

Frölicherova-Nijenhuisova závorka a její aplikace v geometrii a variačním počtu

Kristína Šramková
Ústav matematiky



Frölicher-Nijenhuisova zátvorka a jej aplikace v geometrii a variačnom počte

Autor práce: Bc. Kristína Šramková
Vedúci práce: doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

FSI VUT v Brne
Ústav matematiky

Ciele práce

- ▶ naštudovanie rozsiahleho matematického aparátu - diferenciálna geometria na varietach, diferenciálne formy
- ▶ objasnenie významu Frölicher-Nijenhuisovej a Lieovej zátvorky, uvedenie príkladov
- ▶ aplikácie Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky vo fyzike - Maxwelllove rovnice
 - ▶ zavedenie rovníc nezávisle na voľbe súradnicového systému - vďaka vyjadreniu pomocou Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky
 - ▶ nutnosť interpretácie v jazyku diferenciálnej geometrie na varietach

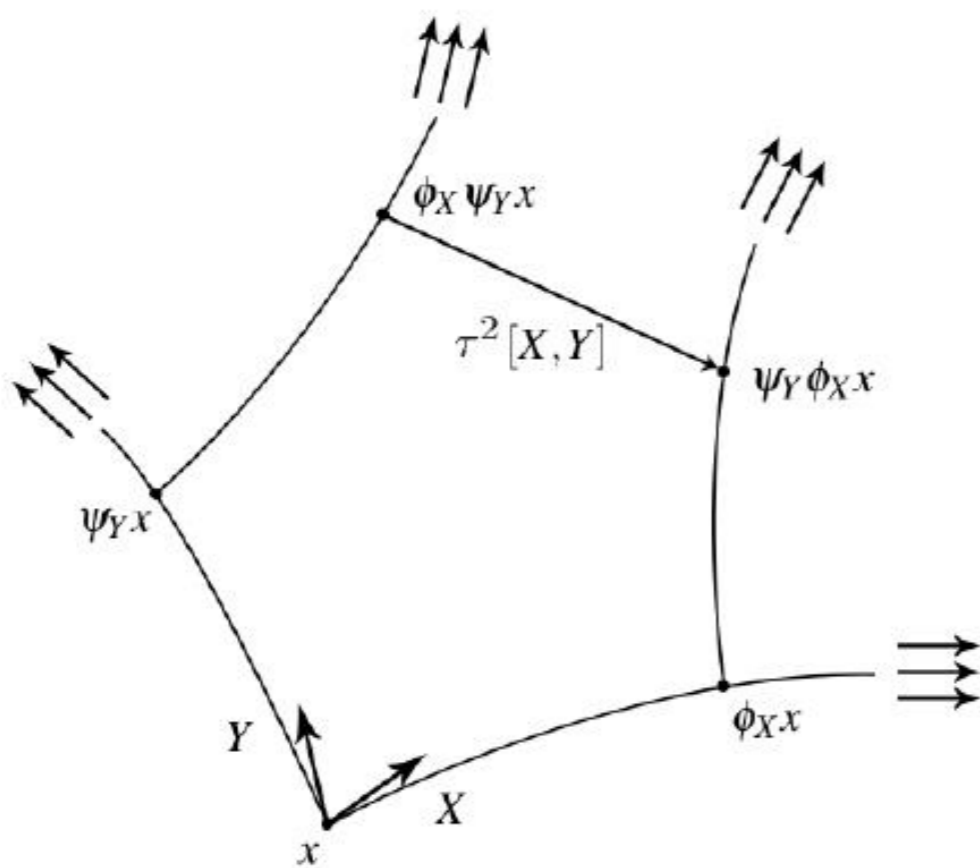
Lieova zátvorka

Lieova zátvorka

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{1}$$

Lieova derivácia

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \tag{2}$$



Frölicher-Nijenhuisova zátvorka

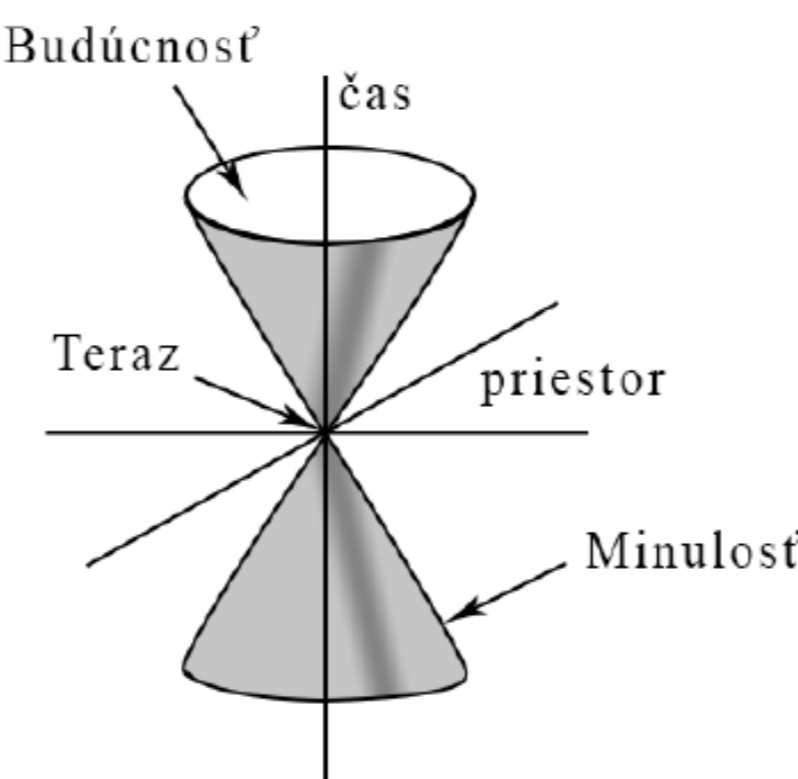
Frölicher-Nijenhuisova zátvorka

$[K, L]_{FN}(X, Y)$ je rozšírením Lieovej zátvorky na $(1, 1)$ -tenzorové polia

$$\begin{aligned} [K, L]_{FN}(X, Y) = & [KX, LY] + [LX, KY] + KL[X, Y] \\ & + LK[X, Y] - K[X, LY] - K[LX, Y] \\ & - L[X, KY] - L[KX, Y] \end{aligned}$$

Aplikácia: Maxwelllove rovnice v teórii relativity

- ▶ zákony teórie elektromagnetického poľa
- ▶ pozorovateľ na Lorentzovej variete - priestoročas
- ▶ pozorovateľ - vlastný súradnicový systém \rightarrow vlastný popis systému



- ▶ priestoročas - fibrovaný priestor s konexiou
- ▶ pozorovateľ - do budúcnosti orientované vektorové pole
- ▶ Frölicher-Nijenhuisova zátvorka ako skrútenie a krivosť konexie \rightarrow reprezentácia Maxwellových rovníc nezávisle na súradniciach

Aplikácia: Maxwelllove rovnice v teórii relativity

na M^3

- ▶ Gaussov zákon $\mathbf{d} \star \mathcal{E} = \rho$
- ▶ Zákon spojitosti magnetického indukčného toku $\mathbf{d}\mathcal{B} = 0$
- ▶ Faradayov zákon $\mathbf{d}\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$
- ▶ Ampér-Maxwellov zákon $\mathbf{d} \star \mathcal{B} = j + \frac{\partial \star \mathcal{E}}{\partial t}$

kde:

\mathcal{E} - intenzita elektrického poľa (diferenciálna 1-forma)
 \mathcal{B} - intenzita magnetického poľa (diferenciálna 2-forma)
 \mathbf{d} - priestorová derivácia
 ρ - hustota elektrického náboja
 j - hustota elektrický prúd

Aplikácia: Maxwelllove rovnice v teórii relativity

na M^4

- ▶ $dF = 0$
- ▶ $d \star F = j$

kde:

F - elektromagnetické pole (diferenciálna 2-forma)
 d - časovo-priestorová derivácia
 j - hustota elektrického prúdu

- ▶ rozloženie elektromagnetického poľa

$$F = \mathcal{E} \wedge \tau + \mathcal{B}$$

Aplikácia: Maxwelllove rovnice v teórii relativity

- ▶ vyjadrenie skrútenia a krivosti pomocou Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky:

Skrútenie: $\text{Torq}(\kappa) = [T, \kappa]_{FN} = (\mathcal{L}_T \tau) \otimes T$

Krivosť: $\text{Curv}(\kappa) = \frac{1}{2}[\kappa, \kappa]_{FN} = -i_T(d\tau \wedge \tau) \otimes T$

Maxwellove rovnice - nezávisle na voľbe súradnicového systému

$$\begin{aligned} d_3 \mathcal{E} &= -\dot{\mathcal{B}} + \text{Torq}(\tau) \lrcorner F \\ d_3 \mathcal{B} &= \text{Curv}(\tau) \lrcorner F \end{aligned}$$