

# POZNÁMKY Z APLIKACÍ FOURIEROVY ANALÝZY

Ing. Hana Druckmüllerová, Ph.D.  
s přispěním  
Ing. Petry Kosové

verze 5. dubna 2023

*Na Fourierově analýze mě fascinuje, že je to pokročilá matematika  
a přitom ji lze uchopit tak intuitivně.  
Zkusím vám to předvést.*

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvodní slovo</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Fourierova transformace</b>	<b>4</b>
2.1	Základní pojmy . . . . .	4
2.2	Jednorozměrná Fourierova transformace . . . . .	6
2.2.1	Vlastnosti Fourierovy transformace funkcí jedné reálné proměnné . . . . .	6
2.2.2	Důsledky základních vlastností . . . . .	11
2.2.3	Odvození Fourierovy transformace pomocí Fourierových řad . . . . .	13
2.2.4	Fourierova transformace vybraných funkcí . . . . .	15
2.3	Dvourozměrná Fourierova transformace . . . . .	18
2.3.1	Vlastnosti Fourierovy transformace funkcí dvou reálných proměnných . . . . .	19
2.3.2	Důsledky základních vlastností . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Diskrétní Fourierova transformace</b>	<b>27</b>
3.1	Jednorozměrná diskrétní Fourierova transformace . . . . .	27
3.1.1	Vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace . . . . .	28
3.1.2	Důsledky základních vlastností . . . . .	33
3.1.3	Vztah mezi diskrétní Fourierovou transformací a Fourierovou řadou periodické funkce . . . . .	34
3.1.4	Rychlá Fourierova transformace (FFT) . . . . .	36
3.2	Dvourozměrná diskrétní Fourierova transformace . . . . .	36
3.2.1	Vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace . . . . .	37
3.2.2	Důsledky základních vlastností . . . . .	39
3.2.3	Diskrétní Fourierova transformace vybraných funkcí . . . . .	41
3.2.4	Vykreslení spektra . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Aplikace</b>	<b>45</b>
4.1	Základní modifikace spektra . . . . .	45
4.2	Určení významných směrů v obraze . . . . .	51
4.3	Obrazové filtry . . . . .	54
4.3.1	Zaostření, rozmazání . . . . .	54
4.4	Fázová korelace . . . . .	56
4.4.1	Posunutí . . . . .	56
4.4.2	Otočení, posun . . . . .	58
4.4.3	Změna měřítko, rotace, posun . . . . .	58
4.4.4	Proč se fázové korelaci říká fázová korelace, vztah ke konvoluci . . . . .	59
4.4.5	Diskrétní obrazy . . . . .	60
4.4.6	Subpixelová přesnost . . . . .	60
	<b>Literatura</b>	<b>62</b>
<b>A</b>	<b>Dodatek</b>	<b>64</b>
A.1	Odvození, důkazy . . . . .	64
A.1.1	Důkaz věty o inverzní Fourierově transformaci . . . . .	64
A.1.2	Fourierova transformace Gaussovy funkce . . . . .	68

A.2	Zdrojové kódy . . . . .	69
A.2.1	Určení významných směrů v obraze – Matlab . . . . .	69

# Kapitola 1

## Úvodní slovo

Fourierovská analýza a její aplikace jsou pro mě fascinující oblastí aplikované matematiky. Dostala jsem se k ní zajímavým způsobem, tak trochu dvěma cestami. Jednou bylo, že jsem měla v plánu diplomovou práci nějaké specifické využití fázové korelace jako metody pro sesazování obrazů. K tomuto využití nikdy nedošlo, aspoň tedy u mě. Přistoupila jsem k tomu totiž v rámci svého zaměření na detaily po svém. Začala jsem od článku [17] a jak nás kdysi už od tercie na gymnáziu v Brně-Řečkovících učil Dalibor Kott, že matematika je o tom ptát se „proč“, tak jsem se zeptala: „A proč to jako platí? Proč můžu hledat maximum té funkce? Vždyť jsou tam komplexní čísla...“ Ta druhá cesta vedla přes erasmovský pobyt na Chalmers University of Technology ve švédském Göteborgu, kde jsem absolvovala se skvělým učitelem Hjalmarem Rosengrenem předmět Fourier Analysis. A vlastně v Göteborgu, městě obklopeném mořem s malebnými ostrůvky a lesy s modrými jezery a růžovými vřesy, se obojí spojilo a já jsem měla zdroje pro hledání odpovědí na moje otázky „proč“. Sepsala jsem celý aparát, který ukazoval, jak to s tou Fourierovou transformací funguje a proč v té fázové korelaci opravdu můžeme hledat maximum, i když ve vzorci vystupují komplexní čísla. Docela mě to fascinovalo a sepsala jsem důkazy většiny vět, které se u toho potřebují. Některé jsou tak náročné, že jsem je nepobrala a jen odkázala do literatury, některé jsou delší, ale právě ve Švédsku jsem k nim našla cestu. A některé jsou naopak tak jednoduché, že je v literatuře ani nenajdete, a proto jsem si dala tu práci a vytvořila je.

Dva roky přede mnou byla v Göteborgu i moje o rok starší spolužačka Petra Rozehnalová (tehdy Nováčková), fourierovsky zaměřený předmět tam absolvovala též, i když s někým jiným a s jiným obsahem. Obě nás fourierovská analýza zaujala, já jsem více na ty obrazy, ona je více numerik přes diferenciální rovnice. A tak jsme se rozhodly, že naše znalosti a nadšení pro fourierovskou analýzu chceme předat dál. V roce 2012 jsme jako doktorandky na Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně (ÚM FSI VUT) založily nepovinný předmět Aplikace Fourierovy analýzy (SF0). První rok jsme ho vyučovaly velmi pestrá skupinu od třetáků až po naše spolužáky doktorandy a naši studenti nám tehdy na poslední přednášku donesli překvapení v podobě dortu s písmenem  $\mathcal{F}$  (a pak jsem se dozvěděla historky, jak paní v cukrárně dostala objednávku na  $\mathcal{F}$  a když moje spolužačka pro dort přišla, bylo na něm F, paní cukrářka vůbec nechápala, v čem je problém, že prý to je jedno, naštěstí to zvládla opravit). V pozdějších letech měl předmět různé přestávky z důvodu mých, případně Petřiných rodičovských radostí a starostí a od roku 2020 přinesl do předmětu svěží vítr doktorand na ÚM FSI Jindřich Dospiva (tehdy Dvořák), absolvent Fyzikálního inženýrství a nanotechnologií. V roce 2022 jsme se rozhodli, že předmětu pomůžeme, když poznámky sepsané po různých papírech, salátovité kusy mé diplomky a dizertace a různé další zdroje nějak dáme dohromady, a tak jsem se pustila do sepisování prvotního pokusu o skriptu. S pomocí v teoretické části se pak přidala doktorandka ÚM FSI Petra Kosová.

V kapitole 2 projdeme Fourierovu transformaci funkcí jedné a dvou reálných proměnných, což nám dá základní aparát pro aplikace. Vlastně to, jak se Fourierova transformace chová. Vlastní data bývají ovšem v aplikacích diskrétní: obrazy, signály, a proto v kapitole 3 rozebíráme diskrétní Fourierovu transformaci. Vlastní aplikace na obrazových datech jsou pak v kapitole 4. Těším se, že vám předám aspoň část svého nadšení pro fourierku. Jsem otevřená vašim připomínkám a nápadům.

Hana Druckmüllerová, druckmullerova.h@fme.vutbr.cz

## Kapitola 2

# Fourierova transformace

V této kapitole se seznámíme s Fourierovou transformací funkcí jedné a dvou reálných proměnných. Fourierova transformace je podobně jako jiné integrální transformace transformací, která z funkce prostorové proměnné / proměnných vytvoří funkce, jejíž proměnná / proměnné mají zcela jiný význam, v případě Fourierovy transformace je to význam frekvenční, pokud jednotkou na ose  $x$  je metr, jednotkou na ose  $\xi$  je  $\text{m}^{-1}$ . Nejdříve si v sekci 2.1 zavedeme základní pojmy, které budeme potřebovat, především prostor funkcí, které budeme používat. Dále v sekci 2.2 zavedeme Fourierovu transformaci funkcí jedné reálné proměnné, odvodíme si některé její vlastnosti a transformaci vybraných funkcí. V sekci 2.3 si pak zavedeme Fourierovu transformaci funkcí dvou reálných proměnných s tím, že mnohé její vlastnosti budou analogické s vlastnostmi v jednorozměrném případě, a proto mnohá odvození již přeskočíme.

## 2.1 Základní pojmy

Zdroje: [1], [7], [18]

**Definice 2.1.** Nechť  $f(x)$  je komplexní funkce reálné proměnné, tedy  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = u(x) + i v(x),$$

kde  $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$  jsou reálné funkce reálné proměnné. Nechť  $\langle a, b \rangle \subseteq M$ ,  $a < b$  a  $u, v$  jsou Riemannovsky integrovatelné funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom řekneme, že funkce  $f$  je *integrovatelná* na  $\langle a, b \rangle$  a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

**Poznámka 2.2.** Analogicky by se definoval i nevlastní integrál komplexní funkce reálné proměnné

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$$

(součet uvažujeme za předpokladu konvergence jednotlivých integrálů).

**Definice 2.3** ( $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ). Označme  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  jako prostor všech funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  takových, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

existuje a je konečný.

Běžně se ve funkcionální analýze pod pojmem  $\mathcal{L}_1$  označuje obdobný prostor funkcí, jen tyto funkce nabývají pouze reálných hodnot. Zde budeme používat rozšíření na funkce nabývající obecně komplexních hodnot.

**Definice 2.4** ( $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ ). Označme  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$  jako prostor všech funkcí  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  takových, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| \, dx \, dy \quad (2.1)$$

existuje a je konečný.

Uvědomme si, co je to vlastně integrál (2.1). V případě jednorozměrného integrálu se reálná osa rozdělí na dvě části, například v nule a v případě konvergence obou integrálů provedeme jejich součet. V případě dvourozměrného integrálu si taktéž zvolíme nějaké bod, například počátek, a vzniknou nám čtyři integrály

$$\begin{aligned} \iint_{(0, \infty)^2} |f(x, y)| \, dx \, dy &= A \\ \iint_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} |f(x, y)| \, dx \, dy &= B \\ \iint_{(0, \infty) \times (-\infty, 0)} |f(x, y)| \, dx \, dy &= C \\ \iint_{(-\infty, 0)^2} |f(x, y)| \, dx \, dy &= D, \end{aligned}$$

a v případě konvergence všech z nich pak je integrál (2.1) roven součtu  $A + B + C + D$ .

**Definice 2.5 (Hlavní hodnota integrálu (Cauchy principal value))**. Nechť  $f$  je funkce  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Za předpokladu, že limita existuje, se hodnota limity

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) \, dx$$

nazývá *hlavní hodnota (Cauchy principal value)* integrálu  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ . Píšeme

$$(P.V.) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) \, dx.$$

**Definice 2.6 ( $C^1$  funkce)**. Funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  patří do *třídy*  $C^1$ , jestliže je spojitá a jak reálná tak imaginární část mají spojitě derivace.

**Definice 2.7 (Po částech  $C^1$  funkce)**. Funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  je *po částech*  $C^1$ , jestliže je spojitá až na konečný počet bodů nespojitosti v libovolném ohraničeném intervalu a derivace jak reálné tak imaginární části jsou spojitě až na konečný počet bodů nespojitosti v libovolném ohraničeném intervalu. Navíc, jestliže  $f(x), (\Re f(x))'$ , nebo  $(\Im f(x))'$  je nespojitě v  $x_0$ , pak  $f(x), (\Re f(x))'$  a  $(\Im f(x))'$  mají v  $x_0$  limitu zprava a zleva.

**Definice 2.8 (Konvoluce 1D)**. Nechť  $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ . *Konvoluce* [1]  $f_1 * f_2$  funkcí  $f_1, f_2$  je funkce

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) f_2(x - s) \, ds.$$

**Definice 2.9 (Konvoluce 2D)**. Nechť  $f_1(x, y), f_2(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ . *Konvoluce* [1]  $f_1 * f_2$  funkcí  $f_1, f_2$  je funkce

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) \, ds \, dt.$$

## 2.2 Jednorozměrná Fourierova transformace

**Definice 2.10 (Fourierova transformace funkce v  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ).** Necht'  $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ . *Fourierova transformace* [6] , [13] funkce  $f$  je funkce  $\mathcal{F}\{f\}(\xi) = F(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná jako

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

Funkce  $F$  se také nazývá *Fourierovo spektrum* funkce  $f$ .

**Definice 2.11 (Inverzní Fourierova transformace funkce v  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ).** Necht'  $G(\xi) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ . *Inverzní Fourierova transformace* [6] , [13] funkce  $G$  je funkce  $\mathcal{F}^{-1}\{G\}(x) = g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná jako

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)e^{ix\xi} d\xi.$$

**Věta 2.12 (Věta o inverzní Fourierově transformaci – 1D).** Necht' funkce  $f$  je integrovatelná v absolutní hodnotě na  $\mathbb{R}$  a je po částech  $C^1$ . Pak [19]

$$\frac{1}{2\pi}(\text{P.V.}) \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{ix\xi} d\xi = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r F(\xi)e^{ix\xi} d\xi = \frac{\lim_{t \rightarrow x+} f(x) + \lim_{t \rightarrow x-} f(x)}{2}.$$

Navíc v případě, že  $f$  je spojitá,

$$\frac{1}{2\pi}(\text{P.V.}) \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{ix\xi} d\xi = f(x).$$

Navíc, pokud i  $F(\xi)$  je integrovatelná v absolutní hodnotě na  $\mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = \frac{\lim_{t \rightarrow x+} f(x) + \lim_{t \rightarrow x-} f(x)}{2},$$

a pro spojitě funkce  $f$ , jejichž spektrum je integrovatelné v absolutní hodnotě na  $\mathbb{R}$  dostáváme

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = f(x).$$

Důkaz věty je rozsáhlý a je uveden v dodatku A.1.1.

**Definice 2.13 (Amplitudové a fázové spektrum).** Necht'  $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  má Fourierovo spektrum  $F(\xi)$ . *Amplitudové spektrum* funkce  $f$  je funkce  $A(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definovaná jako

$$A(\xi) = |\mathcal{F}\{f(x)\}| = |F(\xi)|.$$

*Fázové spektrum* funkce  $f$  je funkce  $\Phi(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 2\pi \rangle$  definovaná jako

$$\begin{aligned} \Re F(\xi) &= A(\xi) \cos \Phi(\xi), \\ \Im F(\xi) &= A(\xi) \sin \Phi(\xi). \end{aligned}$$

Jestliže  $A(\xi) = 0$  pro nějaké  $(\xi)$ , pak definujeme  $\Phi(\xi) = 0$

### 2.2.1 Vlastnosti Fourierovy transformace funkcí jedné reálné proměnné

Zdroj: Diplomová práce Hany Druckmüllerové [9]. Některé důkazy v ní jsou původní, některé jsou ze zdrojů, na které se diplomová práce odkazuje, jen sjednoceno značení.

V této části si uvedeme vlastnosti Fourierovy transformace. Vztahy si uvedeme jak pro funkce jedné, tak dvou proměnných, důkazy jen pro případ dvou proměnných, a to především proto, že čerpám ze své

diplomové práce, která se zabývala aplikací na obrazy, a proto používala rovnou dvourozměrnou Fourierovu transformaci. Vztahy jsou zpravidla obecně známé, ovšem ve své diplomové práci jsem ke všem udělala důkazy (které se často k tak „elementárním“ větám v literatuře špatně hledají). Věřím, že průměrně zdatný čtenář jistě vytvoří k důkazům i jejich jednorozměrné ekvivalenty.

Pokud nebude uvedeno jinak,  $f, f_1, f_2, g$  budou funkce takové, že k nim existuje Fourierova transformace a ke spektru i zpětná Fourierova transformace, obě jsou navíc spojité a  $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\} = f$ . Odpovídajícími velkými písmeny budeme značit jejich spektra. K funkcím  $f, f_1, f_2$  navíc  $A(\xi, \eta), A_1(\xi, \eta), A_2(\xi, \eta)$  budou amplitudová spektra. Čísla  $\alpha, \beta, x_0, y_0, \xi_0, \eta_0$  libovolná reálná čísla, v případě vlastnosti č. 4 navíc nenulová.

Pro přehlednost si vlastnosti uvedeme v tabulkách, důkazy budou následovat.

ZDE BUDE SAMOZŘEJMĚ JEN TABULKA 1D, TABULKA 2D SE POSUNDE DO 2D, VLASTNOSTI SE BUDOU PSÁT JAKO VĚTY, TAKŽE NEMUSÍM ŘEŠIT, CO TO BUDE ZA SUBSUBSUB..., BUDE TO PROSTĚ VĚTA.

	$f(x)$	$F(\xi)$	
1.	$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F(\xi) + \beta G(\xi)$	linearita
2.	$f(x - x_0)$	$F(\xi)e^{-i\xi x_0}$	posun v prostoru
3.	$e^{i\xi_0 x} f(x)$	$F(\xi - \xi_0)$	posun ve spektru (modulace)
4.	$f(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$	změna měřítka v prostoru
5.	$f(-x)$	$F(-\xi)$	otočení osy v prostoru
6.	$f^*(x)$	$F^*(-\xi)$	komplexní sdružení
7.	$(f * g)(x)$	$F(\xi)G(\xi)$	konvoluce
8.	$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi}(F * G)(\xi)$	součin funkcí

Tabulka 2.1: Základní vlastnosti Fourierovy transformace funkcí jedné proměnné

## Linearita

Linearita je zjevná, vychází z vlastností Reimannova, Lebesgueova a vlastně jakéhokoli integrálu.

## Posun v prostoru

**Věta 2.14.** Nechť  $f_1(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  a nechť  $F_1(\xi)$  je její Fourierovo spektrum. Uvažujme funkci

$$f_2(x) = f_1(x - x_0),$$

kde  $x_0 \in \mathbb{R}$  je daná konstanta. Nechť  $F_2(\xi)$  je Fourierovo spektrum  $f_2(x)$ . Pak platí (částečně podle [1])

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= F_1(\xi)e^{-i\xi x_0}, \\ A_2(\xi) &= A_1(\xi), \\ \Phi_2(\xi) &= \Phi_1(\xi) \oplus (-\xi x_0). \text{(ZAVÉST MODULO } 2\pi?) \end{aligned}$$

*Důkaz.* [2]

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - x_0)e^{-i\xi x} dx = \left| \begin{array}{l} s = x - x_0 \\ x = s + x_0 \\ ds = dx \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)e^{-i\xi(s+x_0)} ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)e^{-i\xi s} e^{-i\xi x_0} ds = F_1(\xi)e^{-i\xi x_0} \end{aligned}$$



Nechť jsou  $A_1, A_2$  amplitudová spektra funkcí  $f_1, f_2$ . Potom

$$A_2(\xi) = |F_1(\xi)e^{-i\xi x_0}| = |F_1(\xi)||e^{-i\xi x_0}| = A_1(\xi) \cdot 1 = A_1(\xi)$$

Pro důkaz fázového spektra přepíšeme  $F_2$  jako

$$F_2(\xi) = F_1(\xi)e^{-i\xi x_0} = F_1(\xi)(\cos(\xi x_0) + i\sin(\xi x_0))$$

a použitím Moivrový věty [7] dostaneme

$$\Phi_2(\xi) = \Phi_1(\xi) \oplus (-\xi x_0).$$

□

## Posun ve spektru

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{ix\xi_0}e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-ix(\xi-\xi_0)} dx = \\ &= F_1(\xi - \xi_0) \end{aligned}$$

□

## Změna měřítka v prostoru

**Věta 2.15.** Nechť  $f_1(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  a nechť  $F_1(\xi)$  je její Fourierovo spektrum. Uvažujme funkci

$$f_2(x) = f_1(\alpha x),$$

kde  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  je daná konstanta. Nechť  $F_2(\xi)$  je Fourierovo spektrum  $f_2(x)$ . Pak platí (částečně podle [1])

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= \frac{1}{\alpha} F_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \\ A_2(\xi) &= \frac{1}{\alpha} A_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \\ \Phi_2(\xi) &= \Phi_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

*Důkaz.* [2]

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\alpha x)e^{-ix\xi} dx = \left| \begin{array}{l} s = \alpha x \\ x = \frac{s}{\alpha} \\ dx = \frac{ds}{\alpha} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)e^{-i(\frac{s}{\alpha}\xi)} ds = \frac{1}{\alpha} F_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \\ A_2(\xi) &= |F_2(\xi)| = \frac{1}{\alpha} |F_1(\frac{\xi}{\alpha})| = \frac{1}{\alpha} A_1(\frac{\xi}{\alpha}) \end{aligned}$$

Moivrova věta [7] implikuje

$$\Phi_2(\xi) = \Phi_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right).$$

□

## Otočení osy

Je přímým důsledkem změny měřítka, stačí za  $\alpha$  zvolit  $-1$ .

## Komplexní sdružení

**Věta 2.16.** Nechť  $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  a nechť  $F(\xi)$  je její Fourierovo spektrum. Fourierovo spektrum funkce, která je komplexně sdružená k funkci  $f$  je její komplexně sdružené Fourierovo spektrum s otočenou osou [14]

$$\mathcal{F}\{f^*(x)\} = F^*(-\xi)$$

*Důkaz.* [14]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f^*(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{i(-x\xi)} dx = \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(-\xi)} dx \right)^* = F^*(-\xi),\end{aligned}$$

třetí rovnost platí proto, že pro  $a \in \mathbb{R}$  platí  $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ ,  $e^{-ia} = \cos a + i \sin(-a) = \cos a - i \sin a$ . Proto  $e^{ia} = (e^{-ia})^*$ .  $\square$

## Konvoluce

**Věta 2.17.** Nechť  $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  a nechť  $F_1(\xi), F_2(\xi)$  jsou jejich Fourierova spektra. Pak

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = F_1(\xi) \cdot F_2(\xi)$$

*Důkaz.* [1]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f_1 * f_2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) f_2(x-s) ds \right) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) f_2(x-s) e^{-ix\xi} dx \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-s) e^{-ix\xi} dx \right) ds = \left| \begin{array}{l} p = x - s \\ x = s + p \\ dx = dp \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_2(p) e^{-i\xi(p+s)} dp \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_2(p) e^{-i\xi p} e^{-i\xi s} dp \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) e^{-i\xi s} ds \int_{-\infty}^{\infty} f_2(p) e^{-i\xi p} dp = F_1(\xi) \cdot F_2(\xi)\end{aligned}$$

$\square$

## Součin funkcí

**Věta 2.18.** Nechť  $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  a jsou spojité. Nechť jejich Fourierova spektra  $F_1(\xi), F_2(\xi) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ . Poté

$$\mathcal{F}\{f_1(x) \cdot f_2(x)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\xi) * F_2(\xi).$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f_1(x) \cdot f_2(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x)e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma)e^{ix\sigma} d\sigma \right) f_2(x)e^{-ix\xi} dx = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)e^{-ix(\xi-\sigma)} dx \right) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma)F_2(\xi-\sigma) d\sigma = \\
&= \frac{1}{2\pi} F_1(\xi) * F_2(\xi)
\end{aligned}$$

□

## Nultý prvek spektra

Přímo z definice vidíme, že

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix \cdot 0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Tedy nulová frekvence spektra vyjadřuje integrál funkce přes celé  $\mathbb{R}$ .

## Transformace z transformace

**Věta 2.19.**

- (a)  $\mathcal{F}\{f(x)\} = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\{f(-x)\},$
- (b)  $\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f(-x)\}.$
- (c)  $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = 2\pi(-x),$
- (d)  $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}\} = \frac{1}{2\pi}f(-x).$

*Důkaz.*

(a)

$$\begin{aligned}
2\pi\mathcal{F}^{-1}\{f(-x)\} &= 2\pi\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ix\xi} dx = \left| \begin{array}{l} s = -x \\ ds = -dx \end{array} \right| = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-is\xi} ds = \mathcal{F}\{f(x)\}.
\end{aligned}$$

(b) Tuto vlastnost získáme z (a) nahrazením  $x$  za  $-x$  a  $y$  za  $-y$  a podělením rovnosti  $2\pi$ .

(c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x,y)\}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i(x\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{ix(-\xi)} d\xi = \left| \begin{array}{l} \sigma = -\xi \\ d\sigma = -d\xi \end{array} \right| = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(-\sigma)e^{ix\sigma} d\sigma = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(-x)\}\} = 2\pi f(-x),
\end{aligned}$$

s tím, že předposlední rovnost platí díky vlastnosti č. 5.

(d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}^{-1}\{f(x, y)\}\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{is\xi} ds \right) e^{ix\xi} d\xi = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i(-s)\xi} ds \right) e^{ix\xi} d\xi = \left| \begin{array}{l} u = -s \\ du = -ds \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(-u) e^{-iu\xi} du \right) e^{ix\xi} d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(-x)\}\} = \frac{1}{2\pi} f(-x),
\end{aligned}$$

s tím, že předposlední rovnost platí díky vlastnosti č. 5.

□

Tato vlastnost je velmi praktická pro výpočty. Říká nám, že stačí výpočetně zvládnout dopřednou Fourierovu transformaci, zpětná je vlastně totéž co dopředná, jen s jistými úpravami, které nemají vliv na nějakou algoritmizaci výpočtu. Tedy stačí nám v jádru jediný algoritmus.

### Změna měřítka, posun

**Věta 2.20.** Předpokládejme, že pro funkce  $f_1, f_2$  platí

$$f_2(x, y) = f_1(\alpha x - x_0)$$

kde  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  a  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . Pak platí:

$$F_2(\xi) = \frac{1}{\alpha} F_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) e^{-i\xi x_0}.$$

*Důkaz.* Předpokládejme funkce

$$\begin{aligned}
f_2(x, y) &= f_1(\alpha x - x_0), \\
f_3(x, y) &= f_1(\alpha x).
\end{aligned}$$

Pak z vět o posunutí v prostoru (věta 2.14) a o změně měřítka v prostoru (věta 2.15) plyne

$$\begin{aligned}
F_2(\xi) &= F_3(\xi) e^{-i\xi x_0} = \\
&= \frac{1}{\alpha} F_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) e^{-i\xi x_0}.
\end{aligned}$$

□

### 2.2.2 Důsledky základních vlastností

**Věta 2.21.** Nechť  $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$  je spojitá funkce a necht'  $F(\xi)$  je její Fourierovo spektrum. Inverzní Fourierova transformace z komplexně sdruženého Fourierova spektra funkce  $f$  je komplexně sdružená funkce  $f$  s otočenou osou, tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\{F^*(\xi)\} = f^*(-x)$$

*Důkaz.* Důkaz převzat z [14].

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{F^*(\xi)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\xi) e^{-i(-\xi x)} d\xi = \\
&= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi(-x)} d\xi \right)^* = f^*(-x)
\end{aligned}$$

□

**Věta 2.22.**  $f$  je reálná funkce, tj.  $f(x) = f^*(x) \forall x \in \mathbb{R}$ , právě tehdy, když  $F(\xi) = F^*(-\xi)$ .

*Důkaz.* Důkaz převzat z [14].

(a) Předpokládejme, že  $f$  je reálná funkce. Pak podle věty 2.16 platí, že

$$F(\xi) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{f^*(x)\} = F^*(-\xi).$$

(b) Předpokládejme, že  $F(\xi) = F^*(-\xi)$ . Pak z věty 2.21 plyne, že

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\xi)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F^*(-\xi)\} = f^*(x).$$

□

**Věta 2.23.** Nechť  $f$  je reálná funkce, tj.  $f(x) = f^*(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Pak amplitudové spektrum této funkce je symetrické, tj.  $A(\xi) = A(-\xi)$ .

*Důkaz.* Tvrzení je přímým důsledkem věty 2.22. □

Tato věta je velmi důležitá pro aplikace. V praxi totiž pracujeme většinou s reálnými daty, například digitálními obrazy. Jejich amplitudové spektrum je středově symetrické, resp. v případě jednorozměrných dat symetrické kolem počátku, a tedy pokud chceme analyzovat amplitudové spektrum, stačí nám ho analyzovat polovinu, např. první a druhý kvadrant, v případě jednorozměrných dat např. jen kladnou část osy  $\xi$ . Zbytek nenese žádnou novou informaci.

**Věta 2.24.** Nechť  $f(x)$  je reálná. Nechť  $G(\xi)$  je omezená funkce taková, že  $G(\xi) = G(-\xi)$ . Pak

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\xi) \cdot G(\xi)\}$$

je reálná.

*Důkaz.* Podle věty 2.22, pokud  $f$  je reálná, pak

$$F(\xi) = F^*(-\xi).$$

Vynásobíme rovnost  $G$  a dostaneme

$$F(\xi) \cdot G(\xi) = F^*(-\xi) \cdot G(-\xi) = (F(-\xi) \cdot G(-\xi))^*.$$

Vzhledem k tomu, že  $G$  je omezená, není pochyb o existenci zpětné transformace. Pak znovu podle věty 2.22 dostaneme, že

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\xi) \cdot G(\xi)\}$$

je reálná. □

Tato věta je naprosto klíčová pro aplikace. Velmi často se nám totiž hodí vzít spektrum a aplikovat na něj nějakou váhovou funkci, především nějaké frekvence utlumit, potlačit. Jiné nechat. Můžeme si to dovolit? Co když zpětná transformace z takto modifikovaného spektra nebude reálná? To bychom zpětnou transformací nedostali reálný obraz. Tato věta nám ovšem dává jednoduché kritérium, které když váhová funkce splní, tak po zpětné transformaci dostaneme reálnou funkci. Stačí, když funkce je omezená a středově symetrická.

Větu 2.22 můžeme díky symetrii Fourierovy transformace přeformulovat i pro reálná spektra.

**Věta 2.25.** Spektrum funkce  $f$  je reálné, tj.  $F(\xi) = F^*(\xi) \forall \xi \in \mathbb{R}$ , právě tehdy, když  $f(x) = f^*(-x)$ .

*Důkaz.*

(a) Předpokládejme, že spektrum  $F$  je reálné. Pak

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\xi)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F^*(\xi)\} = f^*(-x).$$

(b) Předpokládejme, že  $f(x) = f^*(-x)$ . Pak

$$F(\xi) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{f^*(-x)\} = F^*(\xi).$$

□

Přímým důsledkem této věty je pak věta o transformaci funkcí, které jsou reálné a ještě k tomu sudé (resp. středově symetrické v případě funkcí dvou proměnných).

**Věta 2.26.** Nechť funkce  $f$  je reálná, tj.  $f(x) = f^*(x) \forall x \in \mathbb{R}$ , nechť tato funkce je sudá, tj.  $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Pak spektrum funkce  $f$  je reálné, tj.  $F(\xi) = F^*(\xi) \forall \xi \in \mathbb{R}$ .

*Důkaz.* Část (b) důkazu věty 2.25 použitá na reálné funkce přímo dává tento výsledek. □

### 2.2.3 Odvození Fourierovy transformace pomocí Fourierových řad

Zdroj: Bible funkcionální analýzy, která se ale čte výrazně lépe a rychleji než Bible: Kolmogorov, Fomin [13] od str. 455

s využitím poznámek Petry Rozehnalové

Vyjdeme z Fourierovy řady funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle -l, l \rangle$  v reálném tvaru, tj. funkce  $f$  je periodická s periodou  $2l$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right), \quad (2.2)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right) dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{k\pi}{l}t\right) dt. \quad (2.3)$$

Dosadíme (2.3) do (2.2) a dostaneme

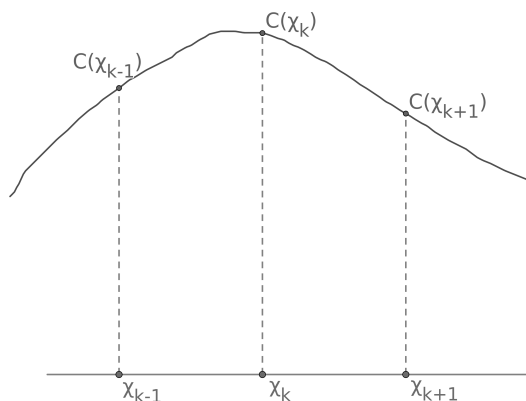
$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \left( \cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right) dt.$$

S využitím vzorce  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$  dostaneme

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt}_A + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{l}(t-x)\right) dt}_{B(x)}.$$

Fourierova řada se používá na periodické funkce s periodou  $2l$ . My se teď budeme snažit o  $l \rightarrow \infty$  a budeme se snažit odvodit, jak bude v takovém případě „řada“ vypadat. Provedeme tedy limitní přechod pro  $l \rightarrow \infty$  a budeme předpokládat, že  $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty$ . Pak  $A \rightarrow 0$ , protože je to vlastně  $\frac{1}{\infty} \cdot$  konečné číslo. Podívejme se, jak dopadne  $B(x)$ . Nejdřív si ho poněkud upravíme (mj. rozšíříme  $\pi$ ) a zavedeme si nové značení.

$$B(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\Delta \xi}{l}}_{\xi_k} \overbrace{\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi}{l}(t-x) dt}^{C(\xi_k)} \quad (2.4)$$



Obrázek 2.1: Riemannův integrál v tom značení, co my tu máme

Zavedeme posloupnost  $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} = \frac{k\pi}{l}$ . Její po sobě jdoucí členy se liší o  $\Delta\xi = \xi_{k+1} - \xi_k = \frac{\pi}{l}$ . Tady si teď vzpomeňme na definici Riemannova integrálu. Máme tady dělení o délce dílku  $\Delta\xi$  a tímto po obdélníčcích „integrovanou“ funkci  $C$ . Viz obrázek 2.1. Vlastní integrál pak je

$$\int_0^{\infty} C(\xi) d\xi = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} C(\xi_k) \Delta\xi.$$

Na vztahu (2.4) provedeme Riemannovu integraci. Když pošleme  $l \rightarrow \infty$ , budeme mít  $\Delta\xi \rightarrow d\xi$ ,  $\xi_k \rightarrow \xi$  a

$$\begin{aligned} B(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\xi(t-x)) dt \right) d\xi &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \xi t \cos \xi x + \sin \xi t \sin \xi x) dt d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos \xi t dt}_{a_{\xi}} \cos \xi x + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin \xi t dt}_{b_{\xi}} \sin \xi x \right) d\xi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Takže jsme vlastně odvodili

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a_{\xi} \cos \xi x + b_{\xi} \sin \xi x) d\xi,$$

tedy obdobu Fourierovy řady pro neperiodické funkce definované na  $\mathbb{R}$ . Rovnost platí za podmínek

- $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty$
- $f(t)$  má konečnou derivaci zleva i zprava  $\forall t$  (tato podmínka jde ještě zeslabit).

Výraz (2.5) budeme dále upravovat, naše snaha bude udělat jej více symetrický a „krásnější“. Vyjdeme z tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\xi(x-t)) dt d\xi.$$

(Oproti předchozímu jsme otočili argument kosinu, vzali jeho opačnou hodnotu, což můžeme díky tomu, že kosinus je sudá funkce.) Teď je klíčové si uvědomit, že vnitřní integrál je sudá funkce proměnné  $\xi$ . Možná to vypadá docela abstraktně, ale zkuste si to toho prostě jednou dosadit  $\xi$  a jednou  $-\xi$  a vidíte, že výsledek je stejný. Díky sudosti funkce můžeme vnější integrál rozšířit na celé  $\mathbb{R}$ , jen ho musíme podělit dvěma, aby jeho hodnota zůstala zachována.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\xi(x-t)) dt d\xi$$

Dále platí, že  $\int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\xi(x-t)) dt$  je lichou funkcí proměnné  $\xi$  ve smyslu hlavní hodnoty, a tedy

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\xi(x-t)) dt d\xi = 0.$$

Teď přičteme k  $f(x)$  nulu ve tvaru z předchozího řádku krát  $i$ . Proč to děláme? Abychom dostali tvar, se kterým se lépe pracuje a který bude prostě krásný ☺

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\xi(x-t)) dt d\xi + \frac{1}{2\pi} i \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\xi(x-t)) dt d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (\cos(\xi(x-t)) + i \sin(\xi(x-t))) dt d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\xi(x-t)} dt d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt}_{g(\xi)} e^{i\xi x} d\xi \end{aligned} \quad (2.6)$$

To  $g$ , které nám zde vyšlo, má pro vás již možná známý tvar, není to nic jiného než Fourierova transformace funkce  $f$ , říkáme jí též fourierovské spektrum funkce  $f$ . Bývá zvykem, že když je funkce označena malým písmenem, bývá její spektrum značené velkým písmenem. A těch různých značení je spousta, zkusme si je tady uvést.

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt = F(\xi) = \mathcal{F}\{f\}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

Vnější integrál z rovnice (2.6) je pak zpětnou Fourierovou transformací z funkce  $g$ , značíme

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{g\}(x) = \check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

CO Z TOHO NECHAT A CO NE?

## 2.2.4 Fourierova transformace vybraných funkcí

V této sekci si ukážeme Fourierovu transformaci několika užitečných funkcí. V praxi pracujeme většinou se signály nebo obrazy, které máme nějak diskrétně, a proto pro praktické výpočty používáme diskrétní Fourierovu transformaci (implementovanou jako Fast Fourier Transform nebo její ještě efektivnější varianty). Pro teoretické úvahy předcházející některé implementace jsou ovšem důležité i některé funkce jedné nebo dvou reálných proměnných. Navíc třeba v případě filtrů používáme při praktických výpočtech běžně diskretizované varianty funkcí, které budou následovat, především Gaussovy. Pokud byste hledali transformace dalších funkcí, vřele doporučuji anglickou Wikipedii pod heslem Fourier transform [25], která je velmi obsáhlá a velmi kvalitně zpracovaná a obsahuje i tabulku s přehledem transformací mnoha funkcí pro různé tvary Fourierovy transformace.

### Jednotkový zub

Spočtíme Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$F(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} dx = \left[ \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{x=-1}^1 = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi} = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Poslední rovnost platí s výjimkou  $\xi = 0$ , tam to musíme vzít v limitě,  $\lim_{\xi \rightarrow 0} F(\xi) = 2$ . Pokud v čitateli přímo nevidíte funkci sinus, běžte o malý kousek níže k transformaci sinu, tam je odvozené, jak se vyjádří sinus



pomocí komplexních exponenciál. Na tomto příkladu je krásně vidět, že funkce je sudá a její spektrum je reálné, což je v souladu s větou 2.44.

Zkusme si ještě funkci  $f$  posunout a sledovat, k jaké změně ve spektru dojde. Označme tedy

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

tedy  $f_1(x) = f(x-1)$ . Spektrum si spočítáme oběma způsoby, a to jak přímo z definice, tak pomocí věty o posunutí. Nejdříve tedy přímo

$$F_1(\xi) = \int_0^2 e^{-ix\xi} dx = \left[ \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{x=0}^2 = \frac{e^{-2i\xi}}{-i\xi} - \frac{e^0}{-i\xi} = \frac{i}{\xi} (\cos 2\xi - i \sin 2\xi - 1) = \frac{1}{\xi} (i \cos 2\xi + \sin 2\xi - i)$$

s tím, že jsme využili toho, že  $\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$ . A pomocí věty o posunutí

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= F(\xi)e^{-i\xi} = 2 \frac{\sin \xi}{\xi} e^{-i\xi} = 2 \frac{\sin \xi}{\xi} (\cos \xi - i \sin \xi) \stackrel{*}{=} \frac{2}{\xi} \left( \frac{1}{2} \sin 2\xi - i \sin^2 \xi \right) \stackrel{**}{=} \\ &\stackrel{**}{=} \frac{2}{\xi} \left( \frac{1}{2} \sin 2\xi - i \frac{1 - \cos 2\xi}{2} \right) = \frac{1}{\xi} (i \cos 2\xi + \sin 2\xi - i). \end{aligned}$$

V rovnosti označené  $*$  jsme využili vzorce  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  a v rovnosti označené  $**$  vzorce  $\sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ .

Zajímavé ještě může být ověřit si zde důsledek věty o posunutí, a to že posunuté funkce mají stejné amplitudové spektrum. Amplitudové spektrum původní funkce je  $|F(\xi)| = 2 \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right|$ . Amplitudové spektrum posunuté funkce je

$$\begin{aligned} |F_1(\xi)| &= \sqrt{\frac{1}{\xi^2} (\sin^2 2\xi + (\cos 2\xi - 1)^2)} = \sqrt{\frac{1}{\xi^2} (\sin^2 2\xi + \cos^2 2\xi - 2 \cos 2\xi + 1)} = \sqrt{\frac{1}{\xi^2} (2 - 2 \cos 2\xi)} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{\xi^2} \cdot \frac{1 - \cos 2\xi}{2}} = 2 \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right|. \end{aligned}$$

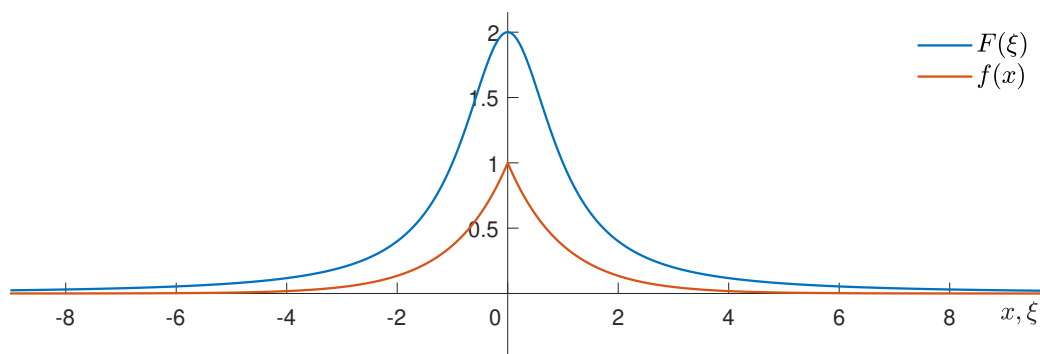
A je vidět, že vše funguje, jak má.

## Oboustranně klesající exponenciála

Zdroj: Daniel Satýnek, rozpracovaná verze bakalářské práce

Vypočtete Fourierovu transformaci funkce  $f(x) = e^{-|x|}$ . Zřejmě platí:  $\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|x|}| dx = 2 < \infty$

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{x-ix\xi} dx + \int_0^{\infty} e^{-x-ix\xi} dx = \left[ \frac{e^{x-ix\xi}}{1-i\xi} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-x-ix\xi}}{-1-i\xi} \right]_0^{\infty} = \\ &\stackrel{y=-x}{=} \frac{1}{1-i\xi} - \frac{1}{1-i\xi} \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-ix\xi}}_{=0} + \frac{1}{-1-i\xi} \underbrace{\lim_{y \rightarrow -\infty} e^{y+iy\xi}}_{=0} - \frac{1}{-1-i\xi} = \\ &= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{1+i\xi+1-i\xi}{1+\xi^2} = \frac{2}{1+\xi^2} \end{aligned}$$



Obrázek 2.2: graf funkce  $f(x) = e^{-|x|}$  a jejího fourierovského spektra

## Gaussova funkce

Platí:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \right\} = e^{-\frac{\sigma^2(\xi^2+\eta^2)}{2}}.$$

Důkaz tohoto tvrzení je dlouhý a jeho prostudování nepřináší žádný zvláštní přínos pro náš předmět, proto si ho neuvedeme zde, ale v dodatku A.1.2. Pokud se oprostíme od multiplikativní konstanty přes exponenciálu, vidíme, že Fourierovou transformací Gaussovy funkce je Gaussova funkce s tím, že čím je Gauss v prostoru „štíhlejší“, tím je Gauss ve spektru „širší“. Gaussova funkce má dalekosáhlé využití v aplikacích Fourierovy analýzy, například pro účely filtrace.

## Diracova distribuce

My jsme se tu zatím zabývali „běžnými“ funkcemi a navíc takovými, u kterých jsou splněny další podmínky, aby funkce byly ve smyslu Fourierovy transformace „slušné“. Pro mnohé aplikace se nám budou hodit ale i zobecněné Fourierovy transformace funkcí, k nimž vlastně Fourierova transformace ve smyslu, jaký zde používáme, neexistuje, protože integrál nekonverguje. Nebo ještě hůř, nebudeme transformovat funkce, ale distribuce. Teorie, která za tímto je, je zcela mimo tento předmět, ale i tak si zde tyto výsledky uvedeme, protože se v aplikacích velmi hodí. A hlavně, my si to tady teoreticky odvodíme s  $\delta$  distribucí, ale v reálu stejně výpočty probíhají na konečných maticích nebo vektorech pomocí diskrétní Fourierovy transformace, která tím, že pracuje na konečných množinách, je zcela „neškodná“ v tom, že existuje vždy, neřešíme žádnou konvergenci apod. Bez důkazů si uvedeme (detaily možno nalézt v [21]) si uvedeme, že

$$\mathcal{F} \{ \delta(x) \} = 1.$$

Z toho na základě věty o posunutí VLOZIT ODKAZ NA VETU odvodíme, že

$$\mathcal{F} \{ \delta(x - x_0) \} = e^{-i\xi x_0}$$

a na základě věty o transformaci z transformace 2.36

$$\mathcal{F} \{ 1 \} = 2\pi\delta(x).$$

Platí ve dvou dimenzích: TO UZ PREHODIT DO 2D, NEBUDE ZDE

$$\mathcal{F} \{ \delta(x, y) \} = 1$$

$$\mathcal{F} \{ \delta(x - x_0, y - y_0) \} = e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}$$

$$\mathcal{F} \{ 1 \} = 4\pi\delta(x, y)$$

## Komplexní exponenciála, sinus, kosinus

Když už jsme se jednou pustili na tenký led a přijali jsme, že existuje (zobecněná) Fourierova transformace z jedničky, můžeme připustit, že existují i transformace dalších funkcí, které nejsou dle základní definice Fourierovy transformace transformovatelné. Vlastnost č. 3 (modulace) říká, že

$$\mathcal{F}\{e^{i\xi_0 x} f(x)\} = F(\xi - \xi_0).$$

Dále víme, že

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\xi).$$

Když tyto dvě vlastnosti použijeme dohromady s tím, že  $f(x)$  ve vztahu pro modulaci bude jednička, dostaneme výsledný vztah pro Fourierovu transformaci z komplexní exponenciály:

$$\mathcal{F}\{e^{i\alpha x}\} = 2\pi\delta(\xi - \alpha).$$

Dále budeme potřebovat vyjádřit sinus a kosinus pomocí komplexních exponenciál. Pokud toto neznáme z hlavy, snadno to odvodíme sečtením, resp. odečtením vztahů

$$\begin{aligned} e^{i\alpha x} &= \cos \alpha x + i \sin \alpha x \\ e^{-i\alpha x} &= \cos \alpha x - i \sin \alpha x. \end{aligned}$$

Já tato vyjádření budu rovnou transformovat.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos \alpha x\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}\right\} = \frac{2\pi\delta(\xi - \alpha) + 2\pi\delta(\xi + \alpha)}{2} = \pi(\delta(\xi - \alpha) + \delta(\xi + \alpha)) \\ \mathcal{F}\{\sin \alpha x\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i}\right\} = \frac{2\pi\delta(\xi - \alpha) - 2\pi\delta(\xi + \alpha)}{2i} = -i\pi(\delta(\xi - \alpha) - \delta(\xi + \alpha)) \end{aligned}$$

Na těchto vztazích je k povšimnutí ještě jedna věc. Amplitudová spektra obou funkcí jsou stejná.

$$|\mathcal{F}\{\cos \alpha x\}| = |\mathcal{F}\{\sin \alpha x\}| = \mathcal{F}\{\cos \alpha x\} = \pi(\delta(\xi - \alpha) + \delta(\xi + \alpha))$$

Liší se pouze ve fázi. Což krásně odpovídá tomu vlastnosti č. 2 (větě o posunutí). Sinus a kosinus jsou téměř stejné funkce, liší se totiž pouze o posunutí  $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ , resp.  $\cos \alpha x = \sin(\alpha(x + \frac{\pi}{2\alpha}))$ . Pokud se dvě funkce liší o posunutí, jejich spektra se podle věty o posunutí liší pouze o komplexní exponenciálu, tedy se liší ve fázi, jejich amplitudová spektra jsou stejná.

## 2.3 Dvourozměrná Fourierova transformace

SEM SE PŘESUNE TABULKA A PAK SE UDĚLÁ PLNO VĚT BEZ DŮKAZŮ, PROTOŽE NA NICH NIC NENÍ, NAOPAK DŮKAZY VÝŠE SE UDĚLAJÍ V 1D

**Definice 2.27 (Fourierova transformace funkce v  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ ).** Nechť  $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ . Fourierova transformace [1] funkce  $f$  je funkce  $\mathcal{F}\{f\}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná jako

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy.$$

Funkce  $F$  se také nazývá *Fourierovo spektrum* funkce  $f$ .

**Definice 2.28 (Inverzní Fourierova transformace funkce v  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ ).** Nechť  $G(\xi, \eta) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ . Inverzní Fourierova transformace [1] funkce  $G$  je funkce  $\mathcal{F}^{-1}\{G\}(x, y) = g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná jako

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta.$$

**Věta 2.29 (Věta o inverzní Fourierově transformaci pro funkce v  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ ).** Jestliže  $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$  a je spojitá na  $\mathbb{R}^2$ , pak pro každé  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  [11] platí

$$f(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} e^{-\epsilon^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} d\xi d\eta$$

*Důkaz.* Důkaz lze najít v [22] □

**Definice 2.30 (Amplitudové a fázové spektrum).** Nechť  $f(x, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  má Fourierovo spektrum  $F(\xi, \eta)$ . *Amplitudové spektrum* funkce  $f$  je funkce  $A(\xi, \eta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definovaná jako

$$A(\xi, \eta) = |\mathcal{F}\{f(x, y)\}| = |F(\xi, \eta)|.$$

*Fázové spektrum* funkce  $f$  je funkce  $\Phi(\xi, \eta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \langle 0, 2\pi \rangle$  definovaná jako

$$\begin{aligned} \Re F(\xi, \eta) &= A(\xi, \eta) \cos \Phi(\xi, \eta), \\ \Im F(\xi, \eta) &= A(\xi, \eta) \sin \Phi(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Jestliže  $A(\xi, \eta) = 0$  pro nějaké  $(\xi, \eta)$ , pak definujeme  $\Phi(\xi, \eta) = 0$

### 2.3.1 Vlastnosti Fourierovy transformace funkcí dvou reálných proměnných

	$f(x, y)$	$F(\xi, \eta)$	
1.	$\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$	$\alpha F(\xi, \eta) + \beta G(\xi, \eta)$	linearita
2.	$f(x - x_0, y - y_0)$	$F(\xi, \eta) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}$	posun v prostoru
3.	$e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)} f(x, y)$	$F(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$	posun ve spektru (modulace)
4.	$f(\alpha x, \beta y)$	$\frac{1}{\alpha\beta} F\left(\frac{\xi}{\alpha}, \frac{\eta}{\beta}\right)$	změna měřítka v prostoru
5.	$f(-x, -y)$	$F(-\xi, -\eta)$	otočení os v prostoru
6.	$f^*(x, y)$	$F^*(-\xi, -\eta)$	komplexní sdružení
7.	$(f * g)(x, y)$	$F(\xi, \eta) G(\xi, \eta)$	konvoluce
8.	$f(x, y) g(x, y)$	$\frac{1}{4\pi^2} (F * G)(\xi, \eta)$	součin funkcí

Tabulka 2.2: Základní vlastnosti Fourierovy transformace funkcí dvou proměnných

#### Linearita

Linearita je zjevná, vychází z vlastností Reimannova, Lebesgueova a vlastně jakéhokoli integrálu.

#### Posun v prostoru

**Věta 2.31.** Nechť  $f_1(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$  a nechť  $F_1(\xi, \eta)$  je její Fourierovo spektrum. Uvažujme funkci

$$f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0),$$

kde  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  jsou dané konstanty. Nechť  $F_2(\xi, \eta)$  je Fourierovo spektrum  $f_2(x, y)$ . Pak platí (částečně podle [1])

$$\begin{aligned} F_2(\xi, \eta) &= F_1(\xi, \eta) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}, \\ A_2(\xi, \eta) &= A_1(\xi, \eta), \\ \Phi_2(\xi, \eta) &= \Phi_1(\xi, \eta) \oplus (-\xi x_0 - \eta y_0). (\text{ZAVÉST MODULO } 2\pi?) \end{aligned}$$

*Důkaz.* [2]

$$\begin{aligned}
F_2(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - x_0, y - y_0) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \left| \begin{array}{ccc} s = x - x_0 & x = s + x_0 & ds = dx \\ t = y - y_0 & y = t + y_0 & dt = dy \end{array} \right| = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) e^{-i(\xi(s+x_0) + \eta(t+y_0))} ds dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) e^{-i(\xi s + \eta t)} e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)} ds dt = F_1(\xi, \eta) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}
\end{aligned}$$

□

## Posun ve spektru

*Důkaz.*

$$\begin{aligned}
F_2(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) e^{i(\xi_0 x + \eta_0 y)} e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) e^{-i(x(\xi - \xi_0) + y(\eta - \eta_0))} dx dy = F_1(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)
\end{aligned}$$

□

## Změna měřítka v prostoru

**Věta 2.32.** Nechť  $f_1(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$  a nechť  $F_1(\xi, \eta)$  je její Fourierovo spektrum. Uvažujme funkci

$$f_2(x, y) = f_1(\alpha x, \beta y),$$

kde  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  je daná konstanta. Nechť  $F_2(\xi, \eta)$  je Fourierovo spektrum  $f_2(x, y)$ . Pak platí (částečně podle [1])

$$\begin{aligned}
F_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{\alpha\beta} F_1\left(\frac{\xi}{\alpha}, \frac{\eta}{\beta}\right), \\
A_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{\alpha\beta} A_1\left(\frac{\xi}{\alpha}, \frac{\eta}{\beta}\right), \\
\Phi_2(\xi, \eta) &= \Phi_1\left(\frac{\xi}{\alpha}, \frac{\eta}{\beta}\right).
\end{aligned}$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned}
F_2(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\alpha x, \beta y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \left| \begin{array}{ccc} s = \alpha x & x = \frac{s}{\alpha} & dx = \frac{ds}{\alpha} \\ t = \beta y & y = \frac{t}{\beta} & dy = \frac{dt}{\beta} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) e^{-i\left(\frac{s}{\alpha}\xi + \frac{t}{\beta}\eta\right)} ds dt = \frac{1}{\alpha\beta} F_1\left(\frac{\xi}{\alpha}, \frac{\eta}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

□

## Otočení os v prostoru

Je přímým důsledkem změny měřítka v prostoru, stačí za  $\alpha$  (a případně  $\beta$ ) zvolit  $-1$ .

## Komplexní sdružení

**Věta 2.33.** Necht'  $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$  a necht'  $F(\xi, \eta)$  je její Fourierovo spektrum. Fourierovo spektrum funkce, která je komplexně sdružená k funkci  $f$  je její komplexně sdružené Fourierovo spektrum s otočenými osami [14]

$$\mathcal{F}\{f^*(x, y)\} = F^*(-\xi, -\eta)$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f^*(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, y) e^{i(-x\xi - y\eta)} dx dy = \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x(-\xi) + y(-\eta))} dx dy \right)^* = F^*(-\xi, -\eta), \end{aligned}$$

třetí rovnost platí proto, že pro  $a \in \mathbb{R}$  platí  $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ ,  $e^{-ia} = \cos a + i \sin(-a) = \cos a - i \sin a$ . Proto  $e^{ia} = (e^{-ia})^*$ .  $\square$

## Konvoluce

**Věta 2.34.** Necht'  $f_1(x, y), f_2(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$  a necht'  $F_1(\xi, \eta), F_2(\xi, \eta)$  jsou jejich Fourierova spektra. Pak

$$\mathcal{F}\{f_1(x, y) * f_2(x, y)\} = F_1(\xi, \eta) \cdot F_2(\xi, \eta)$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_1 * f_2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) ds dt \right) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) e^{i(x\xi + y\eta)} dx dy \right) ds dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - s, y - t) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy \right) ds dt = \\ &= \left| \begin{array}{ccc} p = x - s & x = s + p & dx = dp \\ q = y - t & y = t + q & dy = dq \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(p, q) e^{-i\xi(p+s) - i\eta(q+t)} dp dq \right) ds dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(p, q) e^{-i(\xi p + \eta q)} e^{-i(\xi s + \eta t)} dp dq \right) ds dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) e^{-i(\xi s + \eta t)} ds dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(p, q) e^{-i(\xi p + \eta q)} dp dq = F_1(\xi, \eta) \cdot F_2(\xi, \eta) \end{aligned}$$

$\square$

## Součin funkcí

**Věta 2.35.** Necht'  $f_1(x, y), f_2(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$  a jsou spojité. Necht' jejich Fourierova spektra  $F_1(\xi, \eta), F_2(\xi, \eta) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ . Poté

$$\mathcal{F}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} = \frac{1}{4\pi^2} F_1(\xi, \eta) * F_2(\xi, \eta).$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) f_2(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma, \tau) e^{i(x\sigma + y\tau)} d\sigma d\tau \right) f_2(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma, \tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) e^{-ix(\xi - \sigma) - iy(\eta - \tau)} dx dy \right) d\sigma d\tau = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma, \tau) F_2(\xi - \sigma, \eta - \tau) d\sigma d\tau = \frac{1}{4\pi^2} F_1(\xi, \eta) * F_2(\xi, \eta)
\end{aligned}$$

□

## Transformace z transformace

**Věta 2.36.**

- (a)  $\mathcal{F}\{f(x, y)\} = 4\pi^2 \mathcal{F}^{-1}\{f(-x, -y)\},$
- (b)  $\mathcal{F}^{-1}\{f(x, y)\} = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}\{f(-x, -y)\}.$
- (c)  $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x, y)\}\} = 4\pi^2 f(-x, -y),$
- (d)  $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}^{-1}\{f(x, y)\}\} = \frac{1}{4\pi^2} f(-x, -y).$

*Důkaz.*

(a)

$$\begin{aligned}
4\pi^2 \mathcal{F}^{-1}\{f(-x, -y)\} &= 4\pi^2 \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x, -y) e^{ix\xi + iy\eta} dx dy = \\
&= \left| \begin{array}{cc} s = -x & ds = -dx \\ t = -y & dt = -dy \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) e^{-is\xi - it\eta} ds dt = \mathcal{F}\{f(x, y)\}.
\end{aligned}$$

(b) Tuto vlastnost získáme z (a) nahrazením  $x$  za  $-x$  a  $y$  za  $-y$  a podělením rovnosti  $4\pi^2$ .

(c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x, y)\}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{ix(-\xi) + iy(-\eta)} d\xi d\eta = \\
&= \left| \begin{array}{cc} \sigma = -\xi & d\sigma = -d\xi \\ \tau = -\eta & d\tau = -d\eta \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\sigma, -\tau) e^{ix\sigma + iy\tau} d\sigma d\tau = 4\pi^2 \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(-x, -y)\}\} = \\
&= 4\pi^2 f(-x, -y),
\end{aligned}$$

s tím, že předposlední rovnost platí díky vlastnosti č. 5.

(d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}^{-1}\{f(x,y)\}\} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t) e^{is\xi + it\eta} ds dt \right) e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta = \\
&= \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t) e^{-i(-s)\xi - i(-t)\eta} ds dt \right) e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta = \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = -s & du = -ds \\ v = -t & dv = -dt \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(-u,-v) e^{-iu\xi - iv\eta} du dv \right) e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(-x,-y)\}\} = \frac{1}{4\pi^2} f(-x,-y),
\end{aligned}$$

s tím, že předposlední rovnost platí díky vlastnosti č. 5.

□

Tato vlastnost je velmi praktická pro výpočty. Říká nám, že stačí výpočetně zvládnout dopřednou Fourierovu transformaci, zpětná je vlastně totéž co dopředná, jen s jistými úpravami, které nemají vliv na nějakou algoritmizaci výpočtu. Tedy stačí nám v jádru jediný algoritmus.

## Rotace

**Věta 2.37.** Předpokládejme, že pro funkce  $f_1, f_2$  platí

$$f_2(x, y) = f_1(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta), \quad (2.7)$$

kde  $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$  (tj. funkce  $f_2$  je otočená okolo počátku o úhel  $\theta$  oproti funkci  $f_1$ , viz obrázek 2.3). Pak platí ([17], [9])

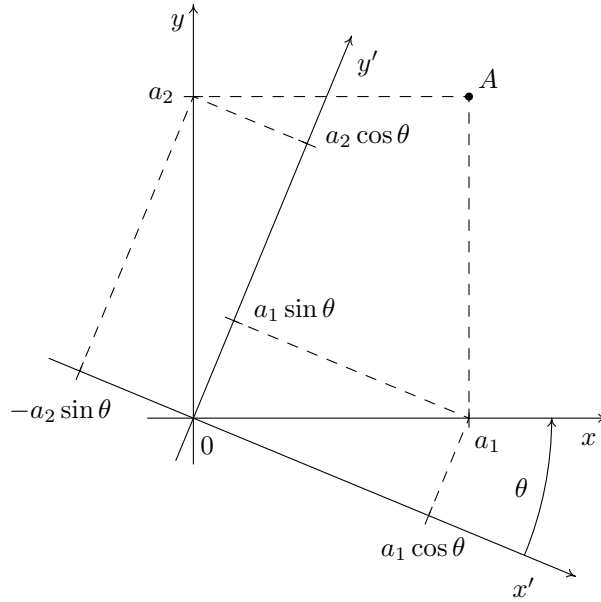
$$F_2(\xi, \eta) = F_1(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \xi \sin \theta + \eta \cos \theta),$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned}
F_2(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy = \\
&= \left| \begin{array}{cc} s = x \cos \theta - y \sin \theta & x = s \cos \theta + t \sin \theta \\ t = x \sin \theta + y \cos \theta & y = -s \sin \theta + t \cos \theta \end{array} \right| = \\
&= \left| \begin{array}{cc} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) e^{-i[\xi(s \cos \theta + t \sin \theta) + \eta(-s \sin \theta + t \cos \theta)]} ds dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) e^{-i[s(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) + t(\xi \sin \theta + \eta \cos \theta)]} ds dt = \\
&= F_1(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \xi \sin \theta + \eta \cos \theta)
\end{aligned}$$

□





Obrázek 2.3: Odvození přepočtu souřadnic při otočení kolem počátku, převzato z [9]. Bod  $A$  má souřadnice  $(a_1, a_2)$  v souřadném systému  $x, y$ , který je otočený oproti souřadnému systému  $x', y'$  o úhel  $\theta$ . Bod  $(a_1, 0)$  v  $x, y$  má souřadnice  $(a_1 \cos \theta, a_1 \sin \theta)$  v  $x', y'$ . Podobně bod  $(0, a_2)$  v  $x, y$  má souřadnice  $(-a_2 \sin \theta, a_2 \cos \theta)$  v  $x', y'$ . Proto bod  $A = (a_1, a_2)$  v souřadném systému  $x, y$  má souřadnice  $(a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta, a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta)$  v souřadném systému  $x', y'$ .

### Změna měřítka, rotace, posun

**Věta 2.38.** Předpokládejme, že pro funkce  $f_1, f_2$  platí

$$f_2(x, y) = f_1(\alpha x \cos \theta - \alpha y \sin \theta - x_0, \alpha x \sin \theta + \alpha y \cos \theta - y_0),$$

kde  $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . Pak platí:

$$F_2(\xi, \eta) = \frac{1}{\alpha^2} e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)} F_1\left(\frac{\xi}{\alpha} \cos \theta - \frac{\eta}{\alpha} \sin \theta, \frac{\xi}{\alpha} \sin \theta + \frac{\eta}{\alpha} \cos \theta\right).$$

*Důkaz.* Předpokládejme funkce

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= f_1(\alpha x \cos \theta - \alpha y \sin \theta - x_0, \alpha x \sin \theta + \alpha y \cos \theta - y_0), \\ f_3(x, y) &= f_1(\alpha x \cos \theta - \alpha y \sin \theta, \alpha x \sin \theta + \alpha y \cos \theta), \\ f_4(x, y) &= f_1(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta). \end{aligned}$$

Pak z vět o posunutí v prostoru (vlastnost č. 2), o rotaci (věta 2.37) a o změně měřítka v prostor (vlastnost č. 4) plyne

$$\begin{aligned} F_2(\xi, \eta) &= F_3(\xi, \eta) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)} = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} F_4\left(\frac{\xi}{\alpha}, \frac{\eta}{\alpha}\right) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)} = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)} F_1\left(\frac{\xi}{\alpha} \cos \theta - \frac{\eta}{\alpha} \sin \theta, \frac{\xi}{\alpha} \sin \theta + \frac{\eta}{\alpha} \cos \theta\right). \end{aligned}$$

□

### 2.3.2 Důsledky základních vlastností

**Věta 2.39.** Nechť  $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$  je spojitá funkce a nechť  $F(\xi, \eta)$  je její Fourierovo spektrum. Inverzní Fourierova transformace z komplexně sdruženého Fourierova spektra funkce  $f$  je komplexně sdružená funkce  $f$  s otočenými osami, tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\{F^*(\xi, \eta)\} = f^*(-x, -y)$$

*Důkaz.* Důkaz převzat z [14].

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{F^*(\xi, \eta)\} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\xi, \eta) e^{-i(-\xi x - \eta y)} d\xi d\eta = \\ &= \left( \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{i[\xi(-x) + \eta(-y)]} d\xi d\eta \right)^* = f^*(-x, -y)\end{aligned}$$

□

**Věta 2.40.**  $f$  je reálná funkce, tj.  $f(x, y) = f^*(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , právě tehdy, když  $F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta)$ .

*Důkaz.* Důkaz převzat z [14].

(a) Předpokládejme, že  $f$  je reálná funkce. Pak podle vlastnosti č. 6 platí, že

$$F(\xi, \eta) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} = \mathcal{F}\{f^*(x, y)\} = F^*(-\xi, -\eta).$$

(b) Předpokládejme, že  $F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta)$ . Pak z věty 2.39 plyne, že

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\xi, \eta)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F^*(-\xi, -\eta)\} = f^*(x, y).$$

□

**Věta 2.41.** Nechť  $f$  je reálná funkce, tj.  $f(x, y) = f^*(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Pak amplitudové spektrum této funkce je středově symetrické, tj.  $A(\xi, \eta) = A(-\xi, -\eta)$ .

*Důkaz.* Tvrzení je přímým důsledkem věty 2.40. □

Tato věta je velmi důležitá pro aplikace. V praxi totiž pracujeme většinou s reálnými daty, například digitálními obrazy. Jejich amplitudové spektrum je středově symetrické, resp. v případě jednorozměrných dat symetrické kolem počátku, a tedy pokud chceme analyzovat amplitudové spektrum, stačí nám ho analyzovat polovinu, např. první a druhý kvadrant, v případě jednorozměrných dat např. jen kladnou část osy  $\xi$ . Zbytek nenese žádnou novou informaci.

**Věta 2.42.** Nechť  $f(x, y)$  je reálná. Nechť  $G(\xi, \eta)$  je omezená funkce  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $G(\xi, \eta) = G(-\xi, -\eta)$ . Pak

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\xi, \eta) \cdot G(\xi, \eta)\}$$

je reálná.

*Důkaz.* Podle věty 2.40, pokud  $f$  je reálná, pak

$$F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta).$$

Vynásobíme rovnost  $G$  a dostaneme

$$F(\xi, \eta) \cdot G(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta) \cdot G(-\xi, -\eta) = (F(-\xi, -\eta) \cdot G(-\xi, -\eta))^*.$$

Vzhledem k tomu, že  $G$  je omezená, není pochyb o existenci zpětné transformace. Pak znovu podle věty 2.40 dostaneme, že

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\xi, \eta) \cdot G(\xi, \eta)\}$$

je reálná. □

Tato věta je naprosto klíčová pro aplikace. Velmi často se nám totiž hodí vzít spektrum a aplikovat na něj nějakou váhovou funkci, především nějaké frekvence utlumit, potlačit. Jiné nechat. Můžeme si to dovolit? Co když zpětná transformace z takto modifikovaného spektra nebude reálná? To bychom zpětnou transformací nedostali reálný obraz. Tato věta nám ovšem dává jednoduché kritérium, které když váhová funkce splní, tak po zpětné transformaci dostaneme reálnou funkci. Stačí, když funkce je omezená a středově symetrická.

Větu 2.40 můžeme díky symetrii Fourierovy transformace přeformulovat i pro reálná spektra.

**Věta 2.43.** Spektrum funkce  $f$  je reálné, tj.  $F(\xi, \eta) = F^*(\xi, \eta) \ \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ , právě tehdy, když  $f(x, y) = f^*(-x, -y)$ .

*Důkaz.*

(a) Předpokládejme, že spektrum  $F$  je reálné. Pak

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{F(\xi, \eta)\} = \mathcal{F}^{-1} \{F^*(\xi, \eta)\} = f^*(-x, -y).$$

(b) Předpokládejme, že  $f(x, y) = f^*(-x, -y)$ . Pak

$$F(\xi, \eta) = \mathcal{F} \{f(x, y)\} = \mathcal{F} \{f^*(-x, -y)\} = F^*(\xi, \eta).$$

□

Přímým důsledkem této věty je pak věta o transformaci funkcí, které jsou reálné a ještě k tomu sudé (resp. středově symetrické v případě funkcí dvou proměnných).

**Věta 2.44.** Nechť funkce  $f$  je reálná, tj.  $f(x, y) = f^*(x, y) \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , nechť tato funkce je středově symetrická, tj.  $f(x, y) = f(-x, -y) \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Pak spektrum funkce  $f$  je reálné, tj.  $F(\xi, \eta) = F^*(\xi, \eta) \ \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ .

*Důkaz.* Část (b) důkazu věty 2.43 použitá na reálné funkce přímo dává tento výsledek.

□

## Kapitola 3

# Diskrétní Fourierova transformace

### 3.1 Jednorozměrná diskrétní Fourierova transformace

Zdroj: diplomová práce Hany Druckmüllerové, která v této části vychází především z [1] a [6].

Diskrétní Fourierova transformace je oproti její „spojité“ obdobě krásná v tom, že tím, jak se sčítá konečný počet sčítanců, tak nejsou žádné problémy ohledně konvergence, existence atd. V literatuře jsou dva přístupy k jejímu zápisu, resp. zápisu toho, co je na vstupu a výstupu. Na vstupu vždy máme v jednorozměrném případě konečné vektory, v případě dvourozměrné matice (my se omezíme na matice čtvercové). Někteří autoři je zapisují pomocí indexů, tedy např.  $a_k$ , resp.  $a_{k,l}$ , jako například útlá a přesto obsáhlá knížka Václav Čížek: Diskrétní Fourierova transformace a její použití [6]. (Pozor, když byste chtěli z knížky čerpat nějaké tvrzení, raději si ho sami dokažte, když to jde. V knížce je mraky chyb.) Druhý přístup je zápis jako funkce jedné nebo dvou proměnných  $f(x)$  nebo  $f(x, y)$ , jen je potřeba vnímat, že definiční obor je diskrétní. Tento přístup používá například [1] a budeme ho používat i v tomto textu, osobně ho považuji za přehlednější, zvláště ve dvourozměrném případě.

**Definice 3.1 ( Diskrétní Fourierova transformace).** Nechť  $f(x)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Diskrétní Fourierova transformace funkce  $f(x)$  je funkce  $\mathcal{D}\{f\}(\xi) = F(\xi) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\xi) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} \quad (3.1)$$

Funkci  $F$  nazýváme též *fourierovské spektrum* funkce  $f$ .

**Definice 3.2. [Zpětná diskrétní Fourierova transformace]** Nechť  $F(\xi)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Zpětná diskrétní Fourierova transformace funkce  $F(\xi)$  je funkce  $\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} F(\xi) e^{\frac{2\pi i}{N} x \xi}. \quad (3.2)$$

Dále budeme slovo *diskrétní* vynechávat, pokud to bude v dané situaci zjevné, že je tím myšlena.

Narozdíl od „spojité“ transformace, kde je to složitější, zpětná transformace vždy přesně platí, že zpětná transformace z dopředné transformace se rovná původní funkci. Navíc důkaz tohoto tvrzení není nijak obtížný, a proto si jej zde uvedeme.

**Věta 3.3 (Věta o zpětné transformaci).** Nechť  $f(x)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  a nechť  $F(\xi)$  je její Fourierova transformace. Pak zpětná Fourierova transformace funkce  $F(\xi)$  je funkce  $f(x)$ , tj.

$$\mathcal{D}^{-1}\{\mathcal{D}\{f(x)\}\} = f(x).$$

*Důkaz.* Osobně neznám žádný knižní zdroj, kde by byl tento důkaz uveden. Sama ho mám v jednorozměrném případě z přednášky skvělého pedagoga Hjalmar Rosengrena z mého pobytu na Chalmers University of

Technology ve švédském Göteborgu [20]. Pokud zdroj znáte, odkážte mě na něj, ráda ho zde uvedu. Ale ono na tom důkazu není nic objeveného ani technicky náročného.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D} \{ f(x) \} \} &= \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} F(\xi) e^{\frac{2\pi i}{N}(x\xi)} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} f(s) e^{-\frac{2\pi i}{N}(s\xi)} e^{\frac{2\pi i}{N}(x\xi)} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f(s) \sum_{\xi=0}^{N-1} e^{\xi \frac{2\pi i}{N}(x-s)} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f(s) \underbrace{\left( \sum_{\xi=0}^{N-1} \left( e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)} \right)^\xi \right)}_{g(s)}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že  $g(s)$  je konečná geometrická řada, můžeme určit její součet.

- (a) Pokud  $x = s$ , pak  $e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)} = 1$ , tedy  $g(s) = N$ .
- (b) Pokud  $x \neq s$ , víme, že  $1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)} \neq 0$ , a proto můžeme tímto výrazem dělit

$$g(s) = \frac{1 - \left( e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)} \right)^N}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)}} = \frac{1 - e^{2\pi i(x-s)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)}} = 0.$$

Proto,

$$\mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D} \{ f(x, y) \} \} = \frac{1}{N} f(x, y) \cdot N = f(x).$$

□

**Definice 3.4** (Amplitudové spektrum, fázové spektrum). *Amplitudové spektrum* funkce  $f$  je funkce  $A(\xi) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná jako

$$A(\xi) = |\mathcal{D} \{ f(x) \}| = |F(\xi)|.$$

*Fázové spektrum* funkce  $f$  je funkce  $\Phi(\xi) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \langle 0, 2\pi \rangle$  definovaná jako

$$\begin{aligned}
\Re F(\xi) &= A(\xi) \cos \Phi(\xi), \\
\Im F(\xi) &= A(\xi) \sin \Phi(\xi).
\end{aligned}$$

Pokud  $A(\xi) = 0$  pro nějaké  $(\xi)$ , položíme  $\Phi(\xi) = 0$ .

### 3.1.1 Vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace

V této části si uvedeme vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace. Vztahy si uvedeme jak pro funkce jedné, tak dvou proměnných, důkazy zpravidla jen pro případ dvou proměnných, a to především proto, že čerpám ze své diplomové práce, která se zabývala aplikací na obrazy, a proto používala rovnou dvourozměrnou Fourierovu transformaci. Vztahy jsou zpravidla obecně známé, ovšem ve své diplomové práci jsem ke všem udělala důkazy (které se často k tak „elementárním“ větám v literatuře špatně hledají). Věřím, že průměrně zdatný čtenář jistě vytvoří k důkazům i jejich jednorozměrné ekvivalenty.

Pokud nebude uvedeno jinak,  $f, f_1, f_2, g$  budou funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Odpovídajícími velkými písmeny budeme značit jejich spektra. K funkcím  $f, f_1, f_2$  navíc  $A(\xi, \eta), A_1(\xi, \eta), A_2(\xi, \eta)$  budou amplitudová spektra a  $\Phi(\xi, \eta), \Phi_1(\xi, \eta), \Phi_2(\xi, \eta)$  jejich fázová spektra. Čísla  $\alpha, \beta, x_0, y_0, \xi_0, \eta_0$  libovolná reálná čísla.

## Periodické pokračování

TOHLE SE SPÍŠE HODÍ JAKO SLOVNÍ OMÁČKA A PAK VĚTA

První z vlastností diskrétní Fourierovy transformace, kterou si zde uvedeme, je taková, co přímo „ční“ z definice, přesněji z definičního oboru. Ilustrujme si to na jednorozměrném případě. Všimněme si, že funkce  $e^{\frac{2\pi i}{N}x\xi}$  je periodická v proměnné  $\xi$  s periodou  $N$ . Navíc formálně nic nebrání tomu, abychom do vztahu (3.1) za  $\xi$  dosadili libovolné celé číslo. Pojďme tedy zavést *periodické pokračování Fourierovy transformace* jako funkci  $\tilde{F}(\xi) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{F}(\xi) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{N}x\xi}.$$

Obdobně zavedeme i *periodické pokračování zpětné Fourierovy transformace* z funkce  $F(\xi)$  jako

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} F(\xi) e^{\frac{2\pi i}{N}x\xi}.$$

Zcela intuitivně můžeme zavést  $\mathcal{D}\{\tilde{f}\}$  a  $\mathcal{D}^{-1}\{\tilde{F}\}$  restrikcí těchto funkcí na původní definiční obor. Pak je zjevné, že platí  $\forall x, \xi \in \{0, 1, \dots, N-1\}, k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \tilde{f}(x + kN), \quad F(\xi) = \tilde{F}(\xi + kN)$$

a odtud

$$\tilde{f}(x) = f(x), \quad \tilde{f}(-x) = f(N - x), \quad \tilde{F}(\xi) = F(\xi), \quad \tilde{F}(-\xi) = F(N - \xi).$$

Navíc je nebude těžké odvodit, že  $\forall k \in \mathbb{Z}$  platí

$$\mathcal{D}\{f(x)\} = \sum_{x=k}^{k+N-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{N}x\xi}, \quad \mathcal{D}^{-1}\{F(\xi)\} = \sum_{\xi=k}^{k+N-1} F(\xi) e^{\frac{2\pi i}{N}x\xi}. \quad (3.3)$$

Tyto vztahy mají velký důsledek při zpracování signálu a obrazů. Je totiž vidět, že Fourierova transformace bere vektorová data, jako by byla periodická, vektor naskládán opakovaně za sebe. Digitální obrazy bere, jako by byly periodicky vyskládané do šachovnice. Běžně mají data nějaký „postupný“ průběh, nebývají tam dramatické skoky mezi sousedními body, jenže právě díky této periodicitě tam přirozeně skoky vznikají na přechodu z jedné periody do té další. Často pak tento skok je nejvýraznější strukturou v té šachovnici. Proto je velmi důležité pro další zpracování nějak odstranit okraje obrazů, většinou se to řeší nějakou váhovou funkcí, kterou vynásobíme obraz tak, aby na okraji již žádná data nebyla, aby tam byly nuly. V závislosti na tom, na jakou analýzu bude takto modifikovaný obraz a jeho spektrum použit, se volí buď váhové funkce radiálně symetrické (jádro, kde je váha rovna nule, je kruh), nebo čtvercové (jádro je čtverec).

**Definice 3.5 (Periodizace funkce a jejího Fourierova spektra).** Nechť  $f(x)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  a nechť  $F(\xi)$  je její Fourierovo spektrum. *Periodizace Fourierova spektra*  $F$  je funkce  $\tilde{F}(\xi) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná jako

$$\tilde{F}(\xi) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{N}x\xi}.$$

*Periodizace funkce*  $f$  je funkce  $\tilde{f}(x) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná jako

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} F(\xi) e^{\frac{2\pi i}{N}x\xi}.$$

Pro přehlednost si vlastnosti uvedeme v tabulkách, důkazy budou následovat.

## Linearita

Linearita je zjevná, vychází z vlastností konečných součtů, v zásadě se jedná o distributivní zákon.

	$f(x)$	$F(\xi)$	
1.	$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F(\xi) + \beta G(\xi)$	linearita
2.	$\tilde{f}(x - x_0)$	$F(\xi) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} \xi x_0}$	posun v prostoru
3.	$e^{\frac{2\pi i}{N} \xi_0 x} f(x)$	$\tilde{F}(\xi - \xi_0)$	posun ve spektru (modulace)
4.	$\tilde{f}(-x)$	$\tilde{F}(-\xi)$	otočení osy
5.	$f^*(x)$	$\tilde{F}^*(-\xi)$	komplexní sdružení
6.	$(f * g)(x)$	$F(\xi) \cdot G(\xi)$	periodická konvoluce
7.	$f(x) \cdot g(x)$	$\frac{1}{N}(F * G)(\xi)$	součin funkcí

Tabulka 3.1: Základní vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace funkcí jedné proměnné.

### Posun v prostoru

**Věta 3.6.** Nechť  $f_1(x)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  a nechť  $F_1(\xi)$  je její Fourierovo spektrum. Uvažujme funkci

$$f_2(x) = \tilde{f}_1(x - x_0),$$

kde  $x_0 \in \mathbb{Z}$  je daná konstanta. Nechť  $F_2(\xi)$  je Fourierovo spektrum  $f_2(x)$ . Pak platí

$$F_2(\xi) = e^{-\frac{2\pi i}{N} \xi x_0} F_1(\xi).$$

*Důkaz.* [6]

$$\begin{aligned}
F_2(\xi) &= \sum_{x=0}^{N-1} f_2(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} = \sum_{x=0}^{N-1} \tilde{f}_1(x - x_0) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} = \\
&= \left| s = x - x_0 \right| = \sum_{s=-x_0}^{N-1-x_0} \tilde{f}_1(s) e^{-\frac{2\pi i}{N} \xi(s+x_0)} = \\
&= e^{-\frac{2\pi i}{N} \xi x_0} \sum_{s=-x_0}^{N-1-x_0} \tilde{f}_1(s) e^{-\frac{2\pi i}{N} s \xi} = e^{-\frac{2\pi i}{N} \xi x_0} F_1(\xi),
\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost vychází ze vztahu (3.3). □

### Posun ve spektru

*Důkaz.*

$$F_2(\xi) = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} x \xi_0} f_1(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} = \sum_{x=0}^{N-1} f_1(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x(\xi - \xi_0)} = F(\xi - \xi_0)$$

□

### Otočení os

**Věta 3.7.** Nechť  $f(x)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  s Fourierovým spektrem  $F(\xi)$ . Fourierova transformace funkce  $f$  s otočenou osou je funkce  $F$  s otočenou osou, tedy

$$\mathcal{D} \left\{ \tilde{f}(-x) \right\} = \tilde{F}(-\xi)$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} \left\{ \tilde{f}(-x) \right\} &= \sum_{x=0}^{N-1} \tilde{f}(-x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} = \left| s = -x \right| = \\
&= \sum_{s=-N+1}^0 \tilde{f}(s) e^{-\frac{2\pi i}{N} (-s \xi)} = \tilde{F}(-\xi),
\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost vychází ze vztahu (3.3). □

### Komplexní sdružení

**Věta 3.8.** Nechť  $f(x)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  a nechť  $F(\xi)$  je její Fourierovo spektrum. Fourierovo spektrum funkce, která je komplexně sdružená k funkci  $f$  je její komplexně sdružené Fourierovo spektrum s otočenou osou [14]

$$\mathcal{D}\{f^*(x)\} = F^*(-\xi).$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{f^*(x)\} &= \sum_{x=0}^{N-1} f^*(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} = \sum_{x=0}^{N-1} f^*(x) e^{\frac{2\pi i}{N} (-x \xi)} = \\ &= \left( \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} (-x \xi)} \right)^* = \tilde{F}^*(-\xi). \end{aligned}$$

□

### Periodická konvoluce

**Definice 3.9.** Nechť  $f_1(x), f_2(x)$  jsou funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Funkce  $f(x)$  se nazývá *diskrétní periodická konvoluce* [1] funkcí  $f_1, f_2$  (značeno jako  $f(x) = f_1(x) * f_2(x)$ ), jestliže

$$f(x) = \sum_{s=0}^{N-1} f_1(s) \tilde{f}_2(x-s).$$

**Věta 3.10.** Nechť funkce  $f_1(x), f_2(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  mají Fourierova spektra  $F_1(\xi), F_2(\xi)$ . Potom

$$\mathcal{D}\{f_1(x) * f_2(x)\} = F_1(\xi) \cdot F_2(\xi)$$

*Důkaz.* [1]. Nechť  $f(x) = f_1(x) * f_2(x)$ . Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{f(x)\} &= \sum_{x=0}^{N-1} \left( \sum_{s=0}^{N-1} f_1(s) \tilde{f}_2(x-s) \right) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} = \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} f_1(s) \sum_{x=0}^{N-1} \tilde{f}_2(x-s) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} = \left| p = x-s \right| = \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} f_1(s) \sum_{p=-s}^{N-1-s} \tilde{f}_2(p) e^{-\frac{2\pi i}{N} \xi(p+s)} = \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} f_1(s) e^{-\frac{2\pi i}{N} s \xi} \cdot \sum_{p=-s}^{N-1-s} \tilde{f}_2(p) e^{-\frac{2\pi i}{N} p \xi} = \\ &= F_1(\xi) \cdot F_2(\xi). \end{aligned}$$

□

### Součin funkcí

**Věta 3.11.** Nechť funkce  $f_1(x), f_2(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  mají Fourierova spektra  $F_1(\xi), F_2(\xi)$ . Potom [6]

$$\mathcal{D}\{f_1(x) \cdot f_2(x)\} = \frac{1}{N} F_1(\xi) * F_2(\xi).$$



*Důkaz.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}F_1(\xi) * F_2(\xi) &= \frac{1}{N} \sum_{\sigma=0}^{N-1} F_1(\sigma) \tilde{F}_2(\xi - \sigma) = \frac{1}{N} \sum_{\sigma=0}^{N-1} \left( F_1(\sigma) \sum_{t=0}^{N-1} f_2(t) e^{-\frac{2\pi i}{N} t(\xi - \sigma)} \right) = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{\sigma=0}^{N-1} F_1(\sigma) f_2(t) e^{-\frac{2\pi i}{N} t\xi} e^{\frac{2\pi i}{N} t\sigma} = \sum_{t=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{\sigma=0}^{N-1} F_1(\sigma) e^{\frac{2\pi i}{N} t\sigma} \right) f_2(t) e^{-\frac{2\pi i}{N} t\xi} = \\
&= \sum_{t=0}^{N-1} f_1(t) f_2(t) e^{-\frac{2\pi i}{N} t\xi} = \mathcal{D} \{f_1(x) \cdot f_2(x)\}
\end{aligned}$$

□

## Nultý prvek spektra

Přímo z definice vidíme, že

$$F(0) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{\frac{2\pi i}{N} x \cdot 0} = \sum_{x=0}^{N-1} f(x).$$

Tedy nulová frekvence spektra vyjadřuje součet všech prvků původního vektoru či matice.

## Transformace z transformace

**Věta 3.12.**

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \mathcal{D} \{ \mathcal{D} \{ f(x) \} \} = N \tilde{f}(-x), \\
\text{(b)} \quad & \mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D}^{-1} \{ f(x) \} \} = \frac{1}{N} \tilde{f}(-x), \\
\text{(c)} \quad & \mathcal{D} \{ f(x) \} = N \mathcal{D}^{-1} \{ \tilde{f}(-x) \}, \\
\text{(d)} \quad & \mathcal{D}^{-1} \{ f(x) \} = \frac{1}{N} \mathcal{D} \{ \tilde{f}(-x) \}
\end{aligned}$$

*Důkaz.*

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} \{ \mathcal{D} \{ f(x) \} \} &= \sum_{\xi=0}^{N-1} F(\xi) e^{-\frac{2\pi i}{N} x\xi} = \sum_{\xi=0}^{N-1} F(\xi) e^{\frac{2\pi i}{N} (-x)\xi} = \\
&= \left| \sigma = -\xi \right| = \sum_{\sigma=-N+1}^0 \tilde{F}(-\sigma) e^{\frac{2\pi i}{N} x\sigma} = \\
&= N \mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D} \{ \tilde{f}(-x) \} \} = N \tilde{f}(-x)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D}^{-1} \{ f(x) \} \} &= \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f(s) e^{\frac{2\pi i}{N} s\xi} \right) e^{\frac{2\pi i}{N} x\xi} = \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\xi=0}^{N-1} \left( \sum_{s=0}^{N-1} f(s) e^{-\frac{2\pi i}{N} (-s)\xi} \right) e^{\frac{2\pi i}{N} x\xi} = \left| u = -s \right| = \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\xi=0}^{N-1} \left( \sum_{u=-N+1}^0 \tilde{f}(-u) e^{-\frac{2\pi i}{N} u\xi} \right) e^{\frac{2\pi i}{N} x\xi} = \\
&= \frac{1}{N} \mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D} \{ \tilde{f}(-x) \} \} = \frac{1}{N} \tilde{f}(-x)
\end{aligned}$$

- (c) získáme z (a), když použijeme zpětnou Fourierovu transformaci na obě strany rovnosti.  
 (d) získáme z (c) nahrazením  $-x$  za  $x$  a dělením obou stran rovnosti  $N$ .

□

Tato vlastnost je velmi praktická pro praktické výpočty. Říká nám, že stačí výpočetně zvládnout dopřednou Fourierovu transformaci, zpětná je vlastně totéž co dopředná, jen s jistými úpravami, které nemají vliv na nějakou algoritmizaci výpočtu. Tedy stačí nám v jádru jediné FFT.

### 3.1.2 Důsledky základních vlastností

**Věta 3.13.**  $f$  je reálná funkce, tj.  $f(x) = f^*(x) \forall x \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , právě tehdy, když  $F(\xi) = \tilde{F}^*(-\xi)$ .

*Důkaz.*

- (a) Předpokládejme, že  $f$  je reálná funkce. Pak vlastnost č. 5 říká, že

$$F(\xi) = \mathcal{D}\{f(x)\} = \mathcal{D}\{f^*(x)\} = F^*(-\xi).$$

- (b) Předpokládejme, že  $F(\xi) = F^*(-\xi)$ . Pak z vlastnosti č. 5 a věty 3.3 o zpětné transformaci plyne

$$f(x) = \mathcal{D}^{-1}\{F(\xi)\} = \mathcal{D}^{-1}\{\tilde{F}^*(-\xi)\} = \mathcal{D}^{-1}\{\mathcal{D}\{f^*(x)\}\} = f^*(x).$$

□

**Věta 3.14.** Nechť  $f$  je reálná funkce, tj.  $f(x) = f^*(x) \forall x \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Pak  $A(\xi) = A(-\xi)$ .

*Důkaz.* Tvrzení je přímým důsledkem věty 3.13.

□

Tato věta je velmi důležitá pro aplikace. V praxi totiž pracujeme většinou s reálnými daty, například digitálními obrazy. Jejich amplitudové spektrum je středově symetrické, resp. v případě jednorozměrných dat symetrické kolem počátku, a tedy pokud chceme analyzovat amplitudové spektrum, stačí nám ho analyzovat polovinu, např. první a druhý kvadrant, v případě jednorozměrných dat např. jen kladnou část osy  $\xi$ . Zbytek nenese žádnou novou informaci.

**Věta 3.15.** Nechť funkce  $G(\xi) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje  $G(\xi) = \tilde{G}(-\xi)$ . Pak

$$\mathcal{D}^{-1}\{F(\xi) \cdot G(\xi)\}$$

je reálná funkce.

*Důkaz.* Podle věty 3.13, pokud  $f$  je reálná funkce, pak

$$F(\xi) = \tilde{F}^*(-\xi).$$

Vynásobíme-li rovnost  $G$ , dostaneme

$$F(\xi) \cdot G(\xi) = \tilde{F}^*(-\xi) \cdot \tilde{G}(-\xi) = (\tilde{F}(-\xi) \cdot \tilde{G}(-\xi))^*.$$

Pak znovu podle věty 3.13,

$$\mathcal{D}^{-1}\{F(\xi) \cdot G(\xi)\}$$

je reálná.

□

Jak klíčová je tato věta pro aplikace, jsme si uvedli již v případě funkcí dvou reálných proměnných. Tato věta nám říká, co musí splňovat váhová funkce  $G$ , kterou použijeme na spektrum, abychom nepoškodili reálnost vzniklého obrazu. Zde v diskrétním případě díky konečnosti sumy navíc odpadá požadavek na omezenost funkce vzhledem k tomu, že  $G$  je dána nějakou maticí obsahující nějaká (samozřejmě konečná) reálná čísla. V praxi stejně nejčastěji používáme váhy (prvky matice  $G$ ) z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Větu 3.13 můžeme díky symetrii diskrétní Fourierovy transformace přeformulovat i pro reálná spektra.

**Věta 3.16.** Spektrum funkce  $f$  je reálné, tj.  $F(\xi) = F^*(\xi) \forall \xi \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , právě tehdy, když  $f(x) = \tilde{f}^*(-x)$ .

*Důkaz.*

(a) Předpokládejme, že spektrum  $F$  je reálné. Pak

$$f(x) = \mathcal{D}^{-1} \{F(\xi)\} = \mathcal{D}^{-1} \{F^*(\xi)\} = \tilde{f}^*(-x).$$

(b) Předpokládejme, že  $f(x) = f^*(-x)$ . Pak

$$F(\xi) = \mathcal{D} \{f(x)\} = \mathcal{D} \{\tilde{f}^*(-x)\} = F^*(\xi).$$

□

Přímým důsledkem této věty je pak věta o transformaci funkcí, které jsou reálné a ještě k tomu sudé (středově symetrické) v rámci periodického pokračování nebo toho, jak funkci díky periodickému pokračování čteme „od konce“.

**Věta 3.17.** Nechť funkce  $f$  je reálná, tj.  $f(x) = f^*(x) \forall x \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , nechť tato funkce je středově symetrická, tj.  $f(x) = \tilde{f}(-x) \forall x \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Pak spektrum funkce  $f$  je reálné, tj.  $F(\xi) = F^*(\xi) \forall \xi \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

*Důkaz.* Část (b) důkazu věty 3.16 použitá na reálné funkce přímo dává tento výsledek. □

### 3.1.3 Vztah mezi diskretní Fourierovou transformací a Fourierovou řadou periodické funkce

Zdroj: [1] a disertační práce Hany Druckmüllerové [10]

Vyjdeme z funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , která je periodická s periodou  $p$ . Označme  $\Phi_f(x)$  její Fourierovu řadu. Napíšeme si ji zde v komplexním tvaru a než se pustíme do vlastního odvození vztahu mezi diskretní Fourierovou transformací a Fourierovou řadou periodické funkce, pojďme se podívat na vztah mezi komplexním a reálným tvarem Fourierovy řady.

$$\Phi_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i \frac{kx}{p}} = c_0 e^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k e^{2\pi i \frac{kx}{p}} + c_{-k} e^{-2\pi i \frac{kx}{p}} \right) = \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k \cos \frac{2\pi kx}{p} + c_k i \sin \frac{2\pi kx}{p} + c_{-k} \cos \frac{2\pi kx}{p} - c_{-k} i \sin \frac{2\pi kx}{p} \right) = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( (c_k + c_{-k}) \cos \frac{2\pi kx}{p} + i(c_k - c_{-k}) \sin \frac{2\pi kx}{p} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde

$$c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-2\pi i \frac{kx}{p}}.$$

jsou komplexní čísla. Pojďme koeficienty porovnat s koeficienty reálného tvaru

$$\Phi_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi kx}{p} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{p} \right), \quad (3.6)$$

kde  $a_k, b_k$  jsou reálná čísla. Srovnáním vztahů (3.5) a (3.6) snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k + c_{-k} &= a_k \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$i(c_k - c_{-k}) = b_k. \quad (3.8)$$

Pak stačí vhodně posčítat rovnice (3.7) a (3.8) a dostáváme

$$\begin{aligned} i \cdot 2c_k &= a_k i + b_k \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k). \end{aligned}$$

Využili jsme toho, že  $\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$ . Podobně  $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ . Srovnáním  $c_k$  a  $c_{-k}$  zjistíme, že  $c_k = c_{-k}^*$ . Nepřipomíná vám to něco, tato symetrie koeficientů  $c_k$ ? Fourierovu řadu jsme dělali pro reálnou funkci (nabývající reálných hodnot) a vyšlo nám, že pro koeficienty platí  $c_k = c_{-k}^*$ . Když jsme řešili Fourierovu transformaci reálné funkce (věta 2.40), zjistili jsme, že  $F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta)$ , což je vlastně obdobné tvrzení jako pro  $c_k$ . Prostě, ať už se jedná o Fourierovu transformaci, či Fourierovu řadu reálné funkce, vždy je tam tato forma symetrie.

Pojďme teď směřovat k diskrétní Fourierově transformaci. Funkci  $f$  budeme vzorkovat s ekvidistantním dělením s  $N$  dílky o délce  $\frac{p}{N}$  na každém intervalu délky  $p$ . Označme

$$\overset{\square}{f}(n) = f\left(n \frac{p}{N}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Formálně dosadíme vztah (3.4) do (3.9) v bodě, kde  $\Phi_f$  konverguje k  $f$  (což je prakticky všude, detaily jinde).

$$\overset{\square}{f}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i \frac{k}{p} n \frac{p}{N}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i \frac{kn}{N}}.$$

Funkce  $e^{2\pi i \frac{kn}{N}}$  jsou periodické v proměnné  $k$  s periodou  $N$ , proto můžeme položit  $k = l + Nm$ , kde  $m \in \mathbb{Z}, l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , a přepsat rovnici (3.1.3) jako

$$\begin{aligned} \overset{\square}{f}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} c_{l+Nm} e^{\frac{2\pi i}{N} n(l+Nm)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} c_{l+Nm} e^{2\pi i \frac{nl}{N}} \overbrace{e^{2\pi i mn}}^{=1} \stackrel{*}{=} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{l+Nm} e^{2\pi i \frac{nl}{N}} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{nl}{N}} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{l+Nm}}_{\overset{\square}{F}(l)}. \end{aligned}$$

Rovnost  $\stackrel{*}{=}$  je přerovnání řady, což můžeme za podmínky absolutní konvergence  $c_k$ . S novým označením píšeme

$$\overset{\square}{f}(n) = \sum_{l=0}^{N-1} \overset{\square}{F}(l) e^{2\pi i \frac{nl}{N}},$$

což je skoro přesně vztah pro (jednorozměrnou) zpětnou diskrétní Fourierovu transformaci, pouze faktor  $\frac{1}{N}$  v něm chybí. Tedy

$$\frac{1}{N} \overset{\square}{f}(n) = \mathcal{D}^{-1} \left\{ \overset{\square}{F} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \overset{\square}{F}(l) e^{2\pi i \frac{nl}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} \overset{\square}{f}(t) e^{-2\pi i \frac{tl}{N}} e^{2\pi i \frac{nl}{N}}.$$

$$\mathcal{D} \left\{ \overset{\square}{f}(t) \right\} (l) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} c_{l+mN}$$

Pokud nejsou koeficienty  $c_k$  nulové mimo nějaký interval délky  $N$  (teda samozřejmě že zde mluvíme o celých číslech, takže interval není úplně šťastné slovo, ale zase se u něj dobře mluví o délce, jistě mi rozumíte...), pak dojde při sčítání k překrývání frekvencí a pokud k vzorkování takového signálu použijeme  $N$  dílků, dojde ke ztrátě informací. S tím souvisejí takové pojmy z oblasti zpracování signálů jako band-limited function (tedy funkce, u které k překrývání frekvencí nedojde pro dostatečně velké  $N$ ), pásmo, rozsah atd. Pro band-limited functions jsou Fourierova řada a diskrétní Fourierova transformace ekvivalentní pojmy.

### 3.1.4 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Zdroje: [26], [6], [5]

Výpočet diskretní Fourierovy transformace z definice je časově velmi náročný – kvadraticky, je potřeba provést  $N^2$  komplexních násobení a  $N^2$  komplexních sčítání. Něco jako diskretní Fourierova transformace bylo poprvé použito již v roce 1805 Carlem Friedrichem Gaussem a již tehdy se snažil o nějaké optimalizace výpočtu. Další autoři přicházeli s dalšími zrychleními. Přelomem byla práce Jamese Cooleyho a Johna Tukeyho [5] z roku 1964, kteří vytvořili algoritmus s výpočetní náročností  $O(N \ln N)$ , který chtěla IBM, pro kterou tehdy Cooley pracoval, patentovat, ale nakonec se to nepodařilo z důvodu, že Tukey pro ně nepracoval, a tak se stal algoritmus volně použitelný. Jimi popsáný algoritmus dostal označení *Fast Fourier Transform*. Stále se pracuje na rychlejších algoritmech, i když jsou změny stále menší a menší. Pro praktické uživatelské použití můžeme FFT brát jako ekvivalent diskretní Fourierovy transformace a nemusíme řešit, jak je uvnitř implementována.

Pro účely tohoto kurzu si vystačíme s tím, že rychlá Fourierova transformace je efektivním způsobem výpočtu diskretní Fourierovy transformace, po analytické stránce se jedná o to samé, po numerické stránce nemá smysl řešit rozdíl. Co je důležité vědět, je, že klasická FFT Cooleyho a Tukeyho je výrazně nejrychlejší pro matice o rozměrech  $2^n$ , případně ještě  $k \cdot 2^n$ , kde  $n$  je nějaké přirozené číslo a  $k$  je nějaké malé přirozené číslo. Pokročilejší algoritmy mohou pracovat efektivně i pro jiné rozměry matic. V případě implementace výpočtu většího počtu Fourierových transformací v jednom programu nebo při práci s maticemi větších rozměrů je vhodné si vyzkoušet, jak se chová konkrétní používaná implementace FFT, případně se preventivně omezit na matice rozměrů uvedeného tvaru.

KOUKÁM, ŽE TADY MELU NĚCO O MATICÍCH, ALE CHCE TO SPÍŠE NAPSAT PRO POSLOUPNOSTI

## 3.2 Dvourozměrná diskretní Fourierova transformace

SEM SE TOHO PLNO ZOPAKUJE BEZ DŮKAZU, HODÍ SE SEM TABULKA ATD.

**Definice 3.18 (Diskretní Fourierova transformace – 2D).** Nechť  $f(x, y)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$ . *Diskretní Fourierova transformace* funkce  $f(x, y)$  je funkce  $\mathcal{D}\{f\}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\xi, \eta) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-2\pi i (\frac{x\xi}{N} + \frac{y\eta}{M})} \quad (3.10)$$

**Definice 3.19 (Zpětná diskretní Fourierova transformace).** Nechť  $F(\xi, \eta)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$ . *Zpětná diskretní Fourierova transformace* funkce  $F(\xi, \eta)$  je funkce  $\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{D}^{-1}\{F\}(x, y) = \frac{1}{NM} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{M-1} F(\xi, \eta) e^{2\pi i (\frac{x\xi}{N} + \frac{y\eta}{M})}. \quad (3.11)$$

**Věta 3.20 (Věta o zpětné transformaci).** Nechť  $f(x, y)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$  a nechť  $F(\xi, \eta)$  je její Fourierova transformace. Pak zpětná Fourierova transformace funkce  $F(\xi, \eta)$  je funkce  $f(x, y)$ , tj.

$$\mathcal{D}^{-1}\{\mathcal{D}\{f(x, y)\}\} = f(x, y).$$

*Důkaz.* Osobně neznám žádný knižní zdroj, kde by byl tento důkaz uveden. Sama ho mám v jednorozměrném případě z přednášky skvělého pedagoga Hjalmar Rosengrena z mého pobytu na Chalmers University of Technology ve švédském Göteborgu [20]. Pokud zdroj znáte, odkažte mě na něj, ráda ho zde uvedu. Ale ono

na tom důkazu není nic objevného ani technicky náročného.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D} \{ f(x, y) \} \} &= \frac{1}{NM} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{M-1} F(\xi, \eta) e^{2\pi i (\frac{x\xi}{N} + \frac{y\eta}{M})} = \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{M-1} f(s, t) e^{-2\pi i (\frac{s\xi}{N} + \frac{t\eta}{M})} e^{2\pi i (\frac{x\xi}{N} + \frac{y\eta}{M})} = \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{M-1} f(s, t) \sum_{\xi=0}^{N-1} \sum_{\eta=0}^{M-1} e^{\xi 2\pi i (\frac{x-s}{N})} e^{\eta 2\pi i (\frac{y-t}{M})} = \\
&= \frac{1}{NM} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{M-1} f(s, t) \underbrace{\left( \sum_{\xi=0}^{N-1} \left( e^{2\pi i \frac{(x-s)}{N}} \right)^{\xi} \right)}_{g(s)} \underbrace{\left( \sum_{\eta=0}^{M-1} \left( e^{2\pi i \frac{(y-t)}{M}} \right)^{\eta} \right)}_{g(t)}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že  $g(s)$  je konečná geometrická řada, můžeme určit její součet.

(a) Pokud  $x = s$ , pak  $e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)} = 1$ , tedy  $g(s) = N$ .

(b) Pokud  $x \neq s$ , víme, že  $1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)} \neq 0$ , a proto můžeme tímto výrazem dělit

$$g(s) = \frac{1 - \left( e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)} \right)^N}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)}} = \frac{1 - e^{2\pi i(x-s)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(x-s)}} = 0.$$

Analogicky,

$$g(t) = \begin{cases} M & \text{pro } y = t \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Proto,

$$\mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D} \{ f(x, y) \} \} = \frac{1}{NM} f(x, y) \cdot N \cdot M = f(x, y).$$

□

**Definice 3.21 (Amplitudové spektrum, fázové spektrum).** Amplitudové spektrum funkce  $f$  je funkce  $A(\xi, \eta) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná jako

$$A(\xi, \eta) = |\mathcal{D} \{ f(x, y) \}| = |F(\xi, \eta)|.$$

Fázové spektrum funkce  $f$  je funkce  $\Phi(\xi, \eta) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \langle 0, 2\pi \rangle$  definovaná jako

$$\begin{aligned}
\Re F(\xi, \eta) &= A(\xi, \eta) \cos \Phi(\xi, \eta), \\
\Im F(\xi, \eta) &= A(\xi, \eta) \sin \Phi(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Pokud  $A(\xi, \eta) = 0$  pro nějaké  $(\xi, \eta)$ , položíme  $\Phi(\xi, \eta) = 0$ .

### 3.2.1 Vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace

**Definice 3.22 (Periodizace funkce a jejího Fourierova spektra).** Necht  $f(x, y)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$  a necht  $F(\xi, \eta)$  je její Fourierovo spektrum. Periodizace Fourierova spektra  $F$  je funkce  $\tilde{F}(\xi, \eta) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná jako

$$\tilde{F}(\xi, \eta) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-2\pi i (\frac{x\xi}{N} + \frac{y\eta}{M})}.$$

Periodizace funkce  $f$  je funkce  $\tilde{f}(x, y) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definovaná jako

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} F(\xi, \eta) e^{2\pi i (\frac{x\xi}{N} + \frac{y\eta}{M})}.$$

	$f(x, y)$	$F(\xi, \eta)$	
1.	$\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$	$\alpha F(\xi, \eta) + \beta G(\xi, \eta)$	linearita
2.	$\tilde{f}(x - x_0, y - y_0)$	$F(\xi, \eta) \cdot e^{-2\pi i(\frac{\xi x_0}{N} + \frac{\eta y_0}{M})}$	posun v prostoru
3.	$e^{2\pi i(\frac{\xi_0 x}{N} + \frac{\eta_0 y}{M})} f(x, y)$	$\tilde{F}(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$	posun ve spektru (modulace)
4.	$\tilde{f}(-x, -y)$	$\tilde{F}(-\xi, -\eta)$	otočení os
5.	$f^*(x, y)$	$\tilde{F}^*(-\xi, -\eta)$	komplexní sdružení
6.	$(f * g)(x, y)$	$F(\xi, \eta) \cdot G(\xi, \eta)$	periodická konvoluce
7.	$f(x, y) \cdot g(x, y)$	$\frac{1}{NM}(F * G)(\xi, \eta)$	součin funkcí

Tabulka 3.2: Základní vlastnosti diskretní Fourierovy transformace funkcí dvou proměnných.

## Linearita

Linearita je zjevná, vychází z vlastností konečných součtů, v zásadě se jedná o distributivní zákon.

## Posun v prostoru

**Věta 3.23.** Necht'  $f_1(x, y)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$  a necht'  $F_1(\xi, \eta)$  je její Fourierovo spektrum. Uvažujme funkci

$$f_2(x, y) = \tilde{f}_1(x - x_0, y - y_0),$$

kde  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$  jsou daná čísla. Necht'  $F_2(\xi, \eta)$  je Fourierovo spektrum  $f_2(x, y)$ . Pak platí

$$F_2(\xi, \eta) = e^{-2\pi i(\frac{\xi x_0}{N} + \frac{\eta y_0}{M})} F_1(\xi, \eta).$$

## Posun ve spektru

*Důkaz.*

$$F_2(\xi) = \sum_{x=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} x \xi_0} f_1(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \xi} = \sum_{x=0}^{N-1} f_1(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x(\xi - \xi_0)} = F(\xi - \xi_0)$$

□

## Otočení os

**Věta 3.24.** Necht'  $f(x, y)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$  s Fourierovým spektrem  $F(\xi, \eta)$ . Fourierova transformace funkce  $f$  s otočenými osami je funkce  $F$  s otočenými osami, tedy

$$\mathcal{D} \left\{ \tilde{f}(-x, -y) \right\} = \tilde{F}(-\xi, -\eta)$$

## Komplexní sdružení

**Věta 3.25.** Necht'  $f(x, y)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N, M \in \mathbb{N}$  a necht'  $F(\xi, \eta)$  je její Fourierovo spektrum. Fourierovo spektrum funkce, která je komplexně sdružená k funkci  $f$  je její komplexně sdružené Fourierovo spektrum s otočenými osami [14]

$$\mathcal{D} \{ f^*(x, y) \} = F^*(-\xi, -\eta).$$

## Periodická konvoluce

**Definice 3.26.** Necht  $f_1(x, y), f_2(x, y)$  jsou funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}, N, M \in \mathbb{N}$ . Funkce  $f(x, y)$  se nazývá *diskrétní periodická konvoluce* [1] funkcí  $f_1, f_2$  (značeno jako  $f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y)$ ), jestliže

$$f(x, y) = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{M-1} f_1(s, t) \tilde{f}_2(x-s, y-t).$$

**Věta 3.27.** Necht funkce  $f_1(x, y), f_2(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}, N, M \in \mathbb{N}$  mají Fourierova spektra  $F_1(\xi, \eta), F_2(\xi, \eta)$ . Potom

$$\mathcal{D}\{f_1(x, y) * f_2(x, y)\} = F_1(\xi, \eta) \cdot F_2(\xi, \eta)$$

## Součin funkcí

**Věta 3.28.** Necht funkce  $f_1(x, y), f_2(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}, N, M \in \mathbb{N}$  mají Fourierova spektra  $F_1(\xi, \eta), F_2(\xi, \eta)$ . Potom [6]

$$\mathcal{D}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} = \frac{1}{NM} F_1(\xi, \eta) * F_2(\xi, \eta).$$

## Nultý prvek spektra

Přímo z definice vidíme, že

$$F(0, 0) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{2\pi i \left( \frac{x \cdot 0}{N} + \frac{y \cdot 0}{M} \right)} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y).$$

Tedy nulová frekvence spektra vyjadřuje součet všech prvků původního vektoru či matice.

## Transformace z transformace

**Věta 3.29.** Necht  $f(x, y)$  je funkce  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}, N, M \in \mathbb{N}$ . Pak platí

$$\begin{aligned} (a) \quad & \mathcal{D}\{\mathcal{D}\{f(x, y)\}\} = NM \tilde{f}(-x, -y), \\ (b) \quad & \mathcal{D}^{-1}\{\mathcal{D}^{-1}\{f(x, y)\}\} = \frac{1}{NM} \tilde{f}(-x, -y), \\ (c) \quad & \mathcal{D}\{f(x, y)\} = NM \mathcal{D}^{-1}\{\tilde{f}(-x, -y)\}, \\ (d) \quad & \mathcal{D}^{-1}\{f(x, y)\} = \frac{1}{NM} \mathcal{D}\{\tilde{f}(-x, -y)\} \end{aligned}$$

Tato vlastnost je velmi praktická pro praktické výpočty. Říká nám, že stačí výpočetně zvládnout dopřednou Fourierovu transformaci, zpětná je vlastně totéž co dopředná, jen s jistými úpravami, které nemají vliv na nějakou algoritmizaci výpočtu. Tedy stačí nám v jádru jediné FFT.

### 3.2.2 Důsledky základních vlastností

**Věta 3.30.**  $f$  je reálná funkce, tj.  $f(x, y) = f^*(x, y) \forall (x, y) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\}$ , právě tehdy, když  $F(\xi, \eta) = \tilde{F}^*(-\xi, -\eta)$ .

*Důkaz.*

(a) Předpokládejme, že  $f$  je reálná funkce. Pak vlastnost č. 5 říká, že

$$F(\xi, \eta) = \mathcal{D}\{f(x, y)\} = \mathcal{D}\{f^*(x, y)\} = F^*(-\xi, -\eta).$$



(b) Předpokládejme, že  $F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta)$ . Pak z vlastnosti č. 5 a věty 3.20 o zpětné transformaci plyne

$$f(x, y) = \mathcal{D}^{-1} \{F(\xi, \eta)\} = \mathcal{D}^{-1} \left\{ \tilde{F}^*(-\xi, -\eta) \right\} = \mathcal{D}^{-1} \{ \mathcal{D} \{f^*(x, y)\} \} = f^*(x, y).$$

□

**Věta 3.31.** Nechť  $f$  je reálná funkce, tj.  $f(x, y) = f^*(x, y) \forall (x, y) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\}$ . Pak  $A(\xi, \eta) = A(-\xi, -\eta)$ .

*Důkaz.* Tvrzení je přímým důsledkem věty 3.30. □

Tato věta je velmi důležitá pro aplikace. V praxi totiž pracujeme většinou s reálnými daty, například digitálními obrazy. Jejich amplitudové spektrum je středově symetrické, resp. v případě jednorozměrných dat symetrické kolem počátku, a tedy pokud chceme analyzovat amplitudové spektrum, stačí nám ho analyzovat polovinu, např. první a druhý kvadrant, v případě jednorozměrných dat např. jen kladnou část osy  $\xi$ . Zbytek nenese žádnou novou informaci.

**Věta 3.32.** Nechť funkce  $G(\xi, \eta) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje  $G(\xi, \eta) = \tilde{G}(-\xi, -\eta)$ . Pak

$$\mathcal{D}^{-1} \{F(\xi, \eta) \cdot G(\xi, \eta)\}$$

je reálná funkce.

*Důkaz.* Podle věty 3.30, pokud  $f$  je reálná funkce, pak

$$F(\xi, \eta) = \tilde{F}^*(-\xi, -\eta).$$

Vynásobíme-li rovnost  $G$ , dostaneme

$$F(\xi, \eta) \cdot G(\xi, \eta) = \tilde{F}^*(-\xi, -\eta) \cdot \tilde{G}(-\xi, -\eta) = (\tilde{F}(-\xi, -\eta) \cdot \tilde{G}(-\xi, -\eta))^*.$$

Pak znovu podle věty 3.30,

$$\mathcal{D}^{-1} \{F(\xi, \eta) \cdot G(\xi, \eta)\}$$

je reálná. □

Jak klíčová je tato věta pro aplikace, jsme si uvedli již v případě funkcí dvou reálných proměnných. Tato věta nám říká, co musí splňovat váhová funkce  $G$ , kterou použijeme na spektrum, abychom nepoškodili reálnost vzniklého obrazu. Zde v diskretním případě díky konečnosti sumy navíc odpadá požadavek na omezenost funkce vzhledem k tomu, že  $G$  je dána nějakou maticí obsahující nějaká (samozřejmě konečná) reálná čísla. V praxi stejně nejčastěji používáme váhy (prvky matice  $G$ ) z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Větu 3.30 můžeme díky symetrii diskretní Fourierovy transformace přeformulovat i pro reálná spektra.

**Věta 3.33.** Spektrum funkce  $f$  je reálné, tj.  $F(\xi, \eta) = F^*(\xi, \eta) \forall (x, y) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\}$ , právě tehdy, když  $f(x, y) = \tilde{f}^*(-x, -y)$ .

*Důkaz.*

(a) Předpokládejme, že spektrum  $F$  je reálné. Pak

$$f(x, y) = \mathcal{D}^{-1} \{F(\xi, \eta)\} = \mathcal{D}^{-1} \{F^*(\xi, \eta)\} = \tilde{f}^*(-x, -y).$$

(b) Předpokládejme, že  $f(x, y) = \tilde{f}^*(-x, -y)$ . Pak

$$F(\xi, \eta) = \mathcal{D} \{f(x, y)\} = \mathcal{D} \left\{ \tilde{f}^*(-x, -y) \right\} = F^*(\xi, \eta).$$

□

Přímým důsledkem této věty je pak věta o transformaci funkcí, které jsou reálné a ještě k tomu sudé (středově symetrické) v rámci periodického pokračování nebo toho, jak funkci díky periodickému pokračování čteme „od konce“.

**Věta 3.34.** Nechť funkce  $f$  je reálná, tj.  $f(x, y) = f^*(x, y) \forall (x, y) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\}$ , nechť tato funkce je středově symetrická, tj.  $f(x, y) = \tilde{f}(-x, -y) \forall (x, y) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\}$ . Pak spektrum funkce  $f$  je reálné, tj.  $F(\xi, \eta) = F^*(\xi, \eta) \forall (x, y) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\}$ .

*Důkaz.* Část (b) důkazu věty 3.33 použitá na reálné funkce přímo dává tento výsledek. □

### 3.2.3 Diskrétní Fourierova transformace vybraných funkcí

V případě Fourierovy transformace funkcí jedné nebo dvou reálných proměnných jsme řešili transformaci z Diracovy distribuce. Její diskétní obdobou je *diskrétní impulz*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) = (0, 0) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Velmi snadno určíme Fourierovu transformaci diskrétního impulsu  $\mathcal{D}\{d(x, y) = 1\}$ .

*Důkaz.*

$$\mathcal{D}\{d(x, y)\} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} d(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N} (x\xi + y\eta) = 1 \cdot e^0 = 1}$$

□

Na základě věty 3.29 snadno určíme Fourierovu transformaci z jedničky (konstatní funkce)

$$\mathcal{D}\{1\} = \mathcal{D}\{\mathcal{D}\{d(x, y)\}\} = N^2 \tilde{d}(-x, -y) = N^2 d(x, y).$$

### 3.2.4 Vykreslení spektra

Vykreslení matice reálných čísel je celkem běžná operace, výsledkem je obraz ve stupních šedi. To dělá v podstatě každý grafický program. Pak je tu celý obor zpracování obrazů (image processing), který se mimo jiné věnuje i tomu, jak taková data vykreslit, aby na nich bylo vidět to, co vidět chceme.

Fourierovské spektrum je ovšem maticí obecně komplexních čísel, takže jejich vykreslení není tak triviální. Navíc má i z vlastností diskrétní Fourierovy transformace další vlastnosti, které při vykreslení můžeme řešit. Pojdme se nejdříve věnovat vykreslení fourierovského spektra nějakého jednoduchého uměle vytvořeného obrazu. Následně si ukážeme, v čem se liší spektra obrázků získaných jako digitální fotografie.

Lze vykreslit matici komplexních čísel jako jeden obrázek, ve kterém budou komplexní čísla vykreslená? Ano, jde například využít barevného prostoru HSV - hue, saturation, value. Možná ho neznáte teoreticky, ale jistě znáte z výběru barvy v kdekterém programu možnost vybrat si barvu a pak měnit jen její jas. A tu barvu vybíráte ze čtverce, kde na jedné ose se mění odstín (modrá, zelená, žlutá, ...) a na druhé jakási barevná čistota této barvy. Velmi pěkné vysvětlení, jak funguje barevný prostor HSV, najdete např. na [27]. Když chceme pomocí prostoru HSV vykreslit komplexní číslo, využijeme toho, že složka H (barevný odstín) je cyklická a do ní uložíme fázi komplexního čísla. Do složky jasové, tedy V, vložíme absolutní hodnotu komplexního čísla. Složku S, saturaci, sytost barvy, necháme na maximum. Velkou výhodou takto vytvořeného obrazu je i to, že v místech, kde je komplexní číslo nulové, tedy nemá smysl definovat fázi (běžně se uměle definuje jako nulová), ani není potřeba fázi řešit, protože jas 0 žádnou fázi ani neřeší. Nevýhodou může být, že v místech s menší, ale stále nenulovou absolutní hodnotou nemusí být fáze dobře vidět.

Další možnost je vytvořit obrázky dva, jeden černobílý obrázek absolutní hodnoty a druhý fáze, kde je vhodné použít nějakou cyklickou barevnou škálu. Samozřejmě jde použít i černobílý obraz pro fázi, ovšem tam bude nespojitost mezi maximem a minimem (např. 0 a  $2\pi$ , případně  $-\pi$  a  $\pi$ ), která vlastně pro fázi splývají.

Poslední věcí, kterou je potřeba si uvědomit, než se pustíme do vlastního vykreslení, je to, že všechny (obrazové) matice, se kterými pracujeme, mají počátek v rohu, vlevo nahoře. Ovšem když si vykresluje

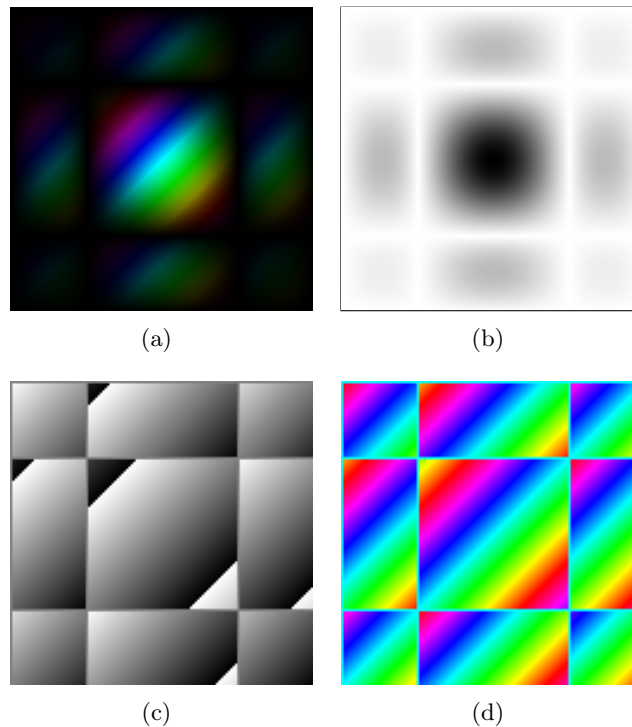
spektra, jsme zvyklí, že počátek je uprostřed, zvláště jsme tak zvyklí z funkcí jedné a dvou reálných proměnných. Jak za chvíli uvidíme a jak jsme viděli i u spekter, která jsme měli u funkcí jedné nebo dvou reálných proměnných, maximum hodnot (amplitudového) spektra bývá v počátku. Obrázky spekter, kde maximum je ve všech rozích, by mohly být špatně čitelné, a tak se před vykreslením spektra po výpočtu diskretní Fourierovy transformace provádí ještě prohození kvadrantů matice tak, aby se rohy dostaly doprostřed, levý horní se prohodí s pravým horním, levý dolní s pravým horním. Této úpravě se říká též permutace spektra. V Matlabu se na to používá funkce `fftshift`, zpětnou konverzi, kterou je nutné provést před dalším použitím spektra pro výpočty, zajistí `ifftshift`. (Dvě funkce jsou potřeba proto, že v případě matice lichých rozměrů je potřeba nějak rozhodnout, který kvadrant bude o jeden sloupec či řádek větší a který menší. Nějak bylo rozhodnuto a z toho důvodu pak nestačí v obecném případě funkci aplikovat dvakrát, abychom dostali původní matici). Všechna spektra tedy budeme vykreslovat již s prohozenými kvadranty.

Jako první testovací obrázek pro vykreslení si vezmeme matici  $128 \times 128$  odpovídající funkci

$$(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x, y \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.12)$$

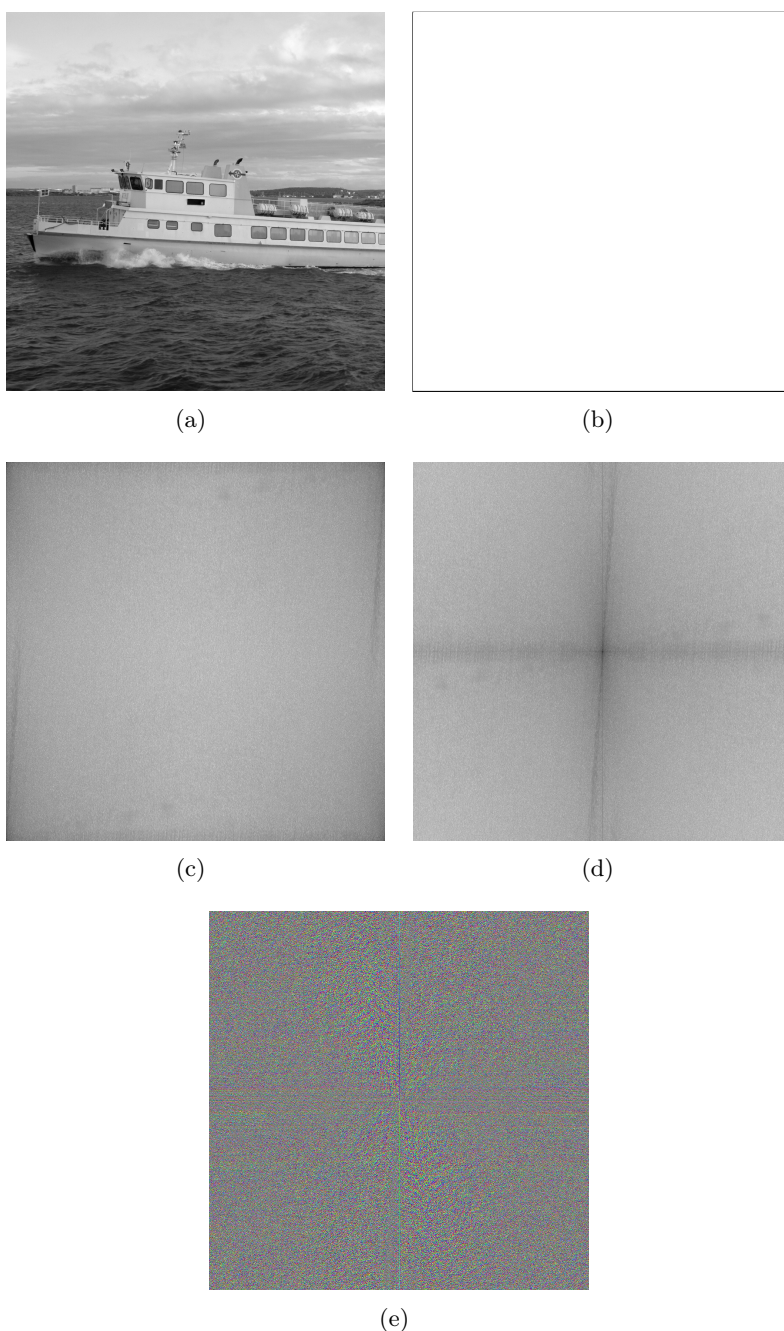
Na obrázku 3.1 si vykreslíme fourierovské spektrum v barevném prostoru HSV a samostatně amplitudové spektrum, fázové spektrum černobíle a fázové spektrum pomocí cyklické barevné škály vycházející z barevného prostoru HSV. Je hezky vidět, že obrázek v prostoru HSV sice znázorňuje vše v jednom, ale pro nižší hodnoty amplitudy je fáze hůře čitelná. Taktéž je vidět, že v místech s nulovou intenzitou byla intenzita „uměle dodefinována“ na nulu dochází v nich k přeskokům fáze o  $\pi$ .

Co dalšího se dá vyčíst z tohoto spektra? Amplitudové spektrum odpovídá součinu funkce  $\frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y}$ , funkce  $f$  je totiž posunutou funkcí dvourozměrného jednotkového zubu. Pokud by čtverec, kde je hodnota funkce nenulová, symetrický kolem počátku, bylo by spektrum reálné, fáze by byla nula (pro nezáporné hodnoty spektra) nebo  $\pi$  (pro záporné hodnoty spektra). Je vidět, že čtverec je o 2 posunutý v obou směrech, protože z vlastností diskretní Fourierovy transformace víme, že posun na vstupu nám způsobí modulaci ve spektru, neboli vynásobení spektra komplexní exponenciálou, a opravdu tato komplexní exponenciála stihne dvakrát rozsah hodnot  $-\pi, \pi$  na každé jeho hraně.



Obrázek 3.1: Permutované fourierovské spektrum funkce  $f$  ze vztahu (3.12): (a) V prostoru HSV. (b) Amplitudové spektrum jako negativ, tj. nejvyšší hodnoty jsou nejtmavší. (c) Fázové spektrum ve stupních šedi, černá odpovídá  $-\pi$ , bílá  $\pi$ . (d) Fázové spektrum v cyklické barevné škále vycházející z barevného prostoru HSV.

V dalším se zaměříme na nějakou digitální fotografii. Jako testovací obraz si vezmeme obrázek č. 3.2a. Říkejme mu pracovně Vipanu, tak totiž ta loď jmenovala<sup>1</sup>. Začneme tím, že vykreslíme nezpermutované



Obrázek 3.2: Vykreslení amplitudového spektra: (a) Testovací obrázek Vipanu. (b) Amplitudové spektrum Vipanu. (c) Logaritmované amplitudové spektrum Vipanu. (d) Logaritmované amplitudové spektrum Vipanu po prohození kvadrantů. (e) Fázové spektrum Vipanu. Všechna spektra jsou vykreslena v negativu, tj. černá je maximální hodnota, bílá je minimální.

amplitudové spektrum – obrázek 3.2(b). Vidíme, že nic nevidíme. Výsledkem je totiž puntík na souřadnicích  $[0, 0]$  a jinak nic. Proč? Protože hodnota  $F(0, 0)$  dramaticky převyšuje hodnoty v ostatních bodech. Abychom tedy mohli v amplitudovém spektru něco vidět, aplikujeme na něj nějakou silně nelineární funkci, kterou potlačíme výšku peaku. Zvykově se používá funkce logaritmus, tedy

$$A_1(\xi, \eta) = \ln(A(\xi, \eta) + 1),$$

<sup>1</sup>Fotka ji zachycuje v roce 2009 mezi göteborgským přístavem Saltholmen a jižním göteborgským souostrovím (Göteborgs skärgård). Autorka Hana Druckmüllerová.

kde  $A$  je amplitudové spektrum původní. Jedničku přičítáme proto, aby výsledný logaritmus byl kladný a abychom nemuseli řešit logaritmus nuly. Získáváme obrázek 3.2(c), na němž je krásně vidět, že maxima nabývá amplitudové spektrum kolem počátku, proto se provádí permutace spektra. Permutované spektrum je na obrázku 3.2(c). Takový obrázek bude pro nás standardním způsobem vykreslení amplitudového spektra, tedy spektra fotografií a dalších „běžných“ obrázků budeme zobrazovat logaritmovaná a permutovaná. Můžeme si vykreslit i spektrum fázové (3.2(e)), ale narozdíl od zvláště jednoduchých funkcí, jako je jednotkový zub, neobsahuje fázové spektrum zpravidla žádnou lidsky čitelnou informaci, a tak si ve většině případů v aplikacích fázové spektrum vůbec nevykresluje. Na druhou stranu je fascinující, že pouze na fázovém spektru je založena fázová korelace (viz sekce 4.4), což je metoda na sesazování obrazů. Pouze pomocí fázových spekter obrazů je tato metoda schopná najít posunutí mezi dvěma obrazy.

Pojďme se podívat, co vše je z tohoto amplitudového spektra vidět. Čemu odpovídá ta tenoučká svislá čára ve spektru? Odpovídá vodorovné hraně obrazu. Tím, jak se diskrétní Fourierova transformace chová k obrazu, jako by byl do všech směrů periodicky rozkopírovaný jako šachovnice, tak přechod mezi oblohou a vodou je značný a vytvoří tuto svislou čáru. Naopak vodorovnou čáru tam žádnou takto ostrou nevidíme, periodické pokračování doprava a doleva neznamena nijak ostrý přechod, z oblohy jdeme zase do oblohy, z vody zase do vody, asi tam nějaká změna hodnot pixelů je, ale ne tak významná. Velmi zajímavá je ta šikmá téměř svislá čára. Ta totiž odpovídá vodorovným směrům na lodi, která je ovšem celkově trochu nakloněná.

# Kapitola 4

## Aplikace

Prakticky všechny aplikace Fourierovy transformace vyžadují před výpočty Fourierovy transformace ji modifikovat tak, aby v „šachovnici“, která vznikne periodickým opakováním obrazu, nebyla hranice mezi obrazy výraznou strukturou, resp. mezi jednotlivými opakováními vektoru signálu v případě jednorozměrných dat. To se zajistí tak, že hranice mezi obrazy vhodným způsobem odstraní. Hodnoty pixelů v obraze se přenásobí vhodnou váhovou funkcí takovou, že uprostřed obrazu a v nějakém dostatečně velkém okolí je váha 1 a od určitého místa dál pak dochází ke spojitému přechodu na nulu. Použijeme-li jádro (oblast, kde je váha rovná nule) kruhové, zcela tím odstraníme informaci o okrajích a jejich směru, což se může hodit v případě, že v obraze studujeme významné směry nebo třeba řešíme jeho natočení. Na druhou stranu tím odstraníme nemalou část obrazu, která může obsahovat smysluplné struktury pro sesazení. Při použití čtvercového jádra je nutné si uvědomit, že informace o směru okrajů nebyla zcela odstraněna, ale v mnohých aplikacích toto nevádí a naopak využijeme větší část obrazu. Jako funkce postupného přechodu se nejčastěji používají dvě funkce, a to

- (a) *Hannova funkce*, přechod je tvořen vhodně posunutým a naškálovaným kosinem, pro případ kruhového jádra je to

$$g(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \rho < r_1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(\rho-r_1)}{r_2-r_1} & \text{pro } r_1 \leq \rho \leq r_2, \\ 0 & \text{pro } \rho > r_2 \end{cases}$$

s tím, že  $\rho$  je vzdálenost od středu obrazu a  $r_1$  je poloměr jádra,  $r_2$  je poloměr, od kterého je již váhová funkce rovna nule. Výhodou této funkce je spojitost v první derivaci a to, že od určitého poloměru je váha zcela nulová.

- (b) *Gaussova funkce*, přechod je tvořen posunutou a naškálovanou Gaussovou funkcí, pro případ kruhového jádra je to

$$g(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \rho < r_1, \\ e^{-\frac{(\rho-r_1)^2}{\sigma^2}} & \text{jinak} \end{cases}$$

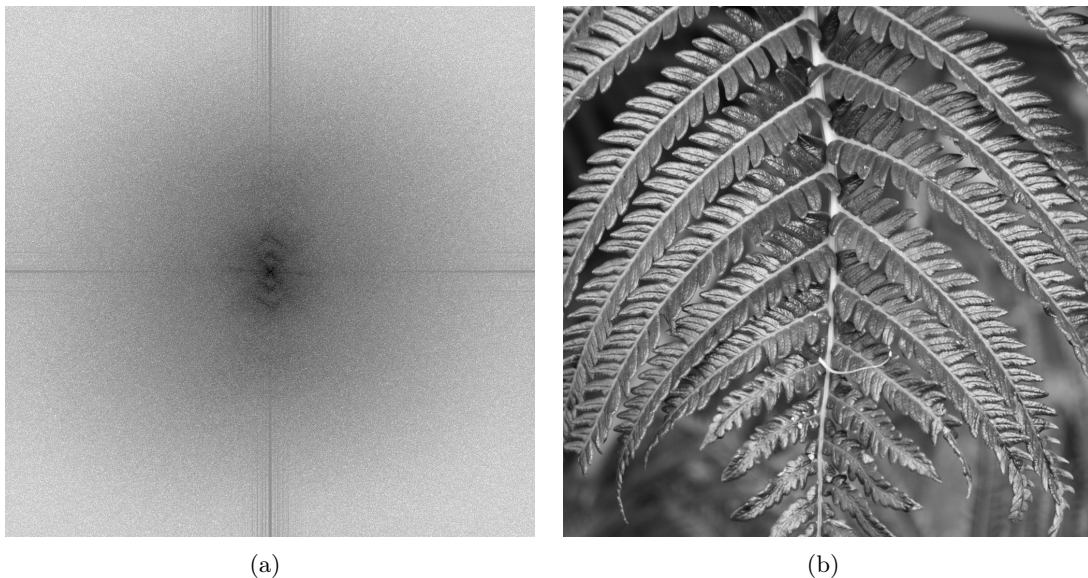
s tím, že  $\rho$  je vzdálenost od středu obrazu a  $r_1$  je poloměr jádra,  $\sigma$  je nějaké vhodné kladné číslo. Čistě teoreticky tato funkce nikdy neklesne na nulu, ale v praxi ji od určité hodnoty již můžeme považovat za nulovou (závisí na datovém typu, který používáme).

### 4.1 Základní modifikace spektra

V této části si ukážeme zcela základní modifikace spektra (vynulování hodnot spektra v určité jeho části) a jaké to má následky na obraz. Samo o sobě to nemá tak velké aplikace, ale umožní nám to „vidět“, co které frekvence znamenají (a následně se to rozhodně v nějakých aplikacích využít dá). Testovacím obrázkem v této části nám bude obrázek, kterému budeme pracovně říkat Kapradina<sup>1</sup> – obrázek 4.1. Stejně jako Vipan, i kapradina má rozměry  $1024 \times 1024$ .

---

<sup>1</sup>Stejně jako u obrázku Vipan, ani zde není problém s autorskými právy, autorem fotografie jsem já sama, vyfotografováno na havajském ostrově Maui v kráteru Haleakalā.



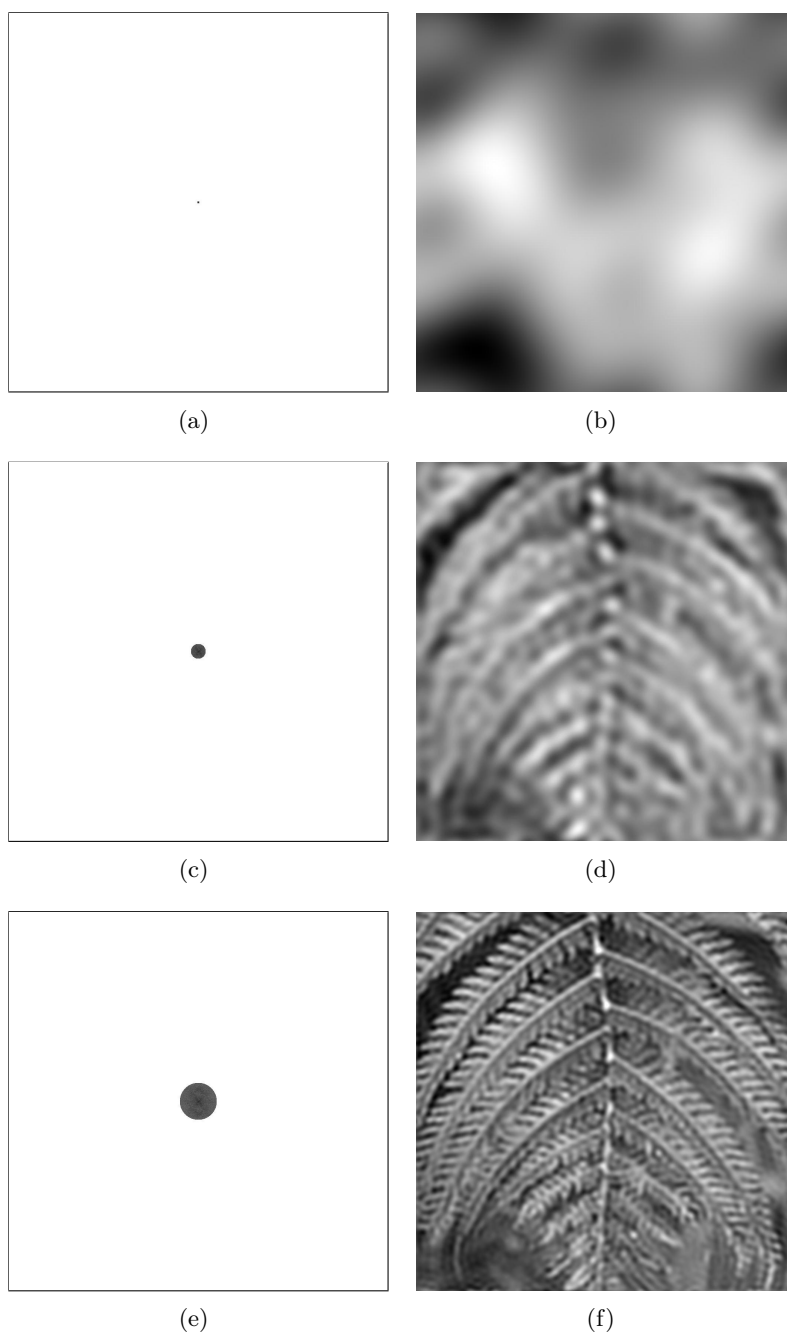
Obrázek 4.1: Testovací obrázek Kapradina a jeho amplitudové spektrum. Toto spektrum i všechna další v této části jsou logaritmovaná a v negativu.

Ještě než se pustíme do modifikování spektra, pojďme se podívat na obrázek 4.1(a). Zajímavé jsou v něm totiž takové vlny, amplitudové spektrum totiž jen tak neklesá se vzrůstající frekvencí, ale dvakrát ještě vzroste. Čemu to v obraze odpovídá? Centrální maximum je standardní a odpovídá průměrnému jasu obrazu a největším strukturám v obraze. Pak je tu ale další dvojice podlouhlých peaků (či jak to lépe nazvat...), ta odpovídá velikosti struktur základního tvaru kapradiny, tj. boční listy kapradiny. Ale kapradina má listy tak trochu fraktálního tvaru (biologové by řekli zpeřené), a tak je tu ještě další významný rozměr struktur v obraze, a to rozměr menších lístečků, kterých jsou na každém bočním listu desítky. Tomuto rozměru (jejich frekvenci) odpovídají vnější dva ploché peaky ve spektru.

Pojďme se podívat, co se stane, když ze spektra odstraníme vyšší frekvence – obrázek 4.2. Použijeme na spektrum tzv. low-pass filtr, tedy filtr, který nízké frekvence propouští. Vykreslíme si vždy modifikované amplitudové spektrum (hodnoty logaritmovány), vykresluji v negativu, a vedle pak odpovídající obraz po zpětné transformaci. Na prvním řádku jsou ponechány hodnoty spektra pouze na kruhu o poloměru 3 (což je v diskretním případě čtverec o 25 pixelech). Je vidět, že z obrazu zůstaly více méně jen informace o tom, že v rozích je obraz tmavší, tam, kde jsou postranní větvičky, je naopak nejsvětlejší. Na druhém řádku jsou zachována data na kruhu o poloměru 20 (cca 1 % celého spektra). Vidíme, že jsou v obraze již krásně vidět hlavní tvary včetně vertikální větvičky. Zachováme-li z obrazu kruh o poloměru 50 (cca 7,5 %), dostáváme již původní obraz, jen viditelně rozmazaný a v místech bez výraznějších struktur v původním obraze (především po stranách v dolní části obrazu) jsou takové zvláštní vlnky. Můžeme tušit, že vlnky jsou způsobené tím, že když v jiných částech obrazu jsou struktury, které jsou z principu Fourierovy transformace modelované síní a kosíní, přenesle je to i do jiných míst, kde vlnky na ještě vyšších frekvencích způsobí jejich vymazání za vzniku téměř jednolitě plochy.

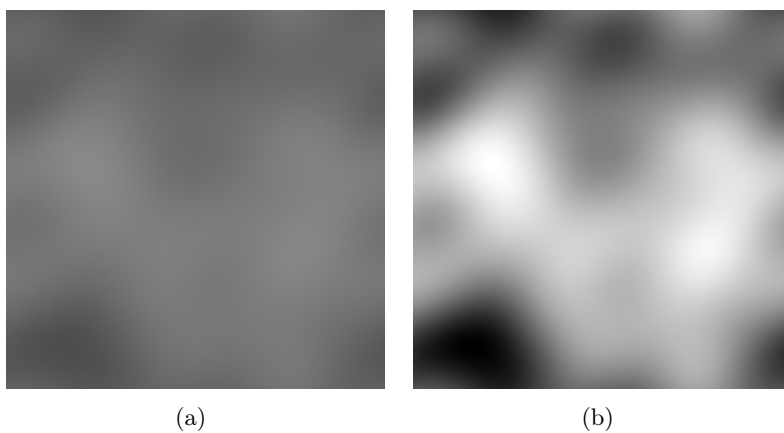
U všech modifikovaných obrazů byl navíc zvýšen kontrast tak, aby byl využit celý rozsah hodnot 0 až 255. Ukázka toho, co by se stalo, když by kontrast zvýšen nebyl, je na 4.3. Proč tomu tak je? Je to dáno tím, že celý obraz se dá ve fourierovském smyslu chápat jako součet mnoha síní a kosínů v různých směrech a především o různých frekvencích. Amplitudové spektrum nám vlastně ukazuje amplitudy těchto síní a kosínů pro různé jejich argumenty. Je tedy vidět, že amplituda na vyšších frekvencích je spíše nižší než na nižších u běžných fotografií. Uebereme-li některé z nich, zůstane z těchto vln jen část a zákonitě musí klesnout rozsah hodnot. Patrně ještě snadněji se něco takového představí na jednorozměrných datech. Na obrázku 4.4 je vykreslen graf hodnot obrazu Kapradina na 500. řádku a graf hodnot na tomto řádku po silném low-pass filtru (ponechána data jen v 16 bodech, díky symetrii spektra vlastně jen v 8 bodech, které nesou informaci). Je vidět, že low-pass filtr hodnoty rozmaže, a tedy omezí lokální extrémy, což sníží rozsah hodnot.

Další velmi názornou modifikací spektra je tzv. high-pass filter, tj. ponechání vyšších frekvencí a potlačení (v našem případě odstranění) těch nižších. Na obrázku 4.5 je ukázán následek odstranění kruhu o poloměru

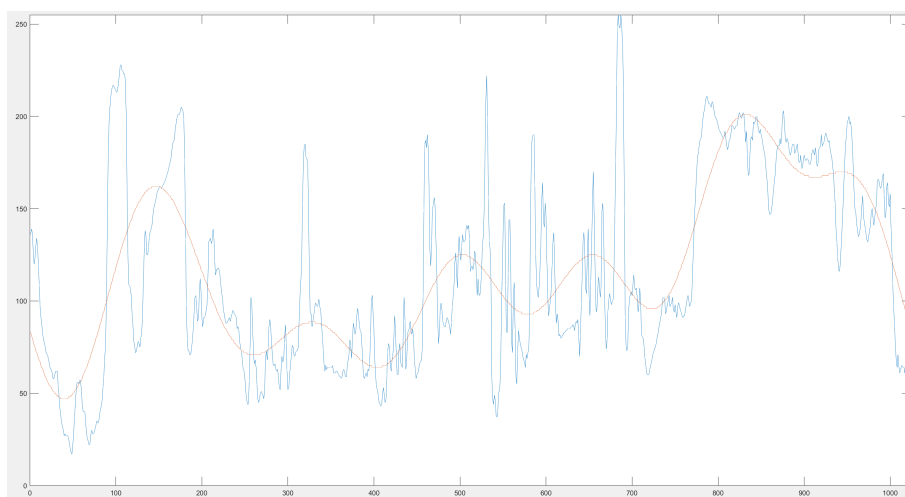


Obrázek 4.2: Obrázek Kapradina po odstranění informací na vyšších frekvencích (tzv. low-pass filtr). V levém sloupci logaritmovaná amplitudová spektra po nahrazení částí spektra nulami (jako negativ), v pravém pak odpovídající obrazy – spektra po zpětné transformaci. První řádek má zachovaný kruh o poloměru 3, druhý 20 a třetí 50. U všech obrazů upraven rozsah hodnot na 0 až 255 (jinak by byl menší, zvláště u prvních dvou).





Obrázek 4.3: (a) Obrázek 4.2b před zvýšením kontrastu, (b) obrázek 4.2b.

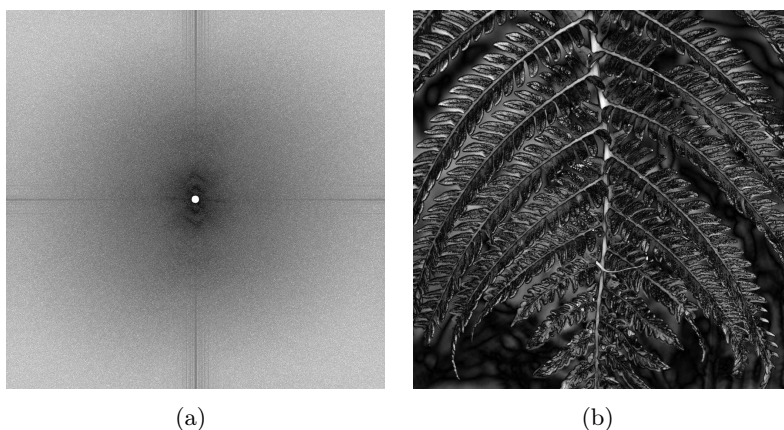


Obrázek 4.4: Ilustrace snížení rozsahu hodnot obrazu po odstranění vyšších frekvencí (low-pass filtr) ilustrovaná na jednorozměrných datech. GRAF TO CHCE HODNĚ VYLEPŠIT.

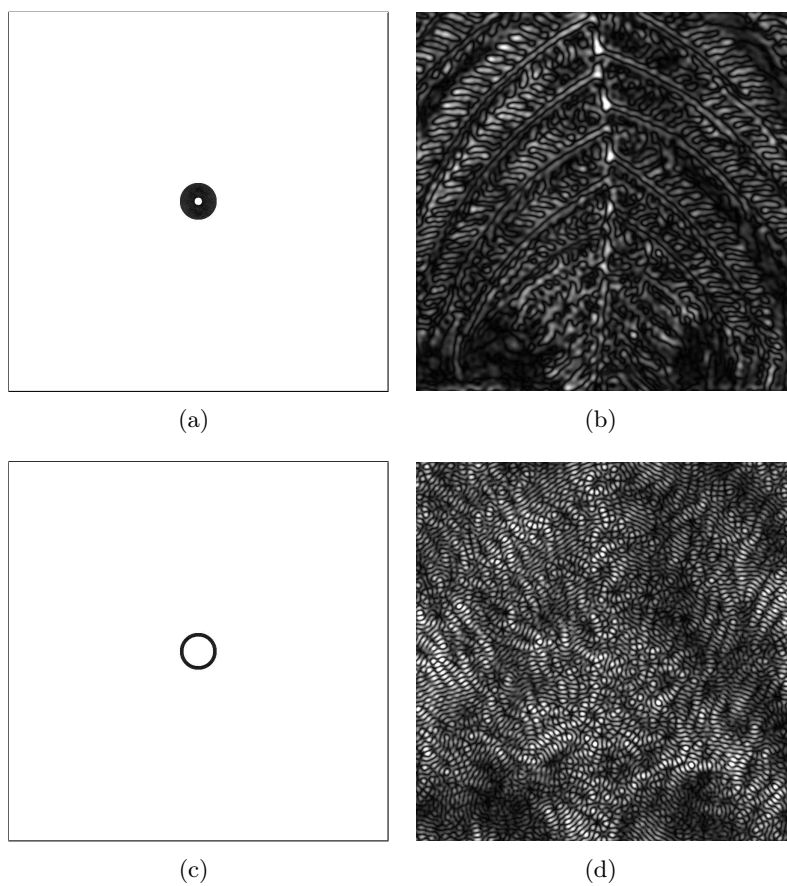
10 z prostředku spektra, opět po zvýšení kontrastu, protože vlastně ty siny a kosiny, které mají nejvyšší amplitudy, byly z obrazu odstraněny, proto zde bylo potřeba značného zvýšení kontrastu. Tím byl vlastně velmi zesílen kontrast jemných struktur v obraze a potlačena až ztracena informace o tom, kde byl obraz tmavší (v levém horním rohu) a kde světlejší.

Můžeme zachovat i hodnoty v nějakého rozsahu hodnot s tím, že odstraníme větší i menší, tzv. band-pass filter. To je ilustrováno na obrázku 4.6. V prvním případě jsou zachovány hodnoty v mezikruží o poloměrech 10 až 50, je krásně vidět, že jsou odstraněny jak jemnější detaily, tj. informace na vyšších frekvencích, tak hrubší informace o celkovém rozložení jasu v obraze, tj. informace na nižších frekvencích. Ve druhém případě jsou zachovány hodnoty v mezikruží o poloměrech 40 až 50. To, co bylo v původním obrazu, už ani nejde rozpoznat, za to můžeme hezky vidět, jak velké jsou asi vlny o frekvenci 40 až 50. Je vidět, že frekvence těchto vln klesá v místech, kde v obraze „pořádně nic není“, je tam jen pozadí bez výraznějších struktur.

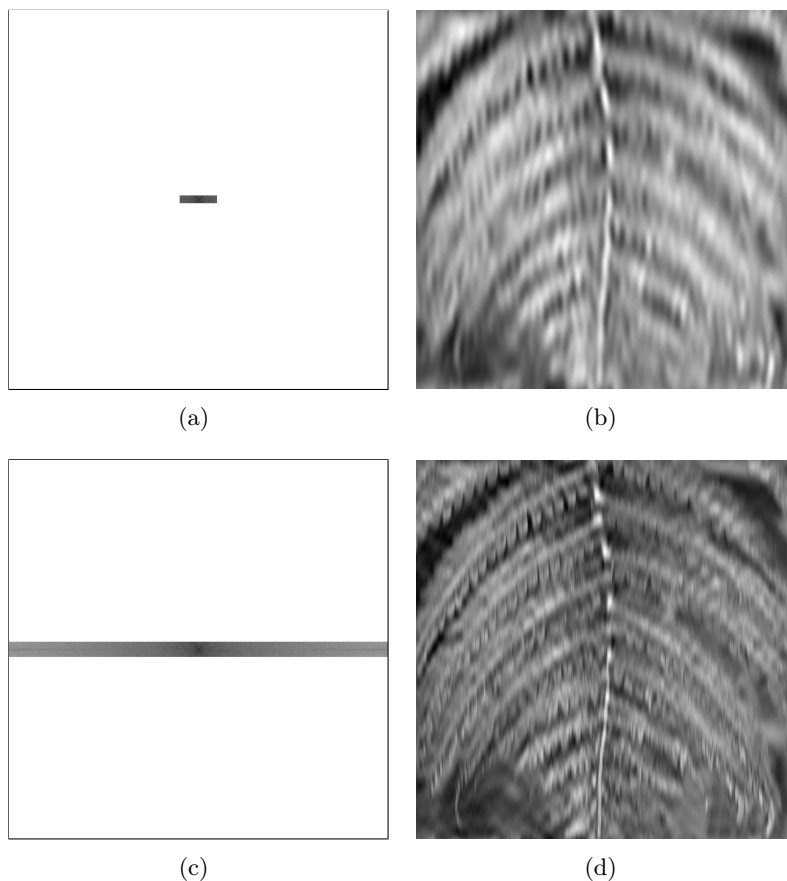
Kreativitě při modifikacích spektra se meze nekladou, jako cvičení si můžete s nějakou fotografií ve vhodném software vytvářet další a další modifikace a zkoumat tak, jaký typ obrazových informací je na jakých frekvencích. Pokus tohoto typu najdete na obrázku 4.7, kde byl zachován vodorovný pruh, zbytek spektra byl odstraněn. V prvním případě byl zachován pouze obdélník se stranami 10 a 50 uprostřed spektra, ve druhém pak vodorovný pruh o výšce 20 přes celé spektrum. Jak je z obrázků vidět, tyto části spektra obsahují především informace o svislých strukturách v obraze, v prvním případě pouze nižší frekvence, tedy bez detailů, ve druhém pak v celém rozsahu frekvencí, ovšem jen jediném směru, obraz zahrnuje jemné detaily i větší struktury, informace o jasu větších celků.



Obrázek 4.5: Obrázek Kapradina po odstranění informací na nižších frekvencích (tzv. high-pass filtr). Vlevo logaritmované amplitudové spektrum po nahrazení části spektra nulami (jako negativ), vpravo spektrum po zpětné transformaci a zvýšení kontrastu. Poloměr odstraněného kruhu je 10.



Obrázek 4.6: Obrázek Kapradina po odstranění informací na nižších i vyšších frekvencích, ponechán jen nějaký rozsah frekvencí (tzv. band-pass filtr). Vlevo logaritmované amplitudové spektrum po nahrazení části spektra nulami (jako negativ), vpravo spektrum po zpětné transformaci a zvýšení kontrastu. Poloměry ponechaného mezikruží jsou na prvním řádku 10 až 50, na druhém pak 40 až 50.



Obrázek 4.7: Vykreslení amplitudového spektra: Pruh (a,b) 10-50 (c,d) 20, plný rozsah. Upravený rozsah hodnot.

## 4.2 Určení významných směrů v obraze

Klasickou úlohou, ve které je Fourierova transformace velmi mocná ve srovnání s jinými postupy, je hledání významných směrů v obraze. Je to častá úloha i z technické praxe, kde jde o detailní snímky materiálů používaných ve strojírenství nebo lékařství [16]. Úlohu si vyzkoušíme na obrázku Bambus – obr. 4.8. Cílem



Obrázek 4.8: Obrázek Bambus. Autor Bernard Gagnon (licence GNU Free Documentation License, zdroj [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bamboo\\_forest,\\_Taiwan.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bamboo_forest,_Taiwan.jpg))

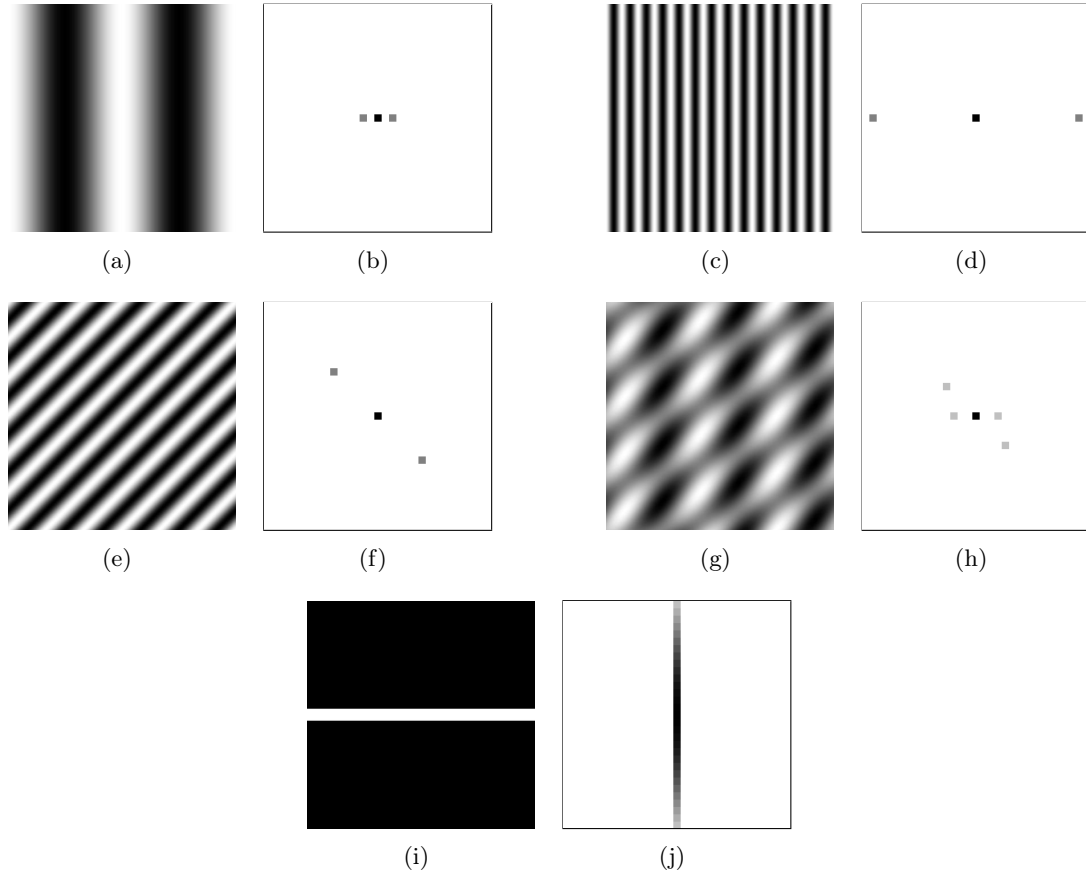
je určit úhel téměř svislých stojících bambusů, případně nějaký další významný, například směr hromady ležících bambusů.

Pojďme se podívat na velmi jednoduché obrazy a jejich spektra. Navíc si to můžeme odvodit i teoreticky.

V sekci 2.2.4 jsme odvodili transformaci z kosinu jako

$$\mathcal{F}\{\cos \alpha x\} = \pi(\delta(\xi - \alpha) + \delta(\xi + \alpha)).$$

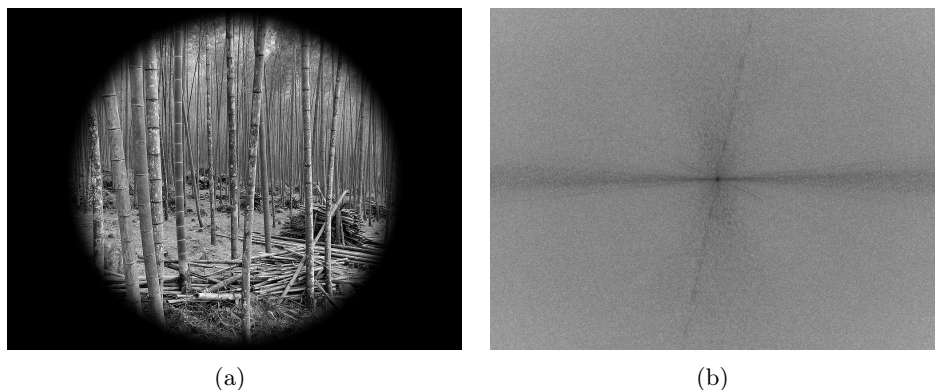
Když navíc použijeme i větu o otočení (2.37) a linearitu, snadno uvidíme, proč mají obrázky na obr. 4.9 spektra, jaká mají. Odvozujeme pomocí Fourierovy transformace, ale výpočty provádíme samozřejmě pomocí diskrétní Fourierovy transformace.



Obrázek 4.9: Ukázkové obrázky pro ilustraci myšlenky významných směrů. Vlevo vstupní obrázky, vpravo detail středu amplitudového spektra v negativu. S využitím podkladů od Petry Rozehnalové.

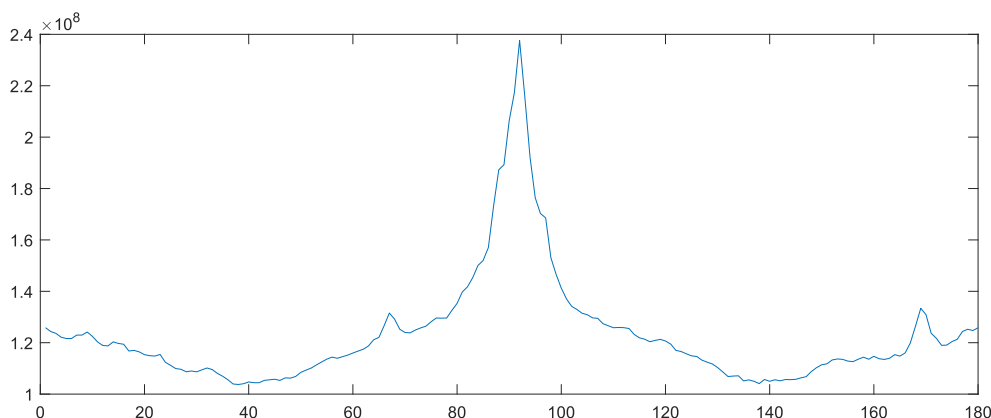
Na obrázku (a) vidíme v jasů vlny odpovídající funkci  $\sin 2x$  pro interval délky  $2\pi$  (tedy do obrázku se vešly dvě periody.) Ve spektru vidíme nenulové hodnoty na bodech  $[-2, 0]$ ,  $[0, 0]$  a  $[2, 0]$ . Prostřední bod odpovídá průměrné hodnotě jasu v obraze (byl by nulový v případě, že bychom měli hodnoty pixelů symetricky rozložené kolem nuly, ovšem obraz má hodnoty  $0, 1, 2, \dots, 255$ ) a zbývající dva funkce kosinus. Na obrázku (c) jsou vlny hustější, konkrétně  $\sin 14x$ . Tomu odpovídají nenulové hodnoty v bodech  $[-14, 0]$ ,  $[0, 0]$  a  $[14, 0]$ . Jde zde i dobře vidět vlastnost změny měřítka (vlastnost č. 4), obraz (c) je vlastně zmenšeným obrazem (a), vezmeme-li v potaz periodicitu, a spektrum obrazu (c) je naopak zvětšené. Otočíme-li obrazem, otočíme i spektrem, jak je vidět z obrázku (e) a jeho spektra. Z obrázku (g) bychom jen obtížně zjišťovali, jaké jsou v něm obsaženy vlny, ale linearita Fourierovy transformace nám na to umožní snadno nahlédnout. Všimněme si, že vodorovně uspořádaným bodům ve spektru odpovídají svislé pruhy a naopak. Zatím jsme měli jen velmi jednoduché funkce, co do spektra. Pojdme o krok dál. Známe transformaci z tzv. jednotkového zubu, je jí funkce  $\frac{\sin x}{x}$  (až na nějaké konstanty). Na obrázku (i) máme vodorovný pruh a ve spektru tomu odpovídá funkce  $\frac{\sin x}{x}$  na intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$ .

Tím jsme se dostali ke klíčové myšlence úlohy. Obecně nějakému pruhu, struktuře svislé odpovídá ve spektru pruh vodorovný a naopak. A pootočeně. Nadchází čas vykreslit si spektrum Bambusu. Samozřejmě velmi významnými skstrukturami v obraze budou jeho hrany, proto je potřeba před výpočtem spektra okraje odstranit pomocí kruhové masky. Bambus s odmaskovanými okraji a jeho spektrum najdeme na obrázku 4.10. Při pohledu na spektrum vidíme, že nejčastější směr je svislý a že jsou v obraze další významné



Obrázek 4.10: Bambus po vymaskování okrajů obrazu a jeho amplitudové spektrum v negativu. S využitím podkladů od Petry Rozehnalové.

směry, které odpovídají různým opřeným nebo položeným stéblům bambusu. Přejít od obrazu k jeho spektru přinesl velké zjednodušení, zatímco jednotlivá stébla bambusu jsou různě rozptýlená po celém obrazu, přímky a pruhy ve spektru procházejí všechny počátky. Dále si můžeme povšimnout, že spektrum je středově symetrické, což vychází z věty 2.40. Pro další analýzu nám tedy postačí jen polovina spektra. Jak pomocí výpočtu, automaticky zjistit směr polopřímek vycházejících ze středu spektra, na kterých jsou hodnoty amplitudového spektra nejvyšší? Efektivní metodou je numericky integrovat amplitudové spektrum podél polopřímek vycházejících ze středu spektra. Z důvodu různých délek polopřímek (spektrum je obdélníkové) je potřeba integrovat pouze podél úseček stejné délky, vlastně tato délka je poloměr kružnice vepsané do spektra. Vytvoříme tedy funkci  $A^l(\varphi)$  pro  $\varphi \in (0, \pi)$ , jejíž hodnoty budou numerické integrály podél těchto úseček s tím, že úsečky svírají s kladným směrem osy  $\xi$  úhel  $\varphi$ . Praktický výpočet provedeme například pomocí parametrického vyjádření svazku úseček s tím, že budeme s nějakým dělením kráčet podél úseček, dostaneme se do bodů o neceločíselných souřadnicích a hodnotu spektra v nich určíme pomocí interpolace. Graf funkce  $A^l(\varphi)$  vykreslíme, zjistíme maximální hodnotu funkce, která pak odpovídá úhlu  $\varphi$  pro hlavní významný směr. Zdrojový kód takového výpočtu najdete v příloze A.2.1.



Obrázek 4.11: Graf funkce  $A^l(\varphi)$  pro obrázek Bambus. OBRÁZEK TO CHCE VYLEPŠIT, POPSAT OSY A TAK.

Na obrázku 4.11 je vykreslený graf funkce  $A^l(\varphi)$  pro obrázek Bambus. Hodnoty na ose  $y$  jsou bezpředmětné, jde jen o jejich relativní velikost. Na ose  $x$  je úhel ve stupních. Je vidět, že nejvýznamnějším směrem je směr kolem  $90^\circ$ . Jsou vidět i další významné směry, jako například peak na cca  $65^\circ$  odpovídající samostatnému šikmému stéblu v popředí, i ploché maximum kolem  $180^\circ$  pro hromádky ležících stébel.

Metoda není výpočetně náročná, programátorsky je na ní patrně nejkomplicovanější interpolace při integraci po úsečkách. Poskytuje velmi účinný nástroj pro analýzu struktur v obraze, která dělaná ručně je vlastně velmi intuitivní (směr něčeho v obraze přece každý vidí), ale bez Fourierovy transformace by byl automatizovaný výpočet komplikovaný.

## 4.3 Obrazové filtry

Obrazové filtry jsou velmi široké téma, oblast, které se věnuje plno matematiků a inženýrů na celém světě. Protože prostě zviditelnit v obraze informace, které jsou v něm viditelné špatně, automaticky analyzovat něco, co lidský zrak jasně vidí, případně odstranit z obrazu něco, co tam nechceme, jsou témata, která se v dnešní době velmi rozvíjejí a je jich potřeba v mnoha oblastech lidské činnosti. Zajímavé je, že jsem nenašla žádnou matematicky rozumnou definici obrazového filtru, což patrně souvisí s tím, že pro matematiky je toto „příliš aplikovaná“ oblast a také oblast velmi široká. My si zde vystačíme s tím, že se jedná o nějakou transformaci obrazu takovou, která zachovává rozměry obrazu a která nejde vyjádřit ani geometrickou transformací (posun, změna měřítka, otočení, deformace), ani jako transformace hodnot pixelů (tj. že nová hodnota závisí pouze na původní hodnotě pixelu v daném bodě).

Zpravidla se při výpočtu nového hodnoty pixelu využívají hodnoty pixelů v nějakém okolí pixelu, základní filtry používají lineární kombinaci hodnot pixelů (vyjádřenou často pomocí konvoluce), a proto se označují jako *lineární filtry*. Z pojmů z oblasti filtrace stojí za zmínku třída filtrů zvaná *adaptivní filtry*, které při výpočtu nějak využijí i informace obrazových datech (např. rozdělí obraz na tmavou a světlou část a každou zpracují zvlášť, využijí uživatelem nebo zdrojem dat dodané informace o poloze významných objektů v obraze atd.).

Důvodem, proč se budeme filtry zabývat my ve skriptech o Fourierově transformaci, je to, že Fourierova transformace nám dává velmi mocný způsob rozboru vlastností filtru díky tomu, že Fourierova transformace z konvoluce dvou funkcí je součin Fourierových spekter těchto funkcí. To využijeme na filtry, které slouží k zaostření nebo rozmazání obrazu. Další kategorií filtrů, kterým se zde budeme věnovat, jsou filtry, které velmi cíleně pracují s konkrétními místy ve spektru za účelem cílených modifikací obrazů, například odstranění periodických struktur v obraze – tzv. notch filtry.

### 4.3.1 Zaostření, rozmazání

Standardní postup pro zaostření obrazu nebo i jeho rozmazání třeba za účelem omezení aditivního šumu je pomocí konvoluce. Hodnoty pixelů nového obrazu  $g(x, y)$  jsou lineární kombinací hodnot okolního pixelů, přičemž váhy jednotlivých okolních pixelů bývají zachovány pro různá místa v obraze (s výjimkou okrajů).

Začneme rozmazáním. Základní filtr pro rozmazání obrazu lze vyjádřit pomocí konvoluce

$$g(x, y) = f(x, y) * k(x, y),$$

kde matice  $k$  je konvoluční jádro. Věta o konvoluci PŘIDAT ODKAZ nám umožní na toto nahlédnout pomocí spekter, a tak můžeme psát

$$G(\xi, \eta) = \mathcal{F}\{f(x, y) * k(x, y)\} = F(\xi, \eta) \cdot K(\xi, \eta). \quad (4.1)$$

Toto vyjádření má dva obrovské přínosy. Umožňuje nám hodnotit vlastnosti filtrů ze zcela nového pohledu a navíc nám i dává nástroj na praktickou realizaci filtru. Vlastní výpočet konvoluce totiž představuje čtyřnásobný cyklus for (pro každý pixel v obraze a pro každý pixel v jeho okolí). Pokud je konvolučním jádrem matice malých rozměrů (co jsou to malé rozměry, závisí na počítači a na použitém software), je přímý výpočet časově rozumný. Pro velké obrazy a především velká jádra můžeme dostávat dlouhé výpočetní časy. Všimněme si, že použití vzorce 4.1 pro výpočet filtru představuje sice tři Fourierovy transformace (dvě dopředné a jednu zpětnou), ale jeho časová náročnost prakticky nezávisí na velikosti konvolučního jádra, protože místo konvoluce se počítá součin (dvojitý for, resp. maticová operace v Matlabu a podobných software). Na druhou stranu při výpočtu pomocí konvoluce je podstatně jednodušší vyřešit okraje obrazu, konvoluční jádro se jen usekne a přenormuje.

Pojďme nyní využít naše znalosti ohledně z oblasti Fourierovy transformace k návrhu „slušného“ a matematicky korektního filtru pro rozmazání obrazu. Jaké vlastnosti by mělo mít spektrum jádra  $K(\xi, \eta)$  a proč?

1. **Středová symetrie spektra.** Obrazová data jsou z principu reálná. Pokud filtr realizujeme pomocí konvoluce přímo na obrazových datech, logicky zůstanou pořád reálná. Co to ovšem znamená z hlediska jejich spektra? Z věty 2.40, resp. v diskretním případě se jedná o větu 3.30, víme, že funkce je reálná,

právě tehdy když  $F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta)$ , resp.  $F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, -\eta)$ , v diskrétním případě. Pokud budeme nějaký filtr konstruovat pomocí spektra konvolučního jádra, budeme potřebovat, aby  $G(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) \cdot K(\xi, \eta)$  bylo reálné. Na to využijeme větu 2.42, resp. 3.32 v diskrétním případě, která implikuje, že spektrum  $K$  musí být reálné a navíc  $K(\xi, \eta) = K(-\xi, -\eta)$ .

Jaké funkce splní tento předpoklad? Vlastně jakákoli reálná funkce, která je středově symetrická kolem počátku.

- 2. Nezávislost na směru.** Míra rozmazání struktur by neměla záviset na jejich směru. Tedy mimo jiné, pokud bychom obraz otočili, rozmazali a otočili zase zpět, výsledek by měl být stejný (až na drobné změny způsobené rotací, tj. interpolací diskrétních dat), jako když obraz pouze rozmazeme. Z toho plyne, že spektrum  $K(\xi, \eta)$  by mělo být vyjádřitelné jako  $K(\rho)$  pro  $\rho \in \langle 0, \pi \rangle$ , kde  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ , tedy hodnota  $K$  v konkrétním bodě by měla záviset pouze na vzdálenosti bodu od počátku. Můžeme ji chápat jako váhovou funkci na frekvence.

Od tohoto místa dál již budeme pracovat místo s  $K(\xi, \eta)$  spíše jen s  $K(\rho)$ . Funkce  $k$ , které toto splňují, těch je samozřejmě nekonečně mnoho a velmi mnoho různých typů a tvarů. Mezi nimi bych ovšem vypíchla funkci, kterou jsme v těchto skriptech detailně řešili, a to jednotkový zub. Je to totiž velmi běžná funkce pro rozmazání implementovaná v mnoha software na základní zpracování obrazu, prostě se vezme nějaké okolí a zprůměrují se hodnoty pixelů na tomto okolí. Pro takové konvoluční jádro  $k(x, y)$ , které je rovno jedničce (či spíše  $\frac{1}{n}$ , kde  $n$  je počet prvků, kde je hodnota jádra nenulová) je jeho spektrum rovno obecně nějak modifikované funkci  $\frac{\sin \xi}{\xi}$ . Ta je rozhodně reálná. V dalším textu si ovšem ukážeme, proč tato funkce není pro filtraci obrazů vhodně a použijeme na to právě fourierovské argumenty. TADY JE TO LEHCE NA VODĚ, JAKMILE JE OKOLÍ KRUHOVÉ, JDE TO NA BESSELOVY FUNKCE.

- 3. Nezápornost  $K(\rho)$ .** Funkci  $K(\rho)$  můžeme také chápat jako váhovou funkci na frekvence. Jak moc data na té které frekvenci zachováme, či potlačíme. Z čehož plyne, že by hodnoty  $K(\rho)$  měly být nezáporné hodnoty. Logické by bylo, aby byly mezi nulou a jedničkou, na druhou stranu omezením dat na některých frekvencích dojde o omezení rozsahu hodnot, tak jsme mohli vidět na obrázku 4.1, a tak abychom roztáhli data na původní rozsah hodnot, může dávat smysl mít váhy větší než 1. Horní mez ale není tak důležitá, klíčové je, že dolní mez je nula. Podmínka nezápornosti je důvodem, proč konvoluční jádro typu jednotkový zub není vhodné, funkce  $\frac{\sin \xi}{\xi}$  nabývá i záporných hodnot. V tomto místě není od věci inspirovat se v nějakém „slovníku“ Fourierovy transformace, kde najdeme funkce i s jejich spektry, osobně doporučuji například anglickou Wikipedii [25], my používáme Fourierovu transformaci ve tvaru třetího sloupce, tj. *Fourier transform non-unitary, angular frequency*.
- 4. Monotónnost vůči frekvencím.** Stále je potřeba mít na paměti, že nám jde o rozmazání obrazu, a tedy by bylo vhodné, aby vyšší frekvence byly potlačeny více než nižší. Obecně, pro  $\rho_1 < \rho_2$  bychom měli mít  $K(\rho_1) < K(\rho_2)$ .

Pojďme se tedy podívat do tabulky, jaké funkce splňují všechny uvedené předpoklady.

(a)

$$k(\rho) = \text{sinc}(a\rho) = \frac{\sin a\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad K(\xi) = \frac{1}{a} \text{rect}\left(\frac{\xi}{2\pi a}\right)$$

pro  $a > 0$ , kde  $\text{rect}$  je funkce jednotkového zubu nenulová pro  $\langle -0.5, 0.5 \rangle$ . Jedná se o velmi základní konvoluční jádro, při pohledu na jeho spektrum vidíme, že pro informace na frekvencích od nuly do  $\pi a$  jsou zcela zachovány, zatímco od této hodnoty dál jsou zcela odstraněny. Co je takové neintuitivní, je, že hodnoty  $k_a(\rho)$  nabývají jak kladných, tak záporných hodnot, a tedy některé hodnoty pixelů v okolí jsou při výpočtu konvoluce násobeny kladnými, jiné zápornými váhami (potenciálně některé nulou). Pro svou jednoduchost ve spektru se tento filtr v praxi používá, i když filtry uvedené níže jsou častější, především Gaussův.

(b)

$$k(\rho) = \text{sinc}^2(a\rho) \quad \Rightarrow \quad K(\xi) = \frac{1}{a} \text{tri}\left(\frac{\xi}{2\pi a}\right)$$



pro  $a > 0$ , kde  $\text{tri} = \max(1 - |x|, 0)$  je funkce tzv. trojúhelníková funkce, která vznikne konvolucí funkce  $\text{rect}$  samy se sebou (což je moc krásně vidět na animaci na německé Wikipedii k pojmu *Dreiecksfunktion* [24]).

(c)

$$k(\rho) = e^{-a\rho^2} \quad \Rightarrow \quad K(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

pro  $a > 0$ , tedy Gaussova funkce. Toto je s přehledem nejčastěji používaný filtr pro rozostření obrazů. Důvodem je především to, že funkce je monotónní nejen ve spektru, ale i v prostoru, což je tak nějak intuitivní předpoklad, že váhy pixelů pro konvoluci se vzdáleností od centrálního pixelu klesají, i když z fourierovské teorie tento předpoklad nevyplyvá. Předchozí dvě funkce (a) a (b) tento předpoklad nesplňují. Další příjemnou vlastností Gaussovy funkce je to, že její transformací je stále Gaussova funkce, tedy je zachován „typ“ funkce. Gaussovský filtr je implementován v mnoha běžných softwarech, dokonce se tam uživatel přímo setká s popisem, že se jedná o Gaussovu funkci, např. bývá uvedeno „Gaussian blur“.

(d)

$$k(\rho) = e^{-a|\rho|} \quad \Rightarrow \quad K(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

pro  $a > 0$ , tedy oboustranně klesající exponenciální funkce, její transformací je Lorentzova funkce (tedy až na nějaké konstanty funkce hustoty pravděpodobnosti Cauchyova rozdělení).

Co může být důvodem rozmazávat obraz? Důvodem k rozmazání obrazu, tj. potlačení informací na vyšších prostorových frekvencích bývá zpravidla potlačení aditivního šumu. Výrazně častějším důvodem je použití rozmazaného obrazu jako tzv. *neostré masky* pro zaostření obrazu. Zaostřený obraz můžeme vyjádřit jako

$$h(x, y) = f(x, y) - m \cdot g(x, y) = f - m \cdot f(x, y) * k(x, y),$$

kde  $m \in (0, 1)$  je míra zaostření s tím, že pokud chceme zachovat původní rozsah hodnot, bude potřeba ještě lineárně roztáhnout hodnoty funkce  $h$  na původní rozsah. Takto sestavený high-pass filtr pro zaostření obrazu závisí na dvou parametrech, konvolučním jádru  $k$  a míře zaostření  $m$ . Zpravidla pro filtry, které zaostřují jemnější detaily, tj. použijí silnější low-pass filtr, např. „štíhlejší“ Gaussovu funkci v prostoru, se používají vyšší míry  $m$  než pro větší struktury. V běžných softwarech se tyto dva parametry zpravidla dají nastavit, např. v GIMPu se při použití Filters  $\rightarrow$  Enhance  $\rightarrow$  Sharpen (Unsharp mask) nastavují parametry Radius a Amount.

## 4.4 Fázová korelace

V této sekci si odvodíme aparát pro sesazování digitálních obrazů. Digitální obrazy samozřejmě nejsou funkcemi dvou reálných proměnných, ale pro teoretické odvození si je tak budeme modelovat. Navíc aparát si odvodíme nejen pro obrazy vzájemně posunuté, ale i pootočené nebo s různým měřítkem, což pootočení a změna měřítka se na diskretních maticích velmi špatně modeluje. Proto odvození provádíme na funkcích dvou reálných proměnných a až vlastní výpočty provádíme samozřejmě diskretně, což zpravidla při aplikaci nalezených transformací znamená interpolace obrazových dat.

### 4.4.1 Posunutí

Zdroj: Aparát pro posunutí určený posunutí dvou obrazů pomocí fázové korelace poprvé publikovali v roce 1977 Kuglin a Hines [15]. Detailně jej rozebírám ve své diplomové práci [9].

Budeme mít dvě funkce, které jsou vzájemně posunuté, teoretický popis je jednoduchý,  $f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0)$ . My ovšem jsme v aplikacích v situaci, kdy známe víceméně průběh funkce popsany maticí hodnot v diskretních bodech a neznámý vektor posunutí  $(x_0, y_0)$  hledáme. Jak jsme si uvedli v sekci 2.2.4, platí

$$\mathcal{F}\{\delta(x - x_0, y - y_0)\} = e^{i(\xi x_0 + \eta y_0)}.$$

V případě posunutých funkcí se jejich spektra liší pouze ve fázi

$$F_2(\xi, \eta) = F_1(\xi, \eta)e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}.$$

Srovnáním posledních dvou vztahů vidíme, že bychom potřebovali získat jen to fázové posunutí, pak udělat zpětnou transformaci a jsme hotovi. Ale jak na to? Co třeba

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{F_1 \cdot F_2}{|F_1| \cdot |F_2|} \right\} \quad ?$$

To by šlo, ale tento vzorec by nám neumožnil rozlišit, který obraz je posunutý vůči kterému, jak ten vektor použít. Řešením je přidat komplexní sdružení, aby se posunutí jednoho projevilo jedním směrem a druhého směrem opačným. Dostáváme

$$\Xi(f_1, f_2) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{F_1 \cdot F_2^*}{|F_1| \cdot |F_2|} \right\}, \quad (4.2)$$

což je výsledný vzorec pro fázovou korelaci. Označení  $\Xi(f_1, f_2)$  je mé vlastní, v literatuře jsem pořádně žádné označení vzorce neviděla. Pokud se tedy dva obrazy liší pouze posunutím, získáme aplikací fázové korelace deltu posunutou právě o vektor posunutí těch dvou obrazů.

Co se ovšem stane, když použijeme vzorec (4.2) na obrazy, které se liší více než posunutím, třeba šumem? Bez důkazu (jak přesně ho vlastně dělat?) si zde uvedeme, že v takovém případě nám vzorec dá funkci, která bude mít výrazné maximum v místě na souřadnicích odpovídajících posunutí. Abychom mohli hledat maximum nějaké funkce, potřebujeme, aby tato funkce nabývala pouze reálných hodnot. Toto je naštěstí splněno pro jakékoli dvě funkce  $f_1, f_2$ , které nabývají reálných hodnot (které jsou dostatečně „slušné“ ve smyslu Fourierovy transformace), jak si hned ukážeme.

**Věta 4.1.** Necht'  $f_1, f_2$  jsou funkce  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že integrál jejich absolutní hodnoty je konečný. Pak  $\mathcal{F}^{-1}\{F_1 \cdot F_2^*\}$  je reálná funkce.

*Důkaz.*  $\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\xi) \cdot F_2^*(\xi)\}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f_1(x)\} \cdot \mathcal{F}\{f_2^*(-x)\}\} = f_1(x) * f_2^*(-x) = f_1(x) * f_2(-x)$ . Využili jsme vlastnosti č. 7, následně vlastnosti č. 6 a v posledním kroku toho, že se jedná o funkci nabývající pouze reálných hodnot.  $\square$

Věta platí i pro funkce dvou proměnných, jen podmínka s konečným integrálem je složitější. Zbývá ještě vyřešit následek dělení amplitudovými spektry. Zde využijeme větu 2.42 a vidíme, že podělení amplitudovými spektry splňuje předpoklady na funkci  $G$  díky středové symetrii amplitudového spektra reálné funkce (věta 2.41). Jediný případ, kdy tyto předpoklady splněny nejsou, je případ, kdy některé ze spekter nabývá v některých bodech nulových hodnot, dělení nulou je problém. V reálných aplikacích s digitálními obrazy tato situace prakticky nenastává, ale i tak je vhodné toto ve vzorci ošetřit. Vzorec zmodifikujeme na

$$\Xi_\varepsilon(f_1, f_2) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{F_1 \cdot F_2^*}{(|F_1| + \varepsilon) \cdot (|F_2| + \varepsilon)} \right\},$$

kde  $\varepsilon$  je nějaké malé kladné reálné číslo.

Dále v závislosti na kvalitě obrazu a jeho dalších vlastnostech můžeme vzorec ještě více modifikovat. Například některé frekvence mohou být pro sesazení irelevantní, není na nich nic přínosného pro sesazení. Například šum na vyšších frekvencích nebo naopak celkový jas obrazu, vinětae a podobně na frekvencích nízkých. Pak dává smysl použít před zpětnou transformací vhodnou váhovou funkci, která splní předpoklady pro váhovou funkci  $G$  ve větě 2.42, ideálně je závislá pouze na vzdálenosti od počátku  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

$$\Xi_{\varepsilon, H}(f_1, f_2) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ H(\rho) \frac{F_1 \cdot F_2^*}{(|F_1| + \varepsilon) \cdot (|F_2| + \varepsilon)} \right\}.$$

Stále po všech těchto modifikacích platí, že získaná funkce nabývá reálných hodnot, můžeme hledat její maximum. Funkci si můžeme vykreslit, zkontrolovat, že maximum je jediné, pokud není nebo není dost „hezké“, je potřeba postup nějak dále modifikovat, ať už změnami funkce  $H$ , nebo nějakou vhodnou modifikací vstupních obrazů. Další možností modifikace funkce  $\Xi$  je nějaká filtrace aplikovaná na tuto funkci, až po zpětné transformaci, především nějaké rozmazání – konvoluce s vhodným jádrem. To je sice ekvivalentní s vhodnou funkcí  $H(\rho)$ , ovšem v případě konvoluce stačí počítat jen s nějakým menším okolím souřadnic maxima, ne s celou funkcí  $\Xi$ .

#### 4.4.2 Otočení, posun

Zdroj: článek autorů Reddyho a Chatterjiho z roku 1996 [17] a diplomová práce Hany Druckmüllerové [9]

Metody prezentované v této a následující části jsou relativně velmi mladé, teprve z 90. let 20. století, což je způsobeno především tím, že dřívější výpočetní technika neumožňovala v rozumných časech výpočty s několika Fourierovými transformacemi po sobě.

Otočení kolem nějakého obecného středu je totéž, co otočení kolem počátku a posun. Díky tomu se můžeme omezit pouze tuto druhou variantu. Začneme otočením kolem počátku. Mějme tedy k funkci  $f_1(x, y)$  funkci

$$f_2(x, y) = f_1(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Z věty 2.37 už víme, že

$$F_2(\xi, \eta) = F_1(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \xi \sin \theta + \eta \cos \theta).$$

Klíčovou myšlenkou použití fázové korelace pro otočené obrazy je ta, se kterou přišli v roce 1996 Reddy a Chatterji [17]. Použijeme amplitudová spektra a převedeme je do polární soustavy souřadné.  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $\xi = \rho \cos \varphi$ ,  $\eta = \rho \sin \varphi$ . Pokud amplitudové spektrum  $f_1$  je v polární soustavě souřadné  $A_1^p(\rho, \varphi)$ , pak amplitudové spektrum druhého je

$$\begin{aligned} A_2^p(\rho, \varphi) &= A_1(\rho \cos \varphi \cos \theta - \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi \sin \theta + \rho \sin \varphi \cos \theta) = \\ &= A_1(\rho \cos(\varphi + \theta), \rho \sin(\varphi + \theta)) = A_1^p(\rho, \varphi + \theta). \end{aligned}$$

Teď vidíme, že v polární soustavě souřadné se funkce liší pouze o posun  $\theta$  podél osy  $\varphi$ . Znáte to s tím, jak matematik vaří kafe, ne? Posuny umíme hledat pomocí fázové korelace. Takže pomocí fázové korelace aplikované na amplitudová spektra v polární soustavě souřadné zjistíme úhel pootočení funkcí, ten použijeme tak, že funkci pootočíme, aby již byly natočené stejně. Ze symetrie amplitudového spektra reálné funkce víme, že stačí brát jen jeho polovinu ve smyslu osy  $\varphi$ .

Ještě nám zbývá vyřešit ten posun, který jsme na začátku vynechali. Vlastně jde o otočení kolem neznámého středu. Nově tedy budeme předpokládat funkci  $f_2$  takovou, že

$$f_2(x, y) = f_1(x \cos \theta - y \sin \theta - x_0, x \sin \theta + y \cos \theta - y_0).$$

Kombinací vět o posunu a o rotaci snadno zjistíme, že

$$F_2(\xi, \eta) = F_1(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \xi \sin \theta + \eta \cos \theta) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}.$$

Úžasné pro fázovou korelaci teď je to, že exponenciála na konci posledního vztahu má vliv jen na fázové spektrum, v amplitudovém se neprojeví. Takže i když funkce byly vzájemně pootočené, v amplitudových spektrech již tato informace o otočení není obsažena. Můžeme tedy použít postup výše, pomocí kterého určíme úhel otočení funkcí vůči sobě. Ten kompenzujeme otočením jedné z funkcí a následně nám zbyde už jen posun. Ten určíme pomocí fázové korelace dle sekce 4.4.1.

#### 4.4.3 Změna měřítka, rotace, posun

Zdroj: [17] a diplomová práce Hany Druckmüllerové [9]

Neobecnější případ, jakým se budeme zabývat, bude změna měřítka, rotace a posun. Myšlenka bude analogická jako u rotace a posunu. K funkci  $f_1(x, y)$  tedy budeme mít funkci

$$f_2(x, y) = f_1(\alpha x \cos \theta - \alpha y \sin \theta - x_0, \alpha x \sin \theta + \alpha y \cos \theta - y_0).$$

Její Fourierovské spektrum je

$$F_2(\xi, \eta) = \frac{1}{\alpha^2} F_1\left(\frac{1}{\alpha} \xi \cos \theta - \frac{1}{\alpha} \eta \sin \theta, \frac{1}{\alpha} \xi \sin \theta + \frac{1}{\alpha} \eta \cos \theta\right) e^{-i(\xi x_0 + \eta y_0)}.$$

Posun se projevil exponenciálou, která se následně v amplitudovém spektru neprojeví.

$$A_2(\xi, \eta) = \frac{1}{\alpha^2} A_1 \left( \frac{1}{\alpha} \xi \cos \theta - \frac{1}{\alpha} \eta \sin \theta, \frac{1}{\alpha} \xi \sin \theta + \frac{1}{\alpha} \eta \cos \theta \right).$$

Tentokrát použijeme logaritmicko-polární soustavu souřadnou, tedy  $e^\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $\xi = e^\rho \cos \varphi$ ,  $\eta = e^\rho \sin \varphi$ . Pokud amplitudové spektrum  $f_1$  je v logaritmicko-polární soustavě souřadné  $A_1^{lp}(\rho, \varphi)$ , pak amplitudové spektrum druhého je

$$\begin{aligned} A_2^{lp}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\alpha^2} A_1 \left( \frac{e^\rho}{\alpha} \cos \varphi \cos \theta - \frac{e^\rho}{\alpha} \sin \varphi \sin \theta, \frac{e^\rho}{\alpha} \cos \varphi \sin \theta + \frac{e^\rho}{\alpha} \sin \varphi \cos \theta \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} A_1(e^{\rho - \ln \alpha} \cos(\varphi + \theta), e^{\rho - \ln \alpha} \sin(\varphi + \theta)) = A_1^{lp}(\rho - \ln \alpha, \varphi + \theta). \end{aligned}$$

Opět vidíme, že jak změna měřítka, tak rotace se projeví jako posun. Vezměme tedy amplitudová spektra v logaritmicko-polární soustavě souřadné, pomocí fázové korelace zjistíme koeficient změny měřítka a úhel rotace, ty na obrazy použijeme tak, aby již byly natočené stejně a měly stejné měřítko. Následně již zbývá jen určitě posunutí pomocí fázové korelace.

#### 4.4.4 Proč se fázové korelaci říká fázová korelace, vztah ke konvoluci

Zdroj: [12] a částečně i [9]

Z teorie pravděpodobnosti, ale nejen odtud známe křížovou korelaci dvou funkcí  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  a jejich konvoluci jako

$$(f \times g)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t+s) dt, \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds.$$

My navíc máme funkce jen reálné, tj.  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , což ovšem nevadí a můžeme zatím nechat vzorce, jak jsou a uvidíme, že i kdyby funkce reálné nebyly, bude to i tak fungovat. Pojdme vyjádřit křížovou korelaci pomocí konvoluce.

$$f \times g = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t+s) dt = \left| \begin{array}{l} t = -u \\ dt = -du \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-u)g(s-u) du = f^*(-u) * g(u)$$

Na obě strany rovnosti aplikujeme Fourierovu transformaci a využijeme toho, že Fourierova transformace z konvoluce je součin spekter (vlastnost č. 7).

$$\mathcal{F}\{f \times g\} = \mathcal{F}\{f^*(-u) * g(u)\} = \mathcal{F}\{f^*(-u)\} \cdot \mathcal{F}\{g(u)\}$$

Dále využijeme dvě základní vlastnosti Fourierovy transformace, a to  $\mathcal{F}\{f^*\} = F^*(-\xi)$  a  $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\xi)$ . Z těch dohromady vyvodíme, že  $\mathcal{F}\{f^*(-t)\} = F^*(-(-\xi)) = F^*(\xi)$ , z čehož vyvodíme, že

$$\mathcal{F}\{f \times g\} = F^*(\xi)G(\xi).$$

Na rovnost aplikujeme zpětnou Fourierovu transformaci, což nám umožní získat vyjádření křížové korelace pomocí spekter korelovaných funkcí (a zpětné Fourierovy transformace).

$$f \times g = \mathcal{F}^{-1}\{F^* \cdot G\}$$

Toto vyjádření není jen hezký teoretický výsledek, ale má navíc praktické užítí v tom, že výpočet Fourierovy transformace bývá v softwarech optimalizován a tento vzorec tak umožňuje velmi efektivní výpočet křížové korelace, výrazně efektivněji než z definice. Fázová korelace je korelace ne celých funkcí, ale pouze jejich fází. Tj. místo spekter použijeme spektra podělená amplitudami. Výsledně tedy budeme mít

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F^*}{|F|} \cdot \frac{G}{|G|}\right\}.$$

Zdá se vám, že v pasáži o fázové korelaci a sesazování obrazů jsme měli komplexní sdružení ne u prvního spektra, ale u druhého? Zdá se vám to správně. Ale to už tak holt je, že v různých oblastech je občas různé značení. Ony jsou ty vzorce v podstatě ekvivalentní, jen souřadnice peaku vyjdou na opačné straně od počátku.

#### 4.4.5 Diskrétní obrazy

V předchozích sekcích jsme si uvedli princip fázové korelace pro sesazování digitálních obrazů. Odvození jsme provedli právě na funkcích dvou reálných proměnných proto, že i když obrazy bývají pootočené nebo mají různé měřítko, něco takového je velmi obtížné a nepraktické modelovat pomocí matic. Dochází tam totiž ke čtení hodnot pixelů na neceločíselných souřadnicích, což se dělá interpolací. „Spojité“ odvození je oproti tomu velmi názorné. Na druhou stranu nakonec reálné výpočty opravdu již probíhají na (diskrétních) maticích. V této sekci si tedy ukážeme, jak reálný výpočet fázové korelace probíhá pomocí diskrétní Fourierovy transformace.

Pro posunuté obrazy sice platí věta o posunutí (vlastnost č. 2), ale ta zahrnuje periodické pokračování, což nesedí na běžné vzájemně posunuté obrazy, které jsou jako by každé trochu jiným výřezem z téže scény. Jako model nám to ovšem postačí. Použijeme-li vzorec 4.2 pro fázovou korelaci na diskrétní data, samozřejmě s tím, že Fourierova transformace je teď diskrétní Fourierovou transformací a funkce  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  budou  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\} = \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  s tím, že  $f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0)$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \Xi(f_1, f_2) &= \mathcal{D}^{-1} \left\{ \frac{F_1 \cdot F_2^*}{|F_1| \cdot |F_2|} \right\} = \mathcal{D}^{-1} \left\{ \frac{F_1 \cdot \left( F_1 e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x_0 + \eta y_0)} \right)^*}{|F_1| \cdot \left| F_1 e^{-\frac{2\pi i}{N}(\xi x_0 + \eta y_0)} \right|} \right\} = \mathcal{D}^{-1} \left\{ \frac{F_1 \cdot F_1^* e^{\frac{2\pi i}{N}(\xi x_0 + \eta y_0)}}{|F_1|^2} \right\} = \\ &= \mathcal{D}^{-1} \left\{ e^{\frac{2\pi i}{N}(\xi x_0 + \eta y_0)} \right\} = d(x + x_0, y + y_0) \end{aligned}$$

s tím, že druhá rovnost vychází z věty o posunutí, čtvrtá ze základní vlastnosti komplexních čísel  $|z|^2 = z \cdot z^*$  (protože pro  $z = a + bi$  je  $z \cdot z^* = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ ) a poslední pak je větou o posunutí aplikovanou na diskrétní impuls. Fázovou korelaci dvou posunutých funkcí je tedy diskrétní impuls posunutý tak, že souřadnice jeho nenulového prvku (jedničky) vyjadřují posunutí těchto dvou funkcí.

Důležitá věc, kterou je potřeba ošetřit, jsou okraje obrazu. Jak už jsme si uvedli, diskrétní Fourierova transformace přistupuje k obrazu, jako by to byla nekonečná šachovnice složená periodicky z toho obrazu a jeho dokonalých kopií. Snadno pak dochází k tomu, že přechod z jedné kopie do druhé je nejvýraznější strukturou v oné šachovnici. Což je samozřejmě nevhodné pro zjišťování nějakých posunů v obraze, snadno totiž dostaneme posun nesprávný nulový. Nutným řešením tedy je z obrazu „odstranit“ okraje před výpočtem fázové korelace, jak jsme popsali na začátku kapitoly o aplikacích. Obraz s odstraněnými okraji je samozřejmě pouze pomocný pracovní pro určení parametrů geometrické transformace, vlastní transformaci provádíme s původními obrazy.

Při vykreslení funkce  $\Xi$  narážíme na podobný problém jako při vykreslení fourierovského spektra. Bod  $[0, 0]$  je v levém horním rohu, takže posuny kolem nuly jsou rozptýlené do všech rohů matice  $\Xi$ . Což nemusí být špatné pro výpočty, ale na vykreslení je to nepřehledné. Řešení je zde stejné jako u vykreslení spektra, použije se zde opět prohození kvadrantů matice, tedy v Matlabu funkce `fftshift`. Prohození kvadrantů matice a případné zmatení, který obraz bereme jako první a který jako druhý, může způsobit horší interpretovatelnost polohy jednotkového impulsu, tedy určení vektoru posunutí mezi obrazy. V praxi je tedy vhodné si nejdříve na testovacích obrazech ověřit, jak se má poloha jednotkového impulsu interpretovat.

#### 4.4.6 Subpixelová přesnost

Zdroje: diplomová práce Hany Druckmüllerové [9] a dále [3, 23, 12, 8]

Při sesazování reálných obrazů z principu jejich posunutí nebývá celočíselné. Je tedy často vhodné použít metodu, která určí posun obrazů s vyšší přesností. Zvětšení obrazu před sesazováním vede k výpočtům s obrovskými maticemi a i tak neumožní řádové zvýšení přesnosti sesazení (např. desetina pixelu). Vhodnějším postupem je využít stávající peak funkce  $\Xi$  a nějak zjistit souřadnice jeho vrcholu s přesností vyšší jeden pixel. Zde se mohou metody lišit v závislosti na tvaru peaku (jeho šířce), což záleží především na kvalitě a míře různosti sesazovaných obrazů. Pokud je peak velmi úzký, blíží se diskrétnímu impulsu, může být vhodné použít nějakou metodu, která prokládá vhodnou funkci několika body v okolí maxima. Používá se kvadratická funkce, Gaussova funkce nebo modifikovaná funkce  $\frac{\sin x \sin y}{xy}$ , která vychází z toho, že v případě obrazů s velmi malým neceločíselným posunem má  $\Xi$  tvar modifikované funkce  $\frac{\sin x \sin y}{xy}$ . V případě, že je peak širší, je vhodné použít nějakou metodu, která zahrne všechny body ve vhodném okolí. V případě snímků

sluneční koróny pořízených během úplných zatmění Slunce se osvědčila metoda, která získává vektor posunutí ze souřadnic těžiště peaku počítaného přes vhodné okolí, tedy

$$(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \left( \frac{M_{1,0}}{M_{0,0}}, \frac{M_{0,1}}{M_{0,0}} \right),$$

kde  $M_{k,l}$  je geometrický moment počítaný přes kruh se středem  $(x_0, y_0)$  (souřadnice maxima  $\Xi$  jako celá čísla) o poloměru  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , tedy

$$M_{k,l} = \sum_{x^2+y^2 < \varepsilon} x^k y^l \Xi(x_0 + x, y_0 + y), \quad k, l = 0, 1.$$

Běžně používané hodnoty  $\varepsilon$  jsou 3 až 8. Výpočet souřadnic vrcholu peaku je možné provádět i iterativně tak, že se interpolací zvětší vhodné okolí  $(x_0, y_0)$  a na něm se až hledá těžiště.

# Literatura

- [1] BEZVODA, Václav, Josef JEŽEK, Stanislav SAIC, and Karel SEGETH. *Dvojměrná diskrétní Fourierova transformace a její použití: I. Teorie a obecné užití*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1988, 181 s. ISBN 17-135-88.
- [2] ASADZADEH, M. *Lecture Notes in Fourier Analysis* [online]. Last modified September 1, 2008 [cit. April 16, 2010]. [http://www.math.chalmers.se/~mohammad/teaching/Fourier/LectureNotes\\_A3/draft\\_1.pdf](http://www.math.chalmers.se/~mohammad/teaching/Fourier/LectureNotes_A3/draft_1.pdf)
- [3] ARGYRIOU, V. – VLACHOS, T. *A study of sub-pixel motion estimation using phase correlation* [online]. [cit. April 11, 2010]. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.96.4780&rep=rep1&type=pdf>.
- [4] BORELL, C. *Lecture Notes in Measure Theory* [online]. c2006, last revision August 25, 2009 [cit. November 17, 2009]. <http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMA110/A09/MeasureTheory.pdf>.
- [5] Cooley, James W.; Tukey, John W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.* 19 (1965), 297–301. <https://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/S0025-5718-1965-0178586-1.pdf>
- [6] ČÍŽEK, V. *Diskrétní Fourierova transformace a její použití*. 1. vydání. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, n. p., 1981. 160 s. Matematický seminář SNTL. ISBN 04-019-81.
- [7] DRUCKMÜLLER, M. *Analýza v komplexním oboru*. 1st edition. Brno: Fakulta strojní, Vysoké učení technické v Brně, 1986. 96 p.
- [8] DRUCKMÜLLER, M. Phase correlation method for the alignment of total solar eclipse images. *The Astrophysical Journal*, 2009, vol. 706, no. 2, pp. 1605–1608. ISSN 0004-637X.
- [9] DRUCKMÜLLEROVÁ, Hana. *Phase-correlation based image registration*. Brno, 2010. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/26464>. Diplomová práce. Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce Jana Procházková.
- [10] DRUCKMÜLLEROVÁ, Hana. *Application of Adaptive Filters in Processing of Solar Corona Images*. Brno, 2014. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/69016>. Disertační práce. Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce Dalibor Martišek.
- [11] FOLLAND, G. B. *Fourier Analysis and Its Applications*. Second Edition. Providence (Rhode Island, U.S.A.): The American Mathematical Society, 2009. 433 p. The Sally series, Pure and Applied Mathematics, Undergraduate Texts. ISBN 978-0-8218-4790-9.
- [12] Zdeněk Hrazdír, Miloslav Druckmüller, Shadia Habbal: Iterative Phase Correlation Algorithm for High-precision Subpixel Image Registration, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 247:8, 2020 March. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab63d7>
- [13] KOLMOGOROV, A. N. – FOMIN, S. V. *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. Z ruštiny přeložil Doležal, V., Tichý Z. 1. vydání. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, n. p., 1975. 584 p. Teoretická knižnice inženýra. ISBN 04-01575.

- [14] KOMRSKA, J. *Fourierovské metody v teorii difrakce a strukturní analýze*. 1. vydání. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Nakladatelství VUTUM, 2001. 222 s. ISBN 80-214-2011-1.
- [15] KUGLIN, C. D. and D. C. HINES. The Phase Correlation Image Alignment Method. In: *Proceedings of 1975 International Conference on Cybernetics and Society*. New York: IEEE Conference on Cybernetics and Society, 1975, pp. 163-165.
- [16] POLZER, S.; GASSER, T.; FORSELL, C.; DRUCKMÜLLEROVÁ, H.; TICHÝ, M.; STAFFA, R.; VLACHOVSKÝ, R.; BURŠA, J. Automatic Identification and Validation of Planar Collagen Organization in the Aorta Wall with Application to Abdominal Aortic Aneurysm. *MICROSCOPY AND MICROANALYSIS*, 2013, roč. 19, č. 6, s. 1395-1404. ISSN: 1431- 9276.
- [17] REDDY, B. Srinivasa. and B.N. CHATTERJI. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration. *IEEE Transactions on Image Processing*. 1996, vol. 5, issue 8, pp. 1266-1271. DOI: 10.1109/83.506761. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=506761>
- [18] REKTORYS, K. et al. *Přehled užití matematiky*. 1st edition. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, n. p., 1963. 1136 p. ISBN 04-018-63.
- [19] ROSENGREN, H. *Fourier Analysis* (lecture). Gothenburg: Chalmers University of Technology, Mathematical Sciences, October 5, 2009.
- [20] ROSENGREN, H. *Fourier Analysis* (lecture). Gothenburg (Sweden): Chalmers University of Technology, Mathematical Sciences, 12. říjen 2009.
- [21] SCHWARTZ, L. *Matematické metody ve fyzice*. Z francouzského Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Paris 1965, přeložil Brabec, J. 1. vydání. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, n.p., 1972. 360 s. Teoretická knižnice inženýra. ISBN 04-018-72
- [22] STEIN, E. M. – WEISS, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. 1st edition. Princeton (New Jersey, U.S.A.): Princeton University Press, 1971. 297 p. ISBN 0-691-08078-X.
- [23] ZITOVÁ, B. – FLUSSER, J. Image registration methods: a survey. *Elsevier Image and Vision Computing*, 2003, vol. 21, pp. 977—1000. ISSN 0262-8856.
- [24] Wikipedia Contributors: Dreiecksfunktion <https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiecksfunktion>
- [25] Wikipedia Contributors: Fourier transform [https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform)
- [26] Wikipedia Contributors: Fast Fourier Transform [https://en.wikipedia.org/wiki/Fast\\_Fourier\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform)
- [27] Wikipedia Contributors: HSV color space [https://psychology.fandom.com/wiki/HSV\\_color\\_space](https://psychology.fandom.com/wiki/HSV_color_space)



# Příloha A

## Dodatek

### A.1 Odvození, důkazy

#### A.1.1 Důkaz věty o inverzní Fourierově transformaci

Než budeme moci přistoupit k samotnému důkazu, budeme potřebovat dokázat nějaké pomocné vlastnosti.

**Příklad A.1.** Ukažte, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.1})$$

*Řešení.* Zdroj: Příklad vychází ze zkouškového příkladu z předmětu Fourier Analysis na Chalmers University of Technology ve švédském Göteborgu 24. října 2009, autorem zadání byl Hjalmar Rosengren.

Začneme tím, že se omezíme na případ  $p = 1$ , což si můžeme dovolit z důvodu,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = px \\ dt = p dx \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\frac{t}{p}} \frac{dt}{p} = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Odvození se skládá ze dvou kroků. Nejdřív ukážeme, že

$$\frac{\sin x}{x} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx), \quad 0 < x < \pi,$$

kde

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Pak využijeme této vlastnosti k důkazu integrálu (A.1).

$\frac{\sin x}{x}$  je sudá funkce, proto ji můžeme vyjádřit pomocí kosinové řady jako

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx), \quad 0 < x < \pi,$$

kde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \cos(nx) dx. \quad (\text{A.2})$$

Známý goniometrický vzorec říká, že pro reálná  $A, B$  platí

$$2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} = \sin A - \sin B.$$

Vezmeme-li  $\frac{A-B}{2} = x$ ,  $\frac{A+B}{2} = nx$  a vyjádříme  $A, B$ , zjistíme, že

$$2 \sin x \cos(nx) = \sin(x(n+1)) - \sin(x(n-1)).$$

Dosazením tohoto do vztahu  $b_n$  (A.2) dostaneme

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin(x(n+1))}{x} - \frac{\sin(x(n-1))}{x} \right) dx.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x(n+1))}{x} dx = \left| \begin{array}{cc} t = x(n+1) & 0 \mapsto 0 \\ dt = (n+1) dx & \pi \mapsto \pi(n+1) \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi(n+1)} \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{A.3})$$

Podobný postup nám dá, že

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x(n-1))}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi(n-1)} \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{A.4})$$

Rozdíl vztahů (A.3) a (A.4) nám dá požadovaný vztah pro  $b_n$  ve tvaru

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dosazením  $n = 0$  do posledního vztahu způsobí, že dostaneme  $\frac{\sin x}{x}$  pro  $x = 0$ , což není definované, ale v limitě je to rovno 1 a v dalším budeme s jistou dávnou nekorektností brát, že je to rovno 1.  $\frac{\sin x}{x}$  můžeme na  $0 < x < \pi$  psát jako

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Položíme-li teď  $x = 0$ , dostáváme

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

To znamená, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

a my můžeme uzavřít, že

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

**Věta A.2** (Riemannovo-Lebesgueovo lemma). Nechť  $f(x)$  je integrovatelná v absolutní hodnotě na  $R$ . Pak platí [19]

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} F(\xi) = 0.$$

*Důkaz.* Důkaz vychází z [19].

Předpokládejme nejdřív, že  $f$  je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{if } a < x < b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

pro nějaká  $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b$ , v dalším budeme používat označení *obdélníková funkce*. Pak

$$F(\xi) = \int_a^b c e^{-ix\xi} dx = \left[ \frac{c e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{x=a}^b,$$

což jde k nule pro  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Nyní předpokládejme, že  $f$  je po částech konstatní, tj. je lineární kombinací obdélníkových funkcí. Díky linearitě Riemannova integrálu Fourierova transformace funkce  $f$  je lineární kombinací fourierovských spekter jednotlivých obdélníkových funkcí. Z definice Riemannova integrálu pokud  $f$  je reálná integrovatelná v absolutní hodnotě, existuje posloupnost obdélníkových funkcí  $f_n$  takových, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Pak pro každé  $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(\xi) - F(\xi)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-ix\xi} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \right|$$

a protože  $f_n$  i  $f$  jsou integrovatelné

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(\xi) - F(\xi)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x)) e^{-ix\xi} dx \right| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0 \end{aligned}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti vidíme, že

$$F(\xi) \leq |F(\xi) - F_n(\xi)| + |F_n(\xi)|,$$

kde první člen je shora omezen  $\varepsilon > 0$  pro dostatečně velké  $n$  a druhý člen jde k nule pro  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Proto

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} F(\xi) = 0.$$

Pokud  $f$  nabývá komplexních hodnot,

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

kde  $u$  and  $v$  jsou reálné funkce reálné proměnné integrovatelné v absolutní hodnotě na  $\mathbb{R}$ . Za předpokladu, že  $u(x), v(x)$  mají spektra  $U(\xi), V(\xi)$ , dostáváme

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} V(\xi) = 0,$$

proto i

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} F(\xi) = 0.$$

□

Nyní můžeme přistoupit k vlastnímu důkazu věty o inverzní Fourierově transformaci.

*Důkaz.* Důkaz vychází z [19]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r F(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-is\xi} ds \right) e^{ix\xi} d\xi$$

Vzhledem k integrovatelnosti funkce  $f$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-is\xi} ds \right) e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left( \int_{-r}^r e^{i(x-s)\xi} d\xi \right) ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{\sin(r(x-s))}{x-s} ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \frac{\sin rs}{s} ds. \end{aligned}$$

Zaveďme si úspornější značení pro pravostranné a levostranné limity:

$$f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t), \quad f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

Pak můžeme přepsat  $f(x-s)$  jako

$$f(x-s) = \begin{cases} f(x^+) + (f(x-s) - f(x^+)) & \text{if } s < 0 \\ f(x^-) + (f(x-s) - f(x^-)) & \text{if } s \geq 0. \end{cases}$$

Toto je důležité pro řešení bodů nespojitosti funkce  $f$ . Vzhledem k tomu, že funkční hodnota v jediném bodě nemá vliv na hodnotu Riemannova integrálu, není podstatné, jak se vyřeší případ  $s = 0$ . Můžeme ho přidat ke kterémukoli z případů výše. Pak můžeme přepsat poslední integrál jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \frac{\sin rs}{s} ds &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \{f(x^+) + (f(x-s) - f(x^+))\} \frac{\sin rs}{s} ds + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{f(x^-) + (f(x-s) - f(x^-))\} \frac{\sin rs}{s} ds. \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x^-) \frac{\sin rs}{s} ds &= \frac{f(x^-)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin rs}{s} ds = \frac{f(x^-)}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{f(x^-)}{2} \end{aligned}$$

Zdůvodnění předposlední rovnosti řeší příklad A.1 výše. Podobně

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x^+) \frac{\sin rs}{s} ds = \frac{f(x^+)}{2}.$$

Zbývá dokázat, že zbývající členy jdou k nule pro  $r \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(x-s) - f(x^-)) \frac{\sin rs}{s} ds = \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^K (f(x-s) - f(x^-)) \frac{\sin rs}{s} ds}_{\text{označme } a(x)} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_K^{\infty} (f(x-s) - f(x^-)) \frac{\sin rs}{s} ds}_{\text{označme } b(x)} \end{aligned}$$

pro pevné  $K > 0$ . Nyní označme

$$g(s) = \chi_{(0,K)}(s) \frac{f(x-s) - f(x^-)}{s}$$

pro libovolné pevně zvolené  $x$ . Pak

$$a(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \sin rs ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \frac{e^{irs} - e^{-irs}}{2i} ds = \frac{1}{2\pi i} (G(-r) - G(r)),$$

kde  $G$  je Fourierova transformace  $g$ . Z důvodou integrovatelnosti funkce  $f$  díky Riemannovu-Lebesgueově lemmatu (věta A.2 výše) dostáváme  $a(x) \rightarrow 0$  pro  $r \rightarrow \infty$ . Vzhledem k tomu, že  $|\sin rs| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} |b(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_K^{\infty} f(x-s) \frac{1}{s} ds \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_K^{\infty} f(x^-) \frac{\sin rs}{s} ds \right| = \left| \begin{matrix} rs &= & t \\ r ds &= & dt \end{matrix} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_K^{\infty} |f(x-s)| \frac{1}{K} ds + \frac{|f(x^-)|}{\pi} \left| \int_{Kr}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \end{aligned}$$

Vzhledem k integrovatelnosti funkce  $f$

$$\int_K^{\infty} |f(x-s)| ds \rightarrow 0 \text{ pro } K \rightarrow \infty,$$

proto první člen  $|b(x)|$  jde k nule pro  $K$  jdoucí do nekonečna. Vlastnost

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} < \infty$$

implikuje

$$\int_{Kr}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow 0 \text{ pro } K \rightarrow \infty.$$

Proto, zvolíme-li libovolné  $\varepsilon > 0$ , můžeme vždy najít tak velké  $K$ , že  $|b(x)| < \varepsilon$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Dokázali jsme, že

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (f(x-s) - f(x^-)) \frac{\sin rs}{s} ds$$

jde k nule pro  $r$  jdoucí do nekonečna. Podobným způsobem můžeme dokázat, že

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (f(x-s) - f(x^+)) \frac{\sin rs}{s} ds$$

jde k nule pro  $r$  jdoucí do nekonečna. Díky tomu můžeme uzavřít, že

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r F(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{\lim_{t \rightarrow x+} f(x) + \lim_{t \rightarrow x-} f(x)}{2}.$$

Pokud spektrum  $F$  je integrovatelné v absolutní hodnotě na  $\mathbb{R}$ , můžeme použít argumentaci z POZNÁMKY U EXISTENCE FT PRO INTEGROVATELNÉ FUNKCE, TOTO SE CELÉ NEJDŘÍV MUSÍ ZDE VYBUDOVAT, NEŽ BUDE NA CO ODKÁZAT. tentokrát pro inverzní Fourierovu transformaci. Dostaneme, že pro  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\mathcal{F}^{-1}\{F\}(x)|$  existuje a je konečným číslem. Proto

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r F(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}\{F(\xi)\} = \frac{\lim_{t \rightarrow x+} f(x) + \lim_{t \rightarrow x-} f(x)}{2}.$$

Závěrem pokud  $f$  je spojitá a integrovatelná,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = f(x).$$

□

### A.1.2 Fourierova transformace Gaussovy funkce

Zdroj: skripta profesora Komrsky [14]

Nechť

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Její Fourierova transformace je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-i\xi x} dx}_{G(\xi)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{-i\eta y} dy}_{G(\eta)}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že  $G$  je kladná funkce, můžeme rozdělit integrál na dva

$$\begin{aligned} G(\xi) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos \xi x \, dx + \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} i \sin \xi x \, dx}_{=0} = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos \xi x \, dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\xi x)^{2n} \, dx. \end{aligned}$$

Díky větě Beppo Leviho [4],

$$G(\xi) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \xi^{2n} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx}_{I_n}.$$

Integrací per partes dostaneme  $I_n$  jako

$$\begin{aligned} I_n &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & u' = -\frac{2x}{2\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ v' = x^{2n} & v = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{array} \right| = \\ &= \left[ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_{x=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \left( -\frac{x}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx = \\ &= 0 + \frac{1}{\sigma^2(2n+1)} \int_0^{\infty} x^{2(n+1)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx = \frac{1}{\sigma^2(2n+1)} I_{n+1}. \end{aligned}$$

Pro  $n > 0$

$$I_n = \sigma^2(2n-1)I_{n-1} = (\sigma^2)^2(2n-1)(2n-3)I_{n-2} = (2n-1)!! (\sigma^2)^n I_0.$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n-1)!}{(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \cdot 2} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!2^{n-1}}$$

$$I_n = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!2^{n-1}} \sigma^{2n} \cdot \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$\begin{aligned} G(\xi) &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \xi^{2n} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!2^{n-1}} \sigma^{2n} \cdot \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} \right] = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{2n} \sigma^{2n} (-1)^n \frac{1}{n!2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n} \sigma^{2n} (-1)^n}{n!2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ -\frac{(\xi\sigma)^2}{2} \right]^n = e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = G(\xi)G(\eta) = e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}} \cdot e^{-\frac{\eta^2\sigma^2}{2}} = e^{-\frac{\sigma^2(\xi^2+\eta^2)}{2}}$$

## A.2 Zdrojové kódy

### A.2.1 Určení významných směrů v obraze – Matlab

Zdroj: modifikováno z kódu Petry Rozehnalové

```
f = imread('Bamboo.jpg'); %nacte fotku
[m,n,o] = size(f); % velikost fotografie
if o==3
f=f(:,:,1)/3+f(:,:,2)/3+f(:,:,3)/3; %trasformace do odstínů šedi
end
```

```

%% Low-pass Hanning
sx = round((m+1)/2); sy = round((n+1)/2); % souradnice stredu fotky
R = min(sx,sy); r = round(0.8*R); % do r ponechano, mezi r a R postupny prechod, od R nula
for i=1:m
    for j = 1:n
        rho2=(i-sx)^2+(j-sy)^2; %vzdalenost od stredu, optimalizace kodu
        if (rho2>R^2)
            f(i,j) = 0;
        elseif rho2>r^2
            f(i,j) = f(i,j)*( 0.5 + 0.5*cos(pi*(sqrt(rho2)-r)/(R-r)) );
        end
    end
end

%% Vykresleni
imagesc(f); colormap gray; % vykresleni fotky
F = fft2(f); %transformace
F_shift = fftshift(F); %prohozeni kvadranu
figure;
Amplit_spek = abs(F_shift);
imagesc(log(Amplit_spek+1)); colormap gray; %vykresleni amplitudoveho spektrum

%% Orezeni spektra do kruhu
for i=1:m
    for j = 1:n
        rho2=(i-sx)^2+(j-sy)^2; % vzdalenost od stredu na druhou
        if (rho2>(min(m,n)/2)^2)
            AmplitSpek(i,j) = 0;
        end
    end
end

%% Integrace po jednotlivych useckach
param_max = sqrt(m^2+n^2)/2;
param = -param_max:1:param_max;
size_param = size(param,2);

Integral = zeros(181,1);

for theta = 0:180
    x = sx + cos(theta/180*pi)*param;
    y = sy + sin(theta/180*pi)*param;

    x_down = floor(x);
    x_up = ceil(x);
    y_down = floor(y);
    y_up = ceil(y);

    f = zeros(size_param,1);
    for i = 1:size_param
        if x(i)<1 || x(i)>m || y(i)<1 || y(i)>n
            f(i) = 0;
        else
            xx = x(i)-x_down(i); % bilinearni interpolace

```

```

yy = y(i)-y_down(i);
b1 = Amplit_spek(x_down(i),y_down(i));
b2 = Amplit_spek(x_up(i),y_down(i))- Amplit_spek(x_down(i),y_down(i));
b3 = Amplit_spek(x_down(i),y_up(i))- Amplit_spek(x_down(i),y_down(i));
b4 = Amplit_spek(x_down(i),y_down(i)) - Amplit_spek(x_up(i),y_down(i)) -...
    Amplit_spek(x_down(i),y_up(i)) + Amplit_spek(x_up(i),y_up(i));
f(i) = b1 + b2*xx + b3*yy + b4*xx*yy;
end
end
    Integral(theta+1) = sum(f);

end

%% Vykresleni
figure
plot(Integral)
xlim([0 180])

```