VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

VLASTNOSTI PROSTORŮ POSLOUPNOSTÍ A JEJICH APLIKACE V TEORII NELINEÁRNÍCH DIFERENČNÍCH ROVNIC

PROPERTIES OF SEQUENCE SPACES AND THEIR APPLICATIONS IN THE THEORY OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE JINDŘICH KOSÍK

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Mgr. PAVEL ŘEHÁK, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2021

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Jindřich Kosík**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.**
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vlastnosti prostorů posloupností a jejich aplikace v teorii nelineárních diferenčních rovnic

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při vyšetřování kvalitativních vlastností diferenčních rovnic hrají důležitou roli mj. nástroje funkcionální analýzy, jako např. věty o pevném bodu. Výsledky pro diferenční rovnice mohou být často chápány jako diskrétní analogie "spojitých" výsledků (tj. výsledků pro diferenciální rovnice). V literatuře se v této souvislosti velmi nezřídka vyskytují situace, kdy namísto detailního důkazu je (někdy i nekorektně) pouze stručně uvedeno, že dané tvrzení plyne podobně jako ve spojitém případě. Je proto namístě pokusit se o podrobnější rozbor příslušných partií a dále ukázat jejich využití při analýze kvalitativních vlastností diferenčních rovnic.

Cíle bakalářské práce:

1. Zpracování vybraných výsledků z funkcionální analýzy potřebných pro analýzu diferenčních rovnic s detailní diskuzí některých klíčových pojmů (jako např. kritérium relativní kompaktnosti v prostorech omezených posloupností apod.).
2. Analýza vybrané nelineární diferenční rovnice s využitím poznatků z první části.

Seznam doporučené literatury:

GRIFFEL, D. H. Applied Functional Analysis, Dover, 2002.

HANCHE-OLSEN, H., HOLDEN, H. The Kolmogorov-Riesz compactness theorem, Exp. Math. 28, 2010. 385-394.

CHENG, S. S., PATULA, W. T. An existence theorem for a nonlinear difference equation, Nonlinear Analysis 20, 1993. 193-203.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Cílem práce je detailní zpracování aparátu funkcionální analýzy pro studium kvalitativních vlastností řešení diferenčních rovnic a jeho využití při analýze specifikované nelineární diferenční rovnice. Práce obsahuje podrobný rozbor některých vlastností prostorů posloupností, diskrétních verzí Leviho věty o monotónní konvergenci a Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci a kritérií relativní kompaktnosti pro prostory posloupností. Teoretický aparát je doplněn větami o pevných bodech. Zavedené matematické prostředky jsou později využity při studiu konkrétní nelineární diferenční rovnice.

Summary
The goal of this thesis is a detailed elaboration on apparatus of functional analysis for study of qualitative properties of solutions of difference equations and its application for analysis of a specific nonlinear difference equation. The thesis includes detailed analysis of some properties of sequence spaces, discrete versions of Levi's monotone convergence theorem and Lebesgue's dominated convergence theorem and criteria for relative compactness of sequence spaces. Theoretical apparatus is completed with fixed point theorems. Introduced mathematical instruments are later used for study of a concrete nonlinear difference equation.

Klíčová slova
diferenční rovnice, prostory posloupností, diskrétní věty o konvergenci, kritérium relativní kompaktnosti, Schauderova věta o pevném bodě, Banachova věta o pevném bodě

Keywords
difference equation, sequence spaces, discrete convergence theorems, criterion for relative compactness, Schauder fixed point theorem, Banach fixed point theorem

JINDŘICH KOSÍK *Vlastnosti prostorů posloupností a jejich aplikace v teorii nelineárních diferenčních rovnic*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 37 s. Vedoucí diplomové práce doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.

Prohlašuji, že předloženou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Pavla Řeháka, Ph.D. s použitím zdrojů uvedených v seznamu literatury.

Jindřich Kosík

Rád bych poděkoval docentu Řehákovi za jeho odborné vedení, cenné rady a ochotu, se kterou se mi při psaní psaní práce věnoval.

Jindřich Kosík

Obsah

1 Úvod

Při vyšetřování diferenčních rovnic hraje důležitou roli aparát funkcionální analýzy. Autoři se i v odborné literatuře při aplikaci těchto nástrojů často uchýlí k vágnímu konstatování, že lze jisté pasáže dokázat jako v případě spojitého protějšku vyšetřované rovnice. To se však někdy může ukázat jako nekorektní či nedostatečné, a je tudíž na místě detailně rozebrat přímo diskrétní případ.

Hlavním cílem práce je proto podrobně zpracovat matematický prostředky pro korektní analýzu diferenčních rovnic a názorně pak předvést využití některých zavedených pojmů a tvrzení u konkrétní nelineární diferenční rovnice.

V kapitole 2 definujeme různé prostory posloupností a uvedeme a dokážeme některé z jejich klíčových vlastností, zejména se zaměříme na prostory ℓ^p a ℓ^∞. Zformulujeme diskrétní verze Leviho věty o monotónní konvergenci a Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci, ty pak s využitím různých přístupů dokážeme, při tom budeme vycházet z klasických verzí těchto tvrzení. Poté se budeme věnovat kritériím relativní kompaktnosti u prostorů ℓ^p a ℓ^∞.

V kapitole 3 se zaměříme na věty o pevných bodech, zejména pak na větu Banachovu a větu Schauderovu. Ty blíže okomentujeme a řádně dokážeme.

V kapitole 4 vyšetříme konkrétní nelineární diferenční rovnici, u té naformulujeme jisté předpoklady, za kterých dokážeme existenci jejího řešení s požadovanými vlastnostmi. Předpoklady následně upravíme a dokážeme vedle existence i jednoznačnost.

2 Prostory posloupností

2.1 Definice prostorů posloupností

V této části uvedeme definice metrických prostorů ℓ^p a ℓ^∞ a některých dalších prostorů posloupností. Pro naše účely stačí uvažovat pouze reálné posloupnosti, je však dobré zmínit, že většina v práci uvedených výsledků platí prakticky beze změny (či s malými modifikacemi) i pro komplexní posloupnosti. V této části budeme čerpat ze zdrojů týkajících se funkcionální analýzy napříč seznamem literatury a poznámek z průběhu studia.

2.1.1 Prostor posloupností ℓ^p

Definice 2.1. Nechť $p \in [1, \infty)$ a M je množina reálných posloupností definovaná jako

$$M := \left\{ u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^\infty |u_k|^p < \infty \right\}.$$

Na uvedené množině zavedeme metriku pomocí zobrazení $\varrho_p : M \times M \to [0, \infty)$ daného předpisem

$$\varrho_p(u, v) := \left(\sum_{k=1}^\infty |u_k - v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M.$$

Množina M s definovanou metrikou ϱ_p pak tvoří metrický prostor (M, ϱ_p) označovaný běžně ℓ^p.

Poznámka 2.2. Uvedené prostory posloupností tvoří lineární prostory, kde lineární operace probíhají po složkách. Pro libovolné reálné posloupnosti u, v a libovolné $L \in \mathbb{R}$ proto platí

$$u + v = \{u_1, u_2, ...\} + \{v_1, v_2, ...\} = \{u_1 + v_1, u_2 + v_2, ...\}$$

a

$$Lu = L\{u_1, u_2, ...\} = \{Lu_1, Lu_2, ...\}.$$

Poznámka 2.3. Metrický prostor ℓ^p pro libovolné $p \in [1, \infty)$ je rovněž normovaným lineárním prostorem, příslušná norma je ve tvaru

$$\|u\|_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in M.$$

Poznamenejme ještě, že ℓ^2 je navíc prostorem unitárním. Skalární součin zavedeme jako

$$\langle u, v \rangle := \sum_{k=1}^\infty u_k v_k, \quad u, v \in M.$$

Zřejmě pak platí $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

2.1.2 Prostor posloupností ℓ^∞

Definice 2.4. Nechť M je množina reálných posloupností definovaná jako

$$M := \{u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ \{u_k\} \text{ je ohraničená}\}.$$

Na této množině uvažujme metriku ϱ_∞ s předpisem

$$\varrho_\infty(u,v) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k - v_k|, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M.$$

Množina M s metrikou ϱ_∞ tvoří metrický prostor (M, ϱ_∞) označovaný běžně ℓ^∞.

Poznámka 2.5. Metrický prostor ℓ^∞ je podobně jako ℓ^p současně normovaným lineárním prostorem, příslušná norma je dána předpisem

$$\|u\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|, \quad u \in M. \tag{2.1}$$

Definice 2.6. Metriku ϱ_∞ lze uvažovat také na množinách K posloupností majících konečný počet prvků, L posloupností konvergujících k nule a N konvergentních posloupností, přesněji

$$K := \{u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ \text{kde } v_k \neq 0 \text{ pro konečně mnoho } k \in \mathbb{N}\},$$

$$L := \{u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ \lim_{k\to\infty} u_k = 0\},$$

$$N := \{u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ \{u_k\} \text{ konverguje}\}.$$

Metrické prostory (K, ϱ_∞), (L, ϱ_∞) a (N, ϱ_∞) pak značíme c_{00}, c_0 a c.

Poznámka 2.7. O metrických prostorech c_{00}, c_0 a c lze také tvrdit, že jsou normovanými lineárními prostory s normou (2.1).

Poznámka 2.8. Za zmínku stojí fakt, že množinově mezi výše zmíněnými prostory posloupností existuje následující vztah

$$c_{00} \subset \ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty,$$

kdy $1 < p_1 < p_2 < \infty$.

2.1.3 Prostory posloupností s váhou

Definice 2.9. Nechť $p \in [1, \infty)$, $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ je kladná posloupnost a M je množina reálných posloupností definovaná jako

$$M := \left\{ u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^\infty w_k |u_k|^p < \infty \right\}.$$

Na M zavedeme metriku $\varrho_{p,w}$ následovně

$$\varrho_{p,w}(u,v) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k |u_k - v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M.$$

Posloupnost w označíme za *váhovou* a metrický prostor $(M, \varrho_{p,w})$ pak běžně značíme $\ell^p(w)$.

Poznámka 2.10. O metrickém prostoru $\ell^p(w)$ pro libovolné $p \in [1,\infty)$ můžeme zároveň konstatovat, že je lineárním normovaným prostorem, příslušná norma je dána předpisem

$$\|u\|_{p,w} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in M.$$

Definice 2.11. Nechť $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ je kladná posloupnost a M je následující množina reálných posloupností

$$M := \{u = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R},\ \{w_k u_k\} \text{ je ohraničená}\}.$$

Na M uvažujeme metriku $\varrho_{\infty,w}$ ve tvaru

$$\varrho_{\infty,w}(u,v) := \sup_{k \in N} w_k |u_k - v_k|, \quad u = \{u_k\}, v = \{v_k\} \in M.$$

Metrický prostor $(M, \varrho_{\infty,w})$ pak označíme $\ell^{\infty}(w)$.

Poznámka 2.12. Prostor $\ell^{\infty}(w)$ je normovaným lineárním prostorem s normou

$$\|u\|_{\infty,w} := \sup_{k \in \mathbb{N}} w_k |u_k|, \quad u \in M.$$

Poznámka 2.13. Prostor $\ell^p(w)$ běžně využíváme, pokud pracujeme s posloupnostmi $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, pro které neplatí $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p < \infty$, ale lze vzít v úvahu slabší podmínku

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k |u_k|^p < \infty.$$

Podobně prostor $\ell^{\infty}(w)$ využijeme za předpokladu, že pracujeme s posloupnostmi $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, které nejsou ohraničené. Zužitkujeme pak fakt, že posloupnosti $\{w_k u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ohraničené jsou.

Poznámka 2.14. Je dobré si také uvědomit, že navzdory tomu, že všechny výše uvedené metriky jsou generovány odpovídající normou, existují i metriky na prostoru posloupností, u kterých tomu tak není. Uveďme například na prostoru všech reálných posloupností X metriku definovanou následovně

$$\varrho(u,v) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|u_k - v_k|}{1 + |u_k - v_k|}, \quad u, v \in X.$$

Tato metrika žádnou normou generována není.

2.2 Základní vlastnosti prostorů posloupností

V této části se zaměříme na některé z klíčových vlastností prostorů posloupností, především pak úplnost a separabilitu. Čerpat budeme opět z poznámek z průběhu studia a různých zdrojů ze seznamu literatury zaměřených na funkcionální analýzu.

2.2.1 Základní vlastnosti prostoru ℓ^p

Budeme se zabývat základními vlastnostmi metrických prostorů ℓ^p pro $p \in [1, \infty)$. Nejprve prozkoumáme úplnost.

Věta 2.15 (Úplnost ℓ^p)**.** Metrický prostor ℓ^p pro libovolné $p \in [1, \infty)$ je úplný.

Důkaz. Zvolme $p \in [1, \infty)$. Nechť $\{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell^p$ je cauchyovská posloupnost, tedy taková posloupnost, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq n_\varepsilon$ platí

$$\varrho_p(u^{[i]}, u^{[j]}) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^{[i]} - u_k^{[j]} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Lze tvrdit, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{u_k^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ cauchyovská v $\mathbb{E}^1$. Víme, že v $\mathbb{E}^1$ pojmy konvergentní a cauchyovská posloupnost splývají. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je tak posloupnost $\{u_k^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v $\mathbb{E}^1$. Označme pro všechna $k \in \mathbb{N}$

$$u_k := \lim_{n \to \infty} u_k^{[n]} \tag{2.3}$$

a

$$u := \{u_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Musíme dokázat, že $\{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k u v ϱ_p a $u \in \ell^p$. Díky (2.2) pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $n_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq n_{\varepsilon/2}$, pro všechna $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \left| u_k^{[i]} - u_k^{[j]} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varrho_p(u^{[i]}, u^{[j]}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nyní provedeme limitní přechod pro $j \to \infty$, pak je pro všechna $k \in \mathbb{N}$ díky (2.3) splněno

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \left| u_k^{[i]} - u_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dalším limitním přechodem pro $m \to \infty$ pak dostaneme

$$\varrho_p(u^{[i]}, u) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^{[i]} - u_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Proto lze tvrdit, že $\{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k u v ϱ_p. Z konvergence $\{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ plyne ohraničenost této posloupnosti v ℓ^p. Existuje tedy $L > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k^{[n]} \right|^p \leq L.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ díky (2.3) dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \leq L$$

a z toho $u \in \ell^p$. $\square$

Věta 2.16 (Separabilita ℓ^p)**.** Metrický prostor ℓ^p pro libovolné $p \in [1, \infty)$ je separabilní.

Důkaz. Je třeba dokázat existenci spočetné množiny husté v nosné množině tohoto prostoru. Vezměme

$$N = \{\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q},\ \text{kde } v_k \neq 0 \text{ pro konečně mnoho } k \in \mathbb{N}\}. \tag{2.4}$$

Poznamenejme, že množina N je podmnožinou prostoru c_{00}. Je spočetná, neboť $\mathbb{Q}$ je spočetná množina, konečná kombinace prvků spočetné množiny je spočetná a spočetné sjednocení spočetných množin je opět množina spočetná.

Je nutné dokázat, že množina N je hustá v nosné množině ℓ^p. Uvažujme libovolný prvek $u = \{u_k\} \in \ell^p$, je třeba demonstrovat, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $v = \{v_1, v_2, ... v_{n_0}, 0, ...\} \in N$ takové, že $\varrho_p^p(u, v) < \varepsilon$. Rozepišme $\varrho_p^p(u, v)$ následovně

$$\varrho_p^p(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k - v_k|^p = \sum_{k=1}^{n_0} |u_k - v_k|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |u_k|^p.$$

Z konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p$ plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |u_k|^p < \varepsilon/2$. Z hustoty $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ vyplývá

$$\sum_{k=1}^{n_0} |u_k - v_k|^p < \varepsilon/2.$$

Celkově tedy $\varrho_p^p(u, v) < \varepsilon$. $\square$

2.2.2 Základní vlastnosti prostoru ℓ^∞

V této části se zaměříme na vlastnosti metrického prostoru ℓ^∞.

Věta 2.17 (Úplnost ℓ^∞)**.** Metrický prostor ℓ^∞ je úplný.

Důkaz. Nechť $\{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell^\infty$ je cauchyovská posloupnost, tedy taková posloupnost, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq n_\varepsilon$ platí

$$\varrho_\infty(u^{[i]}, u^{[j]}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| u_k^{[i]} - u_k^{[j]} \right| < \varepsilon.$$

Z toho pro všechna $i, j \geq n_\varepsilon$, pro všechna $k \in \mathbb{N}$ plyne

$$\left| u_k^{[i]} - u_k^{[j]} \right| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Proto platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$, že posloupnost $\{u_k^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ je cauchyovská v $\mathbb{E}^1$, a tedy konvergentní. Označme pro všechna $k \in \mathbb{N}$

$$u_k := \lim_{n \to \infty} u_k^{[n]}$$

a

$$u := \{u_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Posloupnost u je zřejmě, vzhledem ke konstrukci, ohraničená, a tudíž $u \in \ell^{\infty}$.

Nyní zbývá dokázat, že posloupnost $\{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k u v metrice ϱ_{∞}. Díky (2.5) lze konstatovat, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $n_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq n_{\varepsilon/2}$, pro všechna $k \in \mathbb{N}$

$$\left| u_k^{[i]} - u_k^{[j]} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Limitním přechodem pro $j \to \infty$ dostaneme pro všechna $i \geq n_{\varepsilon/2}$ a všechna $k \in \mathbb{N}$

$$\left| u_k^{[i]} - u_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z toho obdržíme pro všechna $i \geq n_{\varepsilon/2}$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| u_k^{[i]} - u_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy k u v metrice ϱ_{∞} konverguje. □

Věta 2.18 (Neseparabilita ℓ^{∞})**.** Metrický prostor ℓ^{∞} není separabilní.

Důkaz. Abychom dokázali neseparabilitu ℓ^{∞}, stačí nalézt nějaké $\delta > 0$ a nespočetnou podmnožinu N nosné množiny ℓ^{∞} takovou, že pro všechny posloupnosti $u, v \in N$ takové, že $u \neq v$, platí $\varrho_{\infty}(u, v) > \delta$. Uvažujme množinu $N \subset \ell^{\infty}$ ve tvaru

$$N = \{u = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R},\ u_k = 0 \text{ nebo } u_k = 1\}.$$

Tato množina je zřejmě nespočetná, neboť platí

$$\operatorname{card}\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

Navíc pokud vezmeme libovolná u, $v \in N$ taková, že $u \neq v$, platí $\varrho_{\infty}(u, v) = 1$. Z toho plyne, že ℓ^{∞} není separabilní. □

2.2.3 Vlastnosti některých dalších prostorů posloupností

V této části rozebereme vlastnosti dalších prostorů posloupností zmíněných v části 2.1. Důkazy zde tentokrát uvedeme jen u některých tvrzení, u zbytku v zájmu stručnosti pouze naznačíme myšlenku.

Věta 2.19. Prostor c_{00} není úplný.

Důkaz. Uvažujme posloupnost $\{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subset c_{00}$, takovou, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$u^{[n]} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots \right\},$$

tato posloupnost je cauchyovská, neboť když zvolíme $\varepsilon = 1/N$, kde $N \in \mathbb{N}$ a vezmeme $n, m \in \mathbb{N}$ takové, že $n > m > N$, pak

$$u^{[n]} - u^{[m]} = \left\{ 0, \dots 0, \frac{1}{m+1}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0 + \dots \right\}$$

a platí

$$\left\|u^{[n]} - u^{[m]}\right\|_\infty = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} < \frac{1}{N} = \varepsilon.$$

Dále je splněno

$$\lim_{n\to\infty} u^{[n]} = u = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Posloupnost u zřejmě nepatří do prostoru c_{00} a ten tak není úplný. □

Věta 2.20. Prostory c_0 a c jsou úplné.

Důkaz. Lze ukázat, že c_0 a c jsou uzavřenými podmnožinami prostoru ℓ^∞, který je úplný, a proto jsou také úplné. Detaily vynecháme. □

Věta 2.21. Prostory c_{00}, c_0 a c jsou separabilní.

Důkaz. Uvažujme množinu (2.4) podobně jako v důkazu věty 2.16., přesněji

$$N = \{\{v_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{Q},\ \text{kde } v_k \neq 0 \text{ pro konečně mnoho } k \in \mathbb{N}\}.$$

Vezmeme-li nyní libovolnou posloupnost $u = \{u_k\} \in c_{00}$, pak pro ni jistě existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k > m$ platí $u_k = 0$. Z hustoty racionálních čísel v množině čísel reálných plyne, že každý prvek u_k, kde $k \leq m$, posloupnosti u, lze libovolně blízko aproximovat racionálním číslem. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ tak existuje posloupnost $v = \{v_k\} \in N$, kde $v_k = 0$ pro $k > m$, taková, že

$$\varrho_\infty(u, v) = \sup_{k\leq m} |u_k - v_k| < \varepsilon.$$

Množina N je proto hustá v c_{00}, a protože je spočetná, je c_{00} separabilní.

Prostor c_{00} je hustý v c_0. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a uvažujme posloupnosti $u \in c_0$ a $v \in c_{00}$ takové, že $\varrho_\infty(u, v) < \varepsilon/2$ a posloupnost $z \in N$ takovou, že $\varrho_\infty(v, z) < \varepsilon/2$. Z trojúhelníkové nerovnosti nyní vyplývá následující

$$\varrho_\infty(u, z) < \varrho_\infty(u, v) + \varrho_\infty(v, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Množina N je tedy hustá i v prostoru c_0, ten je proto také separabilní.

V případě prostoru c se uvažuje množina skorostacionárních posloupností racionálních čísel, přesněji

$$U = \{\{v_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{Q},\ \text{kde existuje } k_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \text{že } v_n = v_{k_0} \text{ pro } n \geq k_0\}.$$

Lze ukázat, že tato množina je spočetná a pomocí jejích prvků lze libovolně přesně aproximovat posloupnosti z prostoru c, ten je proto separabilní. □

Poznámka 2.22. Prostory s váhou přebírají vlastnosti prostorů, od kterých jsou odvozeny. Platí tedy, že $\ell^p(w)$ je úplný a separabilní a $\ell^\infty(w)$ je úplný a neseparabilní.

2.2.4 Některé další vlastnosti prostorů posloupností

V této části uvedeme zejména dvě známé a užitečné nerovnosti, které platí pro posloupnosti reálných čísel, a sice Hölderovu a Minkowského nerovnost.

Věta 2.23 (Hölderova nerovnost)**.** Nechť $p, q \in (1, \infty)$ splňují

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a nechť $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel, pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Věta 2.24 (Minkowského nerovnost)**.** Nechť $p, q \in [1, \infty)$ a $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel, pak platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k + v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zmiňme se ještě o kompaktnosti. Pro metrické prostory konečné dimenze platí, že jejich podmnožiny jsou omezené a uzavřené právě tehdy, když jsou kompaktní. Jinými slovy pro důkaz kompaktnosti, potažmo dalších vlastností z kompaktnosti plynoucích (prekompaktnost, relativní kompaktnost atd.), stačí ukázat uzavřenost a omezenost. V případě prostorů nekonečné dimenze, jako jsou prostory posloupností, tomu tak není.

2.3 Věty o konvergenci

V této části ukážeme různé přístupy k důkazu platnosti diskrétních verzí Leviho věty o monotónní konvergenci a Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci (verze pro posloupnosti).

Nejprve uvedeme přímý přístup, kdy elementárními prostředky nejprve dokážeme diskrétní verzi Fatouova lemmatu, pomocí kterého diskrétní verze vět o limitním přechodu následně dokážeme. Další přístup spočívá v konstrukci schodovitých funkcí a následném využití klasických verzí vět o konvergenci. Poslední přístup využívá abstraktní teorie míry. Nakonec uvedeme ještě limitní věty formulované pro řady. Jako hlavní zdroje nám posloužily práce [2], [4], [5] a [9].

2.3.1 Čistě diskrétní přístup

V této části zavedeme diskrétní verze vět o konvergenci prostřednictvím diskrétní verze Fatouova lemmatu. Nejprve toto lemma uvedeme a dokážeme. Důkaz zde spočívá v odhadech infim vhodnými posloupnosti.

Lemma 2.25 (Fatouovo – diskrétní)**.** Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost nezáporných čísel, která splňuje rovnost $\liminf_{n\to\infty} u_k^{[n]} = v_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} u_k^{[n]} \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Uvažujme libovolné $k \in \mathbb{N}$ a $t \in \mathbb{N}$ takové, že $t \ge n$. Potom

$$\inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \le u_k^{[t]}.$$

Z toho plyne, že pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ a $t \in \mathbb{N}$ takové, že $t \ge n$, platí

$$\sum_{k=1}^{m} \inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \le \sum_{k=1}^{m} u_k^{[t]}.$$

Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ je pak splněno

$$\sum_{k=1}^{m} \inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \le \inf_{t\ge n} \sum_{k=1}^{m} u_k^{[t]} \le \inf_{t\ge n} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[t]}.$$

Z uvedeného pro všechna $m \in \mathbb{N}$ vyplývá

$$\sum_{k=1}^{m} v_k = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \inf_{s\ge n} u_k^{[s]} \le \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{t\ge n} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[t]} \right) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Nakonec provedeme limitní přechod $m \to \infty$ pro $\sum_{k=1}^{m} v_k$ a dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

□

Věta 2.26 (Leviho o monotónní konvergenci – diskrétní)**.** Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ posloupnost nezáporných čísel a je splněno, že $\{u_k^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ je pro všechna $k \in \mathbb{N}$ neklesající posloupnost (tj. $u_k^{[n]} \le u_k^{[n+1]}$) a konverguje pro $n \to \infty$ k v_k. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{[n]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Z předpokladů věty plyne pro libovolné $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \le \sum_{k=1}^{\infty} v_k,$$

a platí tedy i

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \le \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{2.6}$$

Dále na základě Fatouova lemmatu můžeme usoudit

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}. \tag{2.7}$$

Celkově z (2.6) a (2.7) vyplývá

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Z této nerovnosti pak plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{[n]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

$\square$

Věta 2.27 (Lebesgueova o dominantní konvergenci – diskrétní)**.** Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost reálných čísel a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je splněno $\lim\limits_{n\to\infty} u_k^{[n]} = v_k$. Dále nechť existuje posloupnost $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ nerovnost $|u_k^{[n]}| \leq w_k$, přičemž $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$. Potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{[n]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Důkaz. Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $|u_k^{[n]}| \leq w_k$, můžeme tvrdit pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{[n]}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

Z toho vyplývá, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ absolutně konvergentní.

Uvažujme nyní pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost $\{w_k - u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$, pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je splněno $|u_k^{[n]}| \leq w_k$, a proto je to posloupnost nezáporných čísel. Z Fatouova lemmatu pak plyne

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k - u_k^{[n]}\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \left(w_k - u_k^{[n]}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (w_k - v_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} w_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k,$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k - \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k - u_k^{[n]}\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} w_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Z toho můžeme vyvodit

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{2.8}$$

Vezměme nyní posloupnost $\{w_k + u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$, ta je podobně jako $\{w_k - u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupností nezáporných čísel. Aplikujme na ni Fatouovo lemma následovně

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k + u_k^{[n]}\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \left(w_k + u_k^{[n]}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (w_k + v_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} w_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k,$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k + \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k + u_k^{[n]}\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} w_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Z toho vyplývá

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \geq \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{2.9}$$

Z (2.8) a (2.9) poté plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Na základě této nerovnosti pak můžeme konstatovat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

□

Poznámka 2.28. V případě posloupnosti $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ z Lebesgueovy věty je pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splněno $|u_k^{[n]}| \leq w_k$. Vzhledem k tomu, že $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k^{[n]}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |w_k| = \sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{[n]}|$ je tak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ konvergentní a $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{[n]}|$ absolutně konvergentní.

2.3.2 Využití klasických verzí vět o limitním přechodu

Důkazy diskrétních verzí vět o konvergenci můžeme provést také bez využití diskrétního Fatouova lemmatu pomocí schodovitých funkcí v kombinaci s klasickými verzemi vět o konvergenci. Tyto věty patří mezi známé poznatky z funkcionální analýzy a jejich důkazy nebudeme uvádět.

Věta 2.29 (Leviho o monotónní konvergenci)**.** Nechť $f_n : I \to \mathbb{R}$ je neklesající posloupnost nezáporných měřitelných funkcí. Dále nechť pro $x \in I$ platí $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

.

Věta 2.30 (Lebesgueova o dominantní konvergenci)**.** Nechť $f_n : I \to \mathbb{R}$ je posloupnost měřitelných funkcí a pro $x \in I$ platí $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dále nechť g je lebesgueovsky integrovatelná funkce na I, taková, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro $x \in I$. Potom je f lebesgsueovsky integrovatelná a platí, že f_n konverguje k f v normě L^1. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice 2.31 (Charakteristická funkce)**.** Nechť A je podmnožinou množiny M. Funkce $\chi_A : M \to \{0,1\}$ je *charakteristickou funkcí* množiny A v množině M, pokud platí $\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$ a $\chi_A(x) = 0$ pro $x \in M/A$.

Konstrukce a využití schodovitých funkcí

Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost nezáporných čísel, která pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splňuje $\lim_{n\to\infty} u_k^{[n]} = v_k$. Uvažujme intervaly $I_i = [i,\ i+1)$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a definujme funkci f_n následujícím způsobem

$$f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i} u_i^{[n]}. \tag{2.10}$$

Získali jsme takto posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných měřitelných funkcí. Podobně pro $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ lze definovat měřitelnou funkci f takto

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i} v_i. \tag{2.11}$$

Za předpokladu, že $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost nezáporných čísel, je i posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupností, tentokrát nezáporných funkcí. Pak jsou splněny předpoklady Leviho věty a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně můžeme uvažovat, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost obecně reálných čísel $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ a předpokládat, že existuje posloupnost $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ nerovnost $|u_k^{[n]}| \leq w_k$ a je splněno $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$. Opět sestrojíme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jako (2.10) a f jako (2.11). Funkci g v duchu (2.10) získáme následujícím způsobem

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{I_i} w_i.$$

Funkce g je lebesgueovsky integrovatelná a platí $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro $x \in I$. Pak jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty a lze opět konstatovat

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrály funkcí f_n se v případě obou limitních vět pro všechna $n \in \mathbb{N}$ díky jejich konstrukci přesně redukují na sumy. Je tedy splněno

$$\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Totéž lze tvrdit i pro funkce f a g. Opět jsme tak dokázali platnost diskrétních verzí vět o konvergenci.

2.3.3 Abstraktní přístup k teorii míry

K důkazu platnosti diskrétních verzí vět o konvergenci lze využít také přístup využívající teorie obecného měřitelného prostoru a abstraktní teorie míry. Na obecném měřitelném prostoru lze pro funkce opět odvodit věty o konvergenci. Diskrétní věty o limitním přechodu pak plynou z obecných verzí vět, pokud vhodně zvolíme nosnou množinu měřitelného prostoru a s ní vhodnou míru (viz dále).

Definice 2.32. Nechť M je neprázdná množina. Potom Σ je σ-algebrou podmnožin množiny X, pokud splňuje:

- $M \in \Sigma$,
- $M \setminus A \in \Sigma$ pro každou množinu $M \in \Sigma$,
- pro každý spočetný systém množin $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ množin $A_k \in \Sigma$ je splněno $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

Dvojici (M, Σ) pak označíme jako *měřitelný prostor* a prvky systému Σ jako *měřitelné množiny.*

Definice 2.33. Míru na měřitelném prostoru (X, Σ) definujeme jako zobrazení $\mu : \Sigma \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$, které splňuje následující dvě vlastnosti:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ pro každou posloupnost $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ po dvou disjunktních množin $A_k \in \Sigma$.

Trojici (M, Σ, μ) pak označíme za *prostor s mírou.* Pokud $\mu(M) < \infty$, označíme míru μ za *konečnou.* Jestliže $\mu(M) = 1$ potom se jedná o míru pravděpodobnostní a (M, Σ, μ) je tzv. pravděpodobnostní prostor.

Na prostorech s mírou lze podobně jako na $\mathbb{R}$ korektně zavést Lebesgueův integrál a následně i dokázat věty o limitním přechodu (viz [2]).

Definice 2.34 (Čítací míra)**.** Uvažujme množinu $M = \mathbb{N}$ a její σ-algebru $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jestliže $\alpha : \Sigma \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ je zobrazení definované následujícím způsobem

$$\alpha(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & \text{pokud je množina } A \text{ konečná,} \\ \infty & \text{pokud množina } A \text{ není konečná,} \end{cases}$$

pak α je míra na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, kterou označíme za *čítací* (též *aritmetickou*, nebo *počítací*).

Vzhledem k tomu, že na prostorech s mírou (M, Σ, μ) platí pro lebesgueovsky integrovatelné funkce věty o konvergenci, můžeme volbou prostoru $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ s čítací mírou α zavést sumu jako případ Lebesgueova integrálu. Pro funkce na takovém prostoru pak platí

$$\int_{k\in\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

S ohledem na korektní zavedení vět o konvergenci na prostorech s mírou jsme opět dokázali diskrétní verze vět o konvergenci.

2.3.4 Diskrétní Leviho a Lebesgueova věta pro řady

Nyní se zaměříme na věty o limitním přechodu pro nekonečné řady. Jak je známo, řady studujeme jako posloupnosti částečných součtů. Pokud uvažujeme posloupnost částečných součtů $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$, tedy takovou posloupnost, že $v_j = \sum_{k=1}^{j} u_k$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$, pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} u_k = \lim_{j\to\infty} v_j.$$

Z tohoto vztahu nyní zřejmě plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j}\sum_{n=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Této skutečnosti využijeme při formulaci vět o konvergenci pro řady, kdy pozměníme formulaci vět z části 2.3.1.

Věta 2.35 (Diskrétní Leviho věta pro řady)**.** Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost nezáporných čísel a je splněno, že $\{\sum_{k=1}^{j} u_k^{[n]}\}_{j=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ neklesající posloupnost nezáporných čísel, pro kterou platí $\lim\limits_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Věta 2.36 (Diskrétní Lebesgueova věta pro řady)**.** Nechť $\{u_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost reálných čísel taková, že platí, že $\{\sum_{k=1}^{j} u_k^{[n]}\}_{j=1}^{\infty}$ je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ posloupnost reálných čísel, pro kterou je splněno $\lim\limits_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Dále nechť existuje nějaká posloupnost $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $j \in \mathbb{N}$ nerovnost $|\sum_{k=1}^{j} u_k^{[n]}| \le w_k$, přičemž $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

Poznámka 2.37. Můžeme si povšimnout zaměnitelnosti sum, dospěli jsme v podstatě k analogii Fubiniho věty pro nekonečné řady.

Poznámka 2.38. Uvažujeme-li prostor s mírou (M, Σ, μ), můžeme opět zavést věty o limitním přechodu pro řady. Za splnění určitých předpokladů dostáváme pro $f_k : M \to [0, \infty)$, pro všechna $k \in \mathbb{N}$ lebesgueovsky integrovatelnou funkci, následující vztah

$$\int_M \sum_{k=1}^{\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Pokud podobně jako v části 2.3.3 zvolíme měřitelný prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ a čítací míru α, dokážeme odlišně stejnou skutečnost jako ve větách 2.35 a 2.36. Vezmeme-li v úvahu spočetnou množinu $N = \{u_k^{[n]},\ k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$, pak lze zaručit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_k^{[n]} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{[n]}.$$

2.4 Kritéria relativní kompaktnosti

V této části se budeme zabývat kritérii relativní kompaktnosti pro prostory posloupností. Nejprve uvedeme obecnou definici prekompaktnosti a relativní kompaktnosti a podstatné úvahy, které se s nimi pojí. Pak na to navážeme zkoumáním relativní kompaktnosti přímo u prostorů ℓ^∞ a ℓ^p, vycházet budeme především z [3] a [8].

2.4.1 Prekompaktnost

Definice 2.39 (ε-síť)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor, ε kladné reálné číslo a $N \subseteq M$. Množinu $A \subseteq M$ označíme za *ε-síť* množiny N, pokud pro všechna $u \in N$ existuje $v \in A$ tak, že $\varrho(u, v) \leq \varepsilon$.

Definice 2.40 (Prekompaktní množina)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor, množinu $N \subseteq M$ označíme za *prekompaktní*, jestliže existuje její konečná ε-síť pro každé ε.

Poznámka 2.41. V terminologii zde obecně často panují zmatky, někdy je v literatuře prekompaktnost označována jako totální omezenost (viz [6]). Jinde se dokonce používá pojmu prekompaktní množina pro množiny relativně kompaktní, které dále také diskutujeme. K této záměně dochází zejména, pokud jsou diskutovány úplné prostory. Zde totiž pojmy splývají.

Věta 2.42. Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a $N \subseteq M$, pak platí, že N je prekompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti prvků z N lze vybrat cauchyovskou podposloupnost.

Poznámka 2.43. Jestliže je $N \subseteq M$ prekompaktní, pak je omezená.

Poznámka 2.44. Pojmy omezenosti a prekompaktnosti pro množiny v $\mathbb{E}^m$ splývají, obecně tomu však není. Jako příklad omezené množiny, která není prekompaktní, můžeme vzít jednotkovou sféru v prostoru ℓ^p pro $p \in [0, \infty)$. Tedy množinu

$$S = \left\{ u \in \ell^p : \sum_{k=1}^{\infty} u_k^p = 1 \right\}.$$

U té je omezenost zřejmá. Vezmeme-li množinu $N = \{u^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ takovou, že $u^{[n]}$ má pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jedničku na n-té pozici a na ostatních pozicích nulu, je také omezená. Zvolíme-li pak $\varepsilon < 2^{1/p}/2$, konečnou ε-síť množiny N nenajdeme. Pro libovolná $i, j \in \mathbb{N}$ taková, že $i \neq j$, totiž platí

$$\varrho_p\left(u^{[i]}, u^{[j]}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (u_k^{[i]} - u_k^{[j]})^p \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

a z $u^{[n]}$ tedy nelze vybrat cauchyovskou podposloupnost.

2.4.2 Relativní kompaktnost

Definice 2.45 (Relativně kompaktní množina)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor. Množinu $N \subseteq M$ označíme za *relativně kompaktní*, jestliže její uzávěr $\overline{N} \subseteq M$ je množina kompaktní v (M, ϱ).

Věta 2.46. Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a $N \subseteq M$, pak platí, že N je relativně kompaktní právě tehdy, když z každé posloupnosti prvků z N lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Věta 2.47. Nechť (M, ϱ) je úplný metrický prostor, pak je množina $N \subseteq M$ relativně kompaktní právě tehdy, když je prekompaktní.

Důkaz. Nejprve si dokážeme implikaci zleva doprava. Z relativní kompaktnosti plyne prekompaktnost obecně čili není potřeba požadavek úplnosti N. Pokud je N relativně kompaktní, pak každá posloupnost obsahuje podposloupnost konvergentní v M a každá posloupnost tak obsahuje podposloupnost cauchyovskou.

K tomu, aby platila implikace zprava doleva, je již potřeba úplnost. Pokud je množina N prekompaktní, pak $\overline{N} \subseteq M$ je zřejmě také prekompaktní. Protože $\overline{N}$ je uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru (M, ϱ), můžeme tvrdit, že $\overline{N}$ tvoří také s příslušnou indukovanou metrikou úplný prostor. Množina $\overline{N}$ je tedy prekompaktní a úplná v (M, ϱ) a N je relativně kompaktní. □

Fakt, že u úplných metrických prostorů pojem relativní kompaktnosti a prekompaktnosti splývají, později využijeme. U podmnožin prostorů ℓ^∞ a ℓ^p budeme konstruovat konečné ε-sítě a přes důkaz prekompaktnosti dokážeme i relativní kompaktnost.

2.4.3 Relativně kompaktní podmnožiny prostoru ℓ^∞

Než uvedeme kritérium relativní kompaktnosti pro podmnožiny ℓ^∞, uvedeme ještě dvě důležité definice.

Definice 2.48 (Stejně ohraničené posloupnosti)**.** Posloupnosti z množiny $N \subset \ell^\infty$ označíme za *stejně ohraničené*, pokud je množina N v ℓ^∞ omezená.

Definice 2.49 (Stejně cauchyovské posloupnosti)**.** Posloupnosti z množiny $N \subset \ell^\infty$ označíme za *stejně cauchyovské*, pokud pro libovolné ε existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq n$ a pro libovolnou posloupnost $u \in N$ platí

$$|u_i - u_j| < \varepsilon.$$

Věta 2.50. Množina $N \subset \ell^\infty$ stejně a ohraničených a stejně cauchyovských posloupností je relativně kompaktní.

Důkaz. Důkaz věty bude spočívat v konstrukci konečné ε-sítě pro podmnožinu N prostoru ℓ^∞. Dokážeme tak prekompaktnost množiny N a tím pádem, vzhledem k úplnosti ℓ^∞, i relativní kompaktnost. Z faktu, že posloupnosti v množině N jsou stejně cauchyovské, plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq n$ a pro libovolnou posloupnost $u \in N$ platí

$$|u_i - u_j| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.12}$$

Posloupnosti z N jsou také stejně ohraničené, z toho vyplývá, že existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\|u\|_\infty \leq L, \quad u \in N.$$

Nechť $m \in \mathbb{N}$ je takové, že pro čísla $-L = y_1 < y_2 < ... < y_m = L$ je splněno $|y_i - y_{i+1}| < \varepsilon$ pro všechna $1 \leq i \leq m-1$. Dále pro všechna $k \in \{1, 2, ..., n\}$ přiřaďme v_k jednu z hodnot $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Pro $k > n$ položme $v_k = v_n$. Množina $A \subset \ell^\infty$ se pak sestává ze všech takto definovaných posloupností $v = \{v_k\}_{k=1}^\infty$. Těch je zřejmě m^n.

Zbývá ukázat, že množina A je ε-sítí množiny N a pro všechna $u \in N$ existuje $v \in A$ takové, že

$$\varrho_\infty(u, v) < \varepsilon.$$

Pro každé $k \in \{1, 2, ..., n\}$ vyberme $y_k \in \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ tak, aby platilo

$$|u_k - y_k| = \min_{j \in \{1,2,...,m\}} |u_k - y_j|.$$

Z (2.12) vyplývá $|u_k - y_k| < \varepsilon/2$ pro $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Položme $v_k = y_k$ pro $k \in \{1, 2, ..., n\}$ a $v_k = v_n$ pro $k > n$. Posloupnost v zřejmě náleží do množiny A. Pro $k \in \{1, 2, ..., n\}$ je pak zřejmě splněno

$$|u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.13}$$

a pro $k > n$

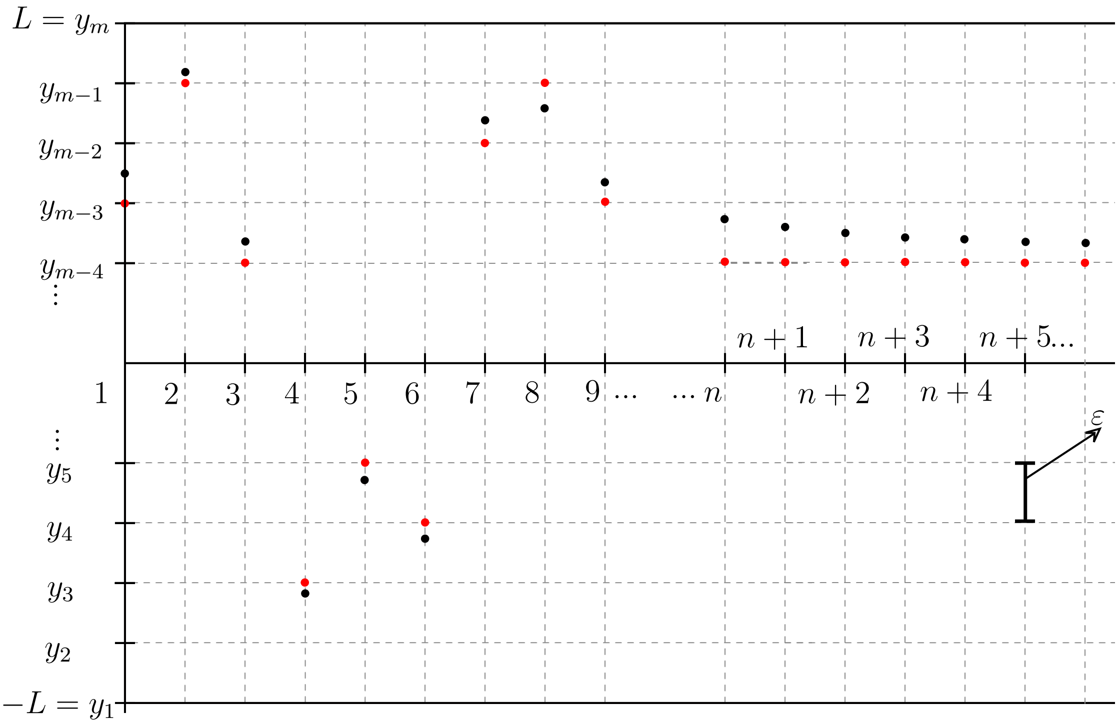
$$|u_k - v_k| = |u_k - v_n| \leq |u_k - u_n| + |u_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což plyne z trojúhelníkové nerovnosti a (2.12) a (2.13). Celkově tedy dostáváme

$$\varrho_\infty(u, v) < \varepsilon.$$

Množina A je konečnou ε-sítí množiny N. Tato množina je proto v ℓ^∞ prekompaktní a vzhledem k úplnosti ℓ^∞ i relativně kompaktní. $\square$

Poznámka 2.51. Pokud uvažujeme množinu stejně cauchyovských posloupností, pak je zřejmě každá z posloupností cauchyovská a tím pádem i konvergentní.



Obrázek 2.1: Aproximace posloupnosti $u \in N$ (černá barva) posloupností v z ε-sítě (červená barva)

2.4.4 Relativně kompaktní podmnožiny prostoru ℓ^p

Nejprve si uvedeme několik podstatných informací, které následně použijeme při důkazu kritéria relativní kompaktnosti pro podmnožiny prostorů ℓ^p, kde $p \in [0, \infty)$.

Poznámka 2.52. Analogicky jako u prostoru ℓ^∞ lze definovat pojem stejně ohraničených posloupností i pro prostor ℓ^p, jde tedy o posloupnosti z omezené podmnožiny ℓ^p.

Poznámka 2.53. Podmnožiny $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ jsou, pokud vezmeme libovolnou normu, prekompaktní právě tehdy, když jsou omezené.

Věta 2.54 (Ekvivalentní normy). Normy $\| \ \|_1$ a $\| \ \|_2$ na normovaném lineárním prostoru M jsou ekvivalentní právě tehdy, když existují takové konstanty $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, že pro všechna $u \in M$ platí

$$\alpha \|u\|_1 \le \|u\|_2 \le \beta \|u\|_1 .$$

Poznámka 2.55. Na lineárních prostorech konečné dimenze (zejména na $\mathbb{R}^m$ pro libovolné $m \in \mathbb{N}$) jsou všechny normy vzájemně ekvivalentní.

Věta 2.56. Množina $N \subset \ell^p$ pro $1 \le p < \infty$ je relativně kompaktní právě tehdy, když je tato množina stejně omezená a pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $u \in N$ platí

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Důkaz. Nejprve si dokážeme implikaci zleva doprava. Nechť N je relativně kompaktní (a tedy prekompaktní) neprázdná množina. Vzhledem k tomu, že je množina N prekompaktní, je omezená, a posloupnosti z N jsou stejně omezené. Z prekompaktnosti dále plyne, že pro $\varepsilon > 0$ libovolné, existuje $n \in \mathbb{N}$ a $v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)} \in N$ ($\varepsilon/2$-síť) takové, že

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/2}(v^{(i)}).$$

Protože pro $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ je splněno $v^{(i)} \in \ell^p$, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left| v_k^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i \in \{1, 2, 3, ..., n\}.$$

Uvažujme nyní $u \in N$ a $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ tak, že $u \in B_{\varepsilon/2}(v^{(i)})$, a tedy

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left| u_k - v_k^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k - v_k^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z Minkowského nerovnosti vyplývá

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left| u_k - v_k^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left| v_k^{(i)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Implikace zleva doprava je dokázána.

Zbývá dokázat implikaci zprava doleva. Budeme uvažovat $N \neq \emptyset$. Podle předpokladů věty pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pro } u \in M.$$

Jak již víme, existují takové konstanty α, β, že pro $y \in \mathbb{R}^m$ platí

$$\alpha \|y\|_p \le \|y\|_2 \le \beta \|y\|_p .$$

Uvažujme posloupnosti $u \in N$, vytvoříme množinu $\widetilde{N}$ vektorů $\widetilde{u}$ z prvních m prvků těchto posloupností, přesněji

$$\widetilde{N} := \{\widetilde{u}, u \in N\}.$$

Víme, že množina N je v ℓ^p omezená, a proto je množina $\widetilde{N} \subseteq \mathbb{R}^m$ omezená v $(\mathbb{R}^m, \| \|_p)$. Z toho plyne, že je $\widetilde{N}$ v tomto prostoru prekompaktní a existuje její konečná ε-síť. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ tak existuje $n \in \mathbb{N}$ a $v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)} \in \ell^p$ takové, že $\widetilde{v}^{(1)}, \widetilde{v}^{(2)}, ..., \widetilde{v}^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ tvoří $\varepsilon/2$-síť $\widetilde{N}$, přesněji

$$\widetilde{N} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/2}(\widetilde{v}^{(i)}).$$

Pro libovolné $u \in N$ tak existuje $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ takové, že platí

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \left|\widetilde{u}_k - \widetilde{v}_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Obecně je pro $u, v^{(i)} \in N$, kde $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, splněno

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k - v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} \left|u_k - v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left|u_k - v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O prvním sčítanci pravé strany nerovnosti pak lze zřejmě tvrdit následující

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \left|u_k - v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\widetilde{u}_k - \widetilde{v}_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Protože lze konstatovat, že platí

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left|-v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left|v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

odhadneme druhý sčítanec pomocí Minkowského nerovnosti a předpokladů věty následujícím způsobem

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left|u_k - v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left|v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Celkově tedy platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k - v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} \left|u_k - v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left|u_k - v_k^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

a

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon}(v^{(i)}).$$

Prvky $v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)} \in N$ tak tvoří konečnou ε-síť a množina N je v ℓ^p prekompaktní, a protože ℓ^p je úplný, i relativně kompaktní. $\square$

Poznámka 2.57. Věta 2.59 byla poprvé dokázána francouzským matematikem Fréchetem pro případ $p = 2$. Mírně odlišný přístup k důkazu kritéria nalezneme například v [5]. Poznamenejme ještě, že kritérium relativní kompaktnosti pro ℓ^p lze získat také zobecněním kritéria relativní kompaktnosti pro prostory lebesgueovsky integrovatelných funkcí L^p, které byly nezávisle dokázány ruským matematikem Kolmogorovem a maďarským matematikem Riezsem, více také v [5].

3 Věty o pevných bodech

V této kapitole rozebereme postupně několik vět o pevných bodech, především se pak zaměříme na věty Banachovu a Schauderovu, protože je budeme dále potřebovat. Vět o pevných bodech je však celá řada, více se lze dočíst např. v [7] a [10]. Nejprve je příhodné uvést definici pevného bodu.

Definice 3.1 (Pevný bod)**.** Nechť (M, ϱ) je metrický prostor a dále nechť $F : M \to M$. Bod $u^* \in M$ označíme za *pevný bod* zobrazení F, je-li splněno $F(u^*) = u^*$.

3.1 Banachova věta o pevném bodu

Věta 3.2 (Banachova o pevném bodu)**.** Nechť (M, ϱ) je úplný metrický prostor a zobrazení $F : M \to M$ je kontrakce. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení F, který je navíc limitou posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $u_1 \in M$ je libovolné a $u_{n+1} = F(u_n)$ pro $n = 2, 3, 4, 5...$

Důkaz. Nejprve musíme ukázat, že je posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\varrho(u_n, u_{n+1}) = \varrho(F(u_{n-1}), F(u_n)) \leq L\varrho(u_{n-1}, u_n),$$

opakováním tohoto kroku pak dostáváme

$$L\varrho(u_{n-1}, u_n) \leq L^2\varrho(u_{n-2}, u_{n-1}) \leq ... \leq L^{n-1}\varrho(u_1, u_2).$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti můžeme nyní vyjádřit pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$

$$\varrho(u_n, u_{n+m}) \leq \varrho(u_n, u_{n+1}) + \varrho(u_{n+1}, u_{n+2}) + ... + \varrho(u_{n+m-1}, u_{n+m}),$$

odtud

$$\begin{aligned}
\varrho(u_n, u_{n+m}) &\leq L^{n-1}\varrho(u_1, u_2) + L^n\varrho(u_1, u_2) + L^{n+1}\varrho(u_1, u_2) + ... + L^{n+m-2}\varrho(u_1, u_2) \\
&\leq \left(L^{n-1} + L^n + L^{n+1} + ... + L^{n+m-2}\right)\varrho(u_1, u_2) \\
&\leq (1 + L + L^2 + ... + L^{m-1})L^{n-1}\varrho(u_1, u_2) \\
&= \frac{1 - L^m}{1 - L}L^{n-1}\varrho(u_1, u_2) \leq L^{n-1}\frac{\varrho(u_1, u_2)}{1 - L}.
\end{aligned}$$

Pro $n \to \infty$ je splněno $L^{n-1} \to 0$ a tím pádem pro $n \to \infty$ platí

$$L^{n-1}\frac{\varrho(u_1, u_2)}{1 - L} \to 0.$$

Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská, a protože je (M, ϱ) úplný, existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u^*$.

Zbývá ukázat, že u^* je pevným bodem, a že je jednoznačný, zvětšujme proto $\varrho(u^*, F(u^*))$ následovně

$$\begin{aligned}
\varrho(u^*, F(u^*)) &\leq \varrho(u^*, u_n) + \varrho(u_n, F(u^*)) = \varrho(u^*, u_n) + \varrho(F(u_{n-1}, F(u^*)) \\
&\leq \varrho(u^*, u_n) + L\varrho(u_{n-1}, u^*).
\end{aligned}$$

Protože $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = x^*$, je splněno $\lim_{n\to\infty} \varrho(x^*, x_n) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_{n-1}, x^*) = 0$. Můžeme tedy konstatovat, že platí $\varrho(x^*, F(x^*)) = 0$, a proto $x^* = F(x^*)$. Bod x^* je tak pevným bodem zobrazení F. Předpokládejme, že by zobrazení F mělo dva různé pevné body x^*, x^{**}, pak

$$\varrho(x^*, x^{**}) = \varrho(F(x^*), F(x^{**})) \leq L\varrho(x^*, x^{**}).$$

Z toho následně plyne

$$(1 - L)\varrho(x^*, x^{**}) \leq 0,$$

a tedy $\varrho(x^*, x^{**}) = 0$, z čehož vyplývá $x^* = x^{**}$ a máme tedy spor. □

3.2 Schauderova věta o pevném bodu

V této části uvedeme nejprve Browerovu větu o pevném bodu, na kterou navážeme větou Schauderovou. Nejprve si definujme důležitý pojem konvexní množiny.

Definice 3.3 (Konvexní množina)**.** Podmnožinu N vektorového prostoru označíme za *konvexní*, jestliže pro libovolná $u, v \in N$ a pro všechna $\alpha \in [0, 1]$ platí $\alpha u + (1 - \alpha)v \in N$.

Věta 3.4 (Brouwerova o pevném bodu)**.** Nechť $N \in \mathbb{R}^n$ je množina, která je uzavřená, konvexní, omezená a $F : N \to N$ je spojité zobrazení. Pak existuje pevný bod u tohoto zobrazení náležící do množiny N.

Poznámka 3.5. Pro Brouwerovu větu není zajištěna, na rozdíl od věty Banachovy, jednoznačnost pevného bodu.

Věta 3.6 (Schauderova o pevném bodě)**.** Nechť M je Banachův prostor a $N \subseteq M$ neprázdná, kompaktní a konvexní množina a $F : N \to N$ je spojité zobrazení. Potom má zobrazení F pevný bod $u^* \in N$.

Důkaz. Pokud by byla množina $N \subseteq M$ konečné dimenze, tvrzení přejde na Brouwerovu větu. Předpokládáme-li, že má tato množina nekonečnou dimenzi, provádíme aproximaci nekonečně dimenzionální množiny N množinami N_n konečné dimenze. Dále aproximujeme zobrazení F zobrazeními $F_n : S_n \to S_n$, na které aplikujeme následně Brouwerovu větu. Dostáváme pak posloupnost pevných bodů posloupnosti zobrazení $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, kterou označíme $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Z takovéto posloupnosti pak můžeme vybrat podposloupnost $\{u_{n_k^*}\}_{k=1}^{\infty}$, jejíž limita je pevným bodem zobrazení F.

Nejprve musíme nadefinovat pro každé $n \in \mathbb{N}$ tzv. Schauderovy projekce. Z faktu, že je množina N kompaktní plyne, že ji lze pokrýt konečným počtem koulí. Předpokládejme tedy, že existuje $k \in \mathbb{N}$, že $u_1, u_2, ..., u_k$ jsou středy takových koulí, že

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{k} B\left(u_j, \frac{1}{n}\right).$$

Zaveďme dále funkci

$$f_j(u) = \max\left(0, \frac{1}{n} - \|u - u_j\|\right), \quad j = 1, 2, ..., k.$$

Pro každé $u \in N$ zřejmě existuje j takové, že $f_j(u) > 0$ a zřejmě $\sum_{j=1}^{k} f_j(u) > 0$. Schauderovu projekci P_n pak zavedeme pro $u \in N$ následujícím způsobem

$$P_n(u) = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j(u) u_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j(u)}.$$

Nyní zmiňme pojem konexního obalu. Podmnožinu conv$A$ vektorového prostoru M označíme za konvexní obal množiny A, jestliže

$$\mathrm{conv}A = \bigcap_{A \subseteq H} H, \text{ kde } H \subseteq M \text{ je konvexní.}$$

Tohoto pojmu dále využijeme, neboť abychom mohli použít Brouwerovu větu, zavedeme N_n jako konvexní obal $u_1, u_2, ..., u_k$. Taková množina je pak také omezená a uzavřená. Zobrazení F_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme takto

$$F_n = P_n F|_{N_n}$$

Dostáváme tak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ spojité zobrazení $F_n : N_n \to N_n$. Pro F_n a N_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou tak splněny předpoklady Brouwerovy věty a existuje tak pevný bod u_n^* zobrazení F_n, přesněji

$$P_n F(u_n^*) = u_n^*.$$

Z toho poté plyne

$$\|F(u_n^*) - u_n^*\| < \frac{1}{n}.$$

Množina $F(N)$ je uzavřená a omezená v N, a protože je N kompaktní, je kompaktní i $F(N)$. Posloupnosti $\{F(u_n^*)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F(N)$ a $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ tak mají konvergentní podposloupnosti, jejichž limity označíme $F(u^*)$ a u^*. Protože platí $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, dostáváme

$$\|F(u^*) - u^*\| = 0.$$

Celkově je tedy u^* pevným bodem zobrazení F. $\square$

Poznámka 3.7. Je možné si povšimnout, že Schauderova věta je zobecněním Brouwerovy věty, neboť v prostoru konečné dimenze je uzavřená a omezená množina vždy kompaktní a tyto prostory jsou Banachovy.

Poznámka 3.8. Schauderova věta ve výše uvedené podobě bývá někdy označována jako první Schauderova věta, jedná se v podstatě o původní podobu věty z roku 1930.

Nyní se zaměříme na jisté zobecnění Schauderovy věty (někdy označované jako druhá Schauderova věta). Toto tvrzení využívá pojmu relativně kompaktní množiny a později jej využijeme ve spojení se zpracovanými kritérii relativní kompaktnosti.

Věta 3.9 (Schauderova o pevném bodu zobecněná)**.** *Nechť M je Banachův prostor a $N \subseteq M$ neprázdná, konvexní, omezená a uzavřená množina a $F : N \to N$ je spojité zobrazení, takové, že $F(N)$ je relativně kompaktní podmnožina N. Potom má zobrazení F pevný bod $u^* \in N$.*

Důkaz. Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady zobecněné varianty věty. Z definice relativní kompaktnosti plyne, že uzávěr $\overline{Z} \subseteq M$ množiny $Z = F(N)$ je kompaktní množina. Jestliže je množina Z kompaktní, pak je kompaktní i množina conv$Z$. Tato množina je uzavřená a konvexní. Z faktu, že množina N je uzavřená a ohraničená a z definice uzávěru a konvexního obalu, plyne conv$Z \subseteq N$. Navíc je splněno, že zobrazení F je spojité.

Celkem jsou tak splněny předpoklady první Schauderovy věty a existuje alespoň jeden pevný bod $u^* \in N$ zobrazení F. □

4 Analýza nelineárních diferenčních rovnic

V této kapitole využijeme popsaných matematických poznatků z předchozích částí k analýze kvalitativních vlastností diferenční rovnice

$$\Delta^2 y_n = p_n g(y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

kde symbolem Δ rozumíme standardní *dopřednou diferenci* definovanou jako

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Symbol Δ^2 pak chápeme jako

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Všude v kapitole budeme předpokládat, že pro posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a taková, že $tg(t) > 0$ pro $t \neq 0$.

Poznámka 4.1. Příkladem funkce g vyhovující požadavkům je třeba

$$g(t) = |t|^{\lambda} \operatorname{sgn} t, \quad \lambda \in (0, \infty).$$

Naším cílem bude studium řešení rovnice (4.1), které při libovolné volbě kladného reálného čísla c splňuje podmínky

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet & \Delta y_n < 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \bullet & y_n > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \bullet & \lim\limits_{n \to \infty} y_n = c. \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

Ukážeme, že za jistých podmínek je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ zaručena existence řešení rovnice (4.1) s vlastnostmi (4.2) pro libovolné kladné reálné číslo c, při jejich zesílení pak dokonce jeho jednoznačnost.

4.1 Podmínky zaručující existenci řešení

V této části se zaměříme na analýzu úlohy (4.1), (4.2). Odvodíme podmínku, pro kterou ukážeme, že je nejenom postačující, nýbrž i nutnou pro existenci řešení s vlastnostmi (4.2) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro libovolně zvolené $c > 0$.

Věta 4.2. Pro posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (4.1) platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \infty \tag{4.3}$$

právě tehdy, když existuje řešení úlohy (4.1), (4.2) pro libovolně zvolené kladné reálné číslo c.

Lemma 4.3. Nechť $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{k=j}^{\infty}(k+1-j)p_k < \infty$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}$, pak

$$\sum_{k=j}^{\infty}(k+1-j)kp_k = \sum_{n=j}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k.$$

Důkaz. Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n > 0$, plyne z konvergence řady $\sum_{k=j}^{\infty}(k+1-j)p_k$ i její absolutní konvergence, a tedy i komutativita a asociativita. Rozepišme si nyní řadu na jednotlivé členy takto

$$\sum_{k=j}^{\infty}(k+1-j)p_k = p_j + 2p_{j+1} + 3p_{j+2} + ... = p_j + (p_{j+1} + p_{j+1}) + (p_{j+2} + p_{j+2} + p_{j+2}) + ...$$

Členy řady můžeme díky komutativitě a asociativitě libovolně přeskládat a sdružit. My to provedeme následovně

$$\sum_{k=j}^{\infty}(k+1-j)p_k = (p_j + p_{j+1} + ...) + (p_{j+1} + p_{j+2} + ...) + (p_{j+2} + p_{j+3} + ...) + ...$$

Můžeme tak jasně vidět, že je splněno

$$\sum_{k=j}^{\infty}(k+1-j)p_k = \sum_{n=j}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k.$$

□

Důkaz věty 4.2. Nejprve dokážeme implikaci zprava doleva. Využijeme vztah pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$ plynoucí z definice dopředné diference, a sice

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Delta y_k = y_n - y_m. \tag{4.4}$$

Předpokládejme, že (4.1) má pro libovolné $c > 0$ řešení y s námi požadovanými vlastnostmi (4.2). Rovnici (4.1) upravíme pomocí ekvivalentní úpravy, kdy na obě strany rovnice aplikujeme $\sum_{j=k}^{m-1}$, a dostaneme s ohledem na (4.4)

$$\Delta y_m - \Delta y_k = \sum_{j=k}^{m-1} p_j g(y_{j+1}).$$

Dále provedeme limitní přechod $m \to \infty$. Předpokládáme konvergenci y, a proto platí $\lim\limits_{m\to\infty} \Delta y_m = 0$. Dostáváme tak

$$0 - \Delta y_k = \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}). \tag{4.5}$$

Na obě strany (4.5) nyní aplikujeme $\sum_{k=n}^{m-1}$ a dostáváme

$$y_n = y_m + \sum_{k=n}^{m-1}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}).$$

Teď provedeme další limitní přechod $m \to \infty$ a získáváme tak

$$y_n = c + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}).$$

Protože předpokládáme

$$\lim_{n\to\infty} y_n = c,$$

musí platit, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}) < \infty$$

díky limitní srovnávající kritériu pro řady s kladnými členy je splněno i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \infty.$$

S ohledem na lemma 4.3 pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty.$$

Nyní se zaměříme na implikaci zleva doprava. S využitím zobecněné Schauderovy věty (věta 3.9) dokážeme nejprve existenci řešení s požadovanými vlastnostmi pro $n \ge n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké. Uvažujme libovolné reálné kladné číslo, to si označme c. Dále označme

$$M = \max_{t\in[c,2c]} g(t).$$

Z faktu, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ je konvergentní, plyne, že je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k$ viz lemma 4.3. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ tak existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \varepsilon$. Zvolme $\varepsilon = c/M$ a označme odpovídající n_ε jako n_0.

Prostor ℓ^∞ je úplný, dále pro to, abychom nyní mohli využít Schauderovu větu, potřebujeme takovou množinu $\Omega \subseteq \ell^\infty$, která je neprázdná, konvexní, uzavřená a omezená a zobrazení $T : \Omega \to \Omega$, které je spojité a $T\Omega$ je relativně kompaktní podmnožina Ω.

Množinu Ω budeme uvažovat ve tvaru

$$\Omega = \{u \in \ell^\infty,\ c \le u_n \le 2c \text{ pro } n \ge n_0\}.$$

Tato množina je zřejmě neprázdná a omezená. Dále musíme ukázat, že je uzavřená. Uvažujme proto posloupnost $\{u^{[m]}\}_{m=1}^{\infty}$ prvků z Ω konvergující k u. Je třeba dokázat, že u patří do Ω. Platí, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sup_{n\ge n_0} |u_n^{[m]} - u_n| < \varepsilon, \quad m \ge m_\varepsilon.$$

Vezměme libovolné pevně zvolené $n \ge n_0$, pro to je splněno $\lim_{m\to\infty} u_n^{[m]} = u_n$. Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ pak platí pro zvolené n, že

$$c \le u_n^{[m]} \le 2c,$$

a proto

$$c \le u_n \le 2c.$$

Vzhledem k tomu, že $n \ge n_0$ je zvoleno libovolně, platí $u \in \Omega$ a množina Ω je uzavřená.

Zbývá ukázat, že je množina Ω konvexní. Vezměme $u, v \in \Omega$ a libovolné $\lambda \in [0, 1]$. Pro $n \ge n_0$ platí

$$\lambda c \le \lambda u_n \le \lambda 2c \tag{4.6}$$

a

$$(1-\lambda)c \le (1-\lambda)v_n \le (1-\lambda)2c \tag{4.7}$$

Když (4.6) a (4.7) sečteme, dostaneme pro $n \ge n_0$

$$c \le \lambda u_n + (1-\lambda)v_n \le 2c.$$

Vzhledem k tomu, že zřejmě $\lambda u + (1-\lambda)v \in \ell^\infty$, můžeme konstatovat, že $\lambda u + (1-\lambda)v \in \Omega$ a množina Ω je konvexní.

Zobrazení T pro $n \ge n_0$ definujeme, s ohledem na úvahy z důkazu implikace zprava doleva, takto

$$(Tu)_n = c + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}), \quad u \in \Omega.$$

Nyní potřebujeme dokázat, že je splněno $T\Omega \subseteq \Omega$. Nechť $u \in \Omega$, jistě platí $Tu \in \ell^\infty$, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$ a Tu je tedy ohraničená posloupnost. Dále je třeba dokázat, že pro $n \ge n_0$ platí

$$c \le (Tu)_n \le 2c.$$

První nerovnost je splněna, neboť $p_k \ge 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, a protože $tg(t) > 0$ pro $t \ne 0$, platí $g(t) > 0$ pro $t > 0$, a tedy $\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \ge 0$. Abychom dokázali platnost druhé nerovnosti, musíme ukázat, že pro $n \ge n_0$ platí

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \le c.$$

Budeme tak postupně zvětšovat výraz $\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1})$ následujícím způsobem

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \le M \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j \le M \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j.$$

Vzhledem k tomu, že pro $n \ge n_0$ platí $\sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j \le c/M$, můžeme výraz dále upravit takto

$$M \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j \le M \frac{c}{M} = c.$$

Celkově tedy $Tu \in \Omega$. Zmiňme ještě, že díky absolutní konvergenci $\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1})$ můžeme zobrazení ekvivalentně zapsat s ohledem na lemma 4.3 následovně

$$(Tu)_n = c + \sum_{j=n}^{\infty} (j+1-n) p_j g(u_{j+1}).$$

Dále je zapotřebí dokázat, že je zobrazení T spojité. Nechť je posloupnost $\{u^{[m]}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ taková, že

$$\lim_{m\to\infty} \left\|u^{[m]} - u\right\|_{\infty} = 0.$$

Musíme ukázat, že platí

$$\lim_{m\to\infty} \left\|Tu^{[m]} - Tu\right\|_{\infty} = 0.$$

Zaměřme se na výraz $\left\|Tu^{[m]} - Tu\right\|_{\infty}$, který rozepíšeme a zvětšíme následovně

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq n_0} \left|(Tu^{[m]})_n - (Tu)_n\right| &= \sup_{n\geq n_0} \left|\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}^{[m]}) - \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1})\right| \\ &= \sup_{n\geq n_0} \left|\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j (g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1}))\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j |g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|.\end{aligned}$$

Posloupnost $\{p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|\}_{j=n_0}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pro všechna $j \in \mathbb{N}$ taková, že $j \geq n_0$ existuje $L \geq 0$ takové, že $|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq L$ a pro všechna taková j proto platí

$$p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq Lp_j.$$

My víme, že je splněno $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$, pak zřejmě $\sum_{j=n_0}^{\infty} p_j < \infty$. Posloupnost $\{p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|\}_{j=n_0}^{\infty}$ tak splňuje předpoklady Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci (věta 2.27). Posloupnost

$$\left\{\sum_{j=k}^{\infty} p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|\right\}_{k=n_0}^{\infty} \tag{4.8}$$

je také posloupností nezáporných čísel a pro $k \in \mathbb{N}$ taková, že $k \geq n_0$ platí

$$\sum_{j=k}^{\infty} p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| \leq L\sum_{j=k}^{\infty} p_j.$$

Můžeme tvrdit, že $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$, a proto platí i $\sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j < \infty$. Posloupnost (4.8) tedy předpoklady Lebesgueovy věty také splňuje. Lebesgueovu větu tak nyní lze dvakrát aplikovat následovně

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| = \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \lim_{m\to\infty}|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})|.$$

Předpokládáme $\lim\limits_{m\to\infty} \left\|u^{[m]} - u\right\|_{\infty} = 0$, proto platí $\lim\limits_{m\to\infty}(\sup\limits_{n\geq n_0}|u_n^{[m]} - u_n|) = 0$. Můžeme tedy říci, že $\lim\limits_{m\to\infty} u_{j+1}^{[m]} = u_{j+1}$. Na základě této úvahy potom můžeme tvrdit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j \lim_{m\to\infty}|g(u_{j+1}^{[m]}) - g(u_{j+1})| = \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} p_j 0 = 0.$$

Celkově potom

$$\lim_{m\to\infty} \left\|Tu^{[m]} - Tu\right\|_{\infty} = 0$$

a zobrazení T je spojité.

Zbývá dokázat, že $T\Omega$ je relativně kompaktní (viz věta 2.50). Množina $T\Omega$ je omezená, neboť $T\Omega \subseteq \Omega$ a množina Ω je omezená. Musíme tedy ukázat, že posloupnosti z $T\Omega$ jsou stejně cauchyovské.

Je zapotřebí demonstrovat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n, m \geq n_\varepsilon$ platí $|(Tu)_n - (Tu)_m| < \varepsilon$ pro všechny $u \in \Omega$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $n > m$, pak

$$|(Tu)_m - (Tu)_n| = \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) \leq M \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{j=k}^{\infty} p_j \leq M \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j$$

Vycházíme z předpokladu, že platí $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k < \infty$, proto i $\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \infty$. Tudíž

$$\lim_{m\to\infty} M \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) = 0$$

a je tak pro $n, m \geq n_\varepsilon$ splněno

$$|(Tu)_m - (Tu)_n| < \varepsilon.$$

Dokázali jsme tak platnost všech předpokladů zobecněné Schauderovy věty o pevném bodu a existuje tedy řešení (4.1) s požadovanými vlastnostmi pro $n \geq n_0$.

Řešení rovnice (4.1) lze prodloužit doleva na $\mathbb{N}$. Skutečně pro $n_0 - 1$ definujeme

$$y_{n_0-1} = c + \sum_{k=n_0-1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}).$$

Víme, že platí $c \in (0, \infty)$, je splněno $p_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $g(t) > 0$ pro všechna $t \in (0, \infty)$. Platí tak zřejmě $y_{n_0-1} > 0$, a protože

$$\sum_{k=n_0-1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1}) > \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(y_{j+1})$$

je splněno také $\Delta y_{n_0-1} < 0$. Jsou tak splněny požadované vlastnosti (4.2). Řešení lze takto dále prodloužit i pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $n < n_0 - 1$. Námi požadované vlastnosti pak máme již pro všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Poznámka 4.4. Obdobným způsobem by se dala pro rovnici (4.1) dokázat existence rostoucího záporného řešení konvergujícího k libovolné záporné konstantě.

4.2 Podmínky zaručující existenci a jednoznačnost řešení

Tentokrát budeme uvažovat, že funkce g je navíc lipschitzovsky spojitá na $\mathbb{R}^+$. Předpokládáme tedy, že existuje kladné reálné číslo L takové, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}^+$ platí

$$|g(a) - g(b)| \leq L|a - b|.$$

Naším cílem bude ukázat, že podmínka (4.3) pak zaručí vedle existence řešení (4.1) s vlastnostmi (4.2) pro libovolné $c \in (0, \infty)$ na $\mathbb{N}$ také jeho jednoznačnost. Využijeme k tomu tentokrát Banachovu větu o pevném bodu.

Věta 4.5. Nechť g splňuje Lipschitzovu podmínku na $\mathbb{R}^+$, pak pro posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (4.1) platí, $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$ právě tehdy, když pro $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné řešení úlohy (4.1), (4.2) pro libovolně zvolené kladné reálné číslo c.

Důkaz. Začneme důkazem implikace zprava doleva. Platnost podmínky $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$ plyne už ze samotné existence řešení y s požadovanými vlastnostmi, jak jsme ukázali v důkazu věty 4.2.

Nyní dokážeme implikaci zleva doprava. Uvažujme, že funkce g je lipschitzovsky spojitá na $\mathbb{R}^+$ s lipschitzovskou konstantou L. Zvolme nyní $n_0 \in \mathbb{N}$, tak, aby platilo

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < \frac{1}{2L}. \tag{4.9}$$

Tentokrát budeme jako množinu Ω uvažovat množinu posloupností definovaných a ohraničených pro $n \geq n_0$

$$\Omega = \ell_{n_0}^{\infty}.$$

Podobně jako v důkazu věty 4.2 lze ukázat, že je tato množina uzavřená v ℓ^{∞}. Metrický prostor ℓ^{∞} je úplný a díky uzavřenosti Ω je úplný i metrický prostor $(\Omega, \varrho_{\infty})$.

Uvažujme opět zobrazení T definované stejně jako v důkazu věty 4.2. Naším cílem bude nyní dokázat, že je toto zobrazení kontrakcí. Musíme tedy ukázat, že existuje $K \in (0, 1)$ takové, že pro všechna $u, v \in \Omega$ platí

$$\|Tu - Tv\|_{\infty} \leq K \|u - v\|_{\infty}.$$

Víme, že

$$\|Tu - Tv\|_{\infty} = \sup_{j \geq n_0} |(Tu)_j - (Tv)_j|.$$

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n > 0$, pro všechny posloupnosti $u \in \Omega$ je proto pro všechna $n \geq n_0$ splněno

$$\left| c + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(u_{j+1}) - \left(c + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j g(v_{j+1}) \right) \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j |g(u_{j+1}) - g(v_{j+1})|,$$

a tedy

$$\sup_{j \geq n_0} |(Tu)_j - (Tv)_j| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j |g(u_{j+1}) - g(v_{j+1})|. \tag{4.10}$$

Nyní zvětšíme výraz z pravé strany nerovnosti (4.10), s využijeme faktu, že je funkce g lipschitzovsky spojitá, následujícím způsobem

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j |g(u_{j+1}) - g(v_{j+1})| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j L |u_{j+1} - v_{j+1}| \leq L \sup_{j \geq n_0} |u_j - v_j| \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j.$$

Díky tomu, že n_0 jsme volili, aby bylo splněno (4.9), lze konstatovat

$$L \sup_{j \geq n_0} |u_j - v_j| \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j < L \sup_{j \geq n_0} |u_j - v_j| \frac{1}{2L} = \frac{1}{2} \sup_{j \geq n_0} |u_j - v_j|.$$

Platí tedy

$$\sup_{j \geq n_0} |(Tu)_j - (Tv)_j| \leq \frac{1}{2} \sup_{j \geq n_0} |u_j - v_j|,$$

a proto

$$\|Tu - Tv\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{\infty}.$$

Zobrazení T je kontrakce. Dokázali jsme platnost všech předpokladů Banachovy věty. Existuje tak pro $n \geq n_0$ jediné řešení rovnice (4.1) s vlastnostmi (4.2), toto řešení můžeme analogicky jako v důkazu věty 4.2 prodloužit na všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Poznámka 4.6. Za předpokladu platnosti Lipschitzovy podmínky lze podobně dokázat i existence a jednoznačnost rostoucího záporného řešení konvergujícího k libovolné záporné konstantě.

Poznámka 4.7. Při bližším prozkoumání důkazu si lze povšimnout, že zvolíme-li konkrétní $c \in \mathbb{R}$, pak stačí, abychom předpokládali, že je funkce g lipschitzovsky spojitá na intervalu $[c, c+\delta]$ pro nějaké $\delta > 0$. Místo $\Omega = \ell^{\infty}_{n_0}$ pak uvažujeme

$$\Omega = \{u \in \ell^{\infty},\ c \leq u_n \leq c + \delta \text{ pro } n \geq n_0\},$$

přičemž $T\Omega \subseteq \Omega$ lze ukázat podobně jako v důkazu věty 4.2.

4.3 Další poznámky k analýze nelineárních diferečních rovnic

Rovnici (4.1) lze chápat jako diskretizaci rovnice

$$y'' = p(t)g(y), \quad t \geq 0,$$

kde p je kladná funkce a g má vlastnosti jako v případě rovnice (4.1). Tato rovnice zahrnuje známou rovnici Emdenova-Fowlerova typu, kde funkce g je volena jako v poznámce 4.1. Ta se poprvé začala studovat v souvislosti s modelováním struktury hvězd, ale v současné době má celou řadu dalších aplikací.

Aparátu rozebraného v kapitolách 2 a 3 lze podobně využít i v případě studia existence řešení obecnějších rovnic než je rovnice (4.1), např.

$$\Delta(q_n |y_n|^{\alpha} \operatorname{sgn}(\Delta y_n)) = p_n g(u_{n+\sigma}),$$

kde předpokládáme, že posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ a funkci g charakterizují stejné vlastnosti jako v případě rovnice (4.1), $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ je kladná posloupnost reálných čísel, σ je celé číslo a α je kladné reálné číslo.

Diskrétní analogie diferenciálních rovnic má smysl studovat mj. i proto, že ne vždy sdílí se svými spojitými protějšky podobné kvalitativní vlastnosti. Viz [1] pro diskuzi o možných rozdílech v asymptotické teorii mezi diferenciálními a diferenčními rovnicemi Emdenova-Fowlerova typu.

5 Závěr

Cílem práce bylo zpracovat aparát související s funkcionální analýzou pro kvalitativní analýzu diferenčních rovnic a následně demonstrovat jeho využití při odvozování existenčních výsledků pro vybranou diferenční rovnici.

V rámci zpracování matematických nástrojů jsme shromáždili důležité informace o prostorech posloupností. Podrobně jsme rozebrali a dokázali jejich klíčové vlastnosti, zejména pak úplnost a separabilitu. Důkazům jsme se věnovali poměrně detailním způsobem, který v literatuře bývá často opomíjen. Dále jsme zformulovali diskrétní limitní věty, v obou případech jsou součástí opět detailní důkazy založené na třech odlišných přístupech. U prvního jsme využili fundamentálních prostředků funkcionální analýzy a dokázali tvrzení s využitím diskrétního Fatouova lemmatu. Další přístup spočíval ve využití schodovitých funkcí ve spojení s klasickými verzemi dokazovaných vět. Třetí přístup byl založen na abstraktním teorii míry. Tvrzení jsme zde dokázali vhodnou volbou měřitelného prostoru s nosnou množinou v podobě $\mathbb{N}$ ve spojení s čítací mírou. Dále jsme se věnovali kritériím relativní kompaktnosti pro prostory ℓ^p a ℓ^∞, v obou případech je součástí podrobný důkaz.

Teoretické nástroje jsme aplikovali při analýze nelineární diferenční rovnice (4.1). Odvodili jsme nutnou podmínku pro existenci a jednoznačnost řešení s předepsanými vlastnostmi. S využitím vět o pevných bodech jsme pak zformulovaná tvrzení o existenci a jednoznačnosti dokázali.

Na práci lze dále navázat studiem dalších diferenčních rovnic a rozborem analogií a rozdílů oproti jejich diferenciálním protějškům.

Literatura

[1] CECCHI, M., DOŠLÁ, Z. and MARINI, M.: Intermediate solutions for Emden--Fowler type equations: continuous versus discrete. *Advances in Dynamical Systems and Aplications*, 3.1, 2008, 161-176., ISSN 0973-5321.

[2] CHENG, S.: *A Crash Course on the Lebesgue Integral and Measure Theory*, 2008.

[3] CHENG, S. S. and PATULA W.T.: An existence theorem for a nonlinear difference equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, 20.3, 1993, 193–203. ISSN 0362-546X.

[4] GRIFFEL, D. H.: *Applied functional analysis*. New York: Dover, 2002. ISBN 0-486-42258-5.

[5] FARENICK, D.: *Fundamentals of Functional Analysis*. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. ISBN 978-3-319-45631-7.

[6] HANCHE-OLSEN, H. and HOLDEN, H.: The Kolmogorov-Riezs compactness theorem. *Expositiones Mathematicae*, 28.4, 2010, 385–394. ISSN 0723-0869.

[7] KUMLIN, P.: A Note on Fixed Point Theory *TMA 401/MAN 670 Functional Analysis*, 2003/2004.

[8] NETUKA, I.: *Základy moderní analýzy*. Praha: MatfyzPress, 2014. ISBN 978-80-7378-277-1.

[9] OVCHINNIKOV, S.: *Measure, Integral, Derivative: A Course on Lebesgue's Theory*. New York: Springer Science+Business Media, 2013. ISBN 978-1-4614-7195-0.

[10] PATA, V.: *Fixed Point Theorems and Applications*. New York: Springer International Publishing, 2019. ISBN 978-3-030-19670-7.