t+4}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 \frac{2\,dt}{t+4} = \sqrt{5}\int_0^4 \frac{dt}{t+4} = \sqrt{5}\Big[\ln|t+4|\Big]_0^4 =$$

$$\sqrt{5}(\ln 8 - \ln 4) = \sqrt{5}\ln\frac{8}{4} = \underline{\underline{\sqrt{5}\ln 2}}$$

c) Z obrázku křivky (úsečky) lze ihned odvodit tzv. úsekový tvar



$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \qquad \text{zde} \qquad \frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1$$

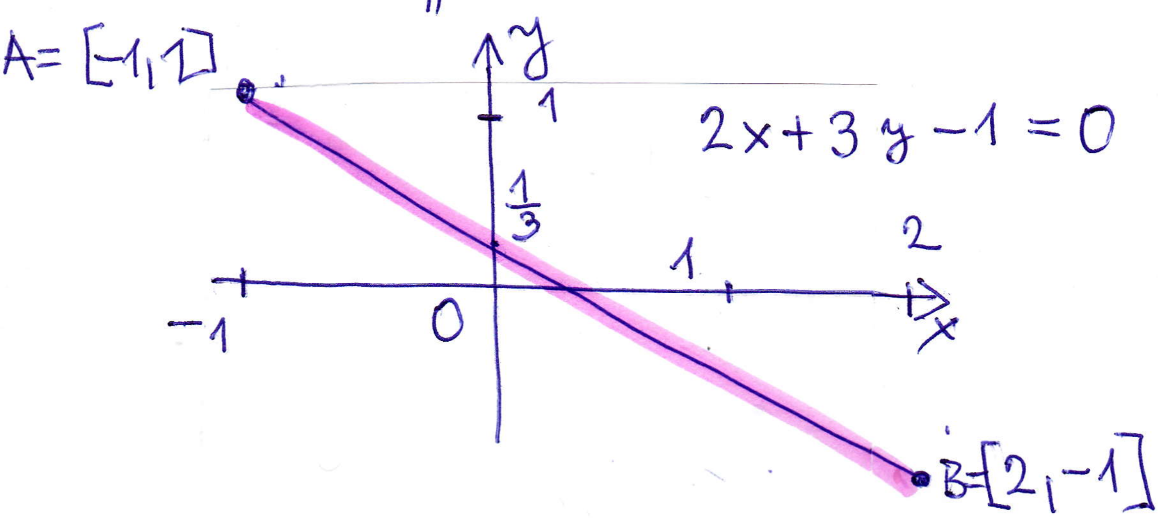
Odtud $y=(-2)\left(1-\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{2}-2$

Což samozřejmě vede ke stejné parametrizaci jako v případě b): $x=t,\ y=\frac{t}{2}-2,\ t\in\langle 0,4\rangle$.

Je evidentní, že parametrizací je nekonečně mnoho!

Zabývejme se nyní stejným integrálem přes jinou úsečku. Například C: $A=[-1,1]$, $B=[2,-1]$.

Nakresleme pro „jistotu" obrázek:



Parametrizace $[x,y]=[-1,1]+t(3,-2)$. Odtud (postupem a)

$x = -1+3t$, $\quad t \in \langle 0,1\rangle$; $\quad x' = 3$
$y = 1-2t$, $\quad y' = -2$

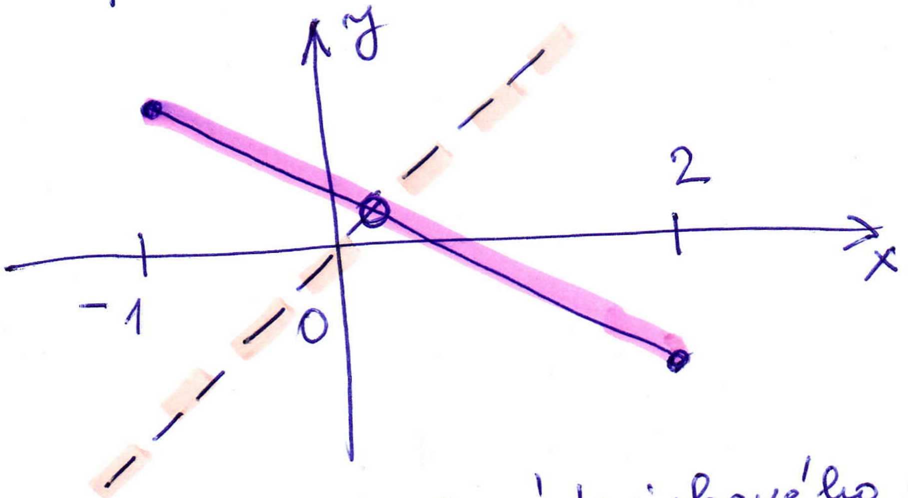
Analogickým postupem obdržíme:

$$\int_C \frac{ds}{x-y} = \int_0^1 \frac{1}{(-1+3t)-(1-2t)} \cdot \sqrt{3^2+(-2)^2}\,dt =$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{13}}{5t-2}\,dt = \dots$$ dále by to bylo podobné...

Pokud má někdo pocit uspokojení, že tomu už dobře rozumí, tak ho nyní rychle ztratí.
Celé je to totiž špatně (míněna křivka úsečka $[-1,1][2,-1]$)
Záměrně jsem nezkontroloval definiční obor f:

$$[x,y] \in D_f \iff x-y \neq 0 \iff y \neq x$$



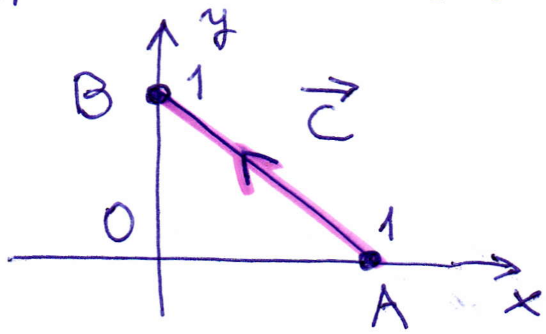
V předpokladu zavedení křivkového integrálu je podmínka, že funkce f je definovaná na křivce C. To zde ale není splněno! Viz obrázek. Tam, kde se oranžová přímka protíná s úsečkou AB není na C funkce definovaná. (Průsečík je bod $[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ pro $t = \frac{2}{5}$).

Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu

$$\int_{\vec{C}} x^2\,dx + xy\,dy,$$

kde C je orientovaná úsečka $A=[1,0]$, $B=[0,1]$. Orientace je od bodu A k bodu B.

Řešení: Nejprve nakreslíme obrázek $\vec{C}$:



Úlohu budeme řešit pomocí základního vzorce:

$$\int_{\vec{C}} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \varepsilon\cdot\int_a^b \left(f(x(t),y(t)),\, g(x(t),y(t))\right)\circ\left(x'(t),y'(t)\right)dt,$$

kde C je dána parametrizací $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$. Číslo $\varepsilon=\pm 1$. Přesněji $\varepsilon=1$, je-li orientace, která je dána v zadání souhlasná s orientací, kterou obdržíme volbou parametrizace, kterou si sami sestavíme. Jsou-li orientace nesouhlasné, volíme $\varepsilon=-1$. Číslu $\varepsilon=\pm 1$ se někdy říká ekvalizátor (vyrovnávač znaménka). Určením ε vyjde vždy stejný výsledek, bez ohledu na to, jakou parametrizaci zvolili. Kolečko $\circ$ mezi vektory značí skalární součin. Dále levá strana se někdy píše ve vektorovém tvaru:

$$L = \int_{\vec{C}} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_{\vec{C}} \vec{F}(x,y)\circ\vec{ds},$$ kde

$\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ je tzv. vektorová funkce, která bodu $[x_0, y_0]$ přiřadí vektor $(f(x_0,y_0), g(x_0,y_0))$ a $\vec{ds} = (dx, dy)$.

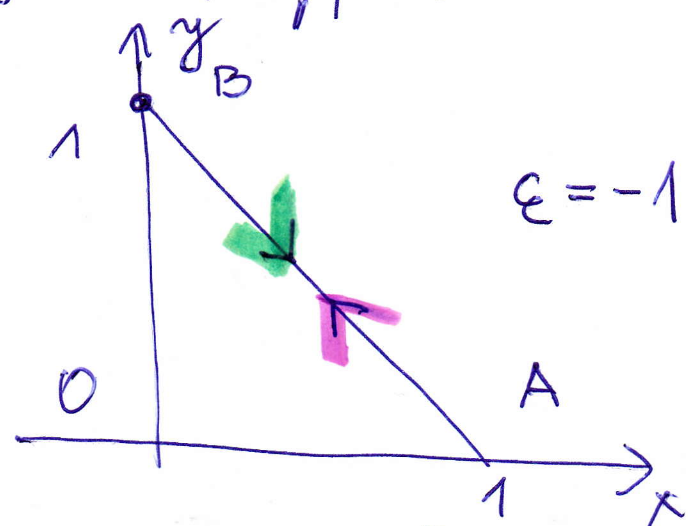
Poznámka: Orientace křivky $\vec{C}$ může být určena v zadání různými způsoby: (Obrázkem, slovním popisem). Nejkorektnější způsob je ten, že je dán bod A ležící na C a v něm je definován tečný vektor ke křivce C. $(A, \vec{t}(A))$.

Zpět k výpočtu: Stanovíme parametrizaci

$$(*)\quad \begin{aligned} x &= t \\ y &= 1-t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Je-li $t=0$ získáme bod $[x,y] = [0,1] = B$.
Je-li $t=1$ získáme bod $[x,y] = [1,0] = A$

Při zvolené parametrizaci se tedy pohybujeme po $\vec{C}$ od B k A tedy „proti" orientaci červené šipky dané zadáním. Orientace $\vec{C}$ daná parametrizací (*) je nesouhlasná s orientací v zadání. Proto $\varepsilon = -1$.
V obrázku je orientace „parametrizace" zelená.



Dosadíme do vzorce:

$$\int_{\vec{C}} x^2\,dx + xy\,dy = \overset{\varepsilon}{(-1)} \cdot \int_0^1 (t^2, t(1-t)) \circ \overset{(x'(t),\, y'(t))}{(1,-1)}\, dt =$$

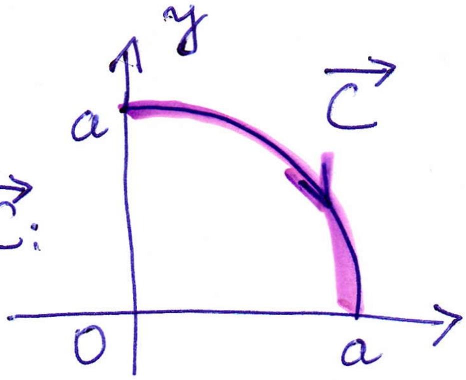
$$= -\int_0^1 t^2 + t(1-t)(-1)\, dt = -\int_0^1 t^2 - t + t^2\, dt$$

$$= -\int_0^1 2t^2 - t\, dt = -\left[\frac{2t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{4-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

Domácí cvičení:

1. $\int_{\vec{C}} -y\,dx + x\,dy$ $\quad \vec{C}$:

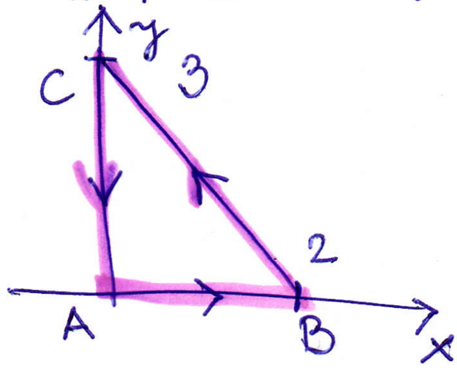


$\vec{C}$ je čtvrtkružnice $x^2 + y^2 = a^2$, $x, y \geq 0$, $a > 0$

$A = [0, a]$ počáteční bod, $B = [a, 0]$ koncový bod

Výsledek: $-\frac{\pi a^2}{2}$.

2. $\int_{\vec{C}} x\,dy$ $\quad \vec{C}$:



$\vec{C}$ je trojúhelník A, B, C, kde $A = [0, 0]$

$B = [2, 0]$, $C = [0, 3]$ orientovaný proti smyslu hodinových ručiček.

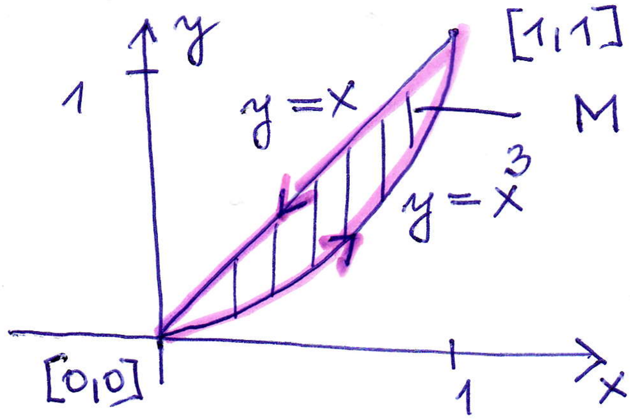
Výsledek 3.

Zadání:

Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu pomocí Greenovy věty.

$$\int_{\vec{C}} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy$$

Křivka $\vec{C}$ a její orientace je dána obrázkem:



Řešení: Podle Greenovy věty platí:

$$\int_{\vec{C}} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_M g'_x(x,y) - f'_y(x,y)\,dx\,dy$$

Zde:

$f(x,y) = y^3 \Rightarrow f'_y = 3y^2$

$g(x,y) = x^3 + 3xy^2 \Rightarrow g'_x = 3x^2 + 3y^2$

Dosadíme do vzorce

$$\int_{\vec{C}} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = \iint_M 3x^2 + 3y^2 - 3y^2\,dx\,dy$$

$$= \iint_M 3x^2\,dx\,dy.$$ Z obrázku plyne

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x\}.$$

Aplikujeme Fubiniho větu:

$$\iint_M 3x^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x} 3x^2\,dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left[3x^2 y \right]_{x^3}^{x} dx = \int_0^1 3x^3 - 3x^5\,dx = 3\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1$$

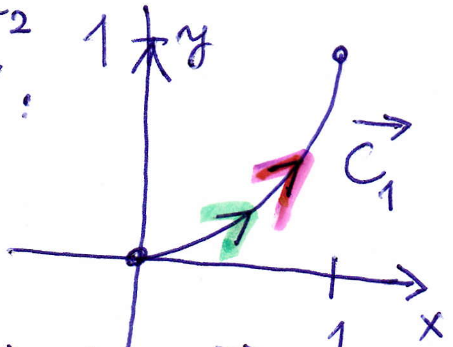
$$= 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = 3 \cdot \frac{3-2}{12} = 3 \cdot \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Nyní vypočteme zadaný integrál klasickým postupem: Křivku $\vec{C}$ musíme rozdělit na 2 části $\vec{C}_1$ a $\vec{C}_2$ a využít vzorce:

$$\int_{\vec{C}} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_{\vec{C}_1} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy +$$

$$+ \int_{\vec{C}_2} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \,.$$

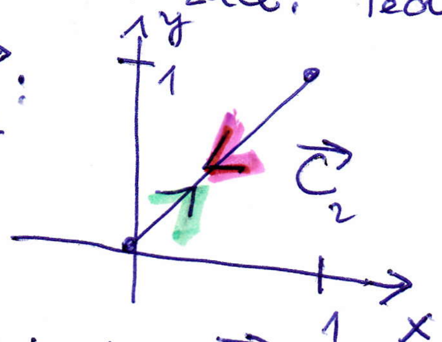
Zde $\vec{C}_1$:



$x = t,\ x' = 1$
$y = t^3,\ y' = 3t^2,\ \varepsilon = 1$
$t \in \langle 0, 1 \rangle$

Orientace $\vec{C}_1$ je souhlasná s orientací zvolené parametrizace. Tedy $\varepsilon = 1$.

$\vec{C}_2$:



$x = t,\ x' = 1$
$y = t,\ y' = 1,\ \varepsilon = -1$
$t \in \langle 0, 1 \rangle$

Orientace $\vec{C}_2$ je nesouhlasná s orientací zvolené parametrizace. (Červená šipka je orientace ze zadání, zelená šipka orientace z parametrizace.)

Nyní použijeme vzorce pro výpočet:

$$A = \int_{\vec{C}_1} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = 1 \cdot \int_0^1 (t^9, t^3 + 3 \cdot t \cdot t^6) \circ (1, 3t^2)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^9, t^3 + 3t^7) \circ (1, 3t^2)\,dt = \int_0^1 t^9 + (t^3 + 3t^7) \cdot 3t^2\,dt$$

$$= \int_0^1 t^9 + 3t^5 + 9t^9\,dt = \int_0^1 10t^9 + 3t^5\,dt =$$

$$= \left[10\frac{t^{10}}{10} + 3\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Podobně vypočítáme druhý integrál:

$$B = \int_{\vec{C}_2} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = (-1) \cdot \int_0^1 (t^3, t^3 + 3 \cdot t \cdot t^2) \circ (1,1)\,dt$$

$$= -\int_0^1 (t^3, 4t^3) \circ (1,1)\,dt = -\int_0^1 t^3 + 4t^3\,dt =$$

$$= -\int_0^1 5t^3\,dt = -\left[5 \cdot \frac{t^4}{4}\right] = \underline{\underline{-\frac{5}{4}}}$$

Odtud celkem:

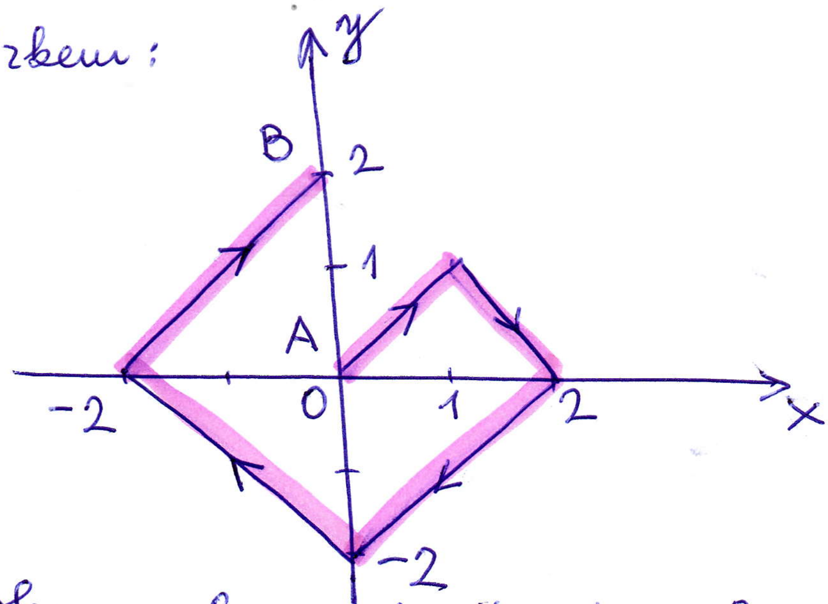
$$\int_{\vec{C}} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = A + B = \frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{6-5}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Zadání: Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\vec{C}} 2xy\,dx + (x^2+9y^2)\,dy\,,$$ kde křivka C je

dána obrázkem:



Řešení: Úlohu můžeme řešit více různými postupy:

Postup A: Křivka C je tvořena 5-ti úsečkami, jejichž orientace je dána obrázkem. Označme tyto jednotlivé části $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3, \vec{C}_4, \vec{C}_5$. Pak

$$\int_{\vec{C}} 2xy\,dx + (x^2+9y^2)\,dy = \sum_{i=1}^{5} \int_{\vec{C}_i} 2xy\,dx + (x^2+9y^2)\,dy$$

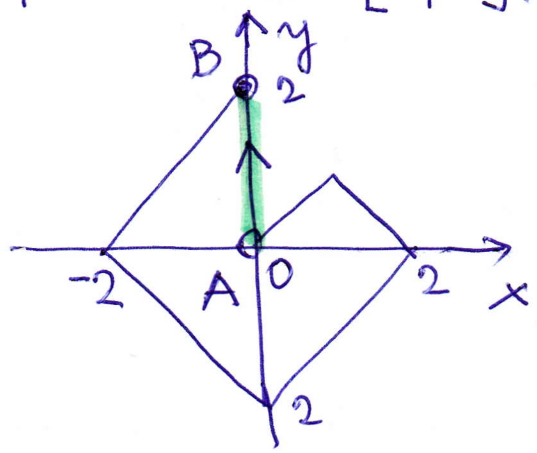
Je tedy třeba vypočítat celkem 5 integrálů a výsledky sečíst. (Tento postup již zvládnete a nechávám ~~jej~~ ho proto za domácí cvičení).

Postup B: Využijeme výsledků teorie vektorových polí. Předně vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$

je potenciálové $\iff f'_y = g'_x$. Ověřit ~~tuto~~ podmínku je snadné:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 2xy, \; f'_y = 2x \\ g(x,y) = x^2 + 9y^2, \; g'_x = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \text{pole } \vec{F}(x,y) = (2xy, x^2+9y^2) \text{ je potenciálové.}$$

Z teorie víme, že integrál v potenciálovém poli závisí pouze na počátečním a koncovém bodu křivky C a ne na křivce samotné! Proto můžeme nahradit integrál přes $\vec{C}$ integrálem přes $\vec{D}$, přičemž křivku $\vec{D}$ si sami zvolíme. Nejjednodušší možnost je za $\vec{D}$ zvolit orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$, kde $A = [0,0]$ a $B = [0,2]$. (v obrázku je zeleně)



Platí:

$$\int_{\vec{C}} 2xy\,dx + (x^2+9y^2)\,dy = \int_{\vec{D}} 2xy\,dx + (x^2+9y^2)\,dy \overset{*}{=}$$

Napišeme parametrizaci $\vec{D}$: $x=0$, $y=t$, $t \in \langle 0,2 \rangle$

Pak $x'=0$, $y'=1$ a $\varepsilon = 1$. (tato část je snad zřejmá)

$$\overset{*}{=} \overset{\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot \int_0^2 (2\cdot 0\cdot t, 0^2 + 9t^2) \circ (0,1)\,dt = \int_0^2 (0, 9t^2) \circ (0,1)\,dt =$$

$$\int_0^2 9t^2\,dt = \left[9\cdot\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \left[3t^3\right]_0^2 = 3\cdot 2^3 = 3\cdot 8 = \underline{\underline{24}}$$

Postup C: Nyní již víme, že pole $\vec{F} = (2xy, x^2+9y^2)$ je potenciálové. Můžeme tedy určit jeho potenciál. Potenciál $\varphi(x,y)$ pole $\vec{F}(x,y)$ vypočteme ze vztahu

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} g(x_0,t)\,dt,$$

kde bod $[x_0, y_0]$ volíme libovolně. (nejlépe co nejjednodušší, např. $x_0=0$, $y_0=0$.)

Podle vzorce obdržíme:

$$\varphi(x,y) = \int_0^x 2ty\,dt + \int_0^y 0^2 + 9t^2\,dt =$$

$$= \left[2\frac{t^2}{2}y\right]_0^x + \left[9\frac{t^3}{3}\right]_0^y = x^2y + 3y^3$$

Tedy $\varphi(x,y) = x^2y + 3y^3$.

Dále potřebujeme z teorie pole vzorec, že

$$\int_{\vec{C}} \vec{F}(x,y)\circ d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

V našem případě $\varphi(B) = \varphi(0,2) = 24$
$\varphi(A) = \varphi(0,0) = 0$

Odtud:

$$\int_{\vec{C}} 2xy\,dx + (x^2+9y^2)\,dy = \varphi(B) - \varphi(A) = 24 - 0 = \underline{\underline{24}}.$$

2. PÍSEMKA

V tomto okamžiku (co se týká látky) považuji za vhodné napsat 2. písemku. Budou opět 4 příklady shodně hodnocené 3 body. ($4 \times 3 = 12$ bodů je maximum, aby jste byli úspěšní, musíte mít $\geq 6b$) Tedy podmínky jsou stejné jako v 1. písemce.

Příklad č. 1: Vypočtěte $\iint_M f(x,y)\,dx\,dy$, kde integrační obor M bude omezen přímkou a kuželosečkou. Příklad bude pouze na Fubiniho větu a ne na transformaci.

Příklad č. 2: Vypočtěte $\iiint_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, kde integrační obor bude část válcové, kuželové plochy nebo paraboloidu. Zde bude třeba provést transformaci do válcových souřadnic.

Příklad č. 3: Vypočtěte $\int_C f(x,y)\,ds$. Křivka C bude úsečka A, B, jejíž parametrizaci si musíte sami vytvořit. (viz strana 70).

Příklad č. 4 Vypočtěte $\int_{\vec{C}} \vec{F}(x,y) \circ d\vec{s}$. Pole $\vec{F}$ bude potenciálové (to samozřejmě musíte ověřit). Zde může být $\vec{C}$ složitá křivka. Toho se ale bát nemusíte. Buď zvolíte jinou křivku (nejlépe úsečku), nebo spočítáte potenciál. Vzor písemky následuje:

Zadání: 2. PÍSEMKA - VZOR

PŘÍKLAD 1: Vypočtěte $\iint_M x\,dx\,dy$, kde integrační obor M je ohraničen křivkami: $y=2x$, $y=3-x^2$.

PŘÍKLAD 2: Pomocí transformace do válcových souřadnic vypočtěte trojrozměrný integrál

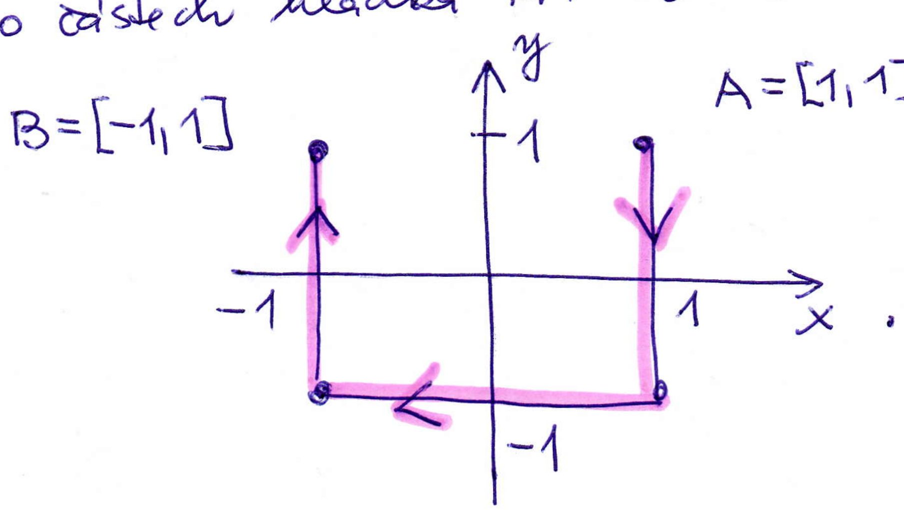
$\iiint_M dx\,dy\,dz$, kde integrační obor M je ohraničen plochami $z=x^2+y^2+1$ a $z=3$.

PŘÍKLAD 3: Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu

$\int_C 3xy\,ds$, kde křivka C je úsečka určená body $A=[-1,1]$, $B=[3,5]$.

PŘÍKLAD 4: Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$\int_{\vec{C}} x^2+y^2\,dx + 2xy\,dy$, kde křivka $\vec{C}$ je po částech hladká křivka definovaná obrázkem:



Pokyny pro vypracování písemky 20. 4. 2020:

1. čas: Budete mít na vypracování 2 hodiny. $10^{00} - 12^{00}$. V 9^{50} na svoji osobní stránku umístím zadání. Zadání napíši čitelně rukou a bude ve formátu pdf.

2. forma: Na začátku své práce napíšete hůlkovým písmem jméno a příjmení a číslo kruhu (A4, B14, C25)
Poté bude následovat tabulka, kterou si nakreslíte:

PŘÍKLAD 1 výsledek	PŘÍKLAD 2 výsledek
PŘÍKLAD 3 výsledek	PŘÍKLAD 4 výsedek

(výsledek ≡ to co vypočítáte)

Pak bude následovat výpočet příkladů,

3. hodnocení: Hodnotit budu samozřejmě i postup. Výsledek bez postupu je pak bezcenný. Protože víte vše s velkým předstihem prosím o 100%-ní účast. Poté jak vyprší čas, tj. ve 12^{00} pošlete na můj email řešení buď formát jpg (fotka) nebo pdf.
Email klaska@fme.vutbr.cz (viz stránka ústavu matematiky). Řešení vzorové písemky dám k dispozici za týden. J.K.