Alexander Lomtatidze

Lineární funkcionální analýza I.

Obsah

Použité symboly **5**

1. Metrický prostor **6**
1.1. Základní pojmy 6
1.2. Některé podmnožiny 8
1.3. Separabilní metrické prostory 12
1.4. Konvergence 13
1.5. Úplné metrické prostory 15
1.6. Kompaktnost 19
1.7. Kompaktní množiny v některých speciálních prostorech 26
1.7.1. Prostor $C([a, b])$ 26
1.7.2. Prostor s 26
1.7.3. Prostor l_p $(p \geq 1)$ 27

2. Lineární prostor **28**
2.1. Definice a příklady 28
2.2. Normovaný prostor 30
2.3. Unitární prostor 32
2.4. Besselova nerovnost 36
2.5. Riesz–Fischerova věta 38
2.6. Hilbertův prostor 39
2.7. Charakteristická vlastnost unitárních prostorů 43

3. Funkcionály **45**
3.1. Geometrický význam lineárního funkcionálu 46
3.2. Konvexní množiny 48
3.3. Konvexní funkcionály 50
3.4. Hahn–Banachova věta 52
3.5. Spojité lineární funkcionály 54
3.6. Hahn–Banachova věta v normovaném prostoru 57

4. Adjungovaný prostor **59**
4.1. Prostor adjungovaný k Hilbertovu prostoru 63
4.2. Druhý adjungovaný prostor 64
4.3. Slabá konvergence, Banach–Steinhausova věta 65
4.4. Slabá konvergence a ohraničené množiny v adjungovaném prostoru 68

5. Lineární operátory **70**
5.1. Definice a příklady 70
5.2. Spojitost a ohraničenost 71
5.3. Invertovatelnost 73
5.4. Adjungované operátory 75
5.5. Adjungovaný operátor v unitárním prostoru 76
5.6. Spektrum operátoru 76
5.7. Kompaktní operátory 78

6. Fredholmovy věty **81**
6.1. Operátorové rovnice 81
6.2. Spektrum lineárního kompaktního operátoru v Hilbertově prostoru 85

7. Riesz–Schauderova teorie **86**

8. Rovnice prvního druhu **95**

Použité symboly

Kromě obvyklých množinových a logických symbolů (inkluze, průnik, sjednocení, implikace apod.) jsou v textu použity symboly:

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}_+$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$[a, b]$	uzavřený interval na reálné ose
$]a, b[$	otevřený interval na reálné ose
$\lvert x\rvert$	absolutní hodnota čísla $x \in \mathbb{R}$ (resp. $x \in \mathbb{C}$)
δ_{kj}	Kroneckerův symbol, tj. $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad k = j \\ 0 & \text{pro} \quad k \neq j \end{cases}$
$A \times B$	kartézský součin množin A a B, tj. $A \times B = \Big\{(a, b) : a \in A,\ b \in B\Big\}$
$A \setminus B$	rozdíl množin A a B, tj. $A \setminus B = \Big\{a \in A : a \notin B\Big\}$

1. Metrický prostor

1.1. Základní pojmy

Definice 1.1. *Metrickým prostorem* nazýváme dvojici (X, ρ), kterou tvoří neprázdná množina X (prvků nebo bodů) a funkce $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ (zvaná metrika, vzdálenost nebo odchylka) splňující pro libovolné $x, y, z \in X$ následující podmínky:

1.	$\rho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$.	(axiom totožnosti)
2.	$\rho(x, y) = \rho(y, x)$.	(axiom symetrie)
3.	$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.	(trojúhelníková nerovnost)

■ **Příklad 1.1.** Nechť X je neprázdná množina a $\rho : X \times X \to \{0, 1\}$ funkce definovaná vztahem

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže} \quad x = y, \\ 1 & \text{jestliže} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem. Tento prostor se nazývá *prostorem izolovaných bodů.*

■ **Příklad 1.2.** Nechť $X = \mathbb{R}$ a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ je funkce definovaná rovností

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem.

■ **Příklad 1.3.** Nechť

$$X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ je funkce definovaná rovností

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem. Tento metrický prostor se nazývá *n-rozměrný euklidovský prostor.*

■ **Příklad 1.4.** Nechť

$$X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ je funkce definovaná rovností

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem.

■ **Příklad 1.5.** Nechť

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n\}$$

a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ je funkce definovaná rovností

$$\rho(x, y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem.

■ **Příklad 1.6.** Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $X = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty\}$ a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ je funkce definovaná rovností

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem. Tento prostor značíme l_p.

■ **Příklad 1.7.** Nechť

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R} \text{ pro} i \in \mathbb{N}, \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots\} < +\infty\}$$

a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ je funkce definovaná rovností

$$\rho(x, y) = \sup\{|x_k - y_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem. Tento prostor nazýváme *prostor ohraničených posloupností* a značíme m.

■ **Příklad 1.8.** Nechť $X = C([a, b])$ množina spojitých funkcí definovaných v uzavřeném intervalu $[a, b]$ (pod hodnotou funkce f v bodech a a b rozumíme limity $\lim\limits_{t \to a+} f(t)$ a $\lim\limits_{t \to b-} f(t)$). Nechť dále $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ je funkce definovaná rovností

$$\rho(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : a \leq t \leq b\}.$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem.

■ **Příklad 1.9.** Nechť $X = C([a, b])$ množina spojitých funkcí definovaných v uzavřeném intervalu $[a, b]$ a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ je funkce definovaná rovností

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f(s) - g(s)|^p \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}},$$

kde $p \geq 1$. Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem, který budeme značit $C_p([a, b])$.

■ **Příklad 1.10.** Nechť (X_1, ρ_1) a (X_2, ρ_2) jsou metrické prostory,

$$X = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$
$$\rho(x, y) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2).$$

Potom dvojice (X, ρ) je metrickým prostorem.

V uvedených příkladech je podstatné ověřit trojúhelníkovou nerovnost (tj. axiom 3). V Příkladech 1.3 a 1.6 lze tento axiom ověřit použitím Minkowského nerovnosti

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1. \tag{1.1}$$

Při důkazu nerovnosti (1.1) (pro $p > 1$) vycházíme z tzv. Hölderovy nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Stejně tak v Příkladě 1.9 musíme použít Minkowského nerovnost v integrálním tvaru

$$\left(\int_a^b |f(s)+g(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1'}$$

kde $p \geq 1$, kterou lze dokázat užitím tzv. Hölderovy nerovnosti v integrálním tvaru

$$\int_a^b |f(s)g(s)|\mathrm{d}s \leq \left(\int_a^b |f(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(s)|^q \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{kde} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Pro $p < 1$ Minkovského nerovnosti (1.1), (1.1′) neplatí. Jinak řečeno, pokud bychom chtěli zkoumat prostor uvedený v Příkladě 1.3 nebo 1.6, popř. 1.9 pro $p < 1$, pak by v takovém prostoru neplatila trojúhelníková nerovnost, tj. nebyl by to metrický prostor.

■ **Příklad 1.11.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $X_0 \subseteq X$, $X_0 \neq \emptyset$ a $\rho_0 : X_0 \times X_0 \to \mathbb{R}_+$ je zúžení funkce $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ na množinu $X_0 \times X_0$. Pak dvojice (X_0, ρ_0) je také metrický prostor a nazývá se *podprostor metrického prostoru* (X, ρ).

1.2. Některé podmnožiny

Definice 1.2. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. *Otevřenou (resp. uzavřenou) koulí* se středem v bodě $x_0 \in X$ a poloměrem $r > 0$ nazýváme množinu $B(x_0, r)$ (resp. $B[x_0, r]$) definovanou rovností

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\} \quad (\text{resp. } B[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\})$$

Poznámka 1.1. Pro $B(x_0, \varepsilon)$ budeme také používat název ε-okolí bodu x_0 a značit ho $O_\varepsilon(x_0)$.

Definice 1.3. Bod $x \in X$ metrického prostoru (X, ρ) se nazývá *bodem uzávěru* množiny $A \subseteq X$, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$O_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset.$$

Definice 1.4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Množina všech bodů uzávěrů množiny $A \subseteq X$ se nazývá *uzávěr* množiny A a označuje se $\overline{A}$.

Věta 1.1. *Uzávěr množiny $A \subseteq X$ metrického prostoru (X, ρ) má tyto vlastnosti:*

1. $A \subseteq \overline{A}$.

2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

3. Jestliže $A \subseteq B$, *pak* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Důkaz. První a třetí tvrzení jsou zřejmá. Dokážeme druhé tvrzení. Vzhledem k prvnímu tvrzení je $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$, stačí tedy ověřit, že $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$. Nechť $x_0 \in \overline{\overline{A}}$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné, ale pevně zvolené číslo. Podle definice uzávěru existuje $x_1 \in O_\varepsilon(x_0) \cap \overline{A}$. Položme $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x_0, x_1)$ a ověřme, že

$$O_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq O_\varepsilon(x_0). \tag{1.2}$$

Vskutku, jestliže $y \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, pak

$$\rho(y, x_1) < \varepsilon_1\,.$$

Odtud, s použitím trojúhelníkové nerovnosti, máme

$$\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x_1) + \rho(x_1, x_0) < \varepsilon_1 + \rho(x_0, x_1) = \varepsilon,$$

platí tedy (1.2). Jelikož $x_1 \in \overline{A}$, existuje $x_2 \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap A$, a tedy, s ohledem na (1.2), také $x_2 \in O_\varepsilon(x_0) \cap A$. Vzhledem k libovolnosti ε je $x_0 \in \overline{A}$.

Dokážeme nyní čtvrté tvrzení. Protože

$$A \subseteq A \cup B \qquad \text{a} \qquad B \subseteq A \cup B,$$

dostáváme použitím třetího tvrzení

$$\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad \text{a} \qquad \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B},$$

a tedy

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}\,.$$

Nyní dokážeme platnost opačné inkluze, tj.

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}\,. \tag{1.3}$$

Nechť (1.3) neplatí. Pak existuje $x_0 \in \overline{A \cup B}$ takové, že $x_0 \notin \overline{A} \cup \overline{B}$, a tedy $x_0 \notin \overline{A}$ a $x_0 \notin \overline{B}$. Lze proto najít $\varepsilon_1 > 0$ a $\varepsilon_2 > 0$ tak, že

$$O_{\varepsilon_1}(x_0) \cap A = \emptyset \qquad \text{a} \qquad O_{\varepsilon_2}(x_0) \cap B = \emptyset. \tag{1.4}$$

Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Poněvadž $O_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{\varepsilon_1}(x_0)$ a $O_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{\varepsilon_2}(x_0)$, plyne z (1.4)

$$O_\varepsilon(x_0) \cap \big(A \cup B\big) = \emptyset,$$

což je ve sporu s předpokladem $x_0 \in \overline{A \cup B}$. Dosažený spor dokazuje platnost inkluze (1.3). Tím je Věta 1.1 zcela dokázána. □

Definice 1.5. Bod $x \in X$ se nazývá *hromadný bod* množiny $A \subseteq X$ metrického prostoru (X, ρ), jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ jeho ε-okolí $O_\varepsilon(x)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A.

Definice 1.6. Bod $x \in X$ se nazývá *izolovaný bod* množiny $A \subseteq X$ metrického prostoru (X, ρ), jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$O_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}.$$

Definice 1.7. Množina $A \subseteq X$ se nazývá *uzavřená* v metrickém prostoru (X, ρ), jestliže $A = \overline{A}$.

Definice 1.8. Bod $x \in X$ se nazývá *vnitřní bod* množiny $A \subseteq X$ metrického prostoru (X, ρ), jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $O_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Poznámka 1.2. Jednoduše lze ukázat (dokažte si!), že bod uzávěru množiny M je buď hromadným nebo izolovaným bodem této množiny. Z toho plyne, že uzávěr $\overline{M}$ množiny M se skládá z:

1. izolovaných bodů množiny M;
2. hromadných bodů množiny M, které patří do množiny M;
3. hromadných bodů množiny M, které nepatří do množiny M.

Definice 1.9. Množina $A \subseteq X$ metrického prostoru (X, ρ), jejíž všechny body jsou vnitřní, se nazývá *otevřená*.

▶ **Úloha 1.1.** Ukažte, že

a) $\overline{A}$ je uzavřená množina,

b) $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená množina, která obsahuje množinu A.

■ **Příklad 1.12.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $x_0 \in X$ a $r > 0$. Pak:

a) $B[x_0, r]$ je uzavřená množina.

b) $B(x_0, r)$ je otevřená množina.

c) $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$.

d) $\emptyset$ a X jsou uzavřené množiny.

e) Každá konečná podmnožina $A \subseteq X$ je uzavřená.

f) Každý bod konečné podmnožiny $A \subseteq X$ je izolovaným bodem.

g) Množina X je otevřená.

Věta 1.2. *Průnik konečného nebo nekonečného počtu uzavřených množin a sjednocení konečného počtu uzavřených množin jsou uzavřené množiny.*

Důkaz. Nechť je $A = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, kde $A_\alpha \subseteq X$ $(\alpha \in I)$ jsou uzavřené množiny v metrickém prostoru (X, ρ). Nechť je $x \in X$ bodem uzávěru množiny A. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ je

$$O_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset.$$

Proto také $O_\varepsilon(x) \cap A_\alpha \neq \emptyset$ pro každé $\alpha \in I$. Jelikož je každá množina A_α uzavřená, je $x \in A_\alpha$ pro $\alpha \in I$, a tedy $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = A$, tj. A je uzavřená množina.

Nechť nyní

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \tag{1.5}$$

kde $A_k \subseteq X$ $(k = 1, \dots, n)$ jsou uzavřené množiny, tj. $\overline{A}_k = A_k$ pro $k = 1, \dots, n$. Proto je zřejmé, že také

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k.$$

Na druhou stranu, z vlastnosti 4. Věty 1.1 plyne

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k,$$

a tedy $\overline{A} = A$. □

▶ **Úloha 1.2.** Sjednocení nekonečně mnoha uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Uveďte příklad.

Věta 1.3. *Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq X$. K tomu aby A byla otevřená množina je nutné a stačí, aby její doplněk $X \setminus A$ byl uzavřená množina.*

Důkaz. Nechť A je otevřená množina a

$$x \notin X \setminus A. \tag{1.6}$$

Ukážeme, že x nemůže být bodem uzávěru množiny $X \setminus A$. Vskutku, vzhledem k (1.6), je

$$x \in A.$$

Jelikož je množina A otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $O_\varepsilon(x) \subseteq A$. Odtud

$$O_\varepsilon(x) \cap \big(X \setminus A\big) = \emptyset, \tag{1.7}$$

což podle definice znamená, že x není bodem uzávěru množiny $X \setminus A$. Množina $X \setminus A$ je tedy uzavřená.

Nyní naopak, nechť je množina $X \setminus A$ uzavřená a $x \in A$ libovolné. Jelikož $x \notin X \setminus A$, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že platí (1.7), tj. $O_\varepsilon(x) \subseteq A$. Množina A je tedy otevřená. □

Z Vět 1.2, 1.3 a de Morganových pravidel

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} \big(X \setminus A_\alpha\big), \qquad X \setminus \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} \big(X \setminus A_\alpha\big)$$

plyne následující věta.

Věta 1.4. *Sjednocení konečného nebo nekonečného počtu otevřených množin a průnik konečného počtu otevřených množin jsou otevřené množiny.*

▶ **Úloha 1.3.** Průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřená množina. Uveďte příklad.

Definice 1.10. Nechť (X, ρ) je metrickým prostorem a $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Množina A se nazývá *hustá* v množině B, jestliže $B \subseteq \overline{A}$. Speciálně množina A se nazývá *hustá* v metrickém prostoru (X, ρ), jestliže $\overline{A} = X$.

Definice 1.11. Nechť (X,ρ) je metrickým prostorem a $A \subseteq X$. Množina A se nazývá *řídká* v metrickém prostoru (X,ρ), jestliže v X neexistuje žádná otevřená koule, v níž by množina A byla hustá.

Tvrzení 1.5. *Množina $A \subseteq X$ je řídká v metrickém prostoru (X,ρ) právě tehdy, když každá otevřená koule $B \subseteq X$ obsahuje otevřenou kouli $C \subseteq B$ takovou, že $A \cap C = \emptyset$.*

Důkaz. Dokážeme ekvivalentní tvrzení: *Množina $A \subseteq X$ není řídká v metrickém prostoru (X,ρ) právě tehdy, když existuje otevřená koule $B \subseteq X$ taková, že každá otevřená koule $C \subseteq B$ má s množinou A neprázdný průnik.*

Nejprve předpokládejme, že množina $A \subseteq X$ není řídká v (X,ρ). Existuje tedy otevřená koule $B \subseteq X$ v níž je množina A hustá, tj. platí $B \subseteq \overline{A}$. Nechť nyní $C \subseteq B$ je libovolná otevřená koule a x_0 je její střed. Je zřejmé, že $A \cap C \neq \emptyset$, neboť v opačném případě by $x_0 \notin \overline{A}$, což je ve sporu s inkluzí $C \subseteq \overline{A}$.

Nyní předpokládejme, že existuje otevřená koule $B(a,r) \subseteq X$ taková, že každá otevřená koule obsažená v $B(a,r)$ má s množinou A neprázdný průnik. Ukážeme, že

$$B(a,r) \subseteq \overline{A}. \tag{1.8}$$

Vskutku, nechť $x_0 \in B(a,r)$ je libovolné. Položme

$$r_n = \frac{r - \rho(x_0,a)}{n} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že jakmile $x \in B(x_0,r_n)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tj. $\rho(x,x_0) \le r_n$, pak

$$\rho(x,a) \le \rho(x,x_0) + \rho(x_0,a) \le r_n + \rho(x_0,a) \le r.$$

Proto

$$B(x_0,r_n) \subseteq B(a,r) \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem k našemu předpokladu tedy máme

$$A \cap B(x_0,r_n) \neq \emptyset \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme

$$x_n \in A \cap B(x_0,r_n). \tag{1.9}$$

Protože $r_n \to 0$ pro $n \to +\infty$, je zřejmé, že $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. S ohledem na (1.9) proto dostáváme $x_0 \in \overline{A}$. Bod $x_0 \in B(a,r)$ byl volen libovolně, platí tedy inkluze (1.8). To však znamená, že množina A není řídká v (X,ρ). □

1.3. Separabilní metrické prostory

Definice 1.12. Metrický prostor (X,ρ) se nazývá *separabilní*, existuje-li spočetná množina $A \subseteq X$, která je hustá v prostoru (X,ρ).

Tvrzení 1.6. *Nechť (X,ρ) je separabilní metrický prostor a $X_0 \subseteq X$, $X_0 \neq \emptyset$. Pak prostor (X_0,ρ) je separabilní.*

Důkaz. Nechť množina $\{x_1, x_2, \dots\}$ je hustá v prostoru (X, ρ). Označme

$$a_k = \inf\{\rho(x_k, \eta) : \eta \in X_0\} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ existuje $\eta_{nm} \in X_0$ takové, že

$$\rho(x_n, \eta_{nm}) < a_n + \frac{1}{m}\,. \tag{1.10}$$

Ukážeme, že je množina $\{\eta_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ hustá v prostoru (X_0, ρ).

Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolme $m \in \mathbb{N}$, $m > 3/\varepsilon$. Poněvadž je množina $\{x_1, x_2, \dots\}$ je hustá v prostoru (X, ρ), lze k libovolnému prvku $\eta \in X_0$ najít $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\rho(x_n, \eta) < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \text{a tedy} \quad a_n < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{1.11}$$

Vzhledem k (1.10) tedy platí

$$\rho(x_n, \eta_{nm}) < a_n + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}\,. \tag{1.12}$$

Uvážíme-li tedy (1.11) a(1.12), existuje pro libovolné $\eta \in X_0$ prvek η_{mn} takový, že

$$\rho(\eta, \eta_{mn}) \le \rho(\eta, x_n) + \rho(x_n, \eta_{mn}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Systém $\{\eta_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ je tedy nejvýše spočetná množina hustá v prostoru (X_0, ρ). □

■ **Příklad 1.13.**

a) Všechny prostory uvedené v Příkladech 1.1–1.6 jsou separabilní.

b) Prostor uvedený v Příkladě 1.7 separabilní není.

1.4. Konvergence

Definice 1.13. Nechť (X, ρ) je metrickým prostorem a $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost bodů množiny X. Říkáme, že tato *posloupnost konverguje k bodu* $x \in X$, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$x_n \in O_\varepsilon(x) \quad \text{pro} \quad n > n_\varepsilon.$$

Bod x se nazývá *limita posloupnosti* $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ a píšeme $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$.

Definici 1.13 lze zřejmě vyslovit také takto: Říkáme, že posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže

$$\lim_{k\to+\infty} \rho(x_k, x) = 0.$$

Definujme nyní ještě pojem ohraničené posloupnosti.

Definice 1.14. Nechť (X, ρ) je metrickým prostorem a $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost bodů množiny X. Říkáme, že tato *posloupnost je ohraničená*, jestliže v (X, ρ) existuje uzavřená koule $B[x_0, r]$ taková, že

$$x_k \in B[x_0, r] \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Přímo z definice konvergence plynou následující tvrzení.

Tvrzení 1.7. *Konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Tvrzení 1.8. *Konvergentní posloupnost má právě jednu limitu.*

Tvrzení 1.9. *Jestliže posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ konverguje k bodu x, pak každá posloupnost vybraná z této posloupnosti konverguje k bodu x.*

Tvrzení 1.10. *Nechť (X, ρ) je metrickým prostorem. K tomu aby $x \in X$ byl bod uzávěru množiny $A \subseteq X$ je nutné a stačí, aby existovala posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ bodů množiny A konvergující k bodu x.*

Definice 1.15. Nechť (X, ρ_1) a (Y, ρ_2) jsou metrické prostory a

$$f : X \to Y.$$

Zobrazení f se nazývá *spojité v bodě* $x_0 \in X$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny body $x \in X$ splňující $\rho_1(x, x_0) \leq \delta$ platí $\rho_2(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$.

Definice 1.16. Je-li zobrazení f spojité v každém bodě prostoru (X, ρ_1), říkáme, že zobrazení f je *spojité v metrickém prostoru* (X, ρ_1).

Poznámka 1.3. Definici 1.16 můžeme vyslovit ekvivalentně takto: Zobrazení f se nazývá *spojité v metrickém prostoru* (X, ρ_1), jestliže úplný vzor každé otevřené množiny v (Y, ρ_2) je otevřenou množinou v (X, ρ_1).

Definice 1.17. Nechť (X, ρ_1) a (Y, ρ_2) jsou metrické prostory a

$$f : X \to Y.$$

Řekneme, že zobrazení f je *stejnoměrně spojité*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in X$ splňující $\rho_1(x, y) \leq \delta$ platí $\rho_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

Definice 1.18. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Zobrazení

$$T : X \to X$$

se nazývá *kontrakce*, existuje-li takové číslo $q < 1$, že pro libovolné dva body $x, y \in X$ platí nerovnost

$$\rho(Tx, Ty) \leq q \cdot \rho(x, y).$$

Tvrzení 1.11. *Každá kontrakce je spojitá.*

Definice 1.19. Nechť (X, ρ) a (Y, η) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ takové spojité zobrazení, že $f^{-1} : Y \to X$ je také spojité. Pak f nazýváme *homeomorfismem* mezi metrickými prostory (X, ρ) a (Y, η) a říkáme, že tyto prostory jsou *homeomorfní.*

Definice 1.20. Nechť (X, ρ) a (Y, η) jsou metrické prostory. Bijekci $f : X \to Y$ nazýváme *izometrickým zobrazením*, jestliže

$$\rho(x, y) = \eta(f(x), f(y)) \quad \text{pro} \quad x, y \in X.$$

Prostory (X, ρ), (Y, η) nazýváme *izometrické*, jestliže jeden z nich lze izometricky zobrazit na druhý.

1.5. Úplné metrické prostory

Definice 1.21. Posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ bodů metrického prostoru (X,ρ) nazveme *cauchyovskou*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$ a $n \geq n_\varepsilon$ je

$$\rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti přímo plyne

Tvrzení 1.12. *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Tvrzení 1.13. *Jestliže cauchyovská posloupnost obsahuje posloupnost konvergující k bodu $x \in X$, pak sama konverguje k téže limitě.*

Definice 1.22. Jestliže v metrickém prostoru (X,ρ) každá cauchyovská posloupnost konverguje, pak se tento prostor nazývá *úplný*.

Jinými slovy, metrický prostor se nazývá *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ bodů z množiny X má limitu x, přičemž $x \in X$.

► **Úloha 1.4.** Dokažte, že uzavřená podmnožina A úplného metrického prostoru (X,ρ) je sama úplným metrickým prostorem.

■ **Příklad 1.14.** Prostor $C_2([a,b])$ uvedený v Příkladě 1.9 není úplný.

Věta 1.14. *K tomu, aby metrický prostor (X,ρ) byl úplný, je nutné a stačí, aby v něm každá posloupnost $\{B_i\}_{i=1}^{+\infty}$ do sebe vnořených uzavřených koulí, jejichž poloměry konvergují k nule, měla neprázdný průnik.*

Důkaz. Nutnost. Nechť je metrický prostor (X,ρ) úplný a nechť

$$X \supseteq B_1[x_1, r_1] \supseteq B_2[x_2, r_2] \supseteq \cdots \supseteq B_k[x_k, r_k] \supseteq \dots ,$$

kde

$$\lim_{k\to+\infty} r_k = 0.$$

Posloupnost středů $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je cauchyovská, neboť

$$\rho(x_n, x_m) \leq r_n \quad \text{pro} \quad m > n.$$

Jelikož je (X,ρ) úplný metrický prostor (viz Definici 1.22), existuje $x \in X$ takový, že

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x.$$

Ověříme, že

$$x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k[x_k, r_k]. \tag{1.13}$$

Vskutku, poněvadž $B_n[x_n, r_n]$ obsahuje všechny body $x_n, x_{n+1}, \dots$ posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$, je, s ohledem na Tvzení 1.10, bod x bodem uzávěru každé koule $B_n[x_n, r_n]$. Každá koule $B_n[x_n, r_n]$ je však uzavřená, a tedy $x \in B_n[x_n, r_n]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto platí (1.13).

Dostatečnost. Nechť je posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ cauchyovská. Ukážeme, že je také konvergentní a její limita patří do množiny X. Podle Definice 1.21 existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\rho(x_n, x_{n_1}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{pro} \quad n \geq n_1 .$$

Odtud
$$x_n \in B[x_{n_1}, 1] \quad \text{pro} \quad n \geq n_1 .$$
Dále, opět podle Definice 1.21, existuje $n_2 > n_1$ takové, že
$$\rho(x_n, x_{n_2}) \leq \frac{1}{2^2} \quad \text{pro} \quad n \geq n_2 ,$$
a tedy
$$x_n \in B[x_{n_2}, 1/2] \quad \text{pro} \quad n \geq n_2 .$$
Užitím trojúhelníkové nerovnosti lze lehce ověřit, že
$$B[x_{n_2}, 1/2] \subseteq B[x_{n_1}, 1].$$
Obecně, jsou-li čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ a body $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ již takto vybrány, existuje $n_{k+1} > n_k$ tak, že
$$\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{pro} \quad n \geq n_{k+1} , \tag{1.14}$$
a tedy
$$x_n \in B\left[x_{n_{k+1}}, 1/2^k\right] \quad \text{pro} \quad n \geq n_{k+1} . \tag{1.15}$$
Užitím trojúhelníkové nerovnosti lze opět ověřit, že
$$B\left[x_{n_{k+1}}, 1/2^k\right] \subseteq B\left[x_{n_k}, 1/2^{k-1}\right] .$$
Pokračujeme-li v tomto procesu, dostaneme posloupnost do sebe vnořených uzavřených koulí $B\left[x_{n_k}, 1/2^{k-1}\right]$, jejichž poloměry $\frac{1}{2^{k-1}}$ konvergují k nule. Podle předpokladu má tato posloupnost uzavřených koulí alespoň jeden společný bod, který označíme x. Jelikož $x \in B\left[x_{n_k}, 1/2^{k-1}\right]$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, dostaneme
$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x.$$
Odtud, s ohledem na Tvrzení 1.13, plyne
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$
Tím je věta dokázána. □

► **Úloha 1.5.** Dokažte, že průnikem do sebe vnořených uzavřených koulí ve Větě 1.14 je jediný bod.

Věta 1.15 (Bairova věta)**.** *Úplný metrický prostor (X, ρ) nelze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha množin řídkých v prostoru (X, ρ).*

Důkaz. Předpokádejme, že
$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n , \tag{1.16}$$
kde množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou řídké v prostoru (X, ρ). Nechť $x_0 \in X$. Jelikož množina A_1 není hustá v $B[x_0, 2]$, existuje $r_1 \in]0, 1[$ a $x_1 \in X$ tak, že
$$B[x_1, r_1] \subseteq B[x_0, 2] \qquad \text{a} \qquad B[x_1, r_1] \cap A_1 = \emptyset.$$

Protože množina A_2 není hustá v $B[x_1, r_1]$, existuje $r_2 \in]0, 1/2[$ a $x_1 \in X$ tak, že

$$B[x_2, r_2] \subseteq B[x_1, r_1] \qquad \text{a} \qquad B[x_2, r_2] \cap A_2 = \emptyset.$$

Pokračujeme-li v tomto procesu, dostaneme posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq X$ a $\{r_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset]0, +\infty[$ takové, že

$$B[x_{k+1}, r_{k+1}] \subseteq B[x_k, r_k], \quad r_k < \frac{1}{k} \qquad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.17}$$

$$B[x_k, r_k] \cap A_k = \emptyset \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Vzhledem k (1.17) a Větě 1.14 existuje $x \in X$ takové, že

$$x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} B[x_k, r_k]. \tag{1.19}$$

Nyní, užitím (1.18) a (1.19), dostáváme

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\,,$$

což je ve sporu s (1.16). Tím je věta dokázána. □

Definice 1.23. Nechť (X, ρ) je metrickým prostorem. Úplný metrický prostor (Y, η) se nazývá *úplný obal* metrického prostoru (X, ρ), jestliže

1. (X, ρ) je podprostor prostoru (Y, η),
2. množina X je hustá v prostoru (Y, η).

■ **Příklad 1.15.**

1. Prostor $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ je úplný obal prostoru $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.
2. Prostor $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ je úplný obal prostoru $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, |\cdot|)$.
3. Prostor $([a, b], |\cdot|)$ je úplný obal prostoru $(]a, b[\,, |\cdot|)$.

Věta 1.16. *Každý metrický prostor (X, ρ) má úplný obal. Tento úplný obal je určen jednoznačně až na taková izometrická zobrazení, která zobrazují každý bod prostoru (X, ρ) na tento bod.*

Definice 1.24. Nechť M je nějaká množina. Bod $x \in M$ se nazývá *pevný bod zobrazení* $T : M \to M$, jestliže $Tx = x$.

Věta 1.17 (Princip kontrakce). *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $T : X \to X$ je kontrakce. Pak T má právě jeden pevný bod v X.*

Důkaz. Podle definice kontrakce existuje $q \in]0, 1[$ tak, že

$$\rho(Tx, Ty) \le q\, \rho(x, y) \quad \text{pro} \quad x, y \in X. \tag{1.20}$$

Nechť $x_0 \in X$ je libovolný bod. Definujme posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq X$ rovnostmi

$$x_{k+1} = Tx_k = T^{k+1}x_0 \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{1.21}$$

Vzhledem k (1.20), (1.21) a trojúhelníkové nerovnosti pro každé $m > n$ obdržíme

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) = \rho(T^n x_0, Tx_{m-1}) \le q^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le \\ \le q^n \Big[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \Big] \le \\ \le q^n \rho(x_0, x_1) \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-n-1}\right) \le \\ \le q^n \rho(x_0, x_1) \left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{q^n}{1-q}\, \rho(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je tedy cauchyovská. Vzhledem k úplnosti prostoru (X, ρ) tato posloupnost konverguje k nějakému bodu $x \in X$, tj.

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Odtud, s ohledem na Tvrzení 1.11, dostáváme

$$Tx = T \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} Tx_n = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = x,$$

tj. zobrazení T má alespoň jeden pevný bod.

Nyní ukážeme jeho jednoznačnost. Nechť $x, y \in X$ jsou takové, že

$$Tx = x \qquad \text{a} \qquad Ty = y.$$

Pak, užitím nerovnosti (1.20), získáme

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \le q\, \rho(x, y).$$

Odtud, vzhledem k předpokladu $q \in \,]0, 1[\,$, plyne $\rho(x, y) = 0$, tj. $x = y$. Tím je věta dokázána. □

Důsledek 1.18. *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $F : X \to X$ takové spojité zobrazení, že některá jeho mocnina $T = F^n$ je kontrakce. Pak F má právě jeden pevný bod v X.*

Důkaz. Vzhledem k Větě 1.17 má zobrazení T jediný pevný bod $x \in X$, tj. platí $Tx = x$. Odtud je zřejmé, že také

$$T^k x = x \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Položme $x_0 = Fx$. Pak

$$Fx = FT^k x = F^{nk+1} x = F^{nk} F x = F^{nk} x_0 = T^k x_0 \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Z důkazu předchozí věty je zřejmé, že posloupnost $\{T^k x_0\}_{k=1}^{+\infty}$ konverguje k jedinému pevnému bodu x zobrazení T, tj.

$$\lim_{k \to +\infty} T^k x_0 = x.$$

Odtud a (1.22) plyne $Fx = x$, tj. zobrazení F má alespoň jeden pevný bod. Jednoznačnost tohoto pevného bodu plyne z jednoznačnosti pevného bodu zobrazení T, neboť každý pevný bod zobrazení F je také pevným bodem zobrazení T. □

1.6. Kompaktnost

Definice 1.25. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subseteq X$. Nechť dále I je množina indexů a $A_\alpha \subseteq X$ pro $\alpha \in I$ jsou takové, že

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Potom systém množin $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ nazýváme *pokrytím množiny M.*

Pokud $A_\alpha \subseteq X$ pro $\alpha \in I$ jsou otevřené množiny, pak pokrytí $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ nazýváme *otevřeným pokrytím množiny M.*

Pokud $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je pokrytí množiny M a $J \subseteq I$ taková, že systém $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ je také pokrytím množiny M, pak systém $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ nazýváme *podpokrytím* pokrytí $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Obdobně pokud $J \subseteq I$ a $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ $(\alpha \in J)$ pak systém $\{B_\alpha\}_{\alpha \in J}$ je také podpokrytím pokrytí $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Definice 1.26. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *kompaktní*, jestliže jeho libovolné otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

Definice 1.27. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq X$. Řekneme, že množina A je kompaktní, jestliže podprostor (A, ρ) je kompaktní prostor.

Definice 1.28. Systém podmnožin $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ prostoru (X, ρ) nazveme *centrovaným*, jestliže pro libovolnou konečnou podmnožinu $J \subseteq I$ platí

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Věta 1.19. *K tomu, aby metrický prostor (X, ρ) byl kompaktní, je nutné a stačí, aby průnik všech množin libovolného centrovaného systému uzavřených podmnožin množiny X byl neprázdný.*

Důkaz. Nechť je prostor (X, ρ) kompaktní a nechť $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny X. Ukážeme, že má neprázdný průnik. Položme $B_\alpha = X \setminus A_\alpha$ pro $\alpha \in I$.

Nechť $J \subseteq I$ je konečná množina. Jelikož

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \emptyset,$$

platí

$$\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha \neq X.$$

Vskutku, podle de Morganových pravidel je

$$\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} \big(X \setminus A_\alpha\big) = X \setminus \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \neq X.$$

Na druhou stranu, poněvadž je prostor (X, ρ) kompaktní, nemůže systém $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tvořit pokrytí množiny X. Proto, opět z de Morganových pravidel, dostáváme

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Naopak, nechť průnik všech množin libovolného centrovaného systému uzavřených podmnožin množiny X je neprázdný a nechť $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je otevřené pokrytí množiny X. Položme $A_\alpha = X \setminus B_\alpha$ pro $\alpha \in I$. Jelikož

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = X,$$

dostáváme podle de Morganových pravidel

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}\bigl(X \setminus B_\alpha\bigr) = X \setminus \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha = \emptyset,$$

tj. vzhledem k předpokladu nemůže být systém $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ centrovaný. Existuje tedy konečná množina $J \subseteq I$ taková, že

$$\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha = \emptyset.$$

Odtud a z de Morganových pravidel plyne, že $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ je konečné podpokrytí pokrytí $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Tím je věta dokázána. □

Věta 1.20. *Nechť (X,ρ) je kompaktní prostor. Pak každá jeho nekonečná podmnožina má alespoň jeden hromadný bod.*

Důkaz. Nechť $M \subseteq X$ je nekonečná množina, která nemá ani jeden hromadný bod. Pak z ní lze vybrat spočetnou podmnožinu

$$\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq M,$$

která rovněž nemá ani jeden hromadný bod. Položme

$$A_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tvoří centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny X. Na druhé straně,

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \emptyset,$$

což je, s ohledem na Větu 1.19, ve sporu s kompaktností prostoru (X,ρ). Dosažený spor dokazuje tvrzení věty. □

Věta 1.21. *Uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní.*

Důkaz. Nechť je prostor (X,ρ) kompaktní a nechť $M \subseteq X$ je uzavřená množina. Nechť dále $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny M. Je zřejmé, že množiny A_α $(\alpha \in I)$ jsou uzavřené také v prostoru (X,ρ). Proto, vzhledem k Větě 1.19, máme

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Odtud, opět podle Věty 1.19, plyne kompaktnost množiny M. □

Důsledek 1.22. *Uzavřená podmnožina kompaktního metrického prostoru je také kompaktní metrický prostor.*

Věta 1.23. *Nechť X je kompaktní množina v metrickém prostoru (Y,η). Pak je množina X uzavřená.*

Důkaz. Nechť $y \notin X$. Pak ke každému $x \in X$ existují okolí A_x bodu x a B_x bodu y taková, že

$$A_x \cap B_x = \emptyset.$$

Vskutku, stačí položit

$$A_x = B(x,r) \qquad \text{a} \qquad B_x = B(y,r),$$

kde $r = \frac{1}{3}\eta(x,y)$. Je zřejmé, že systém $\{A_x\}_{x\in X}$ tvoří otevřené pokrytí množiny X. Podle definice kompaktnosti lze z tohoto pokrytí vybrat konečné podpokrytí $A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_n}$, tj.

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_{x_k} = X.$$

Položme

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} B_{x_k}.$$

Lehce lze ověřit, že B je okolí bodu y, přičemž

$$B \cap X = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_{x_k}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_{x_k}) = \emptyset.$$

Proto $y \notin \overline{X}$, a tedy množina X je uzavřená. □

Větu 1.23 můžeme naformulovat v ekvivalentním tvaru (viz Definici 1.27).

Věta 1.23′. *Kompaktní metrický prostor (X,ρ) je uzavřený v libovolném metrickém prostoru (Y,η), který jej obsahuje.*

Věta 1.24. *Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor.*

Důkaz. Nechť (X,ρ) a (Y,η) jsou metrické prostory, přičemž (X,ρ) je kompaktní. Nechť dále $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Ukážeme, že obraz $f(X)$ je kompaktní v prostoru (Y,η).

Nechť $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je otevřené pokrytí obrazu $f(X)$. Z definice spojitosti (viz Poznámku 1.3) dostáváme, že množiny $f^{-1}(B_\alpha)$ $(\alpha \in I)$ jsou otevřené a platí

$$\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) = X.$$

Systém $\{f^{-1}(B_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ je tedy otevřené pokrytí množiny X a proto, s ohledem na kompaktnost prostoru (X,ρ), existuje konečná množina $J \subseteq I$ tak, že

$$\bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha) = X.$$

Odtud je zřejmé, že také

$$\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha = f(X),$$

a tedy $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ je konečným podpokrytím pokrytí $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Tím je věta dokázána. □

Věta 1.25. *Spojité zobrazení $f : X \to Y$ kompaktního metrického prostoru (X,ρ) do metrického prostoru (Y,μ) je stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Připusťme opak, nechť je zobrazení $f : X \to Y$ spojité, ale není spojité stejnoměrně. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že ke každému číslu $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, x_n^* \in X$ splňující

$$\rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n} \qquad \text{a} \qquad \mu\big(f(x_n), f(x_n^*)\big) \geq \varepsilon_0\,.$$

Vzhledem k Větám 1.20 a 1.23 lze vybrat z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ konvergující k nějakému bodu $x \in X$. Užitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$\lim_{k\to+\infty} \rho(x_{n_k}^*, x) \leq \lim_{k\to+\infty} \rho(x_{n_k}^*, x_{n_k}) + \lim_{k\to+\infty} \rho(x_{n_k}, x) = 0,$$

a tedy posloupnost $\{x^*_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ konverguje také k bodu x.

Na druhé straně

$$\varepsilon_0 \leq \mu\big(f(x_{n_k}), f(x^*_{n_k})\big) \leq \mu\big(f(x_{n_k}), f(x)\big) + \mu\big(f(x), f(x^*_{n_k})\big) \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N},$$

a tedy pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí alespoň jedna z následujících nerovností

$$\mu\big(f(x_{n_k}), f(x)\big) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\,, \qquad \mu\big(f(x), f(x^*_{n_k})\big) \geq \frac{\varepsilon_0}{2},$$

což je ve sporu se spojitostí zobrazení f v bodě x. □

Věta 1.26. *Nechť (X, ρ) je kompaktní prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení, přičemž uvažujeme prostor $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Pak funkce f je ohraničená a nabývá svého maxima a minima.*

Důkaz. Vzhledem k Větě 1.24 je obraz $f(X)$ kompaktní v prostoru $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Tvrzení věty pak plyne ze známého faktu, že kompaktní množina na reálné ose je ohraničená a uzavřená. □

Definice 1.29. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá *spočetně kompaktní*, jestliže každá jeho nekonečná podmnožina má alespoň jeden hromadný bod v množině X.

Poznámka 1.4. Z Věty 1.20 plyne, že každý kompaktní metrický prostor je spočetně kompaktním prostorem.

Věta 1.27. *K tomu, aby metrický prostor (X, ρ) byl spočetně kompaktní, je nutné a stačí, aby byla splněna jedna z těchto dvou podmínek:*

1. *Každé spočetné otevřené pokrytí X obsahuje konečné podpokrytí.*
2. *Každý spočetný centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny X má neprázdný průnik.*

Důkaz. Z de Morganových pravidel plyne ekvivalentnost podmínek 1 a 2. Ukážeme nyní, že podmínka 2 je nutnou a dostatečnou pro spočetnou kompaktnost prostoru (X, ρ).

Dostatečnost. Není-li prostor (X, ρ) spočetně kompaktní, pak pomocí úvah provedených v důkazu Věty 1.20 najdeme v tomto prostoru spočetný centrovaný systém uzavřených podmnožin s prázdným průnikem.

Nutnost. Nechť je prostor (X, ρ) spočetně kompaktní a $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je spočetný centrovaný systém uzavřených podmnožin množiny X. Ukážeme, že má tento systém neprázdný průnik. Položme

$$F_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že je každá množina F_n neprázdná a uzavřená, a platí

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots\,, \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\,.$$

Nastane právě jedna z následujících možností:

i) Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $F_{n_0} = F_{n_0+i}$ pro $i \in \mathbb{N}$. Pak

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k = F_{n_0} \neq \emptyset.$$

ii) Mezi množinami F_n existuje nekonečně mnoho vzájemně různých množin. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou všechny množiny F_n navzájem různé. Nechť

$$x_k \in F_k \setminus F_{k+1} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem ke spočetné kompaktnosti prostoru (X, ρ) musí posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ mít v X alespoň jeden hromadný bod, který označíme x_0. Jelikož

$$F_k \supset \{x_k, x_{k+1}, \dots\} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N},$$

je x_0 hromadným bodem každé množiny F_k. Navíc, vzhledem k jejich uzavřenosti, platí $x_0 \in F_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \ .$$

Tedy $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \neq \emptyset$.

Tím je věta dokázána. □

Definice 1.30. Nechť $\varepsilon > 0$ a $M \subseteq X$. Množina $A \subseteq X$ se nazývá *ε–ová síť* množiny M, jestliže ke každému bodu $x \in M$ lze najít takový bod $a \in A$, že

$$\rho(x, a) \leq \varepsilon.$$

Definice 1.31. Množina $M \subseteq X$ se nazývá *totálně ohraničená*, jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε–ová síť této množiny. Prostor (X, ρ) se nazývá totálně ohraničený, jestliže množina X je totálně ohraničená.

Tvrzení 1.28. *Je-li množina A totálně ohraničená, pak $\overline{A}$ je také totálně ohraničená.*

Tvrzení 1.29. *Je-li prostor (X, ρ) totálně ohraničený, pak je separabilní.*

Důkaz. Označme A_n konečnou $\frac{1}{n}$ síť množiny X. Pak je množina $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ spočetná a hustá v prostoru (X, ρ). □

Tvrzení 1.30. *Je-li množina $M \subseteq X$ totálně ohraničená, pak je ohraničená, tj.* $\sup\{\rho(x, y) : x, y \in M\} < +\infty$.

■ **Příklad 1.16.** Nechť S je jednotková kulová plocha v prostory (l_2, ρ). Je zřejmé, že S je ohraničená. Nechť

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots), \\ &\ \vdots \\ e_k &= (0, 0, \dots, 1, 0, \dots), \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

tj. $\rho(e_m, e_k) = \sqrt{2}$ pro $m \neq k$. Z toho je zřejmé, že na ploše S neexistuje konečná ε–ová síť pro $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tento příklad ukazuje, že Tvrzení 1.30 nelze obrátit.

■ **Příklad 1.17.** V prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ splývá totální ohraničenost s ohraničeností.

Věta 1.31. *Nechť (X, ρ) je spočetně kompaktní metrický prostor. Pak je totálně ohraničený.*

Důkaz. Předpokládejme, že není prostor (X, ρ) totálně ohraničený. Pak pro nějaké $\varepsilon_0 > 0$ nexistuje konečná ε_0-ová síť.

Zvolme $x_1 \in X$. Vzhledem k výše uvedenému existuje bod $x_2 \in X$ takový, že

$$\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0 ,$$

neboť v opačném případě by množina $\{x_1\}$ byla konečnou ε_0-ovou sítí. Podobně, protože není množina $\{x_1, x_2\}$ konečná ε_0-ová síť, existuje $x_3 \in X$ takové, že

$$\rho(x_1, x_3) > \varepsilon_0 \qquad \text{a} \qquad \rho(x_2, x_3) > \varepsilon_0 .$$

Tato konstrukce vede k sestrojení posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$, která nemá žádný hromadný bod, neboť

$$\rho(x_i, x_j) > \varepsilon_0 \quad \text{pro} \quad i \neq j.$$

Prostor (X, ρ) tedy není spočetně kompaktní, což je ve sporu s předpokladem věty. □

Definice 1.32. Systém $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ otevřených podmnožin prostoru (X, ρ) se nazývá *bází* prostoru (X, ρ), jestliže každou otevřenou množinu $O \subseteq X$ lze vyjádřit jako sjednocení některých množin systému $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Věta 1.32. *Metrický prostor (X, ρ) má spočetnou bázi právě tehdy, když je separabilní.*

Důkaz. Nechť je prostor (X, ρ) separabilní. Označme $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ množinu, která je v tomto prostoru hustá. Není složité ověřit, že je systém

$$\{B\,(x_n, 1/m)\} \qquad m, n = 1, 2, \dots$$

otevřených množin spočetnou bází prostoru (X, ρ).

Naopak, nechť $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je spočetná báze prostoru (X, ρ) a nechť $x_k \in A_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že je množina

$$C = \{x_1, x_2, \dots\}$$

hustá v prostoru (X, ρ). Připusťme opak, že C není v tomto prostoru hustá. Pak je zřejmě množina $X \setminus \overline{C}$ otevřená a neprázdná. Jelikož je systém $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ bází prostoru (X, ρ), existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$A_{n_0} \subseteq X \setminus \overline{C} .$$

Odtud plyne $x_{n_0} \in X \setminus \overline{C}$, což je ve sporu s definicí množiny C. □

Důsledek 1.33. *Každý spočetně kompaktní metrický prostor je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je libovolné otevřené pokrytí spočetně kompaktního prostoru (X, ρ). Ukážeme, že existuje jeho konečné podpokrytí.

Vzhledem k Větě 1.31 je prostor (X, ρ) totálně ohraničený. Odtud, s ohledem na Tvrzení 1.29 a Větu 1.32, dostáváme, že v tomto prostoru existuje spočetná báze $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Nechť $x \in X$ je libovolný bod. Pak existuje $\alpha(x) \in I$ tak, že $x \in O_{\alpha(x)}$. Je zřejmé, že také existuje číslo $n(x) \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in A_{n(x)} \subseteq O_{\alpha(x)}$. Systém $\{A_{n(x)}\}$ takto vybraných množin je nejvýše spočetný a pokrývá celé X. Vybereme-li nyní každé množině tohoto systému jednu množinu O_α, která ji obsahuje, pak sestrojíme nejvýše spočetné podpokrytí $\{O_\alpha\}_{\alpha\in J}$ pokrytí $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Jestliže je množina J konečná, důkaz je hotov. Je-li množina J spočetná, pak s ohledem na Větu 1.27 obsahuje pokrytí $\{O_\alpha\}_{\alpha\in J}$ konečné podpokrytí. Tím je důsledek dokázán. □

Poznámka 1.5. Z Věty 1.20 a Důsledku 1.33 plyne, že pojmy kompaktnosti a spočetné kompaktnosti v metrických prostorech splývají.

Věta 1.34 (Hausdorf)**.** *K tomu, aby metrický prostor* (X, ρ) *byl kompaktní, je nutné a stačí, aby zároveň byl*

1. *totálně ohraničený,*
2. *úplný.*

Důkaz. Nutnost totální ohraničenosti plyne z Vět 1.20 a 1.31. Ukážeme nyní nutnost úplnosti. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je cauchyovská posloupnost bodů prostoru (X, ρ), která nemá v X limitu. Pak tato posloupnost nemá v X hromadný bod, a tedy, vzhledem k Větě 1.20, není prostor (X, ρ) kompaktní.

Dostatečnost. Nechť je prostor (X, ρ) totálně ohraničený a úplný. K důkazu jeho kompaktnosti stačí ukázat jeho spočetnou kompaktnost (viz Důsledek 1.33). Nechť tedy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost bodů z X. Dokážeme, že má tato posloupnost hromadný bod.

Nechť $C_1 = \{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_{n_1}^{(1)}\}$ je konečná 1-ková síť prostoru (X, ρ). Pak

$$\bigcup_{k=1}^{n_1} B[c_k^{(1)}, 1] = X.$$

Jelikož je tato síť konečná, existuje koule $B[c_k^{(1)}, 1]$ obsahující nějakou podposloupnost $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Označme střed této koule a_1. Nechť nyní $C_2 = \{c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_{n_2}^{(2)}\}$ je konečná 1/2-ová síť koule $B[a_1, 1]$. Pak

$$\bigcup_{k=1}^{n_2} B[c_k^{(2)}, 1/2] \supseteq B[a_1, 1].$$

Jelikož je tato síť konečná, existuje koule $B[c_k^{(2)}, 1/2]$ obsahující nějakou podposloupnost $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnosti $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{+\infty}$. Označme střed této koule a_2. Zřejmě

$$\rho(a_1, a_2) \leq 2.$$

Nechť nyní $C_3 = \{c_1^{(3)}, c_2^{(3)}, \dots, c_{n_3}^{(3)}\}$ je konečná 1/4-ová síť koule $B[a_2, 1/2]$. Pak

$$\bigcup_{k=1}^{n_3} B[c_k^{(3)}, 1/4] \supseteq B[a_2, 1/2].$$

Jelikož je tato síť konečná, existuje koule $B[c_k^{(3)}, 1/4]$ obsahující nějakou podposloupnost $\{x_n^{(3)}\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnosti $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{+\infty}$. Označme střed této koule a_3. Zřejmě

$$\rho(a_2, a_3) \leq 1.$$

Pokračujeme-li v tomto procesu, sestrojíme posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ takovou, že

$$\rho(a_k, a_{k+1}) \leq \frac{1}{2^{k-2}} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N},$$

přičemž každá koule $B[a_k, 1/2^{k-1}]$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Položme
$$A_k = B[a_k, 1/2^{k-3}] \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$
Lehce lze ověřit, že $\{A_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost do sebe vnořených uzavřených koulí, jejichž poloměry konvergují k nule. Z úplnosti prostoru (X, ρ) a Věty 1.14 dostaneme, že existuje $x_0 \in X$ splňující
$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \,.$$
Každé okolí bodu x_0 pak obsahuje některou kouli A_k, a tedy obsahuje také nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Proto je x_0 hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Tím je věta dokázána. □

Definice 1.33. Množina $A \subseteq X$ metrického prostoru (X, ρ) se nazývá *prekompaktní*, jestliže $\overline{A}$ je kompaktní.

Poznámka 1.6. Pojmy *spočetná prekompaktnost* a *prekompaktnost* v metrických prostorech splývají.

Věta 1.35. *K tomu, aby množina $A \subseteq X$ byla prekompaktní v úplném prostoru (X, ρ), je nutné a stačí, aby byla totálně ohraničená.*

Důkaz. Plyne z Věty 1.34 a faktu, že uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru je sama úplným prostorem (viz Úlohu 1.4). □

1.7. Kompaktní množiny v některých speciálních prostorech

1.7.1. Prostor $C([a, b])$

Definice 1.34. Nechť $P \subseteq C([a, b])$. Podmnožina P se nazývá *stejnoměrně ohraničená*, jestliže existuje $k > 0$ takové, že pro libovolné $f \in P$ je
$$|f(t)| \le k \ \text{ pro } \ t \in [a, b].$$

Definice 1.35. Nechť $P \subseteq C([a, b])$. Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $t, s \in [a, b]$, $|t - s| < \delta$ a pro všechna $f \in P$ platí
$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon,$$
pak množinu P nazveme *rovnomocně spojitou.*

Věta 1.36 (Arzelà–Acsoli)**.** *K tomu, aby množina $P \subseteq C([a, b])$ byla prekompaktní v prostoru $C([a, b])$, je nutné a stačí, aby množina P byla stejnoměrně ohraničená a rovnomocně spojitá.*

1.7.2. Prostor s

Nechť $s = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots),\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$ a
$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \,.$$
Snadno lze ověřit, že (s, ρ) je metrický prostor.

Věta 1.37. *Nechť $A = \{x : x = (\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots) \in s\}$. K tomu, aby množina A byla kompaktní, je nutné a stačí, aby existovala čísla $M_1, M_2, \ldots$ taková, že pro libovolný bod $x \in A$ platí*
$$|\xi_k(x)| \le M_k \quad \textit{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

1.7.3. Prostor l_p $(p \geq 1)$

Věta 1.38. *Nechť* $A = \{x : x = (\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots) \in l_p\}$*. K tomu, aby množina* A *byla kompaktní, je nutné a stačí, aby zároveň*

1. *existovala čísla* $M_1, M_2, \ldots$ *taková, že pro libovolné* $x \in A$ *platí*

$$|\xi_k(x)| \leq M_k \quad \textit{pro} \quad k \in \mathbb{N},$$

2. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\xi_k(x)|^p$ *stejnoměrně konvergovala.*

2. Lineární prostor

2.1. Definice a příklady

Definice 2.1. Nechť je E neprázdná množina. Dále nechť:

I. Ke každým dvěma prvkům $x, y \in E$ je jednoznačně přiřazen prvek $z \in E$ nazývaný jejich součet a označovaný $x + y$, přičemž platí tyto axiomy:

1. $x + y = y + x$. (komutativnost)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$. (asociativnost)
3. V E existuje takový prvek, značíme jej 0, že pro všechna $x \in E$ $x + 0 = x$.
4. Ke každému $x \in E$ existuje takový prvek, značíme jej $(-x)$, že $x + (-x) = 0$.

II. Ke každému číslu (reálnému nebo komplexnímu) α a ke každému $x \in E$ je jednoznačně přiřazen prvek $\alpha x \in E$, přičemž platí tyto axiomy:

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
2. $1 \cdot x = x$.
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Pak množinu E nazýváme *lineárním* nebo *vektorovým prostorem*. Podle toho, zda pod čísly $\alpha, \beta, \ldots$ rozumíme reálná nebo komplexní čísla, mluvíme o reálném nebo komplexním lineárním prostoru. Prvky množiny E nazýváme body nebo vektory, čísla $\alpha, \beta, \ldots$ nazýváme skaláry.

Poznámka 2.1. Budeme také používat zápis $x - y$ a pod tím budeme rozumět $x + (-y)$.

Poznámka 2.2. Každý komplexní lineární prostor se redukuje na nějaký reálný lineární prostor, omezíme-li se v něm na násobení vektorů reálnými čísly.

■ **Příklad 2.1.** Příklady lineárních prostorů:

a) $\mathbb{R}$.

b) $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n\}$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

c) $C([a, b])$.

d) $l_2 = \left\{(x_1, x_2, \ldots) : \sum\limits_{i=1}^{+\infty} |x_1|^2 < +\infty\right\}$ ($x_i \in \mathbb{C}$ nebo $x_i \in \mathbb{R}$),

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots).$$

e) $E = \{(x_1, x_2, \ldots) : \exists \lim\limits_{k\to+\infty} x_k\}$ se stejnými operacemi jako v případě d).

f) $E = \{(x_1, x_2, \ldots) : \sup |x_i| < +\infty\}$ se stejnými operacemi jako v případě d).

Definice 2.2. Nechť E_1 a E_2 jsou lineární prostory. Bijektivní zobrazení $h : E_1 \to E_2$ nazýváme *izomorfismus* mezi prostory E_1 a E_2, jestliže pro každé $x, y \in E_1$ a libovolné číslo α platí

$$\begin{aligned} h(x+y) &= h(x) + h(y), \\ h(\alpha x) &= \alpha h(x). \end{aligned}$$

Existuje-li izomorfismus $h : E_1 \to E_2$, říkáme, že jsou prostory E_1 a E_2 *izomorfní.*

■ **Příklad 2.2.** Nechť E_1 je prostor všech mnohočlenů stupně nejvýše $n-1$ a E_2 je $\mathbb{R}^n$. Pak E_1 a E_2 jsou izomorfní.

Definice 2.3. Nechť E je lineární prostor a $x_1, x_2, \ldots, x_k \in E$. Tyto prvky nazýváme *lineárně závislé*, jestliže existují skaláry $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, z nichž alespoň jeden je různý od nuly, takové, že

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = 0. \tag{2.1}$$

V opačném případě se tyto prvky nazývají *lineárně nezávislé.* Jinými slovy, prvky $x_1, \ldots, x_k$ se nazývají *lineárně nezávislé*, jestliže nerovnost (2.1) platí pouze v případě, když $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Nekonečný systém prvků $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se nazývá lineárně nezávislý, jestliže prvky každé konečné podmnožiny jsou lineárně nezávislé.

Definice 2.4. Jestliže v prostoru E lze najít n lineárně nezávislých prvků, ale libovolných $n+1$ prvků je již lineárně závislých, pak říkáme, že prostor E má *dimenzi* (rozměr) n. Jestliže v prostoru E lze najít nekonečný systém lineárně nezávislých prvků, pak říkáme, že prostor E má *nekonečnou dimenzi.* Dimenzi prostoru E značíme symbolem $\dim E$.

Definice 2.5. *Bází* n–rozměrného prostoru E nazýváme libovolný systém n lineárně nezávislých vektorů.

■ **Příklad 2.3.** $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{C}^n = n$.

Definice 2.6. $E_1 \subseteq E$ se nazývá *podprostor* lineárního prostoru E, jestliže množina E_1 sama tvoří lineární prostor vzhledem ke stejným operacím.

Jinak řečeno $E_1 \subseteq E$ je *podprostor* lineárního prostoru E, jestliže z $x, y \in E_1$ plyne, že $\alpha x + \beta y \in E_1$ pro libovolná čísla α a β.

Jestliže $E_1 \subseteq E$ je podprostor lineárního prostoru E a $E_1 \neq \{0\}$, $E_1 \neq E$, pak E_1 nazýváme *vlastní podprostor.*

■ **Příklad 2.4.**

a) Nechť E je lineární prostor, $\dim E \geq 3$ a $x_1, x_2 \in E$ jsou lineárně nezávislé. $E_1 = \{\alpha x_1 + \beta x_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (nebo $\alpha, \beta \in \mathbb{R})\}$ je podprostor prostoru E.

b) Množina všech mnohočlenů $P([a,b]) \subseteq C([a,b])$ je podprostor prostoru $C([a,b])$.

Definice 2.7. Nechť E je lineární prostor a $E_1 \subseteq E$ jeho podprostor. Řekneme, že prvek $x \in E$ je v binárním vztahu k prvku $y \in E$, jestliže $x - y \in E_1$. tento binární vztah je reflexivní, symetrický a tranzitivní. Je tedy relací ekvivalence a definuje rozklad na množině E. Každou třídu ekvivalentních prvků nazveme zbytková třída (podle podprostoru E_1). Množinu všech takových zbytkových tříd nazveme *faktorovým prostorem* a označíme ji E/E_1.

Ve faktorovém prostoru definujeme operace sčítání a násobení takto: Nechť A a B jsou dvě třídy. Nechť $a \in A$, $b \in B$ a $a + b = c$. Pak třídu C, do která patří prvek c nazveme součtem A a B, tj. $A + B = C$. Analogicky nechť $a \in A$ a λ je číslo. Pak pod λA budeme rozumět třídu, do které patří prvek λa.

Tvrzení 2.1. *Každý faktorový prostor je lineárním prostorem.*

▶ **Úloha 2.1.** Nechť $E_1 \subseteq E$, $\dim E = n$, $\dim E_1 = k$. Dokažte, že potom $\dim E/E_1 = n - k$.

Definice 2.8. Dimenze faktorového prostoru E/E_1 se nazývá *kodimenze* podprostoru E_1 v prostoru E. Kodimenzi podprostoru E_1 značíme $\operatorname{kodim} E_1$.

Tvrzení 2.2. *Nechť $E_1 \subseteq E$ je podprostor prostoru E, , $\operatorname{kodim} E_1 = n < +\infty$. Pak v prostoru E lze zvolit takové prvky $x_1, x_2, \dots, x_n$, že každý $x \in E$ bude jednoznačně vyjádřen ve tvaru*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + y,$$

kde $y \in E_1$.

Důkaz. Nechť $\dim E/E_1 = n$ a nechť $A_1, \dots, A_n$ je báze prostoru E/E_1. Vybereme

$$x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \ldots,\ x_n \in A_n\,.$$

Nechť $x \in E$ je libovolný prvek. Označme A třídu rozkladu E/E_1 obsahující prvek x. Pak zřejmě existují skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ takové, že

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_n A_n\,.$$

Odtud plyne, že lineární kombinace $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ leží ve třídě A, tj. liší se od prvku x o prvek $y \in E_1$. Tedy

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n + y\,.$$

□

2.2. Normovaný prostor

Definice 2.9. Nechť E je lineární prostor a $f : E \to \mathbb{R}_+$ je funkce splňující:

1. $f(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
3. $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$.

Pak se funkce f nazývá *normou* v lineárním prostoru E.

Definice 2.10. Lineární prostor, v němž je definována nějaká norma, se nazývá *normovaným prostorem.* Normu prvku $x \in E$ budeme značit $\|x\|$.

Poznámka 2.3. Každý normovaný prostor E se stává metrickým prostorem, jestliže vzdálenost (metriku) zavedeme vzorcem

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad \text{pro} \quad x, y \in E.$$

Definice 2.11. Úplný normovaný prostor se nazývá *Banachův prostor.*

■ **Příklad 2.5.** Následující příklady splňují definici Banachova prostoru:

a) $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$.

b) $E = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\} (= \mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \\ \text{resp. } \|x\|_2 &= \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \\ \text{resp. } \|x\|_3 &= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}. \end{aligned}$$

c) $E = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \dots, n\} (= \mathbb{C}^n)$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

d) $C([a, b])$,

$$\|f\| = \max\{|f(t)| : a \leq t \leq b\}.$$

Definice 2.12. Nechť $E_1 \subseteq E$, E je normovaný prostor a E_1 je podprostor (ve výše uvedeném smyslu). E_1 se nazývá *podprostorem normovaného prostoru* E, jestliže je E_1 uzavřený, tj. jestliže E_1 obsahuje všechny své hromadné body.

▶ **Úloha 2.2.** Nechť $\dim E = n$. Pak každý lineární podprostor prostoru E je uzavřený. Dokažte.

▶ **Úloha 2.3.** Nechť M je podprostor v reálném normovaném prostoru E a nechť $u \notin M$. Dokažte, že množina

$$M_0 = \Big\{x + \lambda u : x \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$$

je (uzavřený) podprostor v E.

Nechť dále $z_n = x_n + \lambda_n u$ ($n \in \mathbb{N}$) a $z_0 = x_0 + \lambda_0 u$, kde $x_n \in M$ a $\lambda_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \iff \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda_0.$$

Definice 2.13. Nechť E je normovaný prostor a $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je množina bodů z E. Nejmenší (uzavřený) podprostor prostoru E obsahující všechny prvky x_α ($\alpha \in I$) se nazývá *lineárním uzávěrem* systému $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Definice 2.14. Nechť E je normovaný prostor. Množinu prvků (nikoliv nutně uzavřenou) obsahující zároveň s prvky x a y také prvek $\alpha x + \beta y$ pro libovolná čísla α a β budeme nazývat *lineární varietou.*

■ **Příklad 2.6.** Množina všech mnohočlenů $P([a, b])$ je lineární varietou v $C([a, b])$, ale není podprostorem, neboť tato množina není uzavřená v $C([a, b])$.

Definice 2.15. Systém prvků $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ v normovaného prostoru E budeme nazývat *úplným*, jestliže podprostor jím vytvořený je celý prostor E.

■ **Příklad 2.7.** Systém $\{1, t, t^2, \dots, t^k, \dots\}$ je úplný v prostoru $C([a, b])$.

Nyní dokážeme Rieszovo lemma, které budeme v dalším potřebovat. Někdy se tomuto tvrzení říká Lemma „o skoro kolmém".

Lemma 2.3 (Riesz). *Nechť L je (uzavřený) podprostor v normovaném prostoru E, přičemž $L \neq E$. Pak pro každé $\varepsilon \in]0, 1[$ existuje prvek $x_\varepsilon \notin L$ splňující $\|x_\varepsilon\| = 1$ a*

$$\rho(x_\varepsilon, L) = \inf \Big\{ \|x_\varepsilon - u\| : u \in L \Big\} > 1 - \varepsilon.$$

Důkaz. Nechť $z \notin L$ je libovolný, ale dále pevný prvek prostoru E. Položme

$$d = \inf \Big\{ \|z - u\| : u \in L \Big\}.$$

Je zřejmé, že $d > 0$. Vezmeme dále libovolné $\varepsilon \in]0, 1[$. K němu existuje prvek $u_\varepsilon \in L$ takový, že

$$d \leq \|z - u_\varepsilon\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}. \tag{2.2}$$

Položme nyní

$$x_\varepsilon = \frac{z - u_\varepsilon}{\|z - u_\varepsilon\|}.$$

Zřejmě je $\|x_\varepsilon\| = 1$ a $x_\varepsilon \notin L$, neboť v opačném případě by bylo $z - u_\varepsilon \in L$, a tedy $z \in L$, což je spor.

Všimněme si nyní, že pro každé $u \in L$ je také $u_\varepsilon - u\|z - u_\varepsilon\| \in L$, a proto

$$\Big\| z - (u_\varepsilon - u\|z - u_\varepsilon\|) \Big\| \geq d \quad \text{pro} \quad u \in L.$$

Odtud a (2.2) dostáváme

$$\|x_\varepsilon - u\| = \left\| \frac{z - u_\varepsilon}{\|z - u_\varepsilon\|} - u \right\| =$$

$$= \frac{\Big\| z - (u_\varepsilon - u\|z - u_\varepsilon\|) \Big\|}{\|z - u_\varepsilon\|} > \frac{d(1 - \varepsilon)}{d} \quad \text{pro} \quad u \in L,$$

tj. $\rho(x_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon$. Tím je lemma dokázáno. □

2.3. Unitární prostor

Definice 2.16. Nechť E je lineární prostor a $h : E \times E \to \mathbb{R}$ je funkce splňující tyto vlastnosti:

1. $h(x, y) = h(y, x)$,
2. $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$,
3. $h(\lambda x, y) = \lambda h(x, y)$,
4. $h(x, x) \geq 0$, $h(x, x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Pak prostor E budeme nazývat *unitárním prostorem* a funkci h *skalárním součinem*. Pro jednoduchost $h(x, y)$ budeme psát jako $(x \cdot y)$.

Tvrzení 2.4 (Cauchy–Bunjakovského nerovnost)**.** *Nechť E je unitární prostor. Pak platí*

$$|(x \cdot y)| \leq \sqrt{(x \cdot x)}\sqrt{(y \cdot y)} \quad \textit{pro} \quad x, y \in E. \tag{2.3}$$

Důkaz. Zřejmě pro každé $x, y \in E$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$0 \leq (\lambda x + y \cdot \lambda x + y) = \lambda^2(x \cdot x) + 2\lambda(x \cdot y) + (y \cdot y).$$

Proto je diskriminant $4(x \cdot y)^2 - 4(x \cdot x)(y \cdot y)$ kvadratického trojčlenu

$$\lambda^2(x \cdot x) + 2\lambda(x \cdot y) + (y \cdot y)$$

nekladný, tj. platí nerovnost (2.3). □

Tvrzení 2.5. *V unitárním prostoru E je možno zavést normu následujícím způsobem*

$$\|x\| = \sqrt{(x \cdot x)} \quad \textit{pro} \quad x \in E.$$

Důkaz. Platnost podmínek 1 a 3 v Definici 2.1 je zřejmá. Platnost podmínky 2 plyne z Cauchy–Bunjakovského nerovnosti (2.3). □

Definice 2.17. Unitární prostory E_1 a E_2 nazýváme *izomorfní*, jestliže jsou izomorfní jako lineární prostory a izomorfismus $h : E_1 \to E_2$ zachovává skalární součin, tj. pro všechna $x, y \in E_1$ platí

$$\big(h(x) \cdot h(y)\big)_2 = (x \cdot y)_1 \,,$$

kde $(\cdot)_1$ a $(\cdot)_2$ značí skalární součin v E_1 a E_2.

Tvrzení 2.6. *Operace sčítání, násobení konstantou a skalární součin jsou v unitárním prostoru spojité, tj. jestliže $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset E$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ takové, že $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n - y\| = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$, potom*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \|x_n + y_n - (x + y)\| &= 0,\\
\lim_{n\to+\infty} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= 0,\\
\lim_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) &= (x \cdot y).
\end{aligned}$$

Definice 2.18. Nechť E je unitární prostor a $x, y \in E$. Jestliže $(x \cdot y) = 0$, pak se x a y nazývají *ortogonální*. Systém $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ nenulových prvků se nazývá ortogonální, jestliže $(x_\alpha \cdot x_\beta) = 0$ pro všechna $\alpha \neq \beta$.

Tvrzení 2.7. *Nechť $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je ortogonální systém v unitárním prostoru E. Pak tento systém je lineárně nezávislý.*

Důkaz. Nechť $x_1, \dots, x_n \in \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ jsou libovolné prvky. Ukážeme, že jsou tyto prvky lineárně nezávislé. Nechť

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0.$$

Pak

$$0 = (x_i \cdot 0) = (x_i \cdot \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_i(x_i \cdot x_i) \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n.$$

Avšak $(x_i \cdot x_i) \neq 0$ pro $i = 1, \dots, n$, a tedy $\lambda_i = 0$ pro $i = 1, \dots, n$.

□

Definice 2.19. Úplný ortogonální systém $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ v unitárním prostoru E se nazývá *ortogonální báze* prostoru E.

Definice 2.20. Systém nenulových vektorů $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ v unitárním prostoru E se nazývá *ortonormální*, jestliže

$$(x_\alpha \cdot x_\beta) = \begin{cases} 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta, \\ 1 \text{ pro } \alpha = \beta. \end{cases}$$

■ **Příklad 2.8.**

a) Nechť $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$, $(x \cdot y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Pak $e_1, e_2, \dots, e_n$, kde $e_i = (0, 0, \dots, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)$ je ortonormální báze.

b) Nechť $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < +\infty\}$,

$$(x \cdot y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Pak $e_1, e_2, \dots$, kde $e_i = (0, 0, \dots, \overset{(i)}{1}, 0, \dots)$ je ortonormální báze.

c) Nechť $L^2([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f^2 \in L([a, b])\}$,

$$(f \cdot g) = \int_a^b f(s)g(s)\mathrm{d}s.$$

Pak ortonormální bází je například systém goniometrických funkcí

$$\frac{1}{2},\ \cos n\frac{2\pi t}{b-a},\ \sin n\frac{2\pi t}{b-a}, \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{2.4}$$

Tvrzení 2.8. *Systém* (2.4) *je úplný v* $L_2([a, b])$.

Tvrzení 2.9. *Nechť X je separabilní unitární prostor. V takovém prostoru je každý ortogonální systém nejvýše spočetný.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že uvažovaný ortogonální systém $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je ortonormální. Pak

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2} \quad \text{pro} \quad \alpha \neq \beta.$$

Nechť množina $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je hustá v prostoru X. Jelikož jsou koule $B[\varphi_\alpha, 1/2]$ $(\alpha \in I)$ disjunktní a každá z nich obsahuje alespoň jeden prvek množiny $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, je těchto koulí nejvýše spočetně mnoho. Tím je tvrzení dokázáno. □

Věta 2.10 (Věta o ortogonalizaci)**.** *Nechť*

$$f_1,\ f_2, \dots \tag{2.5}$$

je lineárně nezávislý systém v unitárním prostoru X. Pak existuje systém

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \dots \tag{2.6}$$

splňující tyto podmínky:

1. *Systém* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je ortonormální.*
2. *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* φ_n *možné vyjádřit jako*

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + \ldots + a_{nn}f_n,$$

   přičemž

$$a_{nn} \neq 0.$$

3. *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* f_n *možné vyjádřit jako*

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n,$$

   přičemž

$$b_{nn} \neq 0.$$

Každý prvek systému (2.6) *je určen podmínkami 1–3 až na znaménko jednoznačně.*

Důkaz. Položme

$$\varphi_1 = a_{11}f_1\,,$$

kde

$$a_{11} = \pm\frac{1}{\sqrt{(f_1\cdot f_1)}}\ .$$

Pak $(\varphi_1\cdot\varphi_1) = a_{11}^2(f_1\cdot f_1) = 1$.

Nechť jsou prvky $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$ splňující podmínky 1–3 již sestrojeny. Prvek f_n lze vyjádřit ve tvaru

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \cdots + b_{n\,n-1}\varphi_{n-1} + h_n,$$

kde

$$(h_n\cdot\varphi_k) = 0 \quad \text{pro} \quad k = 1,\ldots,n-1.$$

Vskutku, b_{nk} a h_n se jednoznačně určí z podmínek

$$0 = (h_n\cdot\varphi_k) = (f_n\cdot\varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k\cdot\varphi_k) \quad \text{pro} \quad k = 1,\ldots,n-1.$$

Jelikož je systém (2.5) lineárně nezávislý, je $h_n \neq 0$. Položme

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{(h_n\cdot h_n)}}\,h_n\ .$$

Pak

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \cdots + b_{nn}\varphi_n, \qquad b_{nn} = \sqrt{(h_n\cdot h_n)} \neq 0.$$

Z výše uvedené konstrukce je také zřejmé, že h_n a tedy i φ_n lze vyjádřit pomocí $f_1,\ldots,f_n$, tj.

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + \cdots + a_{nn}f_n, \qquad a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n\cdot h_n)}} \neq 0.$$

Navíc platí

$$(\varphi_k\cdot\varphi_n) = 0 \quad \text{pro} \quad k = 1,\ldots,n-1, \qquad (\varphi_n\cdot\varphi_n) = 1.$$

Tím je věta dokázána. □

Poznámka 2.4. Přechod od systému (2.5) k systému (2.6) se nazývá *ortogonalizace*.

Poznámka 2.5. Podprostory vytvořené systémy (2.5) a (2.6) jsou totožné.

Důsledek 2.11. *V každém separabilním unitárním prostoru X existuje ortonormální báze.*

Důkaz. Nechť množina $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$ je hustá v prostoru X. Vybereme z ní úplný systém $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ lineárně nezávislých prvků. K tomu stačí z posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$ vyloučit ty prvky x_k, které lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků x_i $(i < k)$. Jestliže pak na tento úplný lineárně nezávislý systém prvků použijeme ortogonalizaci, dostaneme ortonormální bázi prostoru X. $\square$

2.4. Besselova nerovnost

Definice 2.21. Nechť

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots$$

je ortogonální systém v unitárním prostoru X a $f \in X$. Posloupnost

$$c_k = (f \cdot \varphi_k),\ k = 1, 2, \dots$$

budeme nazývat *souřadnicemi* nebo *Fourierovými koeficienty* prvku f vzhledem k systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Řadu

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k \tag{2.7}$$

nazveme *Fourierovou řadou* prvku f vzhledem k systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Přirozeně vznikají dvě otázky:

i) zda řada (2.7) konverguje,

ii) jestliže konverguje, zda se její součet rovná prvku f.

Před tím, než odpovíme na tyto otázky, všimneme si jedné zajímavé vlastnosti čísel c_k. Položme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že

$$\|f - S_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \cdot f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right) =$$
$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Protože $\|f - S_n\|^2 \geq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, z (2.8) plyne

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2. \tag{2.9}$$

Nerovnost (2.9) nazýváme *Besselovou nerovností.*

Definice 2.22. Ortonormální systém (2.6) se nazývá *uzavřený*, jestliže pro libovolné $f \in X$ platí

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \tag{2.10}$$

Vztah (2.10) se nazývá *Parsevalova rovnost.*

Věta 2.12. *V separabilním unitárním prostoru X každý úplný ortonormální systém je uzavřený a obráceně.*

Důkaz. Nechť je ortonormální systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ uzavřený. Označme S_n n-tý částečný součet Fourierovy řady prvku $f \in X$. Pak z (2.10) plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \right) = 0.$$

To znamená, že lineární kombinace prvků systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ tvoří množinu hustou v prostoru X, tj. systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je úplný.

Obráceně, nechť je ortonormální systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ úplný. Pak lze libovolný prvek $f \in X$ aproximovat konečnou sumou

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \,,$$

tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existují $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n(\varepsilon)}$ tak, že

$$\|f - S_{n(\varepsilon)}\| < \varepsilon \,, \tag{2.11}$$

kde

$$S_{n(\varepsilon)} = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \alpha_k \varphi_k \,.$$

Zřejmě

$$\begin{aligned}
\|f - S_{n(\varepsilon)}\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \alpha_k \varphi_k \cdot f - \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \alpha_k \varphi_k \right) &= \\
= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \alpha_k^2 &= \\
= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} (\alpha_k - c_k)^2 &\geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} c_k^2.
\end{aligned}$$

Odtud, vzhledem k (2.11), pak plyne

$$\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} c_k^2 + \varepsilon^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 + \varepsilon^2 \,.$$

Jelikož bylo ε libovolné, dostáváme

$$\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \,,$$

což spolu s Besselovou nerovností (2.9), zaručí platnost Parsevalovy rovnosti (2.10). Systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je tedy uzavřený. $\square$

2.5. Riesz–Fischerova věta

Z Besselovy nerovnosti plyne, že k tomu, aby čísla $c_1, c_2, \ldots$ byla Fourierovými koeficienty nějakého prvku $f \in X$, je nutné, aby řada

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2$$

konvergovala. Ukážeme, že v úplném prostoru je tato podmínka také postačující.

Věta 2.13 (Riesz–Fischerova)**.** *Nechť $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je ortonormální systém v úplném unitárním prostoru X a čísla $c_1, c_2, \ldots$ jsou taková, že řada*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \tag{2.12}$$

konverguje. Pak existuje $f \in X$ takové, že

$$c_k = (f \cdot \varphi_k) \quad \textit{pro} \quad k \in \mathbb{N} \qquad \textit{a} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 = (f \cdot f) = \|f\|^2.$$

Důkaz. Položme

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \, .$$

Pak pro $n, p \in \mathbb{N}$ platí

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \cdots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 \, .$$

Odtud, s ohledem na konvergenci řady (2.12), plyne, že je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ cauchyovská. Prostor X je však úplný, a proto existuje $f \in X$ takové, že

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\| = 0. \tag{2.13}$$

Na druhé straně

$$(f \cdot \varphi_i) = (f_n \cdot \varphi_i) + (f - f_n \cdot \varphi_i) \quad \text{pro} \quad n, i \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Je zřejmé, že

$$(f_n \cdot \varphi_i) = c_i \quad \text{pro} \quad n > i$$

a dále

$$\lim_{n \to +\infty} |(f - f_n \cdot \varphi_i)| \leq \lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\| \, \|\varphi_i\| = 0,$$

což plyne přímo z Cauchy–Bunjakovského nerovnosti a podmínky (2.13). Přejdeme-li v (2.14) k limitě pro $n \to +\infty$, dostáváme

$$(f \cdot \varphi_i) = c_i \quad \text{pro} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Přejdeme-li nyní v rovnosti

$$\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

k limitě pro $n \to +\infty$, obdržíme s ohledem na (2.13) žádanou rovnost

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 = \|f\|^2 .$$

Tím je věta zcela dokázána. $\square$

Věta 2.14. *Ortonormální systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ v úplném separabilním prostoru X je úplný právě tehdy, když v prostoru X neexistuje nenulový prvek ortogonální ke všem prvkům systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$.*

Důkaz. Nechť je systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ úplný. Podle Věty 2.12 je tento systém také uzavřený. Nechť $f \in X$ je prvek ortogonální ke všem prvkům systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Jeho Fourierovy koeficienty jsou tedy rovny nule a z Parsevalovy rovnosti dostáváme

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 = 0,$$

tj. $f = 0$.

Obráceně, nechť systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ není úplný. Pak existuje $g \in X$ tak, že

$$\|g\|^2 = (g \cdot g) > \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 ,$$

kde $c_k = (g \cdot \varphi_k)$ pro $k \in \mathbb{N}$. Podle Věty 2.13 existuje prvek $f \in X$ takový, že

$$(f \cdot \varphi_k) = c_k \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N} \qquad \text{a} \qquad (f \cdot f) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 .$$

Odtud je zřejmé, že je prvek $f - g$ ortogonální ke všem prvkům systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Z nerovnosti

$$(f \cdot f) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 < (g \cdot g)$$

však plyne $f - g \neq 0$, tj. v prostoru X existuje nenulový prvek, který je ortogonální ke všem prvkům systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$. $\square$

2.6. Hilbertův prostor

Definice 2.23. Úplný separabilní unitární prostor s nekonečnou dimenzí se nazývá *Hilbertův prostor.*

■ **Příklad 2.9.** Reálný prostor l_2 je Hilbertův prostor.

Věta 2.15. *Každé dva Hilbertovy prostory jsou izomorfní.*

Důkaz. Dokážeme, že každý Hilbertův prostor H je izomorfní s prostorem l_2. Nechť $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je úplný ortonormální systém v prostoru H, $f \in H$ a nechť

$$c_k = (f \cdot \varphi_k) \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Vzhledem k Besselově nerovnosti je $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 < +\infty$, a tedy $(c_1, c_2, \dots) \in l_2$. Na druhé straně podle Věty 2.13 existuje ke každému $(c_1, c_2, \dots) \in l_2$ jediné (viz Věta 2.14) $f \in H$ splňující (2.15). Uvedené přiřazení mezi prvky prostorů H a l_2 tedy definuje bijektivní zobrazení.

Dále, nechť

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \dots) \qquad \text{a} \qquad g \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots).$$

Pak

$$(f + g) \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots) \qquad \text{a} \qquad \lambda f \leftrightarrow (\lambda c_1, \lambda c_2, \dots),$$

tj. toto zobrazení zachovává operace sčítání a násobení skalárem.

Konečně, vzhledem k Parsevalově rovnosti platí

$$(f \cdot f) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2\,, \qquad (g \cdot g) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2$$

a

$$(f + g \cdot f + g) = \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k + d_k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} c_k d_k + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2,$$

a tedy z rovnosti

$$(f + g \cdot f + g) = (f \cdot f) + 2(f \cdot g) + (g \cdot g)$$

dostaneme

$$(f \cdot g) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k d_k\,.$$

Tím je věta dokázána. □

Poznámka 2.6. Z Věty 2.15 vyplývá, že až na izomorfizmus existuje jen jeden Hilbertův prostor. Prostor l_2 lze považovat za jeho realizaci.

■ **Příklad 2.10.**

a) Nechť H je Hilbertův prostor a $f \in H$. Množina

$$M = \{g \in H : (f \cdot g) = 0\}$$

je jeho podprostorem.

b) Množina

$$M = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_2 : x_1 = x_2\}$$

tvoří podprostor v prostoru l_2.

Poznámka 2.7. S ohledem na Tvrzení 1.6 je zřejmé, že každý podprostor Hilbertova prostoru buď je unitárním prostorem konečné dimenze nebo je sám Hilbertovým prostorem.

Věta 2.16. *Nechť H je Hilbertův prostor a M jeho podprostor nekonečné dimenze. Pak v M existuje ortogonální systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ takový, že jeho lineární uzávěr je totožný s podprostorem M.*

Důkaz. Tvrzení věty plyne přímo z Tvrzení 1.6 a věty o ortogonalizaci. □

Definice 2.24. Nechť H je Hilbertův prostor a M jeho podprostor. Prostor $M^\perp = \{x \in H : (x \cdot y) = 0 \text{ pro } y \in M\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* podprostoru M.

Věta 2.17. *Nechť H je Hilbertův prostor a M jeho podprostor. Pak libovolný $f \in H$ lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru*

$$f = h + h', \tag{2.16}$$

kde $h \in M$ a $h' \in M^\perp$.

Důkaz. Nechť $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je úplný ortonormální systém v M (viz Věta 2.16). Položme $c_k = (f \cdot \varphi_k)$ pro $k \in \mathbb{N}$. Podle Besselovy nerovnosti řada $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2$ konverguje, proto prvek

$$h = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k$$

patří do množiny M (jeho existenci zaručuje Riesz–Fischerova věta). Položme

$$h' = f - h.$$

Pak zřejmě

$$(h' \cdot \varphi_k) = (f \cdot \varphi_k) - (h \cdot \varphi_k) = c_k - c_k = 0 \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Protože lze libovolný prvek $g \in M$ vyjádřit ve tvaru

$$g = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k\,,$$

s ohledem na (2.17) dostaneme

$$(h' \cdot g) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (h' \cdot \varphi_k) = 0,$$

tj. $h' \in M^\perp$. Dokázali jsme tedy, že pro libovolné $f \in H$ existují $h \in M$ a $h' \in M^\perp$ tak, že platí (2.16).

Zbývá dokázat jednoznačnost. Nechť tedy

$$f = h + h', \qquad f = h_1 + h_1'\,,$$

kde $h, h_1 \in M$ a $h', h_1' \in M^\perp$. Pak

$$(h_1 - h \cdot \varphi_k) = (h_1 \cdot \varphi_k) - (h \cdot \varphi_k) = (f \cdot \varphi_k) - (f \cdot \varphi_k) = 0 \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N},$$

a tedy, vzhledem k Větě 2.14, je $h_1 = h$. To však znamená, že také $h_1' = h'$ a věta je tedy zcela dokázána. □

Důsledek 2.18. $(M^\perp)^\perp = M$.

Důsledek 2.19. *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset H$ je nějaký ortogonální systém. Pak lze systém $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ rozšířit o další prvky tak, že vzniklý ortogonální systém bude úplný v prostoru H.*

Důkaz. Nechť M je lineární uzávěr systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Pak je M podprostorem prostoru H. Označme $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ortonormální bázi v prostoru $M^\perp$. Podle Věty 2.17 je pak $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty} \cup \{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ úplný ortogonální systém v H. □

Důsledek 2.20. *Nechť H je Hilbertův prostor, $M \subseteq H$ jeho podprostor a* $\dim M = n < +\infty$. *Pak* $\operatorname{kodim} M^\perp = n$. *Platí také obrácené tvrzení: Jestliže* $\operatorname{kodim} M^\perp = n < +\infty$, *pak* $\dim M = n$.

Důkaz. Nechť $\dim M = n < +\infty$ a nechť $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ je ortonormální báze v M. Pak je zřejmé, že $\operatorname{kodim} M^\perp = n$. □

Poznámka 2.8. Je-li M podprostor Hilbertova prostoru H, pak lze libovolný prvek $f \in H$ vyjádřit jediným způsobem ve tvaru $f = h + h'$, kde $h \in M$ a $h' \in M^\perp$ (viz Větu 2.17). V takovém případě říkáme, že H je direktní součet podprostorů M a $M^\perp$, a píšeme $H = M \oplus M^\perp$.

Zavedeme následující definici.

Definice 2.25. Řekneme, že prostor H je *direktní součet* podprostorů M_1, M_2 a označíme

$$H = M_1 \oplus M_2\,,$$

jestliže platí:

1. $M_1 \perp M_2$, tj. pro libovolné $x \in M_1$ a $y \in M_2$ platí $(x \cdot y) = 0$.
2. Každý $f \in H$ lze vyjádřit ve tvaru

$$f = h_1 + h_2\,, \tag{2.18}$$

   kde $h_1 \in M_1$ a $h_2 \in M_2$.

Poznámka 2.9. Lehce lze ověřit, že vyjádření (2.18) v Definici 2.25 je jedinné.

Pojem direktního součtu je možné bezprostředně zobecnit na libovolný konečný počet nebo spočetně mnoho podprostorů.

Definice 2.26. Řekneme, že prostor H je *direktní součet* podprostorů $\{M_k\}_{k=1}^{+\infty}$ a označíme

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \cdots\,,$$

jestliže platí:

1. $M_k \perp M_j$ pro $k \neq j$, tj. pro libovolné $f \in M_k$ a $g \in M_j$ platí $(f \cdot g) = 0$.
2. Každý $f \in H$ lze vyjádřit ve tvaru

$$f = h_1 + h_2 + \cdots + h_n + \cdots\,, \quad \text{kde} \quad h_k \in M_k \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N},$$

   přičemž řada $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|h_k\|^2$ je konvergentní.

Poznámka 2.10. Jestliže $H = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \cdots$ a $f = h_1 + h_2 + \cdots + h_n + \cdots$, pak

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|h_k\|^2\,.$$

Definice 2.27. Nechť H_k, $k = 1, 2, \dots$ jsou Hilbertovy prostory. Nechť dále

$$H = \left\{ h = (h_1, h_2, \dots) : \ h_k \in H_k \text{ pro } k \in \mathbb{N}\,, \ \sum_{k=1}^{+\infty} \|h_k\|^2 < +\infty \right\},$$

$$(h \cdot g) = \sum_{k=1}^{+\infty} (h_k \cdot g_k).$$

Pak H se nazývá *direktním součtem* prostorů H_k.

2.7. Charakteristická vlastnost unitárních prostorů

Víme, že v každém unitárním prostoru můžeme pomocí skalárního součinu zavést normu (viz Tvrzení 2.5), tj. každý unitární prostor je také prostorem normovaným. Opačné tvrzení však obecně neplatí. Následující věta udává podmínku, která je nutná a dostatečná pro to, aby daný normovaný prostor byl unitární, tj. aby v něm norma byla definována nějakým skalárním součinem.

Věta 2.21. *Normovaný prostor $(X, \|\cdot\|)$ je unitární právě tehdy, když pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big)\,. \tag{2.19}$$

Důkaz. Nutnost podmínky (2.19) je zřejmá. Ukážeme její dostatečnost. Nechť tedy pro všechna $x, y \in X$ platí (2.19). Položme

$$h(x, y) = \frac{1}{4}\Big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\Big) \quad \text{pro} \quad x, y \in X. \tag{2.20}$$

Ukážeme, že $h : X \times X \to \mathbb{R}$ je skalární součin.

Zřejmě

$$\begin{aligned} h(x, x) &= \|x\| \quad \text{pro} \quad x \in X, \\ h(x, y) &= h(y, x) \quad \text{pro} \quad x, y \in X, \end{aligned} \tag{2.21}$$

takže podmínky 1 a 4 skalárního součinu jsou splněny. Dokážeme nyní podmínku 2. Zaveďme funkci $F : X^3 \to R$ vztahem

$$F(x, y, z) = 4\Big(h(x + y, z) - h(x, z) - h(y, z)\Big) \quad \text{pro} \quad x, y, z \in X.$$

Je zřejmé, že

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = &\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 - \|x + z\|^2 + \\ &+ \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2 \quad \text{pro} \quad x, y, z \in X. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Z (2.19) plyne

$$\|x + y + z\|^2 = 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + z - y\|^2 \quad \text{pro} \quad x, y, z \in X,$$

$$\|x + y - z\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - z - y\|^2 \quad \text{pro} \quad x, y, z \in X.$$

Dosadíme-li tyto rovnosti do (2.22), dostaneme

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = &- \|x+z-y\|^2 + \|x-z-y\|^2 + \|x+z\|^2 - \\ &- \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \quad \text{pro} \quad x,y,z \in X. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Sečteme-li nyní (2.22) a (2.23), dostaneme

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = &\frac{1}{2}\Big(\|y+z+x\|^2 + \|y+z-x\|^2 \Big) - \|y+z\|^2 - \\ &- \frac{1}{2}\Big(\|y-z+x\|^2 + \|y-z-x\|^2 \Big) + \|y-z\|^2 \quad \text{pro} \quad x,y,z \in X. \end{aligned}$$

Užitím (2.19) v prvním a třetím členu předchozího výrazu obdržíme $F(x,y,z) = 0$ pro $x,y,z \in X$.

Na závěr dokážeme podmínku 3 skalárního součinu. Nechť $x,y \in X$ jsou libovolné, ale pevné. Zaveďme funkci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$G(\lambda) = h(\lambda x, y) - \lambda h(x,y) \quad \text{pro} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Z (2.20) okamžitě plyne $G(0) = 0$ a $G(-1) = 0$, tj.

$$h(-x,y) = -h(x,y).$$

Proto pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} h(nx,y) &= \operatorname{sgn} n \cdot h(x + x + \cdots + x, y) = \operatorname{sgn} n \big[h(x,y) + \cdots + h(x,y) \big] = \\ &= \operatorname{sgn} n \, |n| \, h(x,y) = n \, h(x,y), \end{aligned}$$

tj. $G(n) = 0$. Dále, nechť $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Pak

$$h\left(\frac{p}{q}\, x, y\right) = p\, h\left(\frac{1}{q}\, x, y\right) = \frac{p}{q}\left[q\, h\left(\frac{1}{q} x, y\right)\right] = \frac{p}{q}\, h(x,y),$$

tj. $G(r) = 0$ pro každé $r \in \mathbb{Q}$. Protože je funkce G spojitá, plyne odtud, že $G(\lambda) = 0$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$. Tím je věta zcela dokázána. □

■ **Příklad 2.11.** Mějme prostor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, kde $p \geq 1$ a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Tento prostor bude unitární pouze pro $p = 2$. Vskutku, nechť

$$\begin{aligned} x &= (1,1,0,0,\dots,0) \\ y &= (1,-1,0,0,\dots,0) \end{aligned}$$

Pak

$$\|x\|_p = 2^{\frac{1}{p}}, \ \|y\|_p = 2^{\frac{1}{p}}, \ \|x+y\|_p = 2, \ \|x-y\|_p = 2,$$

tedy rovnost (2.19) neplatí pro $p \neq 2$.

■ **Příklad 2.12.** Prostor $C([0, \frac{\pi}{2}])$ není unitární. Nechť

$$x = \cos t, \quad y = \sin t\,.$$

Máme

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|y\| = 1,\\ \|x+y\| &= \max\left\{|\sin t + \cos t| : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \sqrt{2},\\ \|x-y\| &= \max\left\{|\sin t - \cos t| : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = 1.\end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že pro tato x a y neplatí (2.19).

3. Funkcionály

Definice 3.1. Nechť X je lineární prostor. Funkci $f : X \to \mathbb{R}$ (resp. funkci $f : X \to \mathbb{C}$) nazýváme *funkcionálem.*
Funkcionál f se nazývá *aditivní*, jestliže

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro} \quad x, y \in X.$$

Funkcionál f se nazývá *homogenní*, jestliže

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \text{pro} \quad x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ (nebo } \alpha \in \mathbb{C}).$$

Funkcionál f (definovaný v komplexním lineárním prostoru X) se nazývá *antihomogenní*, jestliže

$$f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x) \quad \text{pro} \quad x \in X,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Definice 3.2. Aditivní homogenní funkcionál se nazývá *lineární.* Aditivní antihomogenní funkcionál se nazývá *antilineární.*

■ **Příklad 3.1.**

a) Nechť $X = \mathbb{R}^n$. Pak $f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} a_i x_i$ pro $x \in \mathbb{R}^n$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je lineární funkcionál.

b) Nechť $X = \mathbb{C}^n$. Pak $f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} a_i \overline{x_i}$ pro $x \in \mathbb{R}^n$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je antilineární funkcionál.

c) Nechť $X = C([a, b])$, $y \in C([a, b])$. Pak $f(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b x(s) y(s) \mathrm{d}s$ pro $x \in C([a, b])$ je lineární funkcionál.

d) Nechť $X = C([a, b])$ (nad $\mathbb{C}$), $y \in C([a, b])$. Pak $f(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b \overline{x}(s) y(s) \mathrm{d}s$ pro $x \in C([a, b])$ je antilineární funkcionál.

e) Nechť $X = C([a, b])$, $t_0 \in [a, b]$. Pak $f(x) \overset{\text{def}}{=} x(t_0)$ pro $x \in C([a, b])$ je lineární funkcionál.

f) Nechť $X = l_2$. Pak $f(x) \overset{\text{def}}{=} x_k$ pro $x \in l_2$ je lineární funkcionál.

3.1. Geometrický význam lineárního funkcionálu

Definice 3.3. Nechť f je lineární (netriviální) funkcionál. Množina

$$\{x \in X : f(x) = 0\}$$

je podprostorem prostoru X, který nazýváme *jádrem funkcionálu* f a značíme $\ker f$.

Tvrzení 3.1. *Nechť f je lineární (netriviální) funkcionál v prostoru X. Pak lze každý prvek $x \in X$ psát jediným způsobem ve tvaru*

$$x = \alpha x_0 + y, \tag{3.1}$$

kde $x_0 \in X \setminus \ker f$ a $y \in \ker f$.

Důkaz. Nechť $x_0 \notin \ker f$. Nechť dále $x \in X$ je libovolné a položme

$$y = x - f(x)\,\frac{x_0}{f(x_0)}\ .$$

Pak je zřejmé, že lze x vyjádřit ve tvaru (3.1), kde $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}$. Ukážeme, že $y \in \ker f$. Vskutku, zřejmě

$$f(y) = f\left(x - f(x)\,\frac{x_0}{f(x_0)}\right) = 0.$$

Zbývá dokázat jednoznačnost. Nechť tedy

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_0 + y_1\,, \qquad & y_1 &\in \ker f,\\ x &= \alpha_2 x_0 + y_2\,, \qquad & y_2 &\in \ker f. \end{aligned}$$

Pak $y_1 - y_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)x_0$, a tedy

$$0 = f(y_1 - y_2) = (\alpha_1 - \alpha_2) f(x_0).$$

Odtud, s ohledem na předpoklad $x_0 \notin \ker f$, dostáváme $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Důsledek 3.2. *Nechť f je lineární (netriviální) funkcionál v prostoru X. Prvky $x_1, x_2 \in X$ patří do téže zbytkové třídy podle podprostoru $\ker f$ právě tehdy, když $f(x_1) = f(x_2)$.*

Důkaz. Z důkazu předchozího tvrzení je zřejmé, že lze prvky x_1 a x_2 vyjádřit ve tvaru

$$x_1 = \frac{f(x_1)}{f(x_0)}\,x_0 + y_1\,, \qquad x_2 = \frac{f(x_2)}{f(x_0)}\,x_0 + y_2\,,$$

kde $y_1, y_2 \in \ker f$ a $x_0 \notin \ker f$. Proto

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{f(x_0)}\Big(f(x_1) - f(x_2)\Big)\,x_0 + (y_1 - y_2).$$

Odtud $x_1 - x_2 \in \ker f$ právě tehdy, když $f(x_1) - f(x_2) = 0$. □

Tvrzení 3.3. *Nechť f je lineární (netriviální) funkcionál v prostoru X. Pak* $\operatorname{kodim} \ker f = 1$.

Důkaz. Každá třída $[x] \in X/\ker f$ je definována jedním (libovolným) reprezentantem. Podle Tvrzení 3.1 platí $[x] = [\alpha x_0] = \alpha[x_0]$, tj. $\dim X/\ker f = 1$. Proto $\operatorname{kodim} \ker f = 1$. □

Tvrzení 3.4. *Nechť $X_0 \subseteq X$ je podprostor prostoru X a $\operatorname{kodim} X_0 = 1$. Pak existuje lineární funkcionál f takový, že $\ker f = X_0$. Tento funkcionál je definován jednoznačně až na multiplikativní konstantu.*

Důkaz. Zvolme libovolný prvek $x_0 \notin X_0$. Jelikož je $\operatorname{kodim} X_0 = 1$, lze každý prvek $x \in X$ vyjádřit (jednoznačně) ve tvaru (3.1), kde $y \in X_0$. Definujme lineární fukcionál f vztahem

$$f(x) = \alpha \quad \text{pro} \quad x \in X.$$

Pak lze jednoduše ověřit, že $\ker f = X_0$.

Nechť dále g je také lineární funkcionál takový, že $\ker g = X_0$. Z vyjádření (3.1) a definice funkcionálu f plyne

$$g(x) = \alpha g(x_0) = f(x)g(x_0) \quad \text{pro} \quad x \in X,$$

tj. funkcionál f je definován jednoznačně až na multiplikativní konstantu. □

Definice 3.4. Nechť X je lineární prostor, $X_0 \subseteq X$ je podprostor a nechť $\operatorname{kodim} X_0 = 1$. Každá zbytková třída podle X_0 (tj. prvek prostoru X/X_0) se nazývá *nadrovina* rovnoběžná s podprostorem X_0.

Jinými slovy nadrovina E rovnoběžná s podprostorem X_0 je množina, kterou dostaneme z podprostoru X_0 posunutím o nějaký vektor $x_0 \in X$, tj.

$$E = \{x \in X : x = x_0 + y,\ y \in X_0\}.$$

Tvrzení 3.5. *Nechť f je netriviální lineární funkcionál v prostoru X. Pak množina*

$$E_f = \{x \in X : f(x) = 1\}$$

je nadrovina rovnoběžná s podprostorem $\ker f$.

Důkaz. Nechť $x_0 \in X \setminus \ker f$ je vybráno tak, že $f(x_0) = 1$. Pak podle důkazu Tvrzení 3.1 lze každý prvek $x \in X$ vyjádřit ve tvaru

$$x = f(x)x_0 + y,$$

kde $y \in \ker f$. Odtud plyne, že každý prvek $x \in E_f$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x = x_0 + y,$$

což podle Definice 3.4 znamená, že E_f je nadrovina rovnoběžná s podprostorem $\ker f$. □

Tvrzení 3.6. *Nechť $E \subseteq X$ je nadrovina rovnoběžná s podprostorem $X_0 \subseteq X$ prostoru X, $\operatorname{kodim} X_0 = 1$ a $0 \notin E$. Pak existuje jediný lineární funkcionál f takový, že*

$$E = \{x \in X : f(x) = 1\}.$$

Důkaz. Poněvadž E je nadrovina rovnoběžná s podprostorem X_0 neprocházející počátkem, existuje podle Definice 3.4 prvek $x_0 \notin X_0$ tak, že

$$E = \{x \in X : x = x_0 + y,\ y \in X_0\}.$$

Jelikož je kodim $X_0 = 1$, lze každý prvek $x \in X$ vyjádřit ve tvaru (3.1), kde $y \in X_0$. Definujeme-li nyní funkcionál f vztahem

$$f(x) = \alpha \quad \text{pro} \quad x \in X,$$

je zřejmé, že f je hledaný lineární funkcionál.

Dokážeme ještě jednoznačnost. Nechť g je lineární funkcionál takový, že

$$E = \{x \in X : g(x) = 1\}.$$

Jelikož $x_0 \in E$, plyne z poslední rovnosti $g(x_0) = 1$. Proto lze jednoduše ověřit, že

$$g(y) = 0 \quad \text{pro} \quad y \in X_0.$$

Z vyjádření (3.1) a z definice fukcionálu f tedy pro libovolné $x \in X$ dostáváme

$$g(x) = g(\alpha x_0 + y) = \alpha = f(x).$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Tvrzení 3.5 a 3.6 lze formulovat takto:

Tvrzení 3.7. *Existuje bijektivní přiřazení mezi všemi netriviálními lineárními funkcionály a všemi nadrovinami v lineárním prostoru X neprocházejícími bodem* 0.

3.2. Konvexní množiny

Definice 3.5. Nechť X je reálný lineární prostor a $x, y \in X$. Množinu

$$\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1\}$$

nazýváme *uzavřenou úsečkou* spojující body x a y.

Úsečka bez krajních bodů x a y se nazývá *otevřená úsečka.*

Definice 3.6. Množina $E \subseteq X$ se nazývá *konvexní*, jestliže současně s libovolnými dvěma body x a y obsahuje také úsečku, která je spojuje.

Vnitřkem množiny $E \subseteq X$ nazveme množinu

$$\{x \in E : \forall y \in X\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tak, že pro } \forall |t| < \varepsilon \text{ platí } x + ty \in E\}.$$

Vnitřek množiny E značíme $I(E)$.

Definice 3.7. Konvexní množina, jejíž vnitřek je neprázdná množina se nazývá *konvexní těleso.*

■ **Příklad 3.2.**

a) $\{f \in C([a,b]) : |f(t)| \leq 1,\ a \leq t \leq b\}$ je konvexní množina v prostoru $C([a,b])$.

b) $E = \left\{x \in l_2 : \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 \leq 1\right\}$ je konvexní těleso v prostoru l_2.

$I(E) = \left\{x \in l_2 : \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 < 1\right\}$.

c) Hilbertův kvádr $\Pi = \{x \in l_2 : |x_k| \leq \frac{1}{2^{k-1}},\ k \in \mathbb{N}\}$ je konvexní množina v prostoru l_2, ale není konvexním tělesem. Vskutku, nechť $y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ a nechť $x + ty \in \Pi$, pak

$$\left|x_k + \frac{t}{k}\right| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}$$

a tedy

$$\left|\frac{t}{k}\right| = \left|\frac{t}{k} + x_k - x_k\right| \leq \left|\frac{t}{k} + x_k\right| + |x_k| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-2}}\,,$$

tj.

$$|t| \leq \frac{k}{2^{k-2}} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Odtud

$$|t| \leq \lim_{k \to +\infty} \frac{k}{2^{k-2}} = 0$$

a tedy $I(\Pi) = \emptyset$.

Tvrzení 3.8. *Je-li $E \subseteq X$ konvexní množina, pak $I(E)$ je také konvexní množina.*

Důkaz. Nechť $x_1, x_2 \in I(E)$ a $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, kde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ a $\alpha + \beta = 1$. Pro dané $y \in X$ pak existují $\varepsilon_1 > 0$ a $\varepsilon_2 > 0$ taková, že

$$x_1 + ty \in E \quad \text{pro} \quad |t| < \varepsilon_1\,, \qquad x_2 + ty \in E \quad \text{pro} \quad |t| < \varepsilon_2\,.$$

Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Pak vzhledem ke konvexnosti množiny E dostáváme

$$x + ty = \alpha(x_1 + ty) + \beta(x_2 + ty) \in E \quad \text{pro} \quad |t| < \varepsilon\,,$$

tj. $x \in I(E)$. □

Tvrzení 3.9. *Průnik libovolného počtu konvexních množin je konvexní množina.*

Důkaz. Nechť $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je systém konvexních množin v X a nechť $E = \bigcap\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$. Nechť dále $x, y \in E$ libovolné. Pak $x, y \in E_\alpha$ pro každé $\alpha \in I$. Poněvadž jsou všechny množiny E_α konvexní, usečka spojující body x a y je podmnožinou každé množiny E_α, a tedy je i podmnožinou množiny E. □

► **Úloha 3.1.** Udejte příklad, kdy průnik konvexních těles není konvexní těleso.

Definice 3.8. Nechť $A \subseteq X$. Průnik všech konvexních množin obsahujících množinu A nazveme *konvexním obalem* množiny A.

▶ **Úloha 3.2.** Ověřte, že pro libovolnou množinu $A \subseteq X$ existuje konvexní množina, která ji obsahuje (v krajním případě bude touto množinou celý prostor X).

Definice 3.9. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in X$. Řekneme, že tyto body jsou *v obecné poloze*, jestliže ze vztahů

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$$

plyne, že $\lambda_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

Definice 3.10. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in X$ jsou body v obecné poloze. Jejich konvexní obal budeme nazývat *n–rozměrný simplex* a body $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ nazveme *vrcholy simplexu.*

Poznámka 3.1. Simplex o nulové dimenzi je jeden bod. Jednodimenzionální simplex je úsečka.

Tvrzení 3.10. *Simplex s vrcholy $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in X$ je množina všech bodů, které lze vyjádřit ve tvaru*

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k, \quad \textit{kde} \quad \alpha_k \geq 0 \quad \textit{pro} \quad k = 1, \ldots, n+1 \quad \textit{a} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1. \tag{3.2}$$

Důkaz. Snadno lze ověřit, že množina E bodů tvaru (3.2) je konvexní a obsahuje body $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Naopak každá konvexní množina obsahující body $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ musí obsahovat také všechny body tvaru (3.2). Množina E je tedy nejmenší konvexní množina obsahující body $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. □

3.3. Konvexní funkcionály

Definice 3.11. Nechť X je reálný lineární prostor a p je nezáporný funkcionál (tj. $p : X \to \mathbb{R}_+$). Funkcionál p se nazývá *konvexní*, jestliže platí:

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro $x, y \in X$,
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ pro $x \in X$ a $\alpha \geq 0$.

Poznámka 3.2. Nepředpokládáme, že pro všechna $x \in X$ je hodnota $p(x)$ konečná.

■ **Příklad 3.3.**

a) Nechť $X = \mathbb{R}^n$ a $\|\cdot\|$ je nějaká norma v X, pak

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|x\| \quad \text{pro } x \in X$$

je konvexní funkcionál.

b) Nechť

$$m = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i \in \mathbb{N}, \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty\right\},$$

pak

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \quad \text{pro } x \in m$$

je konvexní funkcionál.

Věta 3.11. *Nechť X je lineární prostor, k je kladné číslo a p je konvexní funkcionál. Pak množina*
$$E = \{x \in X : p(x) \leq k\}$$
je konvexní. Je-li funkcionál p konečný, pak E je konvexní těleso a
$$I(E) = \{x \in X : p(x) < k\}.$$

Důkaz. Nechť $x, y \in E$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ a $\alpha + \beta = 1$. Pak
$$p(\alpha x + \beta y) \leq \alpha p(x) + \beta p(y) \leq \alpha k + \beta k = k,$$
tj. $\alpha x + \beta y \in E$. Množina E je tedy konvexní.

Předpokládejme dále, že fukcionál p je konečný. Nechť $x, y \in X$, $p(x) < k$ a $t > 0$. Pak
$$p(x + ty) \leq p(x) + tp(y), \qquad p(x - ty) \leq p(x) + tp(-y).$$
Jestliže je $p(y) = 0$ a $p(-y) = 0$, pak $p(x \pm ty) < k$, tj. $x \pm ty \in E$ pro každé $t > 0$. V opačném případě položme
$$\varepsilon = \frac{k - p(x)}{\max\{p(y), p(-y)\}}\ .$$
Pak
$$p(x) + tp(\pm y) \leq p(x) + t \max\{p(y), p(-y)\} < k \quad \text{pro} \quad t < \varepsilon,$$
tj. $x \pm ty \in E$ pro $t < \varepsilon$.

Proto $x \in I(E)$ a E je tedy konvexní těleso. Navíc jsme již dokázali, že $\{x \in X : p(x) < k\} \subseteq I(E)$. Opačná inkluze je zřejmá. Vskutku, nechť $x \in I(E)$. Pak existuje $t > 0$ takové, že $x + tx \in E$. Proto
$$p(x) = \frac{1}{1+t}\, p(x + tx) \leq \frac{k}{1+t} < k.$$
Tím je věta zcela dokázána. □

Definice 3.12. Nechť $E \subseteq X$ je konvexní těleso a $0 \in I(E)$. Funkcionál
$$p_E(x) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{r > 0 : \frac{x}{r} \in E\right\} \quad \text{pro} \quad x \in X \tag{3.3}$$
se nazývá *Minkovského funkcionál* pro konvexní těleso E.

Tvrzení 3.12. *Minkovského funkcionál* (3.3) *je konečný a konvexní.*

Důkaz. Jelikož $0 \in I(E)$, pro libovolné $x \in X$ existuje $t > 0$ tak, že $tx \in E$. Jinými slovy, pro každé $x \in X$ platí $\frac{x}{r} \in E$, kde $r = \frac{1}{t}$. To však znamená, že je funkcionál p_E konečný. Nezápornost plyne přímo z definice. Dále pro každé $x \in X$ a $\lambda > 0$ platí
$$p_E(\lambda x) = \inf\left\{r > 0 : \frac{\lambda x}{r} \in E\right\} = \inf\left\{\lambda\left(\frac{r}{\lambda}\right) > 0 : \frac{x}{\frac{r}{\lambda}} \in E\right\} =$$
$$= \inf\left\{\lambda r' > 0 : \frac{x}{r'} \in E\right\} = \lambda \inf\left\{r' > 0 : \frac{x}{r'} \in E\right\} = \lambda p_E(x).$$

Nechť nyní $x, y \in X$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existují čísla $a > 0$ a $b > 0$ taková, že $\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \in E$ a
$$p_E(x) \leq a < p_E(x) + \varepsilon, \qquad p_E(y) \leq b < p_E(y) + \varepsilon.$$

Položme $c = a + b$. Pak
$$\frac{x+y}{c} = \frac{ax}{ac} + \frac{by}{bc} = \alpha\,\frac{x}{a} + \beta\,\frac{y}{b}\,,$$
kde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ a $\alpha + \beta = 1$. To však znamená, že prvek $\frac{x+y}{c}$ je bodem úsečky s krajními body $\frac{x}{a}$ a $\frac{y}{b}$. Poněvadž $\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \in E$ a E je konvexní množina, platí $\frac{x+y}{c} \in E$. Odtud
$$p_E(x+y) \leq c = a + b < p_E(x) + p_E(y) + 2\varepsilon.$$
Vzhledem k libovolnosti ε tedy dostáváme $p_E(x+y) \leq p_E(x) + p_E(y)$. Tím je věta zcela dokázána. □

3.4. Hahn–Banachova věta

Definice 3.13. Nechť X je reálný lineární prostor a X_0 je jeho podprostor. Nechť dále f_0 je lineární funkcionál v prostoru X_0. Lineární funkcionál f definovaný v celém prostoru X se nazývá *prodloužení* funkcionálu f_0, jestliže
$$f(x) = f_0(x) \quad \text{pro} \quad x \in X_0.$$

Věta 3.13 (Hahn–Banachova). *Nechť X je reálný lineární prostor a X_0 je jeho podprostor. Nechť dále p je konečný konvexní funkcionál v X a f_0 je lineární funkcionál v X_0, přičemž*
$$f_0(x) \leq p(x) \quad \textit{pro} \quad x \in X_0. \tag{3.4}$$
Pak existuje lineární funkcionál f definovaný v X, který je prodloužením funkcionálu f_0 a který splňuje nerovnost
$$f(x) \leq p(x) \quad \textit{pro} \quad x \in X. \tag{3.5}$$

Důkaz. Předpokládejme, že $X_0 \neq X$. Dokážeme, že lze funkcinál f_0 prodloužit na nějaký větší podprostor X' při zachování nerovnosti $f'(x) \leq p(x)$ pro $x \in X'$.

Nechť $y, z \in X_0$. Pak vzhledem k (3.4) a konvexnosti funkcionálu p pro každé $u \in X$ dostáváme
$$f_0(z) - f_0(y) = f_0(z-y) \leq p(z-y) = p(z+u-y-u) \leq p(z+u) + p(-y-u).$$
Jinými slovy
$$-f_0(z) + p(z+u) \geq -f_0(y) - p(-y-u) \quad \text{pro} \quad u \in X. \tag{3.6}$$
Položme
$$\begin{aligned} c_1(u) &= \inf\{-f(z) + p(z+u) : z \in X_0\} \quad \text{pro} \quad u \in X, \\ c_2(u) &= \sup\{-f(y) - p(-y-u) : y \in X_0\} \quad \text{pro} \quad u \in X. \end{aligned}$$
Potom z nerovnosti (3.6) plyne
$$c_1(u) \geq c_2(u) \quad \text{pro} \quad u \in X. \tag{3.7}$$

Nechť nyní $u \in X$ je nějaký prvek a nechť X' je podprostor vytvořený podprostorem X_0 a prvkem u, tj.
$$X' = \{x + tu : x \in X_0,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Nechť dále $c \in [c_2(u), c_1(u)]$ a f' je funkcionál definovaný vztahem

$$f'(x + tu) = tc + f_0(x) \quad \text{pro} \quad x + tu \in X'.$$

Lehce lze ověřit, že f' je lineární funkcionál definovaný v X'. Ukážeme, že

$$f'(x) \leq p(x) \quad \text{pro} \quad x \in X'. \tag{3.8}$$

Vskutku, tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$tc \leq p(x + tu) - f_0(x) \quad \text{pro} \quad x \in X_0,\ t \in \mathbb{R},$$

což je dále ekvivalentní s nerovnostmi

$$\begin{aligned} c &\leq p\left(\frac{x}{t} + u\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{pro} \quad x \in X_0,\ t > 0, \\ c &\geq -p\left(-\frac{x}{t} - u\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{pro} \quad x \in X_0,\ t < 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Jelikož je prostor X_0 lineární, lze nerovnosti (3.9) přepsat takto

$$\begin{aligned} c &\leq p(x + u) - f_0(x) \quad \text{pro} \quad x \in X_0, \\ c &\geq -p(-x - u) - f_0(x) \quad \text{pro} \quad x \in X_0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jelikož $c_2(u) \leq c \leq c_1(u)$, platí zřejmě (3.10), což vzhledem k výše zmíněným ekvivalencím zaručuje platnost nerovnosti (3.8).

Dokazali jsem tak, že lze f_0 prodloužit na větší podprostor X' se zachováním nerovnosti (3.8).

Pro dokončení důkazu budeme potřebovat následující lemma.

Lemma (Zornovo). *Jestliže má každá lineárně uspořádaná podmnožina v částečně uspořádané množině M horní závoru, pak množina M obsahuje největší prvek.*

Definice. Nechť M je množina a φ je binární vztah na této množině. Binární vztah φ nazveme částečným uspořádáním na množině M a označíme ho „$\leq$“, jsou-li splněny následující podmínky:

1. reflexivita: $a \leq a$,
2. tranzitivita: je-li $a \leq b$ a $b \leq c$, pak $a \leq c$,
3. antisymetrie: je-li $a \leq b$ a $b \leq a$, pak $a = b$.

Definice. Nechť M je částečně uspořádaná množina. Její podmnožinu A, v níž jsou každé dva prvky srovnatelné nazýváme lineárně uspořádanou podmnožinou.

Definice. V částečně uspořádané M nazýváme množině prvek $a \in M$ horní závorou podmnožiny $M_0 \subseteq M$, jestliže pro každé $a' \in M_0$ platí $a' \leq a$.

Nyní již můžeme dokončit důkaz věty. Systém L všech možných prodloužení f' funkcionálu f_0 slňujících podmínku (3.8) je částečně uspořádán a každá jeho lineárně uspořádaná podmnožina L_0 má největší prvek. Tento největší prvek je funkcionál, jehož definiční obor je sjednocení definičních oborů funkcionálů $f' \in L_0$. Podle Zornova lemmatu existuje v celém systému L největší prvek f. Tento největší prvek je hledaným funkcionálem. $\square$

Definice 3.14. Nechť $M, N \subseteq X$. Řekneme, že lineární funkcionál f odděluje množiny M a N, existuje-li takové číslo $c \in \mathbb{R}$, že

$$f(x) \geq c \quad \text{pro} \quad x \in M \quad \text{a} \quad f(x) \leq c \quad \text{pro} \quad x \in N.$$

Tvrzení 3.14. *Lineární funkcionál f odděluje množiny M a N právě tehdy, když odděluje množiny $M - N = \{x - y : x \in M,\ y \in N\}$ a $\{0\}$.*

Tvrzení 3.15. *Lineární funkcionál f odděluje množiny M a N právě tehdy, když pro každé $x_0 \in X$ odděluje množiny $M - \{x_0\}$ a $N - \{x_0\}$.*

Z Hahn–Banachovy věty snadno dostaneme:

Věta 3.16. *Nechť $M, N \subseteq X$ jsou konvexní množiny a $M \cap N = \emptyset$, přičemž alespoň jedna z nich má neprázdný vnitřek (tj. je konvexním tělesem). Pak existuje nenulový lineární funkcionál f oddělující množiny M a N.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $I(M) \neq \emptyset$ a $0 \in I(M)$. Zvolme $y_0 \in N$. Pak zřejmě $-y_0 \in I(M - N)$ a $0 \in I(M - N + \{y_0\})$. Z předpokladu $M \cap N = \emptyset$ plyne $0 \notin M - N$ a $y_0 \notin M - N + \{y_0\}$. Nechť p je Minkovského funkcionál pro množinu $M - N + \{y_0\}$. Pak, protože $y_0 \notin M - N + \{y_0\}$, $0 \in M - N + \{y_0\}$ a množina $M - N + \{y_0\}$ je konvexní, platí

$$p(y_0) \geq 1.$$

Vskutku, jestliže $p(y_0) < 1$, pak existuje $\varepsilon \in \,]0, 1[$ takové, že $\frac{y_0}{1-\varepsilon} \in M - N + \{y_0\}$. Vzhledem k tomu, že $0 \in M - N + \{y_0\}$ a množina $M - N + \{y_0\}$ je konvexní, dostáváme $\frac{\beta y_0}{1-\varepsilon} \in M - N + \{y_0\}$ pro každé $\beta \in [0, 1]$, a tedy v případě $\beta = 1 - \varepsilon$ obdržíme spor.

Zavedeme lineární funkcionál f_0 vztahem

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha p(y_0).$$

Je definován v jednorozměrném prostoru vytvořeném prvkem y_0 a splňuje

$$f_0(\alpha y_0) \leq p(\alpha y_0) \quad \text{pro} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vskutku, je-li $\alpha \geq 0$, pak $f_0(\alpha y_0) = \alpha p(y_0) = p(\alpha y_0)$. Je-li $\alpha < 0$, pak $f_0(\alpha y_0) = \alpha p(y_0) < 0 \leq p(\alpha y_0)$. Podle Hahn-Banachovy věty lze funkcionál f_0 prodloužit na celý prostor X, přičemž

$$f(x) \leq p(x) \quad \text{pro} \quad x \in X$$

a

$$f(\alpha y_0) = \alpha p(y_0) \quad \text{pro} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Odtud $f(y_0) \geq 1$ a $f(y) \leq 1$ pro $y \in M - N + \{y_0\}$. Funkcionál f proto odděluje množiny $\{y_0\}$ a $M - N + \{y_0\}$ a odděluje tedy také množiny $\{0\}$ a $M - N$. Pak však funkcionál f odděluje množiny M a N. Tím je věta dokázána. $\square$

3.5. Spojité lineární funkcionály

Definice 3.15. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je nějaký funkcionál. Funkcionál f se nazývá *spojitý v bodě* $x_0 \in X$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in X$ splňující $\|x - x_0\| \leq \delta$ platí

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Funkcionál f se nazývá *spojitý v prostoru* X, jestliže je spojitý v každém bodě $x_0 \in X$.

Definice 3.16. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je nějaký funkcionál. Funkcionál f se nazývá *ohraničený*, jestliže obraz každé ohraničené množiny $A \subseteq X$ je ohraničená množina v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 3.17. *Jestliže je lineární funkcionál f spojitý v daném bodě $x_0 \in X$, pak je spojitý v prostoru X.*

Důkaz. Nechť je lineární funkcionál f spojitý v bodě $x_0 \in X$, tj. pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že jestliže $x \in X$ splňuje $\|x - x_0\| \le \delta$, pak $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$.

Nechť $x_1 \in X$ je libovolný prvek. Pak pro každé $y \in X$ splňující $\|y - x_1\| \le \delta$ platí také $\|(y - x_1 + x_0) - x_0\| \le \delta$ a ze spojitosti funkcionálu f v bodě x_0 dostáváme $|f(y - x_1 + x_0) - f(x_0)| \le \varepsilon$. Funkcionál f je však také lineární, proto odtud plyne $|f(y) - f(x_1)| \le \varepsilon$, což znamená, že je f spojitý v bodě x_1. □

Věta 3.18. *K tomu, aby lineární funkcionál f byl spojitý v prostoru X, je nutné a stačí, aby existovalo takové okolí bodu 0, v němž je funkcionál f ohraničený.*

Důkaz. Nechť je funkcionál f spojitý v prostoru X. Pak je f samozřejmě spojitý v bodě 0, tj. existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x)| \le 1$ pro každé $x \in X$ splňující $\|x\| \le \delta$. V kouli $B[0, \delta]$ je tedy funkcionál f ohraničený.

Naopak, nechť existuje $c > 0$ a koule $B[0, r]$ tak, že

$$|f(x)| \le c \quad \text{pro} \quad x \in B[0, r]. \tag{3.11}$$

Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\delta = \frac{\varepsilon r}{c}$. Pak pro každé $x \in X$ splňující $\|x\| \le \delta$ platí také $\left\|\frac{c}{\varepsilon} x\right\| \le r$ a z (3.11) dostáváme $\left|f\left(\frac{c}{\varepsilon} x\right)\right| \le c$. Funkcionál f je však také lineární, proto odtud plyne $|f(x)| \le \varepsilon$, což znamená, že je f spojitý v bodě 0. Vzhledem k Tvrzení 3.17 pak dostáváme spojitost funkcionálu f v prostoru X. □

Tvrzení 3.19. *K tomu, aby funkcionál f byl spojitý v bodě $x_0 \in X$, je nutné a stačí, aby pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ konvergující k bodu x_0 platilo $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Definice 3.17. Nechť f je spojitý lineární funkcionál v lineárním normovaném prostoru $(X, \|\cdot\|)$. Číslo

$$\sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \le 1\}$$

nazveme *normou funkcionálu* f a značíme $\|f\|$.

Poznámka 3.3. Bude-li třeba zdůraznit, že funkcionál je definován v prostoru X, pak budeme psát $\|f\|_X$.

Tvrzení 3.20.

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X,\ x \ne 0\right\}.$$

Tvrzení 3.21.

$$|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\| \quad \textit{pro} \quad x \in X.$$

■ **Příklad 3.4.**

a) Nechť $X = \mathbb{R}^n$, $(x \cdot y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$, $a \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (x \cdot a)$ pro $x \in \mathbb{R}^n$.
Vzhledem ke Cauchy–Bunjakovského nerovnosti platí

$$|f(x)| = |(x \cdot a)| \le \|x\| \cdot \|a\| \quad \text{pro} \quad x \in X,$$

tedy f je ohraničený na jednotkové kouli a vzhledem k Věte 3.18 je spojitý. Vzhledem k Definici 3.17 máme $\|f\| \le \|a\|$ a poněvadž $|f(a)| = \|a\|^2$, platí $\|f\| = \|a\|$.

b) Nechť $X = (C([a,b]), \|\cdot\|)$, $y_0 \in C([a,b])$, $f(x) = \int\limits_a^b x(s)y_0(s)\mathrm{d}s$ pro $x \in C([a,b])$. Poněvadž

$$|f(x)| \le \left| \int\limits_a^b x(s)y_0(s)\mathrm{d}s \right| \le \|x\| \int\limits_a^b |y_0(s)|\mathrm{d}s \quad \text{pro} \quad x \in C([a,b]),$$

je f spojitý a $\|f\| \le \int\limits_a^b |y_0(s)|\mathrm{d}s$.

(Dokažte, že ve skutečnosti $\|f\| = \int\limits_a^b |y_0(s)|\mathrm{d}s$.)

c) Nechť $X = (C([a,b]), \|\cdot\|)$, $t_0 \in [a,b]$, $f(x) = x(t_0)$. Zřejmě $|f(x)| = |x(t_0)| \le \|x\|$ a tedy f je spojitý a $\|f\| \le 1$. Poněvadž $|f(1)| = 1$, platí $\|f\| = 1$.

d) Nechť X je unitární prostor, $a \in X$ a $f(x) = (x \cdot a)$. Stejně jako v případě a) je $\|f\| = \|a\|$.

Poznámka 3.4. Podle Tvrzení 3.7 každému lineárnímu funkcionálu f definovanému v lineárním prostoru X lze přiřadit nadrovinu v X určenou rovnicí

$$f(x) = 1.$$

Vzdálenost této nadroviny od bodu 0 je číslo $d = \inf\{\|x\| : f(x) = 1\}$. Vzhledem k odhadu $|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$ platí: Jestliže x je prvkem této nadroviny, pak

$$\|x\| \ge \frac{1}{\|f\|}$$

a tedy

$$d \ge \frac{1}{\|f\|}. \tag{3.12}$$

Na druhé straně podle Tvrzení 3.20 k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $x_\varepsilon \in X$, $x_\varepsilon \neq 0$, takové, že

$$\|f\| - \varepsilon < \frac{|f(x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|}.$$

Nechť $y = \frac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)}$. Potom odtud máme $\|y\|(\|f\| - \varepsilon) < 1$ a $f(y) = 1$, tj.

$$\|y\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon} \qquad \text{a} \qquad f(y) = 1.$$

Proto

$$d < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}\,.$$

Vzhledem k libovolnosti ε dostáváme $d \le \frac{1}{\|f\|}$ a tedy, s ohledem na (3.12), je

$$d = \frac{1}{\|f\|}\,.$$

3.6. Hahn–Banachova věta v normovaném prostoru

Uvedeme nejprve následující tvrzení.

Tvrzení 3.22 (Prodloužení po spojitosti). *Nechť X je reálný normovaný prostor a f_0 je lineární ohraničený funkcionál definovaný v lineární varietě X_0, přičemž $\overline{X_0} = X$. Pak existuje lineární ohraničený funkcionál f definovaný v X tak, že $f(x) = f_0(x)$ pro $x \in X_0$ a*

$$\|f\|_X = \|f_0\|_{X_0}. \tag{3.13}$$

Důkaz. Je zřejmé, že pro $x \in X_0$ položíme $f(x) = f_0(x)$. Nechť nyní $x \in X \setminus X_0$ libovolné. Poněvadž je množina X_0 hustá v X, existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ prvků z X_0 taková, že

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x. \tag{3.14}$$

Položíme

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_0(x_n). \tag{3.15}$$

Ukážeme, že je tato definice korektní, tj. že limita v (3.15) existuje a je nezávislá na výběru posloupnosti konvergující k prvku x. Je zřejmé, že

$$|f_0(x_n) - f_0(x_m)| \le \|f_0\|_{X_0} \|x_n - x_m\| \quad \text{pro} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Odtud a (3.14) plyne, že je posloupnost $\{f_0(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ cauchyovská, a tedy i konvergentní, tj. limita v (3.15) existuje. Nechť nyní $\{\overline{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je jiná posloupnost prvků z X_0 konvergující k x. Označme

$$x_0 = \lim_{n\to+\infty} f_0(x_n), \qquad \overline{x}_0 = \lim_{n\to+\infty} f_0(\overline{x}_n).$$

Pak

$$\begin{aligned}\Big|x_0 - \overline{x}_0\Big| = \Big|\lim_{n\to+\infty} f_0(x_n) - \lim_{n\to+\infty} f_0(\overline{x}_n)\Big| &\le \\ \le \lim_{n\to+\infty} |f_0(x_n) - f_0(\overline{x}_n)| &\le \lim_{n\to+\infty} \|f_0\|_{X_0} \|x_n - \overline{x}_n\| = 0,\end{aligned}$$

tj. $x_0 = \overline{x}_0$. Máme tedy korektně definovaný funkcionál f na X, který je lineární a je prodloužením funkcionálu f_0.

Ukážeme nyní, že je funkcionál f spojitý a platí (3.13). Je zřejmé, že

$$|f(x)| = \Big|\lim_{n\to+\infty} f_0(x_n)\Big| \le \lim_{n\to+\infty} |f_0(x_n)| \le \|f_0\|_{X_0} \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|f_0\|_{X_0} \|x\|,$$

tj. funkcionál f je ohraničený a platí $\|f\|_X \le \|f_0\|_{X_0}$. Dále

$$\begin{aligned}\|f\|_X = \sup\Big\{|f(z)| : z \in X,\ \|z\| \le 1\Big\} &\ge \\ \ge \sup\Big\{|f(z)| : z \in X_0,\ \|z\| \le 1\Big\} &= \\ = \sup\Big\{|f_0(z)| : z \in X_0,\ \|z\| \le 1\Big\} &= \|f_0\|_{X_0}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Je tedy splněna rovnost (3.13) a tvrzení je dokázáno. $\square$

Věta 3.23 (Hahn–Banachova)**.** *Nechť X je reálný normovaný prostor a f_0 je lineární ohraničený funkcionál definovaný v lineární varietě $X_0 \subseteq X$. Pak existuje lineární ohraničený funkcionál f definovaný v X tak, že $f(x) = f_0(x)$ pro $x \in X_0$ a platí* (3.13).

Důkaz. Nechť $c = \|f_0\|_{X_0}$. Definujme fukcionál p v prostoru X vztahem

$$p(x) = c\|x\| \quad \text{pro} \quad x \in X.$$

Je zřejmé, že p je konečný konvexní funkcionál. Vzhledem k Větě 3.13, existuje lineární funkcionál f definovaný v celém prostoru X, který je prodloužením funkcionálu f_0 a platí (3.5).

Je zřejmé, že

$$|f(x)| \leq \|f_0\|_{X_0}\|x\| \quad \text{pro} \quad x \in X,$$

tj. funkcionál f je ohraničený a platí $\|f\|_X \leq \|f_0\|_{X_0}$. Navíc platí (3.16), a je tedy splňěna rovnost (3.13). □

Důsledek 3.24. *Nechť X je normovaný prostor. Pro libovolné $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existuje spojitý lineární funkcionál f takový, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Důkaz. Pro důkaz věty stačí ukázat, že ke každému $x_0 \neq 0$ existuje spojitý lineární funkcionál f takový, že $f(x_0) \neq 0$.

Nechť $x_0 \neq 0$ libovolný a nechť $X_0 = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Definujme lineární ohraničený funkcionál f_0 v X_0 vztahem

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda \quad \text{pro} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pak podle Hahn-Banachovy věty existuje prodloužení f funkcionálu f_0 na celý prostor X se zachováním normy. Navíc platí

$$f(x_0) = f_0(x_0) = 1 \neq 0.$$

Tím je věta dokázána. □

Poznámka 3.5. Z předešlého důsledku zejména plyne, že v $X \neq \{0\}$ existuje nenulový spojitý lineární funkcionál.

Důsledek 3.25. *Nechť M je lineární varieta v reálném normovaném prostoru X, přičemž $M \neq X$. Nechť dále $x_0 \notin M$ je prvek prostoru X takový, že $d > 0$, kde*

$$d = \inf\Big\{\|x_0 - u\| : u \in M\Big\}. \tag{3.17}$$

Pak existuje v X spojitý lineární funkcionál f s vlastnostmi

1) $f(x_0) = 1$*;*

2) $f(x) = 0$ *pro každé* $x \in M$*;*

3) $\|f\| = 1/d$.

Důkaz. Položme

$$M_0 = \Big\{x + \lambda x_0 : x \in M,\ \alpha \in \mathbb{R}\Big\}.$$

je zřejmé, že M_0 je lineární varieta v prostoru X. Na M_0 definujeme lineární funkcionál f_0 následujícím způsobem. Pro $z := x + \lambda x_0 \in M_0$ položíme

$$f_0(z) = \lambda.$$

Je zřejmé, že $f_0(x_0) = 1$ a $f_0(x) = 0$ pro $x \in M$.

Ukážeme nyní, že je funkcionál f_0 ohraničený a platí $\|f_0\| = 1/d$, kde číslo d je dáno vztahem (3.17). Nechť $z = x + \lambda x_0$ je prvek prostoru M_0 nepatřící M (tj. $\lambda \neq 0$). Pak platí

$$|f_0(z)| = |\lambda| = \frac{|\lambda|\,\|z\|}{\|z\|} = \frac{\|z\|}{\left\|\frac{x}{t} + x_0\right\|} = \frac{\|z\|}{\left\|x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right)\right\|} \leq \frac{\|z\|}{d},$$

neboť $-\frac{x}{t} \in M$. Odtud je zřejmé, že je funkcionál f_0 ohraničený a platí $\|f_0\| \leq 1/d$. K důkazu nerovnosti $\|f_0\| \geq 1/d$ využijeme definice infima a vybereme posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ prvků prostoru M takovou, že

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_0 - u_n\| = d\,.$$

Je zřejmé, že

$$1 = f_0(x_0 - u_n) \leq \|f_0\|\,\|x_0 - u_n\|.$$

Přejdeme-li nyní v poslední nerovnosti k limitě pro $n \to +\infty$, dostaneme $1 \leq \|f_0\| d$.

Podle Hahn-Banachovy věty existuje prodloužení f funkcionálu f_0 na celý prostor X se zachováním normy. Je proto zřejmé, že f splňuje podmínky 1)–3). □

4. Adjungovaný prostor

Definice 4.1. Nechť X je lineární prostor, f_1, f_2 jsou lineární funkcionály a $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$). *Součtem* funkcionálů f_1 a f_2 nazýváme takový funkcionál f, který v každém bodě $x \in X$ nabývá hodnoty

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

a *součinem* skaláru λ a funkcionálu f_1 nazýváme takový funkcionál g, který v každém bodě $x \in X$ nabývá hodnoty

$$g(x) = \lambda f_1(x).$$

Je zřejmé, že $f_1 + f_2$ a λf_1 jsou lineární funkcionály. Kromě toho, je-li prostor X normovaný, pak ze spojitosti funkcionálů f_1 af_2 plyne, že jsou funkcionály $f_1 + f_2$ a λf_1 rovněž spojité.

Lehce lze ověřit, že množina všech spojitých lineárních funkcionálů v normovaném prostoru X je lineární prostor. Tento prostor nazýváme prostorem *adjungovaným* k prostoru X a značíme ho X^*.

Poznámka 4.1. Z Poznámky 3.5 plyne, že jakmile prostor X je netriviální, pak také $X^* \neq \{0\}$.

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor a X^* je prostor adjungovaný k prostoru X. Lehce lze ověřit, že X^* bude normovaným prostorem vzhledem k normě

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X,\ x \neq 0\right\}.$$

Věta 4.1. *Adjungovaný prostor* $(X^*, \|\cdot\|)$ *je úplný.*

Důkaz. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X^*$ je cauchyovská posloupnost, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_\varepsilon$ a $m \geq n_\varepsilon$. Odtud pro libovolné $x \in X$ dostáváme

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\| \, \|x\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \text{pro} \quad m \geq n_\varepsilon,\ n \geq n_\varepsilon\,, \tag{4.1}$$

tj. pro libovolné $x \in X$ je posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ (reálných čísel) cauchyovská, a tedy i konvergentní.

Položme

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \text{pro} \quad x \in X.$$

Dokážeme, že $f \in X^*$. Linearitu lze dokázat přímo. Pro libovolné prvky $x, y \in X$ a skaláry α, β platí

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)\Big) =$$
$$= \alpha \lim_{n\to+\infty} f_n(x) + \beta \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Nyní dokážeme spojitost. Přejdeme-li v (4.1) k limitě pro $m \to +\infty$, dostaneme

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \|x\| \quad \text{pro} \quad n \geq n_\varepsilon,\ x \in X\,, \tag{4.2}$$

tj. funkcionál $f - f_n$ je ohraničený. Pak je však také ohraničený funkcionál $f = (f - f_n) + f_n$, a podle Věty 3.18 je tedy f spojitý. Dále z (4.2) a Tvrzení 3.20 plyne

$$\|f - f_n\| \leq \varepsilon \quad \text{pro} \quad n \geq n_\varepsilon\,,$$

tj. f je limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ v prostoru X^*. Tím je věta dokázána. □

Poznámka 4.2. Věta 4.1 platí nezávisle na tom, zda prostor $(X, \|\cdot\|)$ je úplný nebo není úplný.

Tvrzení 4.2. *Nechť prostor* X_0 *není úplný a* X *je jeho úplný obal. Pak* X^* *a* X_0^* *jsou izomorfní.*

Důkaz. Nechť $f_0 \in X_0^*$. Poněvadž je X_0 hustá v prostoru X, lze funkcionál f_0 (jediným způsobem) spojitě prodloužit do celého prostoru X (viz Tvrzení 3.22). Označme toto prodloužení f. Je zřejmé, že $f \in X^*$ a $\|f_0\|_{X_0^*} = \|f\|_{X^*}$. Naopak, každý funkcionál $f \in X^*$ je prodloužením nějakého funkcionálu $f_0 \in X_0^*$. Zobrazení $f_0 \to f$ je tedy izomorfní zobrazení prostoru X_0^* na celý prostor X^*. □

■ **Příklad 4.1.** Nechť X je n–rozměrný prostor a $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jeho báze. Definujme lineární funkcionály $g_1, g_2, \ldots, g_n$ tak, že

$$g_i(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad i = k, \\ 0 & \text{pro} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Zřejmě funkcionály $g_1, g_2, \ldots, g_n$ jsou lineárně nezávislé. Nechť $f \in X^*$ libovolné, pak je zřejmé, že

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) x_k.$$

Na druhé straně $g_k(x) = x_k$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ a tedy

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) g_k(x),$$

což znamená, že funkcionály $g_1, g_2, \dots, g_n$ tvoří bázi prostoru X^*, tj. X^* je také n–rozměrný prostor. Báze $g_1, g_2, \dots, g_n$ se nazývá *duální* k bázi $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Poznámka 4.3. Různé normy v prostoru X indukují různé normy v X^*.

► **Úloha 4.1.** Nechť $\|x\|$ je norma prvku x v prostoru X a $\|f\|$ je norma prvku f v prostoru X^*. Ověřte následující dvojice norem:

$$\begin{array}{llll}
a) & \|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \|f\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. & \\
b) & \|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \|f\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{kde} \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1. \\
c) & \|x\| = \sup\limits_{k=1,\dots,n} |x_k|, & \|f\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k|. & \\
c) & \|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|, & \|f\| = \sup\limits_{k=1,\dots,n} |f_k|. &
\end{array}$$

V těchto vzorcích značí symboly $x_1, \dots, x_n$ souřadnice prvku $x \in X$ v bázi $e_1, \dots, e_n$, zatímco symboly $f_1, \dots, f_n$ značí souřadnice prvku $f \in X^*$ v duální bázi $g_1, \dots, g_n$.

■ **Příklad 4.2.** Nechť

$$C_0 = \left\{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to+\infty} x_k = 0\right\}$$

a $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ pro $x \in C_0$. Dokažme, že C_0^* je izomorfní s prostorem

$$l_1 = \left\{f = (f_1, f_2, \dots) : f_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k| < +\infty\right\},$$

kde $\|f\| = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |f_k|$ pro $f \in l_1$.

Nechť $f \in l_1$ libovolné. Pak

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k x_k \quad \text{pro} \quad x \in C_0 \tag{4.3}$$

je lineární funkcionál v C_0. Zřejmě

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq \|x\| \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k| \quad \text{pro} \quad x \in C_0,$$

a tedy vzhledem k Větě 3.18 je $\widetilde{f}$ spojitý. Proto $\widetilde{f} \in C_0^*$ a navíc $\|\widetilde{f}\| \le \|f\|$.

Nechť $e_k \in C_0$ jsou takové, že

$$e_k = (0, 0, \dots, \overset{(k)}{1}, 0, \dots) \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Položme pro $n \in \mathbb{N}$

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{|f_k|} e_k \qquad \big(\text{jestliže } f_k = 0, \text{ pak } f_k/|f_k| \overset{\text{def}}{=} 0\big).$$

Je zřejmé, že $x^{(n)} \in C_0$, $\|x^{(n)}\| \le 1$ a

$$\widetilde{f}(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{|f_k|} \widetilde{f}(e_k) = \sum_{k=1}^{n} |f_k| \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x_\varepsilon \in C_0$ takové, že $\|x_\varepsilon\| \le 1$ a

$$\widetilde{f}(x_\varepsilon) > \|f\| - \varepsilon\,.$$

Odtud $\|\widetilde{f}\| > \|f\| - \varepsilon$ a vzhledem k libovolnosti ε máme

$$\|\widetilde{f}\| \ge \|f\|.$$

Proto platí $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.

Tím způsobem jsme sestrojili izometrické zobrazení $f \to \widetilde{f}$ prostoru l_1 do prostoru C_0^*. Dokážeme, že obraz l_1 je při tomto zobrazení totožný s celým C_0^*, tj. že každý $\widetilde{f} \in C_0^*$ lze vyjádřit ve tvaru (4.3), kde $f = (f_1, f_2, \dots) \in l_1$.

Pro každé $x \in C_0$ máme

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{N} x_k e_k \right\| = \lim_{N \to +\infty} \sup\{|x_k| : k > N\} = 0,$$

a proto

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k.$$

Poněvadž $\widetilde{f} \in C_0^*$ je spojité, platí

$$\widetilde{f}(x) \underset{N \to +\infty}{\longleftarrow} \widetilde{f}\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{N} x_k \widetilde{f}(e_k) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \widetilde{f}(e_k),$$

tj.

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \widetilde{f}(e_k).$$

Takto má libovolný $\widetilde{f} \in C_0^*$ tvar (4.3), kde $f_k = \widetilde{f}(e_k)$ pro $k \in \mathbb{N}$. Na závěr stačí dokázat, že

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \widetilde{f}(e_k) \right| < +\infty.$$

Položme pro $N \in \mathbb{N}$

$$x^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\widetilde{f}(e_k)}{|\widetilde{f}(e_k)|}\, e_k \qquad \big(\text{jestliže } \widetilde{f}(e_k) = 0, \text{ pak } \widetilde{f}(e_k)/|\widetilde{f}(e_k)| \stackrel{\text{def}}{=} 0\big).$$

Je zřejmé, že $x^{(N)} \in C_0$, $\|x^{(N)}\| \leq 1$ a

$$\sum_{k=1}^{N} \big|\widetilde{f}(e_k)\big| = \sum_{k=1}^{N} \frac{\widetilde{f}(e_k)}{|\widetilde{f}(e_k)|}\, \widetilde{f}(e_k) = \widetilde{f}\big(x^{(N)}\big) \leq \|\widetilde{f}\| \quad \text{pro} \quad N \in \mathbb{N},$$

tj. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\widetilde{f}(e_k)| < +\infty$.

■ **Příklad 4.3.** Prostor l_1^* je izomorfní s prostorem

$$m = \big\{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i \in \mathbb{N},\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty\big\},$$

kde uvažujeme normu $\|x\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ pro $x \in m$.

■ **Příklad 4.4.** Nechť $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak l_p^* je izomorfní s l_q (snadno se ověří s použitím Hölderovy nerovnosti).

4.1. Prostor adjungovaný k Hilbertovu prostoru

Věta 4.3. *Nechť H je reálný Hilbertův prostor. Pak ke každému $f \in H^*$ existuje právě jeden $x_0 \in H$ tak, že*

$$f(x) = (x \cdot x_0) \quad \textit{pro} \quad x \in H, \tag{4.4}$$

přičemž $\|f\| = \|x_0\|$.

Důkaz. Nechť $f \in H^*$ libovolné. Jestliže $f = 0$, pak $x_0 = 0$. Nechť je tedy f nenulový. Vzhledem ke spojitosti funkcionálu f je $\ker f$ uzavřený lineární podprostor v H. Podle Tvrzení 3.3 je navíc $\operatorname{kodim} \ker f = 1$. Proto, vzhledem k Důsledkům 2.18 a 2.20, je $\dim(\ker f)^\perp = 1$. Odtud plyne, že existuje $0 \neq y_0 \in (\ker f)^\perp$ takové, že každý prvek $x \in H$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$x = y + \lambda y_0, \tag{4.5}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a $y \in \ker f$. Položme

$$x_0 = \frac{f(y_0)}{\|y_0\|^2}\, y_0.$$

Pak, vzhledem k (4.5), pro libovolné $x \in H$ máme $f(x) = \lambda f(y_0)$ a

$$(x \cdot x_0) = \left(y + \lambda y_0 \cdot \frac{f(y_0)}{\|y_0\|^2}\, y_0\right) = \frac{\lambda f(y_0)}{\|y_0\|^2}\, (y_0 \cdot y_0) = \lambda f(y_0),$$

platí tedy (4.4).

Ukážeme nyní jednoznačnost. Jestliže $f(x) = (x \cdot x_1)$ pro $x \in H$, pak $(x \cdot x_1 - x_0) = 0$ pro každé $x \in H$, a proto také $(x_1 - x_0 \cdot x_1 - x_0) = 0$. Odtud $x_1 = x_0$.

Užitím Cauchy–Bunjakovského nerovnosti dostaneme

$$|f(x)| = |(x \cdot x_0)| \leq \|x\|\, \|x_0\| \quad \text{pro} \quad x \in H,$$

a tedy $\|f\| \leq \|x_0\|$. Na druhé straně $|f(x_0)| = \|x_0\|^2$, a proto $\|f\| = \|x_0\|$. Tím je věta zcela dokázána. □

Poznámka 4.4. Je zřejmé, že libovolné $x_0 \in H$ definuje lineární funkcionál f vzorcem (4.4). Protože $|f(x)| \leq \|x\| \cdot \|x_0\|$ pro $x \in H$ je tento funkcionál ohraničený a tedy vzhledem k Větě 3.18 spojitý. Proto zobrazení $f \longleftrightarrow x_0$ definuje izomorfizmus mezi prostory H a H^*.

4.2. Druhý adjungovaný prostor

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor. Pak už víme, že X^* je také normovaným prostorem a má smysl uvažovat X^{**} jako $(X^*)^*$. Prostor X^{**} se nazývá *druhý adjungovaný prostor* k prostoru X.

Všimněme si, že každý prvek $x_0 \in X$ určuje nějaký spojitý lineární funkcionál definovaný v prostoru X^*. Vskutku, položme

$$F_{x_0}(f) = f(x_0) \quad \text{pro} \quad f \in X^*.$$

Je zřejmé, že $F_{x_0} : X^* \to \mathbb{R}$ a tedy F_{x_0} je funkcionál definovaný v prostoru X^*. Protože

$$F_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = \alpha F_{x_0}(f) + \beta F_{x_0}(g),$$

je tento funkcionál lineární.

Ukažme, že F_{x_0} je spojitý v prostoru X^*. Opravdu, nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $U_{\frac{\varepsilon}{\|x_0\|}}$ je $\frac{\varepsilon}{\|x_0\|}-$ okolí bodu 0 v prostoru X^*, tj.

$$U_{\frac{\varepsilon}{\|x_0\|}} = \left\{ f \in X^* : \|f\| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \right\}.$$

Je zřejmé, že

$$|F_{x_0}(f)| = |f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad f \in U_{\frac{\varepsilon}{\|x_0\|}},$$

avšak to znamená, že F_{x_0} je spojitý v bodě 0 a tedy i v celém prostoru X^*.

Tato konstrukce dává zobrazení prostoru X do prostoru X^{**}, které nazýváme *přirozené zobrazení* a značíme π, tj.

$$\pi : X \to X^{**}.$$

Vzhledem k Důsledku 3.24 pro libovolné $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existuje funkcionál $f \in X^*$ takový, že $f(x_1) \neq f(x_2)$, tj. podle definice přirozeného zobrazení $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ a tedy zobrazení π je prosté.

Definice 4.2. Prostor X se nazývá *reflexivní*, jestliže $\pi(X) = X^{**}$ a π je spojité.

Tvrzení 4.4. *Přirozené zobrazení π normovaného prostoru X do prostoru X^{**} je izometrické.*

Důkaz. Nechť $x \in X$ libovolné (pevné). Ukážeme, že

$$\|\pi(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X . \tag{4.6}$$

Jestliže $x = 0$, pak (4.6) zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $x \neq 0$.

Nechť $f \in X^*$ a $f \neq 0$. Pak $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|_X$, a tedy

$$\|x\|_X \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \frac{|\pi(x)(f)|}{\|f\|} .$$

Odtud dostaneme

$$\|\pi(x)\|_{X^{**}} = \sup\left\{\frac{|\pi(x)(f)|}{\|f\|} : f \in X^*,\ f \neq 0\right\} \leq \|x\|_X\,. \tag{4.7}$$

Nyní naopak. Podle Hahn–Banachovy věty lze k danému x najít funkcionál $f_0 \in X^*$ takový, že

$$|f_0(x)| = \|f_0\|\,\|x\|_X\,.$$

K tomu stačí na prostoru $X_0 = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ definovat lineární ohraničený funkcionál f_x vztahem $f_x(\lambda x) = \lambda$ pro $\lambda \in \mathbb{R}$, a pak tento funkcionál prodloužit na f_0 definovaný v celém prostoru X (se zachováním normy). Proto

$$\|x\|_X = \frac{|\pi(x)(f_0)|}{\|f_0\|} \leq \sup\left\{\frac{|\pi(x)(f)|}{\|f\|} : f \in X^*,\ f \neq 0\right\} = \|\pi(x)\|_{X^{**}}\,,$$

což spolu s (4.7) dává rovnost (4.6). Vzhledem k libovolnosti $x \in X$ je věta dokázána. □

Tvrzení 4.5. *Každý reflexivní normovaný prostor je úplný.*

Důkaz. Plyne přímo z Věty 4.1 a Tvrzení 4.4. □

■ **Příklad 4.5.**

a) Euklidovský prostor E je reflexivní.

b) Hilbertův prostor H je reflexivní.

c) Prostor $C_0 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}$ pro $i \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = 0\}$ s normou $\|x\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$ je úplný prostor, ale není reflexivní, protože $C_0^* \sim l_1$ a $l_1^* \sim m$ (kde m je prostor z Příkladu 4.3).

d) Prostor $C([a,b])$ není reflexivní.

e) Nechť $X = l_p$, $p > 1$, $p \neq 2$. Pak víme z Příkladu 4.4, že $X^{**} = l_q^* = l_p$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prostor l_p je reflexivní, ale $X \neq X^*$.

4.3. Slabá konvergence, Banach–Steinhausova věta

Definice 4.3. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *slabě konverguje* k prvku $x_0 \in X$, jestliže pro libovolný $f \in X^*$ posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje k $f(x_0)$.

Poznámka 4.5. Silnou konvergencí nazýváme konvergenci ve smyslu normy.

Věta 4.6. *Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ je slabě konvergentní posloupnost. Pak existuje $C > 0$ tak, že*

$$\|x_n\| \leq C \quad \textit{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Proveďme nejprve následující úvahu. Nechť je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ slabě ohraničená v kouli $B[f_0, \varepsilon] \subset X^*$, tj. nechť množina

$$\big\{|f(x_n)| : f \in B[f_0, \varepsilon],\ n \in \mathbb{N}\big\} \subset \mathbb{R}$$

je ohraničená. Pak je tato posloupnost slabě ohraničená také v kouli $B[0,\varepsilon] \subset X^*$ (ve stejném smyslu). Vskutku, jestliže $g \in B[0,\varepsilon]$, pak $f_0+g \in B[f_0,\varepsilon]$ a $g(x_n) = (f_0+g)(x_n) - f_0(x_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Vzhledem ke slabé konvergenci posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost $\{f_0(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená, a tedy i posloupnost $\{g(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ je ohraničená. Avšak jestliže

$$|g(x_n)| \le c \quad \text{pro} \quad g \in B[0,\varepsilon],\ n \in \mathbb{N},$$

pak, vzhledem k izometrii přirozeného zobrazení π, je

$$\|x_n\| \le \frac{c}{\varepsilon} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N},$$

tj. posloupnost $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{+\infty}$ je ohraničená.

Nyní již přistupme k důkazu věty. Předpokládejme sporem, že posloupnost $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{+\infty}$ není ohraničená. Pak, vzhledem k předchozím úvahám, je zřejmé, že není posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ slabě ohraničená v žádné kouli prostoru X^*.

Mějme nějakou kouli $B_0 \subset X^*$. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ a $f_0 \in B_0$ tak, že

$$|f_0(x_{n_1})| > 1.$$

Odtud, s ohledem na spojitost funkcionálu $\pi(x_{n_1}) \in X^{**}$, plyne existence uzavřené koule $B_1 \subseteq B_0$ splňující

$$|f(x_{n_1})| > 1 \quad \text{pro} \quad f \in B_1\,.$$

Stejně lze ukázat, že existují $n_2 > n_1$ a uzavřená koule $B_2 \subseteq B_1$ splňující

$$|f(x_{n_2})| > 2 \quad \text{pro} \quad f \in B_2\,.$$

Obecně, ke každému $k \in \mathbb{N}$ najdeme $n_k \in \mathbb{N}$ a uzavřenou kouli $B_k \subset X^*$ tak, že $n_k > n_{k-1}$, $B_k \subseteq B_{k-1}$ a

$$|f(x_{n_k})| > k \quad \text{pro} \quad f \in B_k\,.$$

Navíc lze bez újmy na obecnosti předpokládat že poloměry koulí B_k konvergují k nule pro $k \to +\infty$. Protože je prostor X^* úplný (viz Věta 4.1), existuje $\widetilde{f} \in \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} B_k$ (viz Věta 1.14). Odtud ale plyne

$$\left|\widetilde{f}(x_{n_k})\right| > k \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N},$$

což je ve sporu se slabou konvergencí posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. □

Poznámka 4.6. Při důkazu ohraničenosti posloupnosti $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{+\infty}$ v předchozí větě jsme vycházeli pouze z toho, že posloupnost hodnot $\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ je ohraničená pro každé $f \in X^*$. Platí tedy následující tvrzení.

Tvrzení 4.7. *Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ je taková, že $\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ je ohraničená pro každé $f \in X^*$. Pak existuje takové $C > 0$, že $\|x_n\| \le C$ pro $n \in \mathbb{N}$.*

Věta 4.8 (Banach–Steinhausova). *Každá slabě ohraničená podmnožina $A \subseteq X$ je ohraničená silně.*

Důkaz. Připusťme, že existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset A$ taková, že $\|x_n\| \to +\infty$ pro $n \to +\infty$. Poněvadž je množina A slabě ohraničená, je také slabě ohraničená posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, tj. ke každému $f \in X^*$ existuje $K > 0$ takové, že $|f(x_n)| \le K$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak ale vzhledem k Tvrzení 4.7 dostáváme spor s podmínkou $\|x_n\| \to +\infty$. □

Poznámka 4.7. Předchozí věta se někdy také nazývá *princip stejnoměrné ohraničenosti.*

Poznámka 4.8. Jelikož rozumíme slabou ohraničeností množiny $A \subseteq X$ v prostoru X fakt, že je v množině A ohraničený libovolný spojitý funkcionál, platí následující tvrzení.

Tvrzení 4.9. *K tomu, aby podmnožina $A \subseteq X$ byla ohraničená je nutné a stačí, aby v množině A byl ohraničený libovolný funkcionál $f \in X^*$.*

Věta 4.10. *Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ slabě konverguje k prvku $x \in X$, jestliže*

1. *$\{\|x_n\|\}_{n=1}^{+\infty}$ je ohraničená posloupnost,*
2. *$f(x_n) \to f(x)$ pro každé $f \in \Delta$, kde $\Delta \subseteq X^*$ je nějaká množina, jejíž lineární obal je hustý v prostoru X^*.*

Důkaz. Z podmínky 2 plyne, že jestliže je φ_0 lineární kombinací prvků množiny Δ, pak $\varphi_0(x_n) \to \varphi_0(x)$ pro $n \to +\infty$.

Nechť nyní $\varphi \in X^*$ libovolné. Ukažeme, že $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pro $n \to +\infty$. Vskutku, jelikož je lineární obal množiny Δ hustý v prostoru X^*, existuje posloupnost $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ lineárních kombinací prvků množiny Δ konvergující k φ. Nechť $M > 0$ je konstanta splňující

$$\|x_n\| \leq M \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \|x\| \leq M.$$

Protože $\varphi_k \to \varphi$ pro $k \to +\infty$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\|\varphi_k - \varphi\| \leq \varepsilon \quad \text{pro} \quad k \geq n_\varepsilon \, .$$

Proto pro $k \geq n_\varepsilon$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| &\leq |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leq \\ &\leq \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + \varepsilon M. \end{aligned}$$

Avšak předpokládáme, že $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(x)$ pro $n \to +\infty$, a tedy z poslední nerovnosti plyne $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pro $n \to +\infty$. □

■ **Příklad 4.6.** V euklidovském prostoru E konečné dimenze je slabá konvergence totožná se silnou konvergencí.

Vskutku, nechť $e_1, e_2, \ldots, e_n$ je ortogonální báze v prostoru E a $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq E$ nějaká posloupnost, která slabě konverguje k prvku $x \in E$. Nechť

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= x_1^{(k)} e_1 + x_2^{(k)} e_2 + \ldots + x_n^{(k)} e_n, \\ x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n. \end{aligned}$$

Definujme $f_i \in E^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ jako $f_i(x) = (x \cdot e_i)$ pro $x \in E$. Poněvadž $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ slabě konverguje k bodu x, pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\lim_{k \to +\infty} f_i(x^{(k)}) = f_i(x) \Longleftrightarrow \lim_{k \to +\infty} x_i^{(k)} = x_i.$$

Potom však

$$\|x^{(k)} - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_i\right)^2} \to 0 \text{ pro } k \to +\infty,$$

tj. posloupnost $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ konverguje v silném smyslu k x.

Na druhé straně ze silné konvergence vždy plyne slabá konvergence.

■ **Příklad 4.7.** V prostoru l_2 platí tvrzení: *K tomu, aby silně ohraničená posloupnost $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty} \subset l_2$ slabě konvergovala k prvku $x \in l_2$ stačí, aby byla splněna podmínka*

$$(x^{(k)} \cdot e_i) = x_i^{(k)} \to x_i = (x \cdot e_i) \quad \textit{pro } i = 1, 2, \ldots,$$

kde $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$.

Vskutku, množina všech lineárních kombinací prvků $e_1, e_2, \ldots$ je hustá v prostoru l_2. Vzhledem k tomu, že $l_2^* = l_2$, plyne naše tvrzení z Věty 4.10. Jinak řečeno v prostoru l_2 je slabá konvergence totožná s konvergencí po souřadnicích (samozřejmě je-li splněna podmínka ohraničenosti).

Nyní ukážeme, že v prostoru l_2 slabá konvergence není totožná se silnou konvergencí.

Vskutku, posloupnost $e_1, e_2, \ldots$ slabě konverguje k 0, protože každý lineární funkcionál $f \in l_2^*$ má tvar $f(x) = (x \cdot a)$, kde $a \in l_2$, tj. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 < +\infty$ a tedy $a_k \to 0$ pro $k \to +\infty$. Proto $f(e_i) = a_i \to 0$ pro $i \to +\infty$ a tedy posloupnost $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ slabě konverguje k 0. Avšak v silném smyslu posloupnost $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ nekonverguje.

■ **Příklad 4.8.** Uvažujme prostor $C([a, b])$. Nechť posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C([a, b])$ je ohraničená v normě prostoru $C([a, b])$. Je zřejmé, že $f_{t_0}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x(t_0)$ pro $x \in C([a, b])$ je funkcionál v $C([a, b])$. Podmínka

$$\lim_{k\to+\infty} f_{t_0}(x_k) = f_{t_0}(x)$$

znamená, že

$$\lim_{k\to+\infty} x_k(t_0) = x(t_0).$$

Tedy jestliže posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ slabě konverguje, pak:

i) je stejnoměrně ohraničená, tj. $|x_n(t)| \le C$ pro $t \in [a, b]$ a $n \in \mathbb{N}$,

ii) konverguje v každém bodě intervalu $[a, b]$.

Lze také dokázat, že tyto podmínky jsou nejen nutné, nýbrž i postačující pro slabou konvergenci posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Jinými slovy, slabá konvergence v prostoru $C([a, b])$ je totožná s bodovou konvergencí (za podmínky ohraničenosti).

▶ **Úloha 4.2.** Uveďte příklad toho, že v $C([a, b])$ slabá konvergence není totožná s konvergencí podle normy.

4.4. Slabá konvergence a ohraničené množiny v adjungovaném prostoru

Definice 4.4. Posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X^*$ se nazývá *slabě konvergentní k funkcionálu* $\varphi \in X^*$, jestliže pro každý prvek $x \in X$ platí

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

Poznámka 4.9. Je zřejmé, že posloupnost konvergující silně, konverguje i slabě.

Věta 4.11. *Nechť X je Banachův prostor a $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X^*$ je slabě konvergentní posloupnost funkcionálů. Pak existuje takové $C > 0$, že*

$$\|f_n\| \leq C \quad \textit{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Provede se podobně jako důkaz Věty 4.6. □

Analogicky k Větě 4.10 platí.

Věta 4.12. *Nechť X je Banachův prostor. Posloupnost lineárních funkcionálů $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ slabě konverguje k funkcionálu $\varphi \in X^*$, jestliže*

1. *posloupnost norem $\{\|\varphi_n\|\}_{n=1}^{+\infty}$ je ohraničená,*
2. *$\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pro všechna $x \in A$, kde $A \subseteq X$ je taková množina, že lineární kombinace z jejích prvků tvoří množinu hustou v prostoru X.*

Věta 4.13. *Nechť X je separabilní normovaný prostor. Pak každá ohraničená (podle normy) posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X^*$ obsahuje slabě konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $\{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ je hustá v prostoru X. Jelikož je posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená podle normy, je také posloupnost $\{\varphi_n(x_1)\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená. Proto lze z posloupnosti $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ vybrat podposloupnost

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots$$

takovou, že posloupnost

$$\varphi_1^{(1)}(x_1), \varphi_2^{(1)}(x_1), \dots, \varphi_n^{(1)}(x_1), \dots$$

konverguje. Stejně tak lze z posloupnosti $\{\varphi_n^{(1)}\}_{n=1}^{+\infty}$ vybrat podposloupnost

$$\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(2)}, \dots$$

takovou, že posloupnost

$$\varphi_1^{(2)}(x_2), \varphi_2^{(2)}(x_2), \dots, \varphi_n^{(2)}(x_2), \dots$$

konverguje. Pokračujeme-li dále stejným způsobem, dostaneme systém posloupností

$$\begin{gathered}
\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots \\
\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(2)}, \dots \\
\vdots \\
\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \dots, \varphi_n^{(n)}, \dots \\
\vdots
\end{gathered}$$

takový že posloupnost $\{\varphi_n^{(k)}\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje v bodech $x_1, x_2, \dots, x_k$. Vezmeme nyní tzv. diagonální posloupnost

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(n)}, \dots .$$

Tato posloupnost konverguje v každém bodě množiny $\{x_1, x_2, \dots\}$. Poněvadž je tato množina hustá v prostoru X, je podle Věty 4.12 posloupnost $\{\varphi_k^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ slabě konvergentní. Tím je věta dokázána. □

5. Lineární operátory

5.1. Definice a příklady

Definice 5.1. Nechť X a Y jsou lineární prostory. Zobrazení $A : X \to Y$, vyhovující podmínce

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$$

pro každé $x, y \in X$ a skaláry λ, μ, se nazývá *lineární operátor.*

Definice 5.2. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou dva normované prostory. Operátor $A : X \to Y$ se nazývá *spojitý*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že z nerovnosti $\|x - y\|_X < \delta$ $(x, y \in X)$ plyne nerovnost $\|Ax - Ay\|_Y < \varepsilon$.

■ **Příklad 5.1.**

a) Nechť E je lineární prostor a $I : E \to E$ j zobrazení definované rovností $Ix \overset{\text{def}}{=} x$ pro $x \in E$. Je zřejmé, že I je lineárním operátorem. Jestliže E je normovaný prostor, pak je operátor I spojitý. Tento operátor nazýváme *jednotkovým* (*identickým*) *operátorem.*

b) Nechť X, Y jsou lineární prostory. Operátor $O : x \to Y$ definovaný rovností $Ox \overset{\text{def}}{=} 0$ pro $x \in X$ je lineárním operátorem. Tento operátor nazýváme *nulovým operátorem.*

c) Nechť $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární operátor. Nechť dále $e_1, \ldots, e_n$ je báze v prostoru $\mathbb{R}^n$ a $f_1, \ldots, f_m$ je báze v prostoru $\mathbb{R}^m$. Je zřejmé, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Vzhledem k tomu, že A je lineární operátor, máme

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i\,. \tag{5.1}$$

Na druhé straně je zřejmé, že

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Z (5.1) a (5.2) plyne

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k\,.$$

Jinak řečeno operátor A lze ztotožnit s maticí $(a_{ki})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,m}}$. Poznamenejme, že každý lineární operátor definovaný v prostoru konečné dimenze je automaticky spojitý.

d) Nechť H je Hilbertův prostor a $H_1 \subset H$ nějaký jeho podprostor. Víme, že platí vyjádření $H = H_1 \oplus H_1^\perp$, tj. každý prvek $x \in H$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$x = x_1 + x_2\,, \quad \text{kde} \quad x_1 \in H_1, x_2 \in H_1^\perp.$$

Položme $Px = x_1$ pro $x \in H$. Tento operátor se nazývá *operátorem ortogonální projekce* nebo *projektorem.* Snadno lze ověřit jeho lineárnost a spojitost.

e) Uvažujme lineární prostor $C([a,b])$ a definujme operátor $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ vztahem
$$T(f)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b k(t,s)f(s)\mathrm{d}s \quad \text{pro} \quad f \in C([a,b]),$$
kde $k \in C([a,b] \times [a,b])$. Zřejmě $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ je lineární operátor.

   i) Zavedeme–li v prostoru $C([a,b])$ normu $\|f\| = \max\{|f(t)| : a \le t \le b\}$, pak T bude spojitý operátor.

   ii) Zavedeme–li v prostoru $C([a,b])$ normu $\|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(s)\mathrm{d}s}$, pak T bude spojitý operátor.

f) Nechť $C([a,b])$, $T(f)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(t)f(t)$, $\alpha \in C([a,b])$. Pak T bude lineární spojitý operátor.

g) Nechť $C([a,b])$, $D(f)(t) \stackrel{\text{def}}{=} f'(t)$. Pak D bude lineární operátor, který se nazývá *diferenciální operátor*. Ukážeme, že tento operátor není spojitý. Vskutku, nechť $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin t$. Je zřejmé, že $\|f_n\|_C \to 0$. Na druhé straně $D(f_n)(t) = \cos nt$ a tato posloupnost nekonverguje.

h) Nechť $C'([a,b])$, $D(f)(t) = f'(t)$,
$$\|f\|_{C'} = \max\{|f(t)| : t \in [a,b]\} + \max\{|f'(t)| : t \in [a,b]\}.$$
Pak D bude spojitý lineární operátor.

5.2. Spojitost a ohraničenost

Definice 5.3. Lineární operáror $T : X \to Y$ se nazývá *ohraničený*, jestliže je definován v celém prostoru X a každou ohraničenou množinu zobrazuje do ohraničené množiny.

Věta 5.1. *Každý spojitý lineární operátor je ohraničený.*

Důkaz. Připusťme opak, nechť operátor T není ohraničený. Pak vzhledem k jeho linearitě existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ taková, že
$$\|x_n\|_X \le c \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}$$
a
$$\|Tx_n\|_Y > n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$
Poněvadž je operátor T spojitý, existuje $\delta \in \,]0,1[$ takové, že pro každé $x \in X$ splňující $\|x\|_X < \delta$ platí $\|Tx\|_Y \le 1$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ vyhovující nerovnosti $c < \delta n_0$. Pak
$$\frac{\|x_n\|_X}{n} < \delta \quad \text{pro} \quad n > n_0\,,$$
odkud, vzhledem k linearitě operátoru T a výše ukázanému, dostaneme
$$\|Tx_n\|_Y \le n \quad \text{pro} \quad n > n_0\,,$$
což je ve sporu s (5.3). Tím je věta dokázána. □

Věta 5.2. *Nechť X, Y jsou normované prostory a nechť $T : X \to Y$ je lineární ohraničený operátor. Pak je operátor T spojitý.*

Důkaz. Připusťme opak, nechť operátor T není spojitý. Pak vzhledem k jeho linearitě existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ tak, že

$$\|x_n\|_X < \frac{1}{n}\,, \quad \|Tx_n\|_Y \geq \varepsilon \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Položme $y_n = nx_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ je ohraničená, avšak posloupnost obrazů $\{Ty_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset Y$ ohraničená není, neboť $\|Ty_n\|_Y \geq n\varepsilon$ pro $n \in \mathbb{N}$. Proto není operátor T ohraničený, což je ve sporu s předpokladem věty. □

Definici ohraničenosti můžeme (vzhledem k linearitě T) přeformulovat v ekvivalentním tvaru a přesněji: Lineární operátor T se nazývá *ohraničený*, jestliže existuje číslo $c > 0$ takové, že pro libovolné $x \in X$ platí nerovnost

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X. \tag{5.4}$$

Definice 5.4. Nechť $T : X \to Y$ je lineární ohraničený operátor. Pak (jak už bylo řečeno) existuje kladné číslo c, pro které je splněna nerovnost (5.4). Číslo $\inf\{c : \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \text{ pro } x \in X\}$ nazýváme *normou operátoru* T a značíme $\|T\|$.

Věta 5.3. *Nechť $T : X \to Y$ je lineární ohraničený operátor. Pak platí*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y, \qquad \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Důkaz. Označme $\lambda = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$. Všimněme si nejprve, že vzhledem k linearitě operátoru T platí

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\,.$$

Proto je zřejmé, že

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \lambda \quad \text{pro} \quad x \neq 0.$$

Odtud $\|Tx\|_Y \leq \lambda\|x\|_X$ pro $x \in X$, a tedy podle definice normy operátoru je

$$\|T\| \leq \lambda. \tag{5.5}$$

Nyní naopak. Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $x_\varepsilon \in X$ takové, že $x_\varepsilon \neq 0$ a

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{\|Tx_\varepsilon\|_Y}{\|x_\varepsilon\|_X}\,.$$

Na druhé straně však platí $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\,\|x\|_X$ pro $x \in X$, proto s ohledem na poslední nerovnost dostáváme

$$\lambda - \varepsilon \leq \|T\|.$$

Odtud, vzhledem k libovolnosti ε, plyne $\lambda \leq \|T\|$. Tato nerovnost spolu s (5.5) již dokazuje tvrzení věty. □

Nechť X a Y jsou normované prostory. Označme jako $L(X,Y)$ množinu spojitých lineárních operátorů T definovaných v celém prostoru X. Přirozeně lze definovat součet dvou operátorů $A, B \in L(X,Y)$ vztahem

$$(A+B)x = Ax + Bx \quad \text{pro} \quad x \in X,$$

a také součin operátoru $A \in L(X,Y)$ a skaláru k vztahem

$$(kA)x = k\,Ax \quad \text{pro} \quad x \in X.$$

Vzhledem k těmto operacím tvoří zřejmě $L(X,Y)$ lineární prostor. Tento prostor je normovaným prostorem s normou operátoru, kterou jsme zavedli výše.

5.3. Invertovatelnost

Definice 5.5. Nechť $T : X \to Y$. Označme

$$E(T) = \{y \in Y : \exists x \in X,\ Tx = y\}.$$

Operátor T se nazývá *invertovatelný*, jestliže pro libovolné $y \in E(T)$ existuje právě jeden prvek $x \in X$ splňující rovnost

$$Tx = y.$$

Poznámka 5.1. Jestliže je operátor T invertovatelný, pak každému prvku $y \in E(T)$ lze přiřadit jediný prvek $x \in X$, který splňuje $Tx = y$. Toto přiřazení pak nazýváme *inverzní operátor* k operátoru T a značíme T^{-1}.

Věta 5.4. *Operátor inverzní k lineárnímu operátoru je také lineární.*

Důkaz. Nechť $y_1, y_2 \in E(T)$. Pak existují $x_1, x_2 \in X$ takové, že

$$Tx_1 = y_1, \qquad Tx_2 = y_2\,.$$

Jelikož je operátor T lineární, platí

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2\,.$$

Odtud

$$T^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda\, T^{-1} y_1 + \mu\, T^{-1} y_2\,.$$

□

Věta 5.5 (Banachova věta o inverzním operátoru)**.** *Nechť T je lineární ohraničený operátor, který bijektivně zobrazuje Banachův prostor X na Banachův prostor Y. Pak operátor T^{-1} je také ohraničený.*

Nechť X a Y jsou Banachovy prostory. Označme jako $\widetilde{L}(X,Y)$ množinu lineárních ohraničených operátorů T zobrazujících X na celý prostor Y a majících ohraničený inverzní operátor.

Věta 5.6. *Nechť $T \in \widetilde{L}(X,Y)$ a $A \in L(X,Y)$ takový, že*

$$\|A\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}\,. \tag{5.6}$$

Pak $(T+A)^{-1}$ existuje a je ohraničený, tj.

$$T + A \in \widetilde{L}(X,Y).$$

Důkaz. Nechť $y \in Y$ je libovolný. Zaveďme operátor $B : X \to X$ vztahem

$$Bz = -T^{-1}Az + T^{-1}y \quad \text{pro} \quad z \in X.$$

Z podmínky (5.6) plyne, že B je kontrakce. Protože je proxtor X úplný, existuje jediný pevný bod $x \in X$ zobrazení B, tj.

$$x = Bx = -T^{-1}Ax + T^{-1}y\,.$$

Odtud dostáváme

$$Tx + Ax = y.$$

Všimněme si ještě, že jakmile $Tx' + Ax' = y$ pro $x' \in X$, pak je x' pevným bodem zobrazení B, a proto $x' = x$. Operátor $T + A$ je tedy invertovatelný a inverzní operátor je definovaný v celém prostoru Y. Z Banachovy věty o inverzním operátoru pak plyne $T + A \in \widetilde{L}(X, Y)$. $\square$

Poznámka 5.2. Podle Věty 5.6 množina $\widetilde{L}(X, Y)$ je otevřená v prostoru $L(X, Y)$.

Věta 5.7. *Nechť X je Banachův prostor, I je identický operátor a $T \in L(X, X)$, přičemž $\|T\| < 1$. Pak existuje $(I - T)^{-1}$, je ohraničený a platí*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k. \tag{5.7}$$

Důkaz. Existence a ohraničenost operátoru $(I - T)^{-1}$ plyne z Věty 5.6. Dokážeme platnost rovnosti (5.7). Protože $\|T\| < 1$, platí

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|T^k\| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}\ ,$$

tj. nekonečná řada $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|T^k\|$ konverguje. Prostor X je úplný, proto platí $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} T^k \in L(X, X)$, neboť $\sum\limits_{k=0}^{n} \|T^k\| \to \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|T^k\|$ pro $n \to +\infty$.

Dále pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ máme

$$(I - T) \sum_{k=0}^{n} T^k = I - T^{n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} T^k (I - T) = I - T^{n+1}.$$

Přejdeme-li v posledních rovnostech k limitě pro $n \to +\infty$ a uvážíme-li, že $\|T^n\| \le \|T\|^n \to 0$, dostaneme

$$(I - T) \sum_{k=0}^{+\infty} T^k = I, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} T^k (I - T) = I.$$

Odtud již plyne platnost rovnosti (5.7). $\square$

5.4. Adjungované operátory

Definice 5.6. Nechť X a Y jsou normované prostory a $T \in L(X, Y)$. Nechť dále $g \in Y^*$, tj. $g : Y \to \mathbb{R}$ je spojitý lineární funkcionál. Lehce lze ověřit, že funkcionál $g \circ T : X \to \mathbb{R}$ je také spojitý, tj. $f = g \circ T \in X^*$. Tímto způsobem jsme každému prvku g prostoru Y^* přiřadili prvek f prostoru X^*, tj. dostali jsme operátor, který zobrazuje prostor Y^* do prostoru X^*. Tento operátor se nazývá *adjungovaným operátorem* k operátoru T a značí se T^*.

Jestliže hodnoty funkcionálu f v prvku x označíme jako (x, f), dostaneme $(x, f) = (Tx, g)$, nebo-li

$$(Tx, g) = (x, T^* g).$$

Z Definice 5.6 ihned plynou následující vlastnosti adjungovaných operátorů:

1. T^* je lineární.
2. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.
3. $(\lambda T)^* = \lambda T^*$.
4. Jestliže T je spojitý operátor, pak T^* je také spojitý.

Věta 5.8. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Důkaz. Je zřejmé, že

$$|(T^* g, x)| = |(g, Tx)| \le \|g\| \, \|Tx\| \le \|g\| \, \|T\| \, \|x\| \quad \text{pro} \quad x \in X, \ g \in Y^*.$$

Odtud

$$\|T^* g\| \le \|g\| \, \|T\| \quad \text{pro} \quad g \in Y^*,$$

a tedy

$$\|T^*\| \le \|T\|. \tag{5.8}$$

Nyní naopak. Nechť $x \in X$, $Tx \neq 0$. Položme

$$y_0 = \frac{Tx}{\|Tx\|} \, .$$

Podle Hahn–Banachovy věty existuje funkcionál $g_x \in Y^*$ takový, že

$$\|g_x\| = 1, \qquad (y_0, g_x) = 1,$$

tj. $(Tx, g_x) = \|Tx\|$. Pak

$$\|Tx\| = (Tx, g_x) = |(x, T^* g_x)| \le \|T^* g_x\| \, \|x\| \le \|T^*\| \, \|g_x\| \, \|x\| = \|T^*\| \, \|x\|.$$

Ukázali jsme tedy, že

$$\|Tx\| \le \|T^*\| \, \|x\| \quad \text{pro} \quad x \in X.$$

Proto $\|T\| \le \|T^*\|$, což spolu s (5.8) dokazuje požadovanou rovnost. □

5.5. Adjungovaný operátor v unitárním prostoru

Nechť H je Hilbertův prostor a $A : H \to H$ je lineární ohraničený operátor. Jak víme, zobrazení $\tau : H \to H^*$ definované rovností

$$(\tau y)(x) = (x \cdot y)$$

je izomorfismus. Nechť dále $A^* : H^* \to H^*$ je adjungovaný operátor k operátoru A. Je zřejmé, že zobrazení $\widetilde{A}^* = \tau^{-1} A^* \tau : H \to H$ je také lineárním operátorem. Lehce lze ověřit, že

$$(Ax \cdot y) = (x \cdot \widetilde{A}^* y).$$

Protože $\|A^*\| = \|A\|$ a zobrazení τ a τ^{-1} jsou izometrická, platí $\|\widetilde{A}^*\| = \|A^*\|$.

Definice 5.7. Operátor $\widetilde{A}^*$ se nazývá *adjungovaný k operátoru* A.

Poznámka 5.3. Pro zjednodušení budeme místo $\widetilde{A}^*$ používat symbol A^*.

Poznámka 5.4. Je zřejmé, že adjungovaný operátor lze definovat také následovně: Operátor $A^* : H \to H$ se nazývá *adjungovaným* k operátoru $A : H \to H$, jestliže pro všechna $x, y \in H$ platí rovnost

$$(Ax \cdot y) = (x \cdot A^* y).$$

Definice 5.8. Ohraničený lineární operátor $A : H \to H$ se nazývá *samoadjungovaný*, jestliže pro všechna $x, y \in H$ platí rovnost

$$(Ax \cdot y) = (x \cdot Ay).$$

Definice 5.9. Podprostor $H_1 \subset H$ se nazývá *invariantní vzhledem k operátoru* A, jestliže

$$x \in H_1 \Longrightarrow Ax \in H_1.$$

Tvrzení 5.9. *Nechť podprostor $H_1 \subset H$ je invariantní vzhledem k operátoru A. Pak $H_1^\perp$ je invariantní vzhledem k A^*.*

Důkaz. Nechť $y \in H_1^\perp$ libovolné. Pak dostáváme

$$(x \cdot A^* y) = (Ax \cdot y) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in H_1,$$

neboť $Ax \in H_1$. Proto $A^* y \in H_1^\perp$. □

5.6. Spektrum operátoru

Definice 5.10. Nechť $A : X \to X$ je lineární ohraničený operátor v Banachově prostoru X. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá *regulární hodnota operátoru* A, jestliže operátor $(A - \lambda I)^{-1}$ je definován v celém prostoru X (a tedy je ohraničený). Množina všech neregulárních hodnot se nazývá *spektrum operátoru* A. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá *vlastní hodnota operátoru* A, jestliže existuje $x \neq 0$, $x \in X$ takové, že

$$Ax = \lambda x.$$

Je zřejmé, že spektrum operátoru A obsahuje množinu vlastních hodnot.

Jinými slovy, λ je vlastní hodnotou operátoru A, jestliže neexistuje $(A - \lambda I)^{-1}$. Z definice spektra plyne, že zbývající část spektra je množina takových čísel $\lambda \in \mathbb{C}$, pro která operátor $(A - \lambda I)^{-1}$ existuje, ale není ohraničený. Tato množina se nazývá *spojitým spektrem.*

Na rozdíl od konečnědimenzionálního operátoru nekonečnědimenzionální operátor může mít spojité spektrum.

Tvrzení 5.10. *Množina regulárních hodnot lineárního ohraničeného operátoru v Banchově prostoru je otevřená, tedy spektrum (jako doplněk množiny regulárních hodnot) je uzavřená množina.*

Důkaz. Nechť λ je regulární hodnota operátoru A. Pak $A - \lambda I \in \widetilde{L}(X, X)$. Nechť δ splňuje

$$|\delta| < \frac{1}{\|(A - \lambda I)^{-1}\|} .$$

Pak podle Věty 5.6 je $A - (\lambda + \delta)I \in \widetilde{L}(X, X)$, a tedy $\lambda + \delta$ je regulární hodnota operátoru A. Množina regulárních hodnot je proto otevřená. □

Definice 5.11. Nechť λ je regulární hodnota operátoru A. Pak existuje operátor $(A - \lambda I)^{-1}$. Tento operátor budeme nazývat *rezolventa* operátoru A a budeme ho označovat R_λ.

Věta 5.11. *Nechť $A : X \to X$ je ohraničený lineární operátor a nechť $|\lambda| > \|A\|$. Pak λ je regulární hodnota operátoru A.*

Důkaz. Jelikož $\|A\| < |\lambda|$, pak, vzhledem k Větě 5.7, operátor

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1}$$

existuje a je ohraničený. Proto je λ je regulární hodnota operátoru A. □

■ **Příklad 5.2.**

a) Nechť $A : C([a, b]) \to C([a, b])$ je operátor definovaný vztahem

$$Ax(t) \stackrel{\text{def}}{=} tx(t) \quad \text{pro} \quad t \in [a, b].$$

Pak $(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t)$ pro $t \in [a, b]$. Pro libovolné λ je operátor $A - \lambda I$ invertovatelný, poněvadž z rovnosti $(t - \lambda)x(t) = 0$ pro $t \in [a, b]$ plyne $x \equiv 0$. Avšak pro $\lambda \in [a, b]$ není inverzní operátor $(A - \lambda I)^{-1}$, definovaný vztahem

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t - \lambda}x(t) \quad \text{pro} \quad t \in [a, b],$$

ohraničený. Tedy spektrum operátoru A je $[a, b]$.

b) Nechť $A : l_2 \to l_2$, $A : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$. Operátor A^{-1} je ohraničený, ale je definovaný jen na vlastním podprostoru prostoru l_2, tj. bod $\lambda = 0$ je bodem spektra.

5.7. Kompaktní operátory

Definice 5.12. Nechť Xa Y jsou Banachovy prostory. Operátor $T : X \to Y$ se nazývá *kompaktní* (*totálně spojitý*), jestliže každou ohraničenou množinu v X zobrazí na prekompaktní množinu v Y.

Poznámka 5.5. V normovaném prostoru konečné dimenze je každý lineární operátor kompaktní.

Poznámka 5.6. Identický operátor v Hilbertově prostoru není kompaktní.

■ **Příklad 5.3.**

a) Nechť X je Banachův prostor a Y je normovaný prostor konečné dimenze. Pak libovolný spojitý operátor $T : X \to Y$ je kompaktní.

b) Nechť $T : l_2 \to l_2$ je definované přiřazením

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \longmapsto \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{2^n}x_n, \ldots\right).$$

Pak T je kompaktní operátor.

c) Operátor $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ definovaný vztahem

$$(Tx)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s \quad \text{pro} \quad t \in [a,b],$$

kde $K \in C([a,b] \times [a,b])$, je kompaktní. Tento operátor se nazývá *operátor Volterovského typu.*

Lemma 5.12. *Nechť X je normovaný prostor a $x_1, x_2, \ldots$ jsou lineárně nezávislé prvky z X. Nechť X_n je prostor vytvořený prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom existuje posloupnost $y_1, y_2, \ldots$, která splňuje tyto vlastnosti:*

1. $\|y_n\| = 1$ *pro* $n \in \mathbb{N}$,
2. $y_n \in X_{n+1}$ *pro* $n \in \mathbb{N}$,
3. $\inf\Big\{\|y_n - z\| : z \in X_n\Big\} > \frac{1}{2}$ *pro* $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Plyne přímo z Rieszova lemma 2.3. □

Tvrzení 5.13. *Nechť $B[a,r]$ je uzavřená koule v nekonečnědimenzionálním normovaném prostoru X. Pak množina $B[a,r]$ není kompaktní.*

Důkaz. Vzhledem k Lemma 5.12 existuje posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ prvků prostoru X, která splňuje

$$\|y_n\| = 1 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N},$$

a ze které nelze vybrat posloupnost cauchyovskou. Položme

$$z_n = a + ry_n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost prvků koule $B[a,r]$, ze které nelze vybrat posloupnost cauchyovskou, a tedy $B[a,r]$ není kompaktní množina. □

Tvrzení 5.14. *Identický operátor v (nekonečnědimenzionálním) Banachově prostoru není kompaktní.*

Věta 5.15. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost lineárních kompaktních operátorů $T_n : X \to Y$ konvergujících podle normy k lineárnímu operátoru T. Pak T je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je ohraničená posloupnost prvků prostoru X. Dokážeme, že lze z posloupnosti $\{Tx_k\}_{k=1}^{+\infty}$ vybrat konvergentní podposloupnost.

Protože je operátor T_1 kompaktní, lze z posloupnosti $\{T_1x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ vybrat konvergentní podposloupnost

$$T_1x_1^{(1)}, T_1x_2^{(1)}, \dots .$$

Stejně tak lze z posloupnosti $\{T_2x_k^{(1)}\}_{k=1}^{+\infty}$ vybrat konvergentní podposloupnost

$$T_2x_1^{(2)}, T_2x_2^{(2)}, \dots .$$

Obecně, z posloupnosti $\{T_nx_k^{(n-1)}\}_{k=1}^{+\infty}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost

$$T_nx_1^{(n)}, T_nx_2^{(n)}, \dots .$$

Vezmeme diagonální posloupnost

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \dots .$$

Každý operátor T_k převádí tuto posloupnost v konvergentní. Ukážeme, že je konvergentní také posloupnost $\{Tx_n^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
&\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\|_Y \le \\
&\qquad \le \|Tx_n^{(n)} - T_kx_n^{(n)}\|_Y + \|T_kx_n^{(n)} - T_kx_m^{(m)}\|_Y + \|T_kx_m^{(m)} - Tx_m^{(m)}\|_Y \le \\
&\qquad\qquad \le \|T - T_k\|\,\|x_n^{(n)}\|_X + \|T_kx_n^{(n)} - T_kx_m^{(m)}\|_Y + \|T - T_k\|\,\|x_m^{(m)}\|_X .
\end{aligned}$$

Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Poněvadž je $\lim_{k\to+\infty} \|T - T_k\| = 0$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\|T - T_{k_0}\| < \varepsilon .$$

Dále z konvergence posloupnosti $\{T_{k_0}x_n^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\|T_{k_0}x_n^{(n)} - T_{k_0}x_m^{(m)}\|_Y < \varepsilon \quad \text{pro} \quad n \ge n_0,\ m \ge n_0 .$$

Posloupnost $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ je ohraničená, tj. existuje $C > 0$ splňující

$$\|x_n^{(n)}\|_X \le C \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proto z výše dokázané nerovnosti dosáváme

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\|_Y \le \varepsilon C + \varepsilon + \varepsilon C \quad \text{pro} \quad n \ge n_0,\ m \ge n_0 ,$$

tj. posloupnost $\{Tx_n^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ je cauchyovská. Vzhledem k úplnosti prostoru Y je však tato posloupnost také konvergentní. Tím je věta dokázána. □

Věta 5.16. *Nechť X je Banachův prostor, $A, B \in L(X,X)$, přičemž A je kompaktní. Pak AB[1] a BA jsou kompaktní.*

Důkaz. Nechť $M \subset X$ je ohraničená množina. Pak množina $B(M)$ je také ohraničená a vzhledem ke kompaktnosti operátoru A je množina $AB(M)$ prekompaktní.

Na druhé straně, množina $A(M)$ je prekompaktní a vzhledem ke spojitosti operátoru B je množina $BA(M)$ také prekompaktní. □

Důsledek 5.17. *Nechť X je Banachův prostor nekonečné dimenze a operátor $T : X \to X$ je lineární a kompaktní. Pak operátor T^{-1} není ohraničený.*

Věta 5.18. *Nechť X je Banachův prostor a operátor $T : X \to X$ je lineární a kompaktní. Pak operátor T^* je také kompaktní.*

Věta 5.19. *Nechť X je Banachův prostor a operátor $T : X \to X$ je lineární a kompaktní. Pak pro libovolné $\delta > 0$ existuje jen konečný počet lineárně nezávislých vlastních prvků příslušných vlastním hodnotám operátoru T, jejichž absolutní hodnota je větší než δ.*

Důkaz. Nechť $\delta > 0$ libovolné a nechť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost vlastních hodnot operátoru T taková, že

$$|\lambda_k| > \delta \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$

Nechť dále $x_1, x_2, \dots$ jsou jim odpovídající vlastní prvky a jsou lineárně nezávislé. Pak, vzhledem k Lemmatu 5.12, lze sestrojit posloupnost $y_1, y_2, \dots$ splňující

1. $\|y_n\| = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$,
2. $y_n \in X_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$,
3. $\inf\Big\{\|y_n - z\| : z \in X_n\Big\} > \frac{1}{2}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

kde X_k je prostor vytvořený z prvků $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Vzhledem k (5.9) je posloupnost $\{y_n/\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená. Ukážeme, že z posloupnosti $\{T(y_n/\lambda_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost. Vskutku, nechť $y_n \in X_n$, tj.

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,.$$

Pak

$$T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \lambda_k x_k + \alpha_n x_n = y_n + z_n \,,$$

kde

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k \,, \qquad z_n \in X_{n-1} \,.$$

Proto pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$, platí

$$\left\|T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right\| = \|y_n + z_n - y_m - z_m\| = \|y_n - (y_m + z_m - z_n)\| > \frac{1}{2} \,,$$

protože $y_m + z_m - z_n \in X_{n-1}$. Z posloupnosti $\{T(y_n/\lambda_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností operátoru T. □

[1] Poznamenejme, že součinem AB operátorů A a B rozumíme jejich složení (jako zobrazení), tj. $AB = A \circ B$.

Nechť H je Hilbertův prostor. Protože $H = H^*$, tj. H je prostor adjungovaný k separabilnímu prostoru, jsou v H ohraničeny jen ty množiny, které jsou slabě prekompaktní. V Hilbertově prostoru se operátor nazývá *kompaktní*, jestliže každou slabě konvergentní posloupnost zobrazí na silně konvergentní.

Věta 5.20. *Nechť $T : H \to H$ je samoadjungovaný operátor. Pak jeho vlastní hodnoty jsou reálné.*

Důkaz. Nechť $Tx = \lambda x$, $x \neq 0$. Pak

$$\lambda(x \cdot x) = (\lambda x \cdot x) = (Tx \cdot x) = (x \cdot Tx) = (x \cdot \lambda x) = \overline{\lambda}(x \cdot x),$$

odkud $\overline{\lambda} = \lambda$. □

Věta 5.21. *Nechť $T : H \to H$ je samoadjungovaný operátor. Pak jeho vlastní prvky odpovídající různým vlastním hodnotám jsou ortogonální.*

Důkaz. Nechť $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$ a $\lambda \neq \mu$. Pak

$$\lambda(x \cdot y) = (\lambda x \cdot y) = (Tx \cdot y) = (x \cdot Ty) = (x \cdot \mu y) = \overline{\mu}(x \cdot y) = \mu(x \cdot y),$$

odkud $(x \cdot y) = 0$. □

Věta 5.22 (Hilbert–Schmidtova)**.** *Nechť $T : H \to H$ je samoadjungovaný kompaktní operátor. Pak existuje ortonormální systém vlastních prvků $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ příslušných po řadě nenulovým vlastním hodnotám $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ takový, že každý prvek $x \in H$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\sum_k c_k \varphi_k + x',$$

kde $x' \in \ker T$. Jestliže systém $\{\varphi_k\}$ je nekonečný, pak

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = 0.$$

Věta 5.23 (Věta o pevném bodě)**.** *Nechť X je Banachův prostor a $T : X \to X$ je kompaktní (obecně nelineární) operátor zobrazující celý prostor X do jeho prekompaktní podmnožiny. Potom T má alespoň jeden pevný bod.*

6. Fredholmovy věty

6.1. Operátorové rovnice

Nechť H je Hilbertův prostor a $A : H \to H$ je lineární kompaktní operátor. Položme $T = I - A$, kde I značí identický operátor v H. Budeme uvažovat rovnici

$$Tx = f, \tag{6.1}$$

kde $f \in H$. Spolu s rovnicí (6.1) budeme uvažovat odpovídající homogenní rovnici

$$Tx = 0 \tag{6.2}$$

a dále k nim adjungované rovnice

$$T^* y = g, \tag{6.3}$$
$$T^* y = 0, \tag{6.4}$$

kde T^* je operátor adjungovaný k operátoru T, tj. $T^* = I - A^*$, a $g \in H$.

Naším cílem je dokázat následující, tzv. Fredholmovy, věty.

Věta 6.1 (Fredholmova alternativa). *Buď má rovnice* (6.1) *jediné řešení pro každé* $f \in H$, *nebo má homogenní rovnice* (6.2) *nenulové řešení.*

Věta 6.2. *Homogenní rovnice* (6.2) *a* (6.4) *mají stejný počet (a to konečný) lineárně nezávislých řešení.*

Věta 6.3. *Nehomogenní rovnice* (6.1) *je řešitelná právě pro ty prvky* $f \in H$, *které jsou ortogonální ke každému řešení adjungované homogenní rovnice* (6.4).

K důkazu těchto vět potřebujeme několik pomocných tvrzení, které však mají také samostatný význam.

Lemma 6.4. *Množina* $\operatorname{Im} T$ *je uzavřená v prostoru* H.

Důkaz. Neboť $\operatorname{Im} T \subseteq \overline{\operatorname{Im} T}$, k důkazu lemma stačí ukázat, že $\overline{\operatorname{Im} T} \subseteq \operatorname{Im} T$. Nechť $y \in \overline{\operatorname{Im} T}$ je libovolné. Ukážeme, že také $y \in \operatorname{Im} T$. Vskutku, vzhledem k Tvrzení 1.10, existuje posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ prvků množiny $\operatorname{Im} T$ taková, že

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = y. \tag{6.5}$$

To však znamená, že existují $x_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ splňující

$$y_n = Tx_n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.6}$$

Poněvadž je $\ker T$ podprostor prostoru H, platí, vzhledem k Poznámce 2.8, vyjádření

$$H = \ker T \oplus \big(\ker T\big)^{\perp}.$$

Proto existují $x_n^0 \in \ker T$ a $\overline{x}_n \in \big(\ker T\big)^{\perp}$ $(n \in \mathbb{N})$ taková, že

$$x_n = x_n^0 + \overline{x}_n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$y_n = T\overline{x}_n = \overline{x}_n - A\overline{x}_n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.7}$$

Ukážeme nejprve, že je číselná posloupnost $\{\|\overline{x}_n\|\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená. Připusťme opak, že tato posloupnost není ohraničená. Pak exisuje posloupnost $\{\|\overline{x}_{n_k}\|\}_{k=1}^{+\infty}$ vybraná z $\{\|\overline{x}_n\|\}_{n=1}^{+\infty}$ taková, že

$$\|\overline{x}_{n_k}\| \to +\infty \quad \text{při} \quad k \to +\infty.$$

Vzhledem k (6.5) a linearitě operátoru A, plyne z vyjádření (6.7)

$$T\left(\frac{\overline{x}_{n_k}}{\|\overline{x}_{n_k}\|}\right) = \frac{\overline{x}_{n_k}}{\|\overline{x}_{n_k}\|} - A\left(\frac{\overline{x}_{n_k}}{\|\overline{x}_{n_k}\|}\right) = \frac{y_{n_k}}{\|\overline{x}_{n_k}\|} \to 0 \quad \text{při} \quad k \to +\infty. \tag{6.8}$$

Protože je operátor A kompaktní, lze z posloupnosti $\left\{A\left(\frac{\overline{x}_{n_k}}{\|\overline{x}_{n_k}\|}\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ vybrat posloupnost konvergentní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že sama tato posloupnost je konvergentní. Pak z podmínky (6.8) plyne konvergence posloupnosti $\left\{\frac{\overline{x}_{n_k}}{\|\overline{x}_{n_k}\|}\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Položme

$$z = \lim_{k \to +\infty} \frac{\overline{x}_{n_k}}{\|\overline{x}_{n_k}\|}.$$

Zřejmě $z \in H$ a $\|z\| = 1$. Kromě toho je $z \in \big(\ker T\big)^{\perp}$, neboť $\overline{x}_{n_k} \in \big(\ker T\big)^{\perp}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Avšak z podmínky (6.8) plyne $Tz = 0$, tj. $z \in \ker T$. Proto dostáváme $z = 0$, což je ve sporu s vlastností $\|z\| = 1$. Dosažený spor dokazuje, že je posloupnost $\{\|\overline{x}_n\|\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená.

Vzhledem ke kompaktnosti operátoru A lze nyní bez újmy na obecnosti předpokládat, že je posloupnost $\{A\overline{x}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergentní. Proto, s ohledem na (6.5) a (6.7), existuje $x \in H$ takové, že

$$x = \lim_{n\to+\infty} \overline{x}_n.$$

Nyní opět z vyjádření (6.7), podmínky (6.5) a spojitosti operátoru T dostáváme $y = Tx$, tj. $y \in \operatorname{Im} T$. □

Lemma 6.5. *Platí*

$$\ker T \oplus \operatorname{Im} T^* = H \tag{6.9}$$

a také

$$\ker T^* \oplus \operatorname{Im} T = H. \tag{6.10}$$

Důkaz. Dokážeme pouze rovnost (6.9), rovnost (6.10) se ukáže podobně. Nechť $x \in \ker T$ a $h \in \operatorname{Im} T^*$ jsou libovolné prvky. Pak existuje $y \in H$ takové, že $T^*y = h$. Proto dostávéme

$$(h \cdot x) = (T^*y \cdot x) = (y \cdot Tx) = (y \cdot 0) = 0,$$

a tedy $\ker T \perp \operatorname{Im} T^*$. Vzhledem k Lemma 6.4 je podprostor $\operatorname{Im} T^*$ uzavřený. Uzavřenost $\ker T$ plyne ze spojitosti operátoru T. Označme

$$H_1 = \ker T \oplus \operatorname{Im} T^*$$

(viz Definici 2.25). Je zřejmé, že H_1 je (uzavřený) podprostor v prostoru H. Proto, s ohledem na Poznámku 2.8, platí

$$H = H_1 \oplus H_1^{\perp}.$$

Nechť je nyní $z \in H_1^{\perp}$ libovolný. To znamená, že $(z \cdot x) = 0$ pro všechna $x \in H_1$. Proto $(z \cdot x) = 0$ pro každé $x \in \ker T$ a také pro každé $x \in \operatorname{Im} T^*$, tj. $z \in (\ker T)^{\perp} \cap (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$. Pro libovolné $y \in H$ tedy máme

$$(Tz \cdot y) = (z \cdot T^*y) = 0.$$

Proto také $(Tz \cdot Tz) = 0$, tj. $Tz = 0$. To však znamená $z \in \ker T$, a tedy $z = 0$. Dokázali jsme $H_1^{\perp} = \{0\}$, a proto máme $H_1 = H$, čímž je rovnost (6.9) dokázána. □

Zaveďme nyní označení $H^1 = \operatorname{Im} T$ a $H^k = \operatorname{Im} T^k$ pro $k = 2, 3, \dots$. Je zřejmé, že $H^{k+1} = T(H^k)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a

$$H \supseteq H^1 \supseteq H^2 \supseteq \cdots \supseteq H^k \supseteq \dots.$$

Navíc, podle Lemma 6.4, jsou všechny tyto podprostory uzavřené.

Lemma 6.6. *Existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $H^{k+1} = H^k$ pro všechna $k \geq j$.*

Důkaz. Připusťme opak, že jsou všechny podprostory H^k ($k \in \mathbb{N}$) navzájem různé. V takovém případě lze sestrojit posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ s následujícími vlastnostmi:

1) $x_n \in H^n$ a $x_n \in \left(H^{n+1}\right)^{\perp}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$;

2) posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je ortonormální.

Nechť $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$ jsou libovolná. Pak

$$Ax_m - Ax_k = -x_k + (x_m + Tx_k - Tx_m). \tag{6.11}$$

Je zřejmé, že $x_m + Tx_k - Tx_m \in H^{k+1}$. Poněvadž $\|x_k\| = 1$ a $x_k \in \left(H^{k+1}\right)^{\perp}$, plyne z (6.11) nerovnost

$$\|Ax_m - Ax_k\| \geq 1.$$

Proto z posloupnosti $\{Ax_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nelze vybrat posloupnost konvergentní, což je ve sporu s kompaktností operátoru A. $\square$

Lemma 6.7. *Jestliže* $\ker T = \{0\}$*, pak* $\operatorname{Im} T = H$*.*

Důkaz. Jestliže $\ker T = \{0\}$, pak je operátor T je injektivní. Připusťme, že $\operatorname{Im} T \neq H$. Pak dostáváme $H \supset H^1 \supset H^2 \supset \dots$, což je ve sporu s tvrzením Lemma 6.6. Proto platí $\operatorname{Im} T = H$. $\square$

Obdobně platí

Lemma 6.8. *Je-li* $\operatorname{Im} T = H$*, pak* $\ker T = \{0\}$*.*

Důkaz. Jestliže $\operatorname{Im} T = H$, pak podle Lemma 6.5 platí $\ker T^* = \{0\}$. To však, vzhledem k výše dokázanému Lemma 6.7, znamená $\operatorname{Im} T^* = H$. Nyní opět Lemma 6.5 zaručí $\ker T = \{0\}$. $\square$

Nyní již můžeme dokázat Věty 6.1–6.3.

Důkaz Věty 6.1. Tvrzení věty plyne přímo z Lemmat 6.7 a 6.8. $\square$

Důkaz Věty 6.3. Tvrzení věty plyne přímo z Lemma 6.5. $\square$

Důkaz Věty 6.2. Připusťme, že je $\dim\left(\ker T\right) = +\infty$. Pak, s ohledem na Větu 2.16, existuje v $\ker T$ ortonormální systém $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Jelikož je $Ax_n = x_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\|Ax_k - Ax_m\| = \sqrt{2} \quad \text{pro} \quad k \neq m.$$

To však znamená, že z posloupnosti $\{Ax_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nelze vybrat posloupnost konvergentní, což je ve sporu s kompaktností operátoru A.

Dokázali jsme tedy, že $\dim\left(\ker T\right) < +\infty$. Analogicky se ukáže, že také $\dim\left(\ker T^*\right) < +\infty$.

Nechť nyní $n = \dim\left(\ker T\right)$ a $k = \dim\left(\ker T^*\right)$. Předpokládejme sporem, že $n < k$. Nechť $x_1, \dots, x_n$ je ortonormální báze prostoru $\ker T$ a $y_1, \dots, y_k$ je ortonormální báze prostoru $\ker T^*$. Položme

$$Bx = Tx + \sum_{i=1}^{n} (x \cdot x_i) y_i \quad \text{pro} \quad x \in H.$$

Operátor B vznikne z operátoru T přičtením degenerovaného operátoru konečné dimenze, tj. přičtením kompaktního operátoru. Je tedy zřejmé, že je operátor B kompaktní a platí pro něj všechna výše dokázaná tvrzení.

Ukážeme, že rovnice $Bx = 0$ má pouze nulové řešení. Vskutku, nechť $x_0 \in H$ je řešení této rovnice, tj.

$$Tx_0 + \sum_{i=1}^{n} (x_0 \cdot x_i) y_i = 0. \tag{6.12}$$

Podle Lemmatu 6.5 je $y_j \in \big(\operatorname{Im} T\big)^{\perp}$ pro $j = 1, \dots, k$. Zejména tedy

$$(y_j \cdot Tx_0) = 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, \dots, k.$$

Násobíme-li rovnost (6.12) skalárně prvkem Tx_0, dostaneme

$$0 = \|Tx_0\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_0 \cdot x_i)(y_i \cdot Tx_0) = \|Tx_0\|^2 ,$$

a tedy

$$Tx_0 = 0. \tag{6.13}$$

Odtud a (6.12) získáme

$$\sum_{i=1}^{n} (x_0 \cdot x_i) y_i = 0,$$

což spolu s lineární nezávislostí prvků $y_1, \dots, y_n$ zaručí

$$(x_0 \cdot x_i) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n.$$

Jelikož je $x_1, \dots, x_n$ ortonormální báze prostoru $\ker T$, dostáváme $x_0 \in \big(\ker T\big)^{\perp}$, což spolu s (6.13) zaručí $x_0 = 0$.

Dokázali jsem tedy, že má homogenní rovnice $Bx = 0$ pouze nulové řešení. Vzhledem k Fredholmově alternativě (viz Větu 6.1) existuje $y \in H$ takové, že

$$Ty + \sum_{i=1}^{n} (y \cdot x_i) y_i = y_{n+1}.$$

Násobíme-li tuto rovnost skalárně prvkem y_{n+1}, dostaneme

$$1 = (Ty \cdot y_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (y \cdot x_i)(y_i \cdot y_{n+1}) = (Ty \cdot y_{n+1}) = (y \cdot T^* y_{n+1}) = (y \cdot 0) = 0.$$

Tento spor dokazuje, že $n \geq k$. Nahradíme-li nyní operátor T operátorem T^*, dokážeme $k \geq n$, a platí tedy $n = k$. □

6.2. Spektrum lineárního kompaktního operátoru v Hilbertově prostoru

V Hilbertově prostoru H budeme vyšetřovat rovnici

$$x = \lambda A x + f, \tag{6.14}$$

kde λ je číselný parametr, $A : H \to H$ je lineární kompaktní operátor a $f \in H$. Podle Věty 6.1 jsou možné právě dva vzájemně se vylučující případy:

1) Rovnice (6.14) má při daném λ právě jedno řešení pro každé $f \in H$.

2) Rovnice $x = \lambda Ax$ má při daném λ nenulové řešení.

V případě 1) dostáváme následující: Existuje operátor $(I - \lambda A)^{-1}$ a je definovaný v celém prostoru H, což je ekvivalentní (pro $\lambda \neq 0$) s tím, že operátor $\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1}$ existuje v celém prostoru H a tudíž je i ohraničený. Jinak řečeno, číslo $\frac{1}{\lambda}$ je regulární hodnota operátoru A, tj. nepatří do spektra operátoru A.

V případě 2) je číslo $\frac{1}{\lambda}$ vastní hodnotou operátoru A.

Dostáváme tedy následující tvrzení.

Tvrzení 6.9. *Každé nenulové číslo $\mu = \frac{1}{\lambda}$ je buď vlastní hodnotou lineárního kompaktního operátoru A, nebo je jeho regulární hodnotou. Jinými slovy, spojité spektrum lineárního kompaktního operátoru v Hilbertově prostoru je buď prázdná množina, nebo se skládá z jediného bodu $\mu = 0$.*

Všimněme si nyní, že bod 0 patří do spektra každého lineárního kompaktního operátoru (viz Důsledek 5.17). Dále také víme (viz Věta 5.19), že lineární kompaktní operátor má jen konečný počet vlastních hodnot, jejichž absolutní hodnota je větší než $\delta > 0$. Navíc každé této vlastní hodnotě přísluší pouze konečný počet lineárně nezávislých prvků. Spojíme tato fakta s Tvrzením 6.9 dostaneme

Tvrzení 6.10. *Spektrum lineárního kompaktního operátoru v Hilbertově prostoru se skládá z konečného počtu nebo spočetně mnoha nenulových vlastních hodnot $\mu_1, \mu_2, \dots$ a bodu 0. Bod 0 je jediný možný hromadný bod posloupnosti $\{\mu_i\}$. Každá z hodnot μ_i má konečnou násobnost, bod 0 je buď vlastní hodnotou konečné či nekonečné násobnosti, nebo je prvkem spojitého spektra.*

7. Riesz–Schauderova teorie

Nechť X je Banachův prostor a $A : X \to X$ je lineární kompaktní operátor. Položme $T = I - A$, kde I značí identický operátor v X. Budeme uvažovat rovnice

$$Tx = y, \tag{7.1}$$

$$Tz = 0 \tag{7.2}$$

kde $y \in X$, a k nim adjungované rovnice

$$T^* f = g, \tag{7.3}$$

$$T^* \psi = 0, \tag{7.4}$$

kde $g \in X^*$ a T^* je operátor adjungovaný k operátoru T.

Připomeňme ještě, že stejně jako v kapitole 5.4, budeme značit hodnoty funkcionálu $f \in X^*$ v prvku $x \in X$ jako (x, f).

Věta 7.1. *Množiny $\operatorname{Im} T \subseteq X$ a $\operatorname{Im} T^* \subseteq X^*$ jsou uzavřené.*

Důkaz. Ukážeme, že je množina $\operatorname{Im} T$ uzavřená v X. Tvrzení ohledně $\operatorname{Im} T^*$ se dokáže analogicky.

Neboť $\operatorname{Im} T \subseteq \overline{\operatorname{Im} T}$, k důkazu věty stačí ukázat, že $\overline{\operatorname{Im} T} \subseteq \operatorname{Im} T$. Nechť $y_0 \in \overline{\operatorname{Im} T}$ je libovolné. Ukážeme, že také $y \in \operatorname{Im} T$. Vskutku, vzhledem k Tvrzení 1.10, existuje posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ prvků množiny $\operatorname{Im} T$ taková, že

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y_0. \tag{7.5}$$

To však znamená, že existují $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ splňující

$$Tx_n = y_n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.6}$$

Nejprve předpokládejme, že je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená. Protože je operátor A kompaktní, z posloupnosti $\{Ax_n\}_{n=1}^{+\infty}$ lze vybrat posloupnost konvergentní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je konvergentní přímo posloupnost $\{Ax_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Poněvadž platí (7.5), z (7.6) plyne, že existuje $x_0 \in X$ splňující

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0.$$

Ze spojitosti operátoru T, podmínky (7.5) a vyjádření (7.6) dostáváme $Tx_0 = y_0$, a tedy $y_0 \in \operatorname{Im} T$.

Předpokládejme nyní, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ není ohraničená. Položme

$$d_n = \rho(x_n, \ker T) = \inf\Big\{\|x_n - z\| : z \in \ker T\Big\} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že existují $z_n \in \ker T$ $(n \in \mathbb{N})$ taková, že

$$d_n \leq \|x_n - z_n\| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.7}$$

Protože $z_n \in \ker T$ pro $n \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$T(x_n - z_n) = y_n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.8}$$

Je-li číselná posloupnost $\{d_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená, podmínka (7.7) zaručí, že je ohraničená také posloupnost $\{x_n - z_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Pak ale stejně jako výše, s použitím (7.8), ukážeme $y_0 \in \operatorname{Im} T$.

K dokončení důkazu tedy zbývá dokázat, že je posloupnost $\{d_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená. Předpokládejme sporem, že je tato posloupnost neohraničená. Pak mužeme bez újmy na obecnosti předpokládat

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty.$$

Položme

$$u_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Použitím odhadu (7.7) dostaneme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = +\infty$, a tedy

$$\lim_{n\to+\infty} Tu_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{\|x_n - y_n\|} = 0,$$

neboť platí (7.5). Operátor A je kompaktní a $\|u_n\| = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$, proto lze z posloupnosti $\{Au_n\}_{n=1}^{+\infty}$ vybrat posloupnost konvergentní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je konvergentní přímo posloupnost $\{Au_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Navíc je $\lim\limits_{n\to+\infty} Tu_n = 0$, a tedy existuje $u_0 \in X$ splňující

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0. \tag{7.9}$$

Zřejmě je $u_0 \in \ker T$. Všimněme si ještě, že

$$x_n - z_n - \|x_n - z_n\|u_0 = (u_n - u_0)\|x_n - z_n\| \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}$$

a

$$z_n + \|x_n - z_n\|u_0 \in \ker T \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N},$$

neboť $z_n \in \ker T$ pro $n \in \mathbb{N}$. Proto, s ohledem na (7.7), dostaneme

$$\|u_n - u_0\| \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n \geq \Big\|(u_n - u_0)\|x_n - z_n\|\Big\| =$$

$$= \Big\|x_n - \big(z_n + \|x_n - z_n\|u_0\big)\Big\| \geq d_n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odtud plyne

$$\|u_n - u_0\| \geq \frac{n}{n+1} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Avšak, vzhledem k (7.9), je

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u_0\| \geq 1,$$

což je spor. □

Než dokážeme další pomocné tvrzení, uvedeme následující definici.

Definice 7.1. Nechť X je normovaný prostor a $M \subseteq X$ je neohraničená množina. Řekneme, že je množina M *lokálně prekompaktní (kompaktní)*, jestliže průnik množiny M s libovolnou uzavřenou koulí v X je prekompaktní (kompaktní) množina.

Věta 7.2 (Riesz). *Nechť X je normovaný prostor a L je lineární varieta v X. Potom je L lokálně prekompaktní právě tehdy, když je konečnědimenzionální.*

Důkaz. Nechť je L konečnědimenzionální, tj. $\dim L < +\infty$, a nechť B je uzavřená koule v X. Je zřejmé, že množina $L \cap B$ je ohraničená v konečnědimenzionálním prostoru L, a proto je prekompaktní.

Nyní naopak, nechť L je lokálně prekompaktní. Předpokládejme sporem, že $\dim L = +\infty$. Zvolme $a \in X$ a $r > 0$.

Nechť x_1 je takové, že

$$\|x_1\| = 1.$$

Položme

$$z_1 = a + rx_1\,, \qquad M_1 = \{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Zřejmě $z_1 \in B[a, r]$. S ohledem na lemma „o skoro kolmém“ (viz Lemma 2.3) existuje $x_2 \in L$ takové, že

$$\|x_2\| = 1 \qquad \text{a} \qquad \rho(x_2, M_1) > \frac{1}{2}\,.$$

Zejména dostáváme $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$. Položme

$$z_2 = a + rx_2\,.$$

Zřejmě $z_2 \in B[a, r]$ a

$$\|z_2 - z_1\| = r\|x_2 - x_1\| > \frac{r}{2}\,.$$

Pokračujme dále v této proceduře. Nechť tedy máme sestrojeny prvky

$$x_1, \dots, x_n$$

a

$$z_k = a + rx_k \quad \text{pro} \quad k = 1, \dots, n$$

takové, že

$$\|z_k - z_m\| > \frac{r}{2} \quad \text{pro} \quad k = 2, \dots, n, \; m = 1, \dots, k-1.$$

Označme M_n lineární obal prvků $x_1, \dots, x_n$, tj.

$$M_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_x : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zřejmě $\dim M_n = n$ a proto je $M_n \neq L$. S ohledem na Lemma „o skoro kolmém“ (viz Lemma 2.3) tedy existuje $x_{n+1} \in L$ takové, že

$$\|x_{n+1}\| = 1 \qquad \text{a} \qquad \rho(x_{n+1}, M_n) > \frac{1}{2}\,.$$

Zejména dostáváme $\|x_{n+1} - x_k\| > \frac{1}{2}$ pro $k = 1, \dots, n$. Položme

$$z_{n+1} = a + rx_{n+1}\,.$$

Zřejmě $z_{n+1} \in B[a, r]$ a

$$\|z_{n+1} - z_k\| = r\|x_{n+1} - x_k\| > \frac{r}{2} \quad \text{pro} \quad k = 1, \dots, n.$$

Sestrojili jsme tak posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset L \cap B[a, r]$, která neobsahuje cauchyovskou podposloupnost. To však znamená, že množina $L \cap B[a, r]$ není prekompaktní, což je ve sporu s lokální prekompaktností L. □

Nyní již dokážeme věty týkající se řešitelnosti rovnic (7.1)–(7.4), tzv. Fredholmovy věty.

Věta 7.3 (První Fredholmova)**.** *Následující čtyři tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Rovnice (7.1) *má řešení pro všechna $y \in X$.*

(ii) Rovnice (7.2) *má pouze nulové řešení.*

(iii) Rovnice (7.3) *má řešení pro všechna $g \in X^*$.*

(iv) Rovnice (7.4) *má pouze nulové řešení.*

Důkaz. Stačí dokázat řetězec implikací

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (i).$$

Implikace $(i) \Rightarrow (ii)$. Nechť platí tvrzení (i), tj. $\operatorname{Im} T = X$. Připusťme, že tvrzení (ii) neplatí, tj.

$$\ker T \neq \{0\}.$$

Zvolme $x_1 \in \ker T$ takové, že $x_1 \neq 0$, a uvažujme rovnici

$$Tx = x_1 .$$

Vzhledem k tvrzení (i) má tato rovnice alespoň jedno řešení x_2, tj. $Tx_2 = x_1$. Zřejmě platí

$$T^2 x_2 = T x_1 = 0,$$

a tedy $x_2 \in \ker T^2$. Protože $x_2 \notin \ker T$ (jinak by bylo $x_1 = 0$), dostáváme

$$\ker T \subset \ker T^2.$$

Pokračujeme-li v této proceduře, dokážeme

$$\ker T \subset \ker T^2 \subset \ker T^3 \subset \cdots \subset \ker T^n \subset \dots .$$

Položíme-li

$$X_k = \ker T^k \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N},$$

je zřejmé, že podprostory X_n $(n \in \mathbb{N})$ v prostoru splňují X

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \dots . \tag{7.10}$$

S ohledem na lemma „o skoro kolmém“ (viz Lemma 2.3) proto existuje posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ taková, že

1) $z_n \in X_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$;
2) $\|z_n\| = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$;
3) $\|z_n - u\| > \frac{1}{2}$ pro $u \in X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Z vlastnosti 3) dostaneme

$$\|Az_m - Az_k\| = \big\|z_m - (z_k - Tz_k + Tz_m)\big\| > \frac{1}{2} \quad \text{pro} \quad m > k,$$

neboť je $z_k - Tz_k + Tz_m \in X_m$. Vskutku, z vlastnosti 1) a (7.10) plyne

$$T^m\big(z_k - Tz_k + Tz_m\big) = T^m z_k - T^{m+1} z_k + T^{m+1} z_m = 0 \quad \text{pro} \quad m > k.$$

To však znamená, že z posloupnosti $\{Az_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nelze vybrat posloupnost cauchyovskou, což je spor s kompaktností operátoru A, neboť podle vlastnosti 2) je posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ohraničená.

Implikace $(ii) \Rightarrow (iii)$. Nechť platí tvrzení (ii), tj. $\ker T = \{0\}$. Ukážeme, že $\operatorname{Im} T^* = X^*$. Nechť $g \in X^*$ je libovolné pevné. Vzhledem k Větě 7.1 a předpokladu $\ker T = \{0\}$, operátor T zobrazuje bijektivně Banachův prostor X na Banachův prostor $\operatorname{Im} T$. Použitím

Banachovy věty 5.5 lze snadno ověřit, že inverzní operátor $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to X$ je lineární a ohraničený. Položme
$$f_0(y) = \big(T^{-1}y, g\big) \quad \text{pro} \quad y \in \operatorname{Im} T.$$
Je zřejmé, že f_0 je lineární ohraničený funkcionál v $\operatorname{Im} T$. Podle Hahn–Banachovy věty 3.23 existuje $f \in X^*$ takový, že
$$f(y) = f_0(y) \quad \text{pro} \quad y \in \operatorname{Im} T.$$
Pro všechna $x \in X$ tedy platí
$$(x, T^*f) = (Tx, f) = (Tx, f_0) = \big(T^{-1}(Tx), g\big) = (x, g).$$
Proto $T^*f = g$, tj. $g \in \operatorname{Im} T^*$. Vzhledem k libovolnosti g jsme ukázali, že $\operatorname{Im} T^* = X^*$.

Implikace $(iii) \Rightarrow (iv)$. Důkaz je analogický jako důkaz implikace $(i) \Rightarrow (ii)$, pouze zaměníme T za T^*.

Implikace $(iv) \Rightarrow (i)$. Nechť platí tvrzení (iv), tj. rovnice (7.4) má pouze nulové řešení. Ukážeme, že $\operatorname{Im} T = X$. Předpokládejme sporem, že $\operatorname{Im} T \subset X$. Zvolme $y_0 \in X$ takové, že $y_0 \notin \operatorname{Im} T$. Vzhledem k Větě 7.1 je $\operatorname{Im} T$ uzavřený podprostor v X, a tedy
$$\inf \Big\{ \|y_0 - z\| : z \in \operatorname{Im} T \Big\} > 0.$$
Použitím Hahn–Banachovy věty (viz Důsledek 3.25) sestrojíme funkcionál $f_0 \in X^*$ takový, že
$$(y_0, f_0) = 1 \tag{7.11}$$
a
$$(y, f_0) = 0 \quad \text{pro} \quad y \in \operatorname{Im} T.$$
Pro všechna $x \in X$ pak platí
$$(x, T^*f_0) = (Tx, f_0) = 0.$$
Proto máme $T^*f_0 = 0$, tj. f_0 je řešení rovnice (7.4). Vzhledem k našemu předpokladu dostáváme $f_0 = 0$, což je ve sporu s (7.11). Dosažený spor dokazuje, že $\operatorname{Im} T = X$. □

Důsledek 7.4. *Nechť platí alespoň jedna z podmínek (i)–(iv) Věty 7.3. Potom je operátor T (resp. T^*) invertovatelný, inverzní operátor je definován v celém prostoru X (resp. X^*) a je ohraničený.*

Důkaz. Platí-li alespoň jedna z podmínek (i)–(iv) Věty 7.3, pak platí všechny. Ze vztahu $\ker T = \{0\}$ (resp. $\ker T^* = \{0\}$) plyne invertovatelnost operátoru T (resp. T^*). Navíc platí $\operatorname{Im} T = X$ (resp. $\operatorname{Im} T^* = X^*$), tj. operátor T^{-1} (resp. $(T^*)^{-1}$) je definovaný v celém prostoru X (resp. X^*). Ohraničenost inverzních operátorů plyne z Banachovy věty 5.5. □

Věta 7.5 (Druhá Fredholmova)**.** *Rovnice* (7.2) *a* (7.4) *mají stejný (a to konečný) počet lineárně nezávislých řešení.*

K důkazu této věty potřebujeme jedno tvrzení vyplývající z Hahn–Banachovy věty.

Lemma 7.6. *Nechť X je normovaný prostor a $\{x_k\}_{k=1}^n$ je systém lineárně nezávislých prvků z X. Potom existuje systém $\{f_k\}_{k=1}^n$ prvků z X^* takový, že*
$$(x_k, f_j) = \delta_{kj} \quad \textit{pro} \quad k, j = 1, \dots, n.$$

Důkaz. Označme X_1 lineární uzávěr systému $\{x_k\}_{k=2}^n$. Jelikož jsou prvky $x_1, \dots, x_n$ lineárně nezávislé, máme $x_1 \notin X_1$ a

$$\inf \Big\{ \|x_1 - z\| : z \in X_1 \Big\} > 0.$$

S použitím Hahn–Banachovy věty (viz Důsledek 3.25) sestrojíme funkcionál $f_1 \in X^*$ takový, že

$$(x_1, f_1) = 1$$

a

$$(x, f_1) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in X_1 \,.$$

Zejména tedy platí

$$(x_k, f_1) = 0 \quad \text{pro} \quad k = 2, \dots, n.$$

Analogicky sestrojíme funkcionály $f_2, \dots, f_n \in X^*$. □

Lemma 7.6 lze v jistém smyslu obrátit.

Lemma 7.7. *Nechť X je normovaný prostor a $\{f_k\}_{k=1}^n$ je systém lineárně nezávislých prvků z X^*. Potom existuje systém $\{x_k\}_{k=1}^n$ prvků z X takový, že*

$$(x_k, f_j) = \delta_{kj} \quad \textit{pro} \quad k = 1, \dots, n, \ j = k, \dots, n. \tag{7.12}$$

Důkaz. Jelikož je $f_n \neq 0$, existuje $z \in X$ takový, že $(z, f_n) \neq 0$. Položme

$$x_n = \frac{z}{(z, f_n)} \,.$$

Předpokládejme nyní, že pro $i \in \{2, \dots, n\}$ máme sestrojený systém $\{x_k\}_{k=i}^n$ prvků z X takový, že

$$(x_k, f_j) = \delta_{kj} \quad \text{pro} \quad k = i, \dots, n, \ j = k, \dots, n.$$

Sestrojíme prvek x_{i-1}. Pro libovolné $x \in X$ položme

$$y_x = x - \sum_{k=i}^n (x, f_k) x_k \,.$$

Všimněme si nejprve, že jakmile

$$(y_x, f_{i-1}) = 0 \quad \text{pro každé} \quad x \in X,$$

pak

$$(x, f_{i-1}) = \sum_{k=i}^n (x, f_k)(x_k, f_{i-1}) \quad \text{pro každé} \quad x \in X,$$

tj.

$$f_{i-1} = \sum_{k=i}^n (x_k, f_{i-1}) f_k \,,$$

což je sporu s lineární nezávislostí systému $\{f_k\}_{k=1}^n$. Proto existuje $z \in X$ takové, že $(y_z, f_{i-1}) \neq 0$. Položme nyní

$$x_{i-1} = \frac{y_z}{(y_z, f_{i-1})} \,.$$

Jednoduše lze ověřit, že

$$(x_{i-1}, f_j) = \delta_{i-1\,j} \quad \text{pro} \quad j = i-1, \dots, n.$$

Takto tedy sestrojíme systém $\{x_k\}_{k=1}^n$ prvků z X splňující (7.12). □

Nyní již můžeme dokázat Druhou Fredhlmovu větu.

Důkaz Věty 7.5. Z První Fredholmovy věty 7.3 plyne, že

$$\ker T = \{0\} \iff \ker T^* = \{0\}.$$

Předpokládejme nyní, že $\ker T \neq \{0\}$.

Nechť $M \subset \ker T$ je ohraničená množina. Pak $TM = \{0\}$ a tedy $AM = M$. Operátor A je ale kompaktní, což znamená, že množina M je prekompaktní. Proto je $\ker T$ lokálně prekompaktní mmnožina v X, což podle Rieszovy věty 7.2 znamená $\dim\big(\ker T\big) < +\infty$. Analogicky je možné dokázat, že $\dim\big(\ker T^*\big) < +\infty$.

Ukážeme nyní, že

$$\dim\big(\ker T\big) = \dim\big(\ker T^*\big). \tag{7.13}$$

Předpokládejme sporem, že (7.13) neplatí. Položme

$$\dim\big(\ker T\big) = n, \qquad \dim\big(\ker T^*\big) = m.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $n < m$.

Nechť $\{z_k\}_{k=1}^n$ je báze $\ker T$ a $\{\psi_k\}_{k=1}^m$ je báze $\ker T^*$. Potom, vzhledem k Lemma 7.6, existuje systém $\{f_k\}_{k=1}^n$ prvků z X^* takový, že

$$(z_k, f_j) = \delta_{kj} \quad \text{pro} \quad k, j = 1, \ldots, n. \tag{7.14}$$

Dále, s ohledem na Lemma 7.7, existuje systém $\{v_k\}_{k=1}^m$ prvků z X takový, že

$$(v_k, \psi_j) = \delta_{kj} \quad \text{pro} \quad k = 1, \ldots, m,\ j = k, \ldots, m. \tag{7.15}$$

Zavedeme operátor $B : X \to X$ vztahem

$$Bx \stackrel{\text{def}}{=} Ax + \sum_{k=1}^{n} (x, f_k) v_k \quad \text{pro} \quad x \in X. \tag{7.16}$$

Operátor B vznikne z operátoru A přičtením degenerovaného operátoru konečné dimenze, tj. přičtením kompaktního operátoru. Je tedy zřejmé, že je operátor B kompaktní.

Ukážeme nejprve, že je

$$\ker(I - B) = \{0\}. \tag{7.17}$$

Vskutku, nechť $x \in \ker(I - B)$ libovolné. Pak z definice operátoru B dostáváme

$$x - Ax = \sum_{k=1}^{n} (x, f_k) v_k\,. \tag{7.18}$$

Proto, vzhledem k (7.15), je

$$(x - Ax, \psi_i) = (x, f_i) \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.19}$$

Na druhé straně lze lehce ověřit, že

$$(x - Ax, \psi_i) = (Tx, \psi_i) = (x, T^*\psi_i) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7.20}$$

neboť $\psi_i \in \ker T^*$ pro $i = 1, \ldots, n$. Z (7.19) a (7.20) plyne

$$(x, f_i) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.21}$$

Proto z (7.18) obdržíme $x - Ax = 0$, tj. $x \in \ker T$. Existují tedy skaláry $\alpha_1, \dots \alpha_n$ takové, že

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \,.$$

Z tohoto vyjádření a (7.14) plyne

$$(x, f_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (z_k, f_i) = \alpha_i \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n.$$

Vezmeme-li nyní v úvahu (7.21), máme dokázáno, že $\alpha_i = 0$ pro $i = 1, \dots, n$, a tedy $x = 0$. Avšak x byl libovolný prvek z $\ker(I - B)$, tj. platí (7.17).

Lehce lze ověřit, že pro každé $g \in X^*$ platí

$$(I - B)^* g = T^* g - \sum_{k=1}^{n} (v_k, g) f_k \,.$$

Jelikož $\psi_1, \dots, \psi_m \in \ker T^*$ a platí (7.15), z posledního vztahu dostáváme

$$(I - B)^* \psi_j = T^* \psi_j - \sum_{k=1}^{n} (v_k, \psi_j) f_k = 0 \quad \text{pro} \quad m \geq j > n.$$

Proto $\ker(I - B)^* \neq \{0\}$, což je, vzhledem k První Fredholmově větě 7.3, ve sporu s (7.17). Dosažený spor dokazuje, že $m = n$, tj. platí (7.13). □

Věta 7.8 (Třetí Fredholmova)**.** *Rovnice* (7.1) *má alespoň jedno řešení právě pro ta $y \in X$, která splňují*

$$(y, \psi) = 0 \quad \textit{pro} \quad \psi \in \ker T^*. \tag{7.22}$$

Důkaz. Je-li $\ker T = \{0\}$, pak vzhledem k První Fredholmově větě 7.3 je $\ker T^* = \{0\}$, tj. věta platí (triviálně). Dále tedy předpokládejme, že je $\ker T \neq \{0\}$.

Nechť pro $y \in X$ má rovnice (7.1) řešení x_0. Pak pro každé $\psi \in \ker T^*$ máme

$$(y, \psi) = (Tx_0, \psi) = (x_0, T^* \psi) = 0,$$

tj. platí (7.22).

Naopak, nechť je pro $y \in X$ splněno (7.22). Ukážeme, že $y \in \operatorname{Im} T$. Předpokládejme sporem, že

$$y \notin \operatorname{Im} T.$$

Vzhledem k Větě 7.1 je množina $\operatorname{Im} T$ uzavřená, a tedy

$$\inf \Big\{ \|y - z\| : z \in \operatorname{Im} T \Big\} > 0.$$

Pomocí Hahn–Banachovy věty (viz Důsledek 3.25) sestrojíme funkcionál $f \in X^*$ takový, že

$$(y, f) = 1 \tag{7.23}$$

a

$$(z, f) = 0 \quad \text{pro} \quad z \in \operatorname{Im} T \,.$$

Odtud je zřejmé, že

$$(x, T^* f) = (Tx, f) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in X,$$

a tedy $f \in \ker T^*$. Ze vztahu (7.22) proto plyne $(y, f) = 0$, což je ve sporu s (7.23). Dosažený spor dokazuje, že $y \in \operatorname{Im} T$, tj. rovnice (7.1) má alespoň jedno řešení. □

Třetí Fredholmovu větu lze ještě doplnit.

Věta 7.9. *$g \in \operatorname{Im} T^*$ právě tehdy, když*

$$(z, g) = 0 \quad \text{pro} \quad z \in \ker T.$$

Závěrem této kapitoly si ještě všimneme, že, s ohledem na výše dokázané věty, mohou pro operátor T nastat právě tři případy:

1) T je invertovatelný, T^{-1} je definovaný v celém prostoru X a tudíž je spojitý.

2) $\ker T \neq \{0\}$ a

$$(y, \psi) \neq 0 \quad \text{pro nějaké} \quad \psi \in \ker T^*.$$

Pak nemá rovnice (7.1) řešení, tj.

$$y \notin \operatorname{Im} T.$$

3) $\ker T \neq \{0\}$ a

$$(y, \psi) = 0 \quad \text{pro každé} \quad \psi \in \ker T^*.$$

Pak má obecné řešení x rovnice (7.1) tvar

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \,,$$

kde x_0 je nějaké řešení rovnice (7.1) a $\{z_k\}_{k=1}^n$ je báze prostoru $\ker T$, přičemž $n = \dim\big(\ker T\big)$.

8. Rovnice prvního druhu

Nejprve zavedeme definici.

Definice 8.1. Nechť X je normovaný prostor. Množina $M \subseteq X$ se nazývá *množinou I. kategorie*, jestliže ji lze vyjádřit jako sjednocení nejvýše spočetně mnoha množin řídkých v X. Není-li množina $M \subseteq X$ množinou I. kategorie, říkáme, že je *množinou II. kategorie.*

Poznámka 8.1. Jelikož víme, že normovaný prostor X je sám metrickým prostorem (viz Poznámku 2.2), pojem množiny řídké v normovaném prostoru obsažen v Definici 1.11.

Věta 8.1 (Bair–Hausdorf)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Pak je X množinou II. kategorie.*

Důkaz. Plyne přímo z Bairovy věty 1.15. □

Uvedeme ještě následující tvrzení.

Tvrzení 8.2. *Nechť X je nekonečnědimenzionální normovaný prostor a množina $M \subseteq X$ je prekompaktní. Potom je M řídká v X.*

Důkaz. Připusťme opak, nechť M není řídká. Pak, vzhledem k Definici 1.11, existuje koule $B[a,r]$ taková, že

$$B[a,r] \subseteq \overline{M}.$$

Jelikož je podle našeho předpokladu množina $\overline{M}$ kompaktní, je kompaktní také množina $B[a,r]$ (viz Věta 1.21). Vzhledem k Tvrzení 5.13 však musí prostor X být konečnědimenzionální, což je spor. □

Nechť X a Y jsou nekonečnědimenzionální Banachovy prostory. V dalším budeme uvažovat operátorovou rovnici (prvního druhu)

$$Ax = y, \tag{8.1}$$

kde $A : X \to Y$ je lineární kompaktní operátor a $y \in Y$.

Věta 8.3. *Nechť operátor A není konečnědimenzionální, tj.* $\dim\big(\operatorname{Im} A\big) = +\infty$. *Potom množina* $\operatorname{Im} A$ *není uzavřená.*

Důkaz. Připusťme sporem, že množina $\operatorname{Im} A$ je uzavřená. Pak je $\operatorname{Im} A$ Banachův prostor. Zřejmě

$$X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B[0,k].$$

Proto máme

$$\operatorname{Im} A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} AB[0,k]. \tag{8.2}$$

Vzhledem ke kompaktnosti operátoru A jsou množiny $AB[0,k]$ $(k \in \mathbb{N})$ prekompaktní v prostoru $\operatorname{Im} A$. Poněvadž je $\dim\big(\operatorname{Im} A\big) = +\infty$, Tvrzení 8.2 zaručí, že jsou množiny $AB[0,k]$ $(k \in \mathbb{N})$ řídké v prostoru $\operatorname{Im} A$. Z vyjádření (8.2) tedy plyne, že $\operatorname{Im} A$ je množinou I. kategorie, což je ve sporu s Bair–Hausdorfovou větou 8.1. □

Věta 8.4. *Nechť k operátoru A existuje na množině* $\operatorname{Im} A \subseteq Y$ *inverzní operátor A^{-1}. Potom operátor* $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to X$ *není ohraničený.*

Důkaz. Připustíme-li opak, že je operátor $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to X$ ohraničený, potom lze jednoduše ověřit, že operátor $I = A^{-1}A : X \to X$ je kompaktní, což je ve sporu s Tvrzením 5.14. □