Numerická derivace

Numerická derivace

Derivovat bychom měli umět z prvního semestru a měli bychom umět zderivovat každou funkci, která v daném bodě či intervalu derivaci má. Je tedy otázkou, proč se numerickou derivací vůbec zabývat.

Důvody jsou v podstatě tři:

Numerická derivace

Derivovat bychom měli umět z prvního semestru a měli bychom umět zderivovat každou funkci, která v daném bodě či intervalu derivaci má. Je tedy otázkou, proč se numerickou derivací vůbec zabývat.

Důvody jsou v podstatě tři:

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou

Numerická derivace

Derivovat bychom měli umět z prvního semestru a měli bychom umět zderivovat každou funkci, která v daném bodě či intervalu derivaci má. Je tedy otázkou, proč se numerickou derivací vůbec zabývat.

Důvody jsou v podstatě tři:

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou

Numerická derivace

Derivovat bychom měli umět z prvního semestru a měli bychom umět zderivovat každou funkci, která v daném bodě či intervalu derivaci má. Je tedy otázkou, proč se numerickou derivací vůbec zabývat.

Důvody jsou v podstatě tři:

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 1) Funkci v okolí bodu x_0 interpolujeme a derivujeme interpolační polynom nebo splajn

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 1) Funkci v okolí bodu x_0 interpolujeme a derivujeme interpolační polynom nebo splajn
ad 2) Tabulkou zadaných hodnot proložíme funkci metodou nejmenších čtverců a derivujeme náhradní funkci

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 1) Funkci v okolí bodu x_0 interpolujeme a derivujeme interpolační polynom nebo splajn
ad 2) Tabulkou zadaných hodnot proložíme funkci metodou nejmenších čtverců a derivujeme náhradní funkci
ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 1) Funkci v okolí bodu x_0 interpolujeme a derivujeme interpolační polynom nebo splajn

Příklad 1: Pomocí interpolačního polynomu určete hodnotu derivace funkce dané tabulkou

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

v bodě $x_0 = 5$.

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 1) Funkci v okolí bodu x_0 interpolujeme a derivujeme interpolační polynom nebo splajn

Příklad 1: Pomocí interpolačního polynomu určete hodnotu derivace funkce dané tabulkou

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

v bodě $x_0 = 5$.

V kapitole o interpolaci funkcí jsme tuto tabulku interpolovali polynomem

$$p_2(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}$$

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 1) Funkci v okolí bodu x_0 interpolujeme a derivujeme interpolační polynom nebo splajn

Příklad 1: Pomocí interpolačního polynomu určete hodnotu derivace funkce dané tabulkou

	P_0	P_1	P_2
i	0	1	2
x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

v bodě $x_0 = 5$.

V kapitole o interpolaci funkcí jsme tuto tabulku interpolovali polynomem

$$p_2(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}$$

tedy

$$p_2'(x) = -\frac{1}{30}x + \frac{5}{12} \quad \Rightarrow p_2'(x_0) = p_2'(5) = -\frac{5}{30} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$$

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 2) Tabulkou zadaných hodnot proložíme funkci metodou nejmenších čtverců a derivujeme náhradní funkci

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 2) Tabulkou zadaných hodnot proložíme funkci metodou nejmenších čtverců a derivujeme náhradní funkci

Příklad 2: Při měření dráhy pohybujícího se tělesa byly v časových okamžicích t_i zjištěny následující hodnoty. Určete rychlost tělesa v čase $t = 2.6s$.

i	0	1	2	3	4	5
t_i	0	1	2	3	4	5
s_i	5.2	10.1	24.9	50.0	85.2	130.0

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 2) Tabulkou zadaných hodnot proložíme funkci metodou nejmenších čtverců a derivujeme náhradní funkci

Příklad 2: Při měření dráhy pohybujícího se tělesa byly v časových okamžicích t_i zjištěny následující hodnoty. Určete rychlost tělesa v čase $t = 2.6s$.

i	0	1	2	3	4	5
t_i	0	1	2	3	4	5
s_i	5.2	10.1	24.9	50.0	85.2	130.0

V příkladu 1 kapitoly Aproximace funkcí metodou nejmenších čtverců jsme těmito daty proložili parabolu

$$s(t) = 5.02 - 0.115 \cdot t + 5.09 \cdot t^2$$

Z fyziky jistě víme, že rychlost je derivací dráhy podle času, tedy

$$v(t) = s'(t) = -0.115 + 2 \cdot 5.09 \cdot t$$

Hledaná rychlost je tedy

$$v(2.6) = -0.115 + 2 \cdot 5.09 \cdot 2.6 \approx 26.4\ ms^{-1}$$

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Numerická derivace

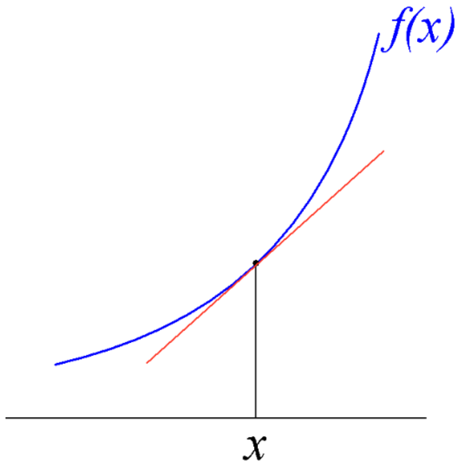
1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

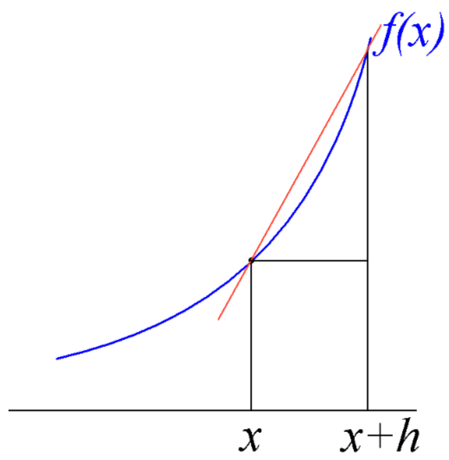
Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Dopředná diference:

náhrada limity $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x)\approx\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$





Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Dopředná diference:

náhrada limity $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Příklad 3 Určete přibližnou hodnotu derivace funkce $f(x) = \sqrt{3x}\sin\sqrt{5x}$ v bodě $x_0 = 5$ dopřednou diferencí pro $h = 0.05$.

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Dopředná diference:

náhrada limity $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Příklad 3 Určete přibližnou hodnotu derivace funkce $f(x) = \sqrt{3x}\sin\sqrt{5x}$ v bodě $x_0 = 5$ dopřednou diferencí pro $h = 0.05$.

$$f'(x_0) \approx \frac{\sqrt{3(x_0+h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0+h)} - \sqrt{3x_0}\cdot\sin\sqrt{5x_0}}{h} = \frac{\sqrt{3\cdot 5.05}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5.05} - \sqrt{3\cdot 5}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5}}{0.05} \approx 0.2034$$

Numerická derivace

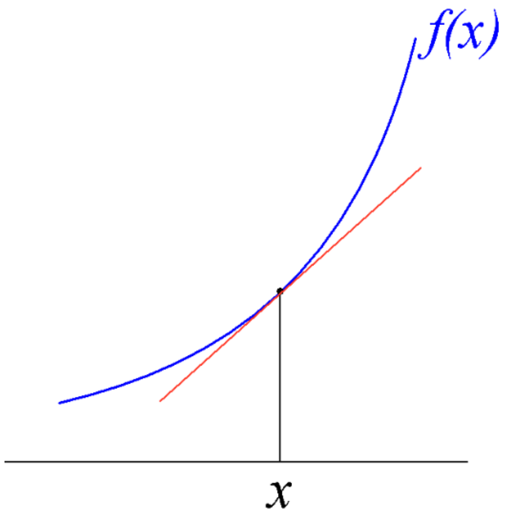
1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

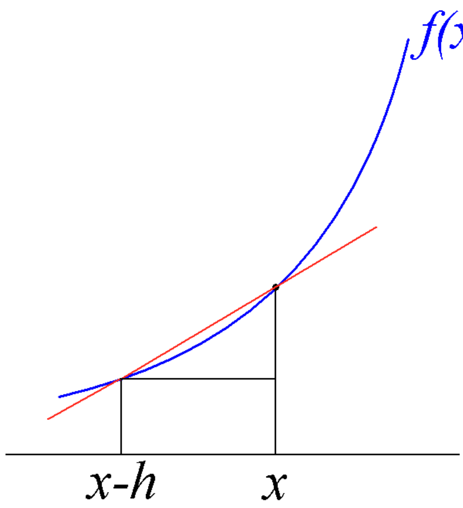
Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Zpětná diference:

náhrada limity $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$





Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Zpětná diferenc:

náhrada limity $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$

Příklad 4 Určete přibližnou hodnotu derivace funkce $f(x) = \sqrt{3x} \sin \sqrt{5x}$ v bodě $x_0 = 5$ zpětnou diferencí pro $h = 0.05$.

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Zpětná diference:

náhrada limity $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x_0)\approx\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

Příklad 4 Určete přibližnou hodnotu derivace funkce $f(x)=\sqrt{3x}\sin\sqrt{5x}$ v bodě $x_0=5$ zpětnou diferencí pro $h=0.05$.

$$f'(x_0)\approx\frac{\sqrt{3x_0}\cdot\sin\sqrt{5x_0}-\sqrt{3(x_0-h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0-h)}}{h}=\frac{\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5}-\sqrt{3\cdot 4.95}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 4.95}}{0.05}\approx 0.1524$$

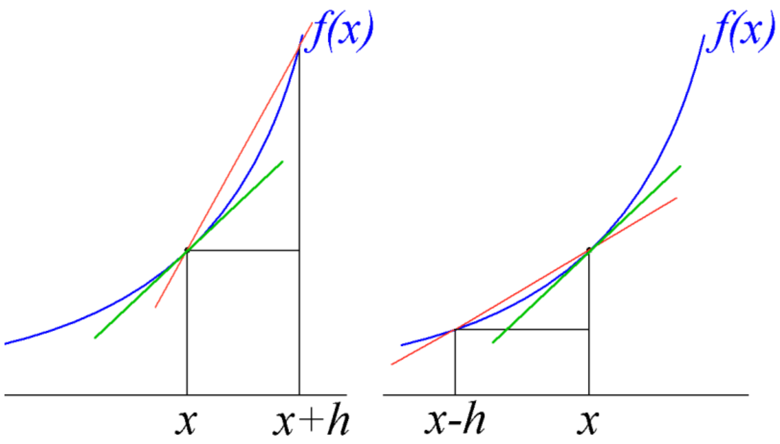
Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Všimněme si:



Dopředná i zpětná diference mají systematickou chybu. Je-li funkce v okolí bodu, v němž derivujeme, konkávní (viz obrázek), pak dopředná diference derivaci přeceňuje a zpětná ji podceňuje. Je-li funkce konkávní, je tomu naopak.

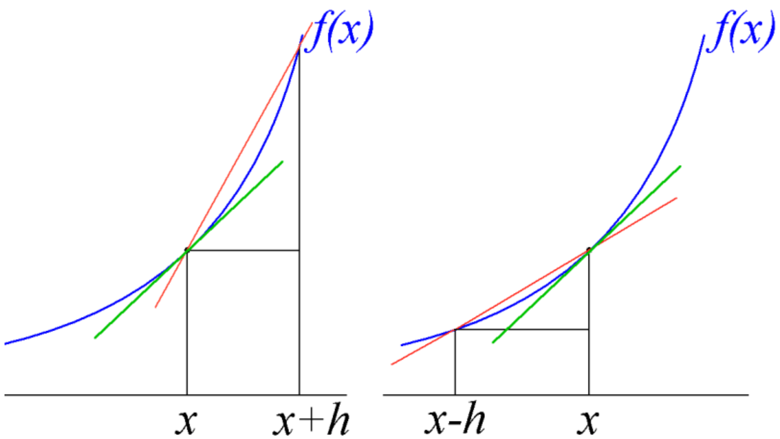
Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Všimněme si:



Dopředná i zpětná diference mají systematickou chybu. Je-li funkce v okolí bodu, v němž derivujeme, konkávní (viz obrázek), pak dopředná diference derivaci přeceňuje a zpětná ji podceňuje. Je-li funkce konkávní, je tomu naopak. V našem případě

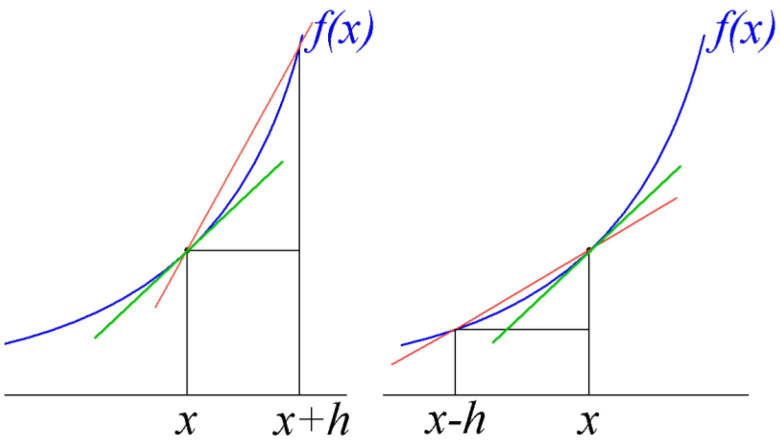
Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Všimněme si:



Dopředná i zpětná diference mají systematickou chybu. Je-li funkce v okolí bodu, v němž derivujeme, konkávní (viz obrázek), pak dopředná diference derivaci přeceňuje a zpětná ji podceňuje. Je-li funkce konkávní, je tomu naopak. V našem případě

$$f'(x_0) \approx \frac{\sqrt{3(x_0+h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0+h)}-\sqrt{3x_0}\cdot\sin\sqrt{5x_0}}{h} = \frac{\sqrt{3\cdot 5.05}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5.05}-\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5}}{0.05} \approx 0.2034$$

$$f'(x_0) \approx \frac{\sqrt{3x_0}\cdot\sin\sqrt{5x_0}-\sqrt{3(x_0-h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0-h)}}{h} = \frac{\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5}-\sqrt{3\cdot 4.95}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 4.95}}{0.05} \approx 0.1524$$

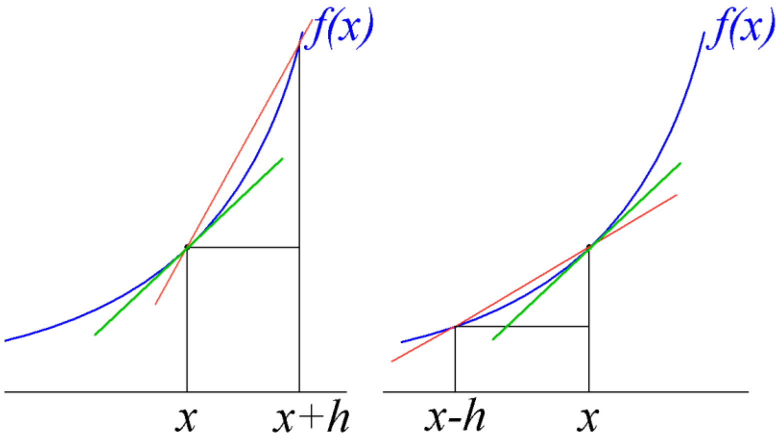
Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Všimněme si:



Dopředná i zpětná diference mají systematickou chybu. Je-li funkce v okolí bodu, v němž derivujeme, konkávní (viz obrázek), pak dopředná diference derivaci přeceňuje a zpětná ji podceňuje. Je-li funkce konkávní, je tomu naopak. V našem případě je zpětná diference menší než dopředná, naše funkce je tedy v okolí bodu $x_0 = 5$ konvexní.

$$f'(x_0) \approx \frac{\sqrt{3(x_0+h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0+h)} - \sqrt{3x_0}\cdot\sin\sqrt{5x_0}}{h} = \frac{\sqrt{3\cdot 5.05}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5.05} - \sqrt{3\cdot 5}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5}}{0.05} \approx 0.2034$$

$$f'(x_0) \approx \frac{\sqrt{3x_0}\cdot\sin\sqrt{5x_0} - \sqrt{3(x_0-h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0-h)}}{h} = \frac{\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5} - \sqrt{3\cdot 4.95}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 4.95}}{0.05} \approx 0.1524$$

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Tento nedostatek odstraňuje

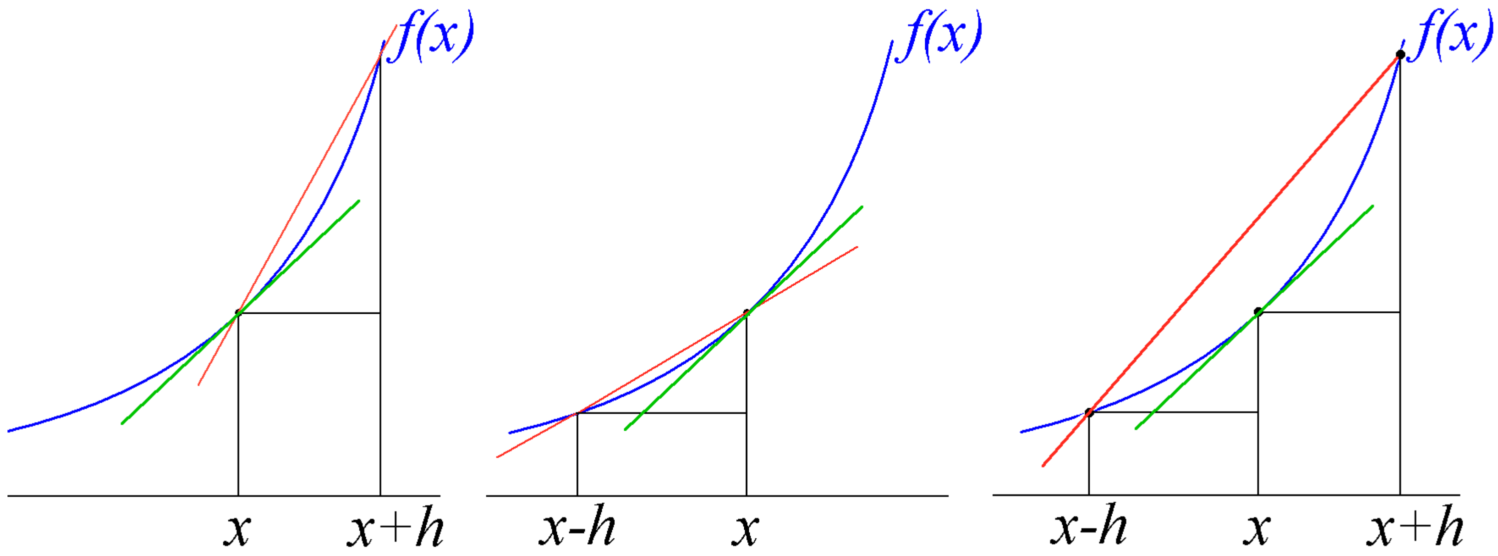
Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Tento nedostatek odstraňuje **centrální diference:**



$f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

centrální diference:

náhrada limity $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

centrální diference:

náhrada limity $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Příklad 5 Určete přibližnou hodnotu derivace funkce $f(x) = \sqrt{3x}\sin\sqrt{5x}$ v bodě $x_0 = 5$ centrální diferencí pro $h = 0.05$.

Numerická derivace

1) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data nejsou zatížena chybou
2) $f(x)$ známe jen v tabulkových bodech a vstupní data zatížena chybou
3) $f(x)$ je známa, ale na přímou derivaci a především další práci s touto derivací je příliš složitá

Postup:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

centrální diference:

náhrada limity $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ přibližnou hodnotou $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Příklad 5 Určete přibližnou hodnotu derivace funkce $f(x) = \sqrt{3x} \sin\sqrt{5x}$ v bodě $x_0 = 5$ centrální diferencí pro $h = 0.05$.

$$f'(x_0) \approx \frac{\sqrt{3\cdot(x_0+h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0+h)} - \sqrt{3(x_0-h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0-h)}}{2h} =$$

$$= \frac{\sqrt{3\cdot 5.05}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5.05} - \sqrt{3\cdot 4.95}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 4.95}}{2\cdot 0.05} \approx 0.1779$$

Porovnání

$$f(x)=\sqrt{3x}\sin\sqrt{5x} \qquad f'(5)=??$$

$$x_0=5;\ h=0.05$$

Dopředná diference

$$f'(x_0)\approx\frac{\sqrt{3(x_0+h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0+h)}-\sqrt{x_0}\cdot\sin\sqrt{5x_0}}{h}=\frac{\sqrt{3\cdot 5.05}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5.05}-\sqrt{5}\cdot\sin\sqrt{5}}{0.05}\approx 0.2034$$

Zpětná diference

$$f'(x_0)\approx\frac{\sqrt{x_0}\cdot\sin\sqrt{5x_0}-\sqrt{3(x_0-h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0-h)}}{h}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sin\sqrt{5}-\sqrt{3\cdot 4.95}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 4.95}}{0.05}\approx 0.1524$$

Centrální diference

$$f'(x_0)\approx\frac{\sqrt{3\cdot\left(x_0+h\right)}\cdot\sin\sqrt{5\left(x_0+h\right)}-\sqrt{3(x_0-h)}\cdot\sin\sqrt{5(x_0-h)}}{2h}=$$

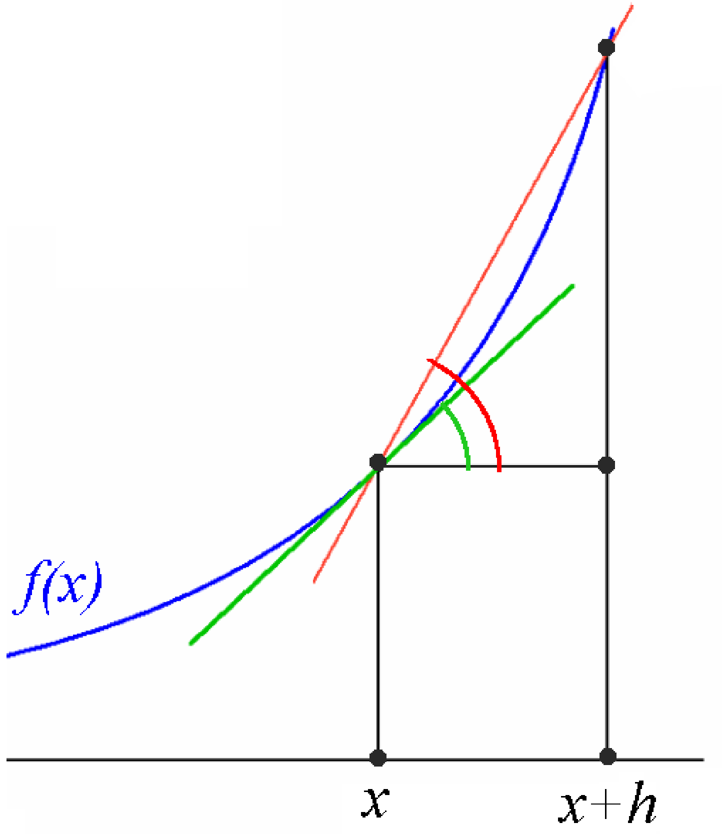
$$=\frac{\sqrt{3\cdot 5.05}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 5.05}-\sqrt{3\cdot 4.95}\cdot\sin\sqrt{5\cdot 4.95}}{2\cdot 0.05}\approx 0.1779$$

Přesná hodnota

$$f'(x)=\frac{3\sin\sqrt{5x}}{2\sqrt{3x}}+\frac{5\sqrt{3x}\cos\sqrt{5x}}{2\sqrt{5x}}; \qquad f'(5)=\frac{3\sin\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{5\sqrt{3\cdot 5}\cos\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{5\cdot 5}}\approx 0.177\ 919\ 686$$

Numerická derivace

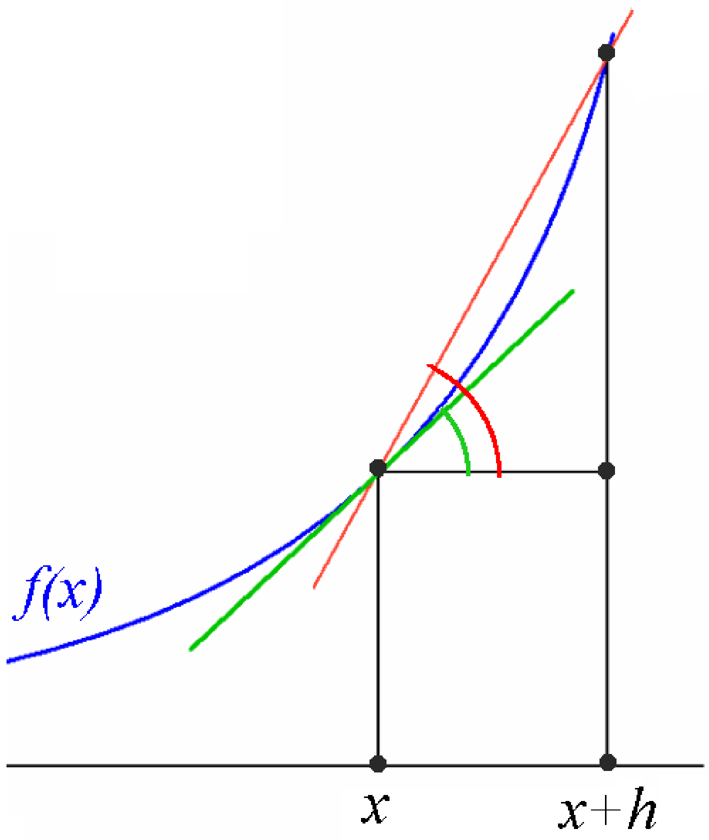
Chyby numerické derivace:



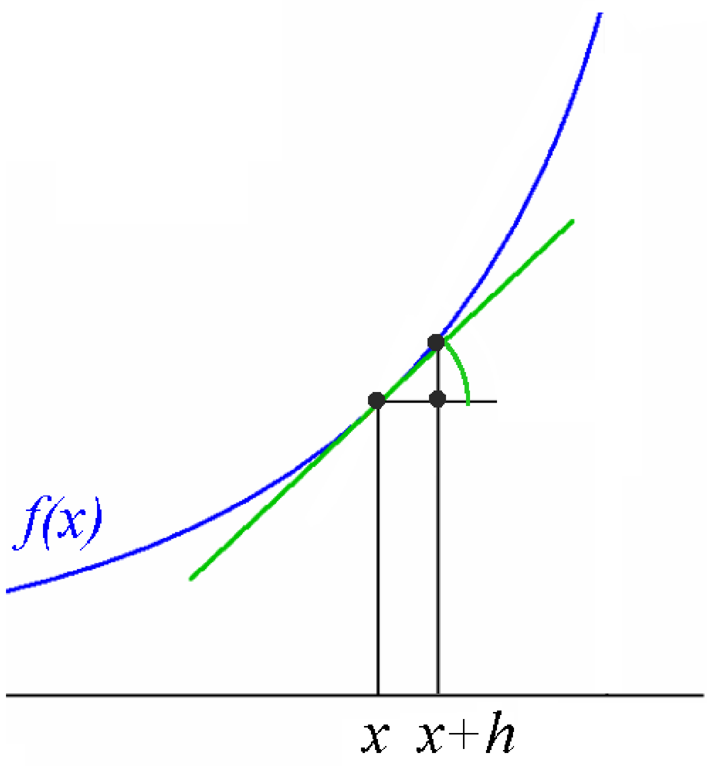
Chyba metody (diskretizační chyba)

Numerická derivace

Chyby numerické derivace:



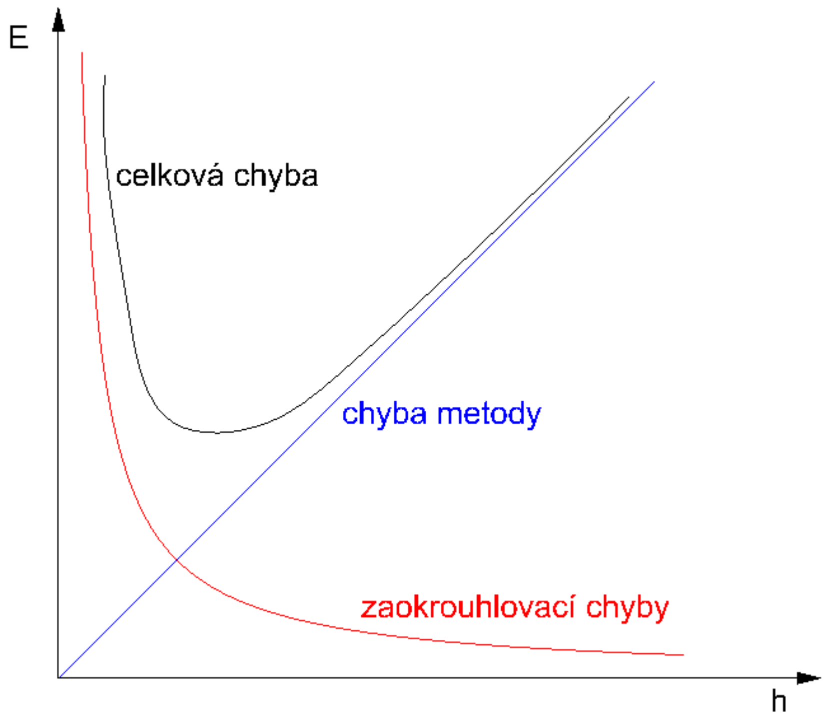
Chyba metody (diskretizační chyba)



Zaokrouhlovací chyby

Numerická derivace

Chyby numerické derivace:



dopředná $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

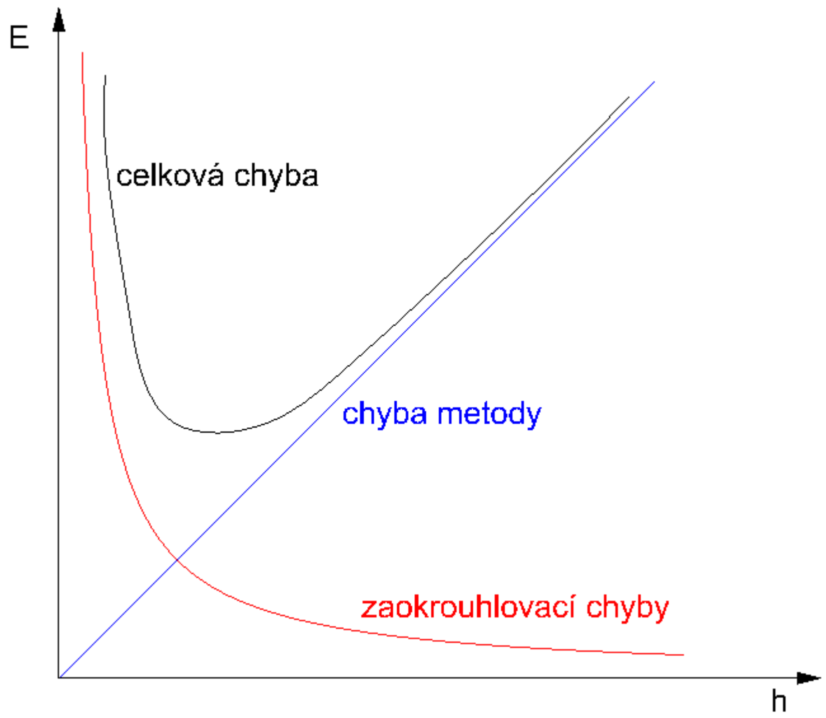
zpětná $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

centrální $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

Čím menší krok volíme, tím víc se zlomky blíží své limitě (přesné hodnotě derivace) $\Rightarrow$ klesá chyba metody.

Numerická derivace

Chyby numerické derivace:



dopředná $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

zpětná $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

centrální $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Čím menší krok volíme, tím víc se zlomky blíží své limitě (přesné hodnotě derivace) ⇒ klesá chyba metody.

Bohužel tímto krokem musíme ovšem dělit ⇒ roste zaokrouhlovací chyba.

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

dopředné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

dopředné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

zpětné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

dopředné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

zpětné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

nebo centrální $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

diference

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

dopředné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

zpětné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

nebo centrální $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

diference.

Úkolem je optimalizovat krok h v předchozích vzorcích tak, aby klesala celková chyba derivace. Na zlomky tedy pohlížíme jako na nové funkce g proměnné h

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

dopředné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ $$g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

zpětné $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

nebo centrální $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

diference.

Úkolem je optimalizovat krok h v předchozích vzorcích tak, aby klesala celková chyba derivace. Na zlomky tedy pohlížíme jako na nové funkce g proměnné h

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

dopředné $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

zpětné $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ $g(h) = \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

nebo centrální $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

diference.

Úkolem je optimalizovat krok h v předchozích vzorcích tak, aby klesala celková chyba derivace. Na zlomky tedy pohlížíme jako na nové funkce g proměnné h

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

dopředné $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

zpětné $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

nebo centrální $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

diference.

Úkolem je optimalizovat krok h v předchozích vzorcích tak, aby klesala celková chyba derivace. Na zlomky tedy pohlížíme jako na nové funkce g proměnné h

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace: je metoda zpřesňování

dopředné $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\quad g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

zpětné $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ $\quad g(h) = \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

nebo centrální $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\quad g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

diference.

Úkolem je optimalizovat krok h v předchozích vzorcích tak, aby klesala celková chyba derivace. Na zlomky tedy pohlížíme jako na nové funkce g proměnné h. Další postup předvedeme na centrální diferenci.

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} g(h)$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\quad g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots\ldots \qquad h \to 0 \Rightarrow g(h) \to a_0$$

Člen a_0 je přesnou hodnotou derivace, zbytek členů je chyba.

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots\ldots \qquad h \to 0 \Rightarrow g(h) \to a_0$$

Člen a_0 je přesnou hodnotou derivace, zbytek členů je chyba. Největší podíl na ní má člen $a_1 h^2$.

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots\ldots \qquad h \to 0 \Rightarrow g(h) \to a_0$$

Člen a_0 je přesnou hodnotou derivace, zbytek členů je chyba. Největší podíl na ní má člen $a_1 h^2$. Tento člen eliminujeme pomocí polovičního kroku.

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots\ldots \qquad h \to 0 \Rightarrow g(h) \to a_0$$

$$g\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots\ldots$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g(h) = a_0 + a_1h^2 + a_2h^4 + \ldots\ldots \qquad h \to 0 \Rightarrow g(h) \to a_0$$

$$\left[g\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + \frac{1}{4}a_1h^2 + \frac{1}{16}a_2h^4 + \ldots\ldots \right] \cdot 4$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$-\left[g(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots\ldots \right] \qquad h \to 0 \Rightarrow g(h) \to a_0$$

$$\left[g\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + \frac{1}{4} a_1 h^2 + \frac{1}{16} a_2 h^4 + \ldots\ldots \right] \cdot 4$$

$$4 \cdot g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h) = 3 \cdot a_0 \qquad - \frac{3}{4} a_2 h^4 + \ldots\ldots$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$-\left[g(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots\ldots\right] \qquad h \to 0 \Rightarrow g(h) \to a_0$$

$$\left[g\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + \frac{1}{4}a_1 h^2 + \frac{1}{16}a_2 h^4 + \ldots\ldots\right]\cdot 4$$

$$4\cdot g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h) = 3\cdot a_0 \qquad \underbrace{-\frac{3}{4}a_2 h^4 + \ldots\ldots}_{\to 0}$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$-\left[g(h) = a_0 + a_1h^2 + a_2h^4 + \ldots\ldots\right] \qquad h\to 0 \Rightarrow g(h)\to a_0$$

$$\left[g\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + \frac{1}{4}a_1h^2 + \frac{1}{16}a_2h^4 + \ldots\ldots\right]\cdot 4$$

$$4\cdot g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h) = 3\cdot a_0 \qquad \underbrace{-\frac{3}{4}a_2h^4 + \ldots\ldots}_{\to 0} \Rightarrow a_0 \approx \frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h)\right]$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$-\left[g(h)=a_0+a_1h^2+a_2h^4+\ldots\ldots\right] \qquad h\to 0 \Rightarrow g(h)\to a_0$$

$$\left[g\left(\frac{h}{2}\right)=a_0+\frac{1}{4}a_1h^2+\frac{1}{16}a_2h^4+\ldots\ldots\right]\cdot 4$$

$$4\cdot g\left(\frac{h}{2}\right)-g(h)=3\cdot a_0 \qquad \underbrace{-\frac{3}{4}a_2h^4+\ldots\ldots}_{\to 0} \Rightarrow a_0 \approx \frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g\left(\frac{h}{2}\right)-g(h)\right]$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$-\left[g(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots\ldots \right] \qquad h \to 0 \Rightarrow g(h) \to a_0$$

$$\left[g\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + \frac{1}{4} a_1 h^2 + \frac{1}{16} a_2 h^4 + \ldots\ldots \right] \cdot 4$$

$$4 \cdot g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h) = 3 \cdot a_0 \underbrace{-\frac{3}{4} a_2 h^4 + \ldots\ldots}_{\to 0} \Rightarrow a_0 \approx \frac{1}{3} \cdot \left[4 \cdot g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h) \right]$$

$$g_2(h) = \frac{1}{3} \cdot \left[4 \cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right) - g_1(h) \right]$$

Stejným způsobem lze pokračovat dál:

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g_2(h) = \frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right) - g_1(h)\right]$$

$$g_2(h) = a_0 + \bar{a}_1 h^4 + \bar{a}_2 h^6 + \ldots\ldots$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_2(h)=a_0+\bar{a}_1h^4+\bar{a}_2h^6+\ldots\ldots$$

$$g_2\left(\frac{h}{2}\right)=a_0+\bar{a}_1\left(\frac{h}{2}\right)^4+\bar{a}_2\left(\frac{h}{2}\right)^6+\ldots\ldots$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_2(h)=a_0+\bar{a}_1h^4+\bar{a}_2h^6+......$$

$$g_2\left(\frac{h}{2}\right)=a_0+\bar{a}_1\frac{h^4}{16}+\bar{a}_2\frac{h^6}{64}+......$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$-\left[g_2(h)=a_0+\bar{a}_1h^4+\bar{a}_2h^6+\ldots\ldots\right]$$

$$\left[g_2\left(\frac{h}{2}\right)=a_0+\bar{a}_1\frac{h^4}{16}+\bar{a}_2\frac{h^6}{64}+\ldots\ldots\right]\cdot 16$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g_2(h) = \frac{1}{3} \cdot \left[4 \cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right) - g_1(h) \right]$$

$$-\left[g_2(h) = a_0 + \bar{a}_1 h^4 + \bar{a}_2 h^6 + \ldots\ldots \right]$$

$$\left[g_2\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + \bar{a}_1 \frac{h^4}{16} + \bar{a}_2 \frac{h^6}{64} + \ldots\ldots \right] \cdot 16$$

$$16 \cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right) - g_2(h) = 15 \cdot a_0 + \underbrace{\bar{a}_2 \frac{h^6}{4} \ldots\ldots}_{\to 0}$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$-\left[g_2(h)=a_0+\bar{a}_1 h^4+\bar{a}_2 h^6+\ldots\ldots\right]$$

$$\left[g_2\left(\frac{h}{2}\right)=a_0+\bar{a}_1\frac{h^4}{16}+\bar{a}_2\frac{h^6}{64}+\ldots\ldots\right]\cdot 16$$

$$16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)=15\cdot a_0+\underbrace{\bar{a}_2\frac{h^6}{4}\ldots\ldots}_{\to 0} \quad\Rightarrow\quad a_0\approx\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Předpokládáme, že funkci g lze rozvinout do Taylorovy řady

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$-\left[g_2(h)=a_0+\bar{a}_1h^4+\bar{a}_2h^6+\ldots\ldots\right]$$

$$\left[g_2\left(\frac{h}{2}\right)=a_0+\bar{a}_1\frac{h^4}{16}+\bar{a}_2\frac{h^6}{64}+\ldots\ldots\right]\cdot 16$$

$$16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)=15\cdot a_0+\underbrace{\bar{a}_2\frac{h^6}{4}\ldots\ldots}_{\to 0} \quad\Rightarrow\quad a_0\approx\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\quad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h) = \frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h) = \frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_2(h)$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \qquad g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$\cancel{g_2(h)}$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h) = \frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right) - g_1(h)\right]$$

$$g_3(h) = \frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right) - g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)$ $g_2(h)$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)$ $\quad g_2(h)$

$g_3(h)$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\quad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)\quad g_2(h)$

$\cancel{g_3(h)}$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\qquad g(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)\quad g_2(h)$

$g_2\left(\frac{h}{2}\right)\quad g_3(h)$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \qquad g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$$g_1(h)$$
$$g_1\left(\tfrac{h}{2}\right) \quad g_2(h)$$
$$\cancel{g_2\left(\tfrac{h}{2}\right) \quad g_3(h)}$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $\quad g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h) = \frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right) - g_1(h)\right]$$

$$g_3(h) = \frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right) - g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)\quad g_2(h)$

$g_1\left(\frac{h}{4}\right)\quad g_2\left(\frac{h}{2}\right)\quad g_3(h)$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h) = \frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right) - g_1(h)\right]$$

$$g_3(h) = \frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right) - g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$$\begin{array}{llll}
g_1(h) & & & \\
g_1\left(\frac{h}{2}\right) & g_2(h) & & \\
g_1\left(\frac{h}{4}\right) & g_2\left(\frac{h}{2}\right) & g_3(h) & \\
g_1\left(\frac{h}{8}\right) & g_2\left(\frac{h}{4}\right) & g_3\left(\frac{h}{4}\right) & g_4(h)
\end{array}$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ $g(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$g_2(h)=\frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right)-g_1(h)\right]$$

$$g_3(h)=\frac{1}{15}\cdot\left[16\cdot g_2\left(\frac{h}{2}\right)-g_2(h)\right]$$

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)$ $g_2(h)$

$g_1\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_2\left(\frac{h}{2}\right)$ $g_3(h)$

$g_1\left(\frac{h}{8}\right)$ $g_2\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_3\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_4(h)$

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x)=\sqrt{3x}\sin\sqrt{5x};\quad x_0=5;\quad h=0,05$$

$$f'(5)=\frac{3\sin\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{5\sqrt{3\cdot 5}\cos\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{5\cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k - 1} \cdot \left[4^k \cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h) \right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right) \quad g_2(h)$

$g_1\left(\frac{h}{4}\right) \quad g_2\left(\frac{h}{2}\right) \quad g_3(h)$

$g_1\left(\frac{h}{8}\right) \quad g_2\left(\frac{h}{4}\right) \quad g_3\left(\frac{h}{4}\right) \quad g_4(h)$

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x) = \sqrt{3x}\sin\sqrt{5x}; \quad x_0 = 5; \quad h = 0,05$$

$$f'(5) = \frac{3\sin\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{3\cdot 5}} + \frac{5\sqrt{3\cdot 5}\cos\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{5\cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$$\begin{array}{llll}
g_1(h) & & & \\
g_1\left(\frac{h}{2}\right) & g_2(h) & & \\
g_1\left(\frac{h}{4}\right) & g_2\left(\frac{h}{2}\right) & g_3(h) & \\
g_1\left(\frac{h}{8}\right) & g_2\left(\frac{h}{4}\right) & g_3\left(\frac{h}{4}\right) & g_4(h)
\end{array}$$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\approx 0{,}177\ 850\ 965$$

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x)=\sqrt{3x}\sin\sqrt{5x};\quad x_0=5;\quad h=0{,}05$$

$$f'(5)=\frac{3\sin\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{5\sqrt{3\cdot 5}\cos\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{5\cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k - 1} \cdot \left[4^k \cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h) \right]$$

Schématický zápis:

$$\begin{array}{llll}
g_1(h) & & & \\
g_1\left(\frac{h}{2}\right) & g_2(h) & & \\
g_1\left(\frac{h}{4}\right) & g_2\left(\frac{h}{2}\right) & g_3(h) & \\
g_1\left(\frac{h}{8}\right) & g_2\left(\frac{h}{4}\right) & g_3\left(\frac{h}{4}\right) & g_4(h)
\end{array}$$

$$g_1(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \approx 0{,}177\ 850\ 965$$

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x) = \sqrt{3x} \sin \sqrt{5x}; \quad x_0 = 5; \quad h = 0{,}05$$

$$f'(5) = \frac{3 \sin \sqrt{5 \cdot 5}}{2\sqrt{3 \cdot 5}} + \frac{5\sqrt{3 \cdot 5} \cos \sqrt{5 \cdot 5}}{2\sqrt{5 \cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k - 1} \cdot \left[4^k \cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h) \right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right) \quad g_2(h)$

$g_1\left(\frac{h}{4}\right) \quad g_2\left(\frac{h}{2}\right) \quad g_3(h)$

$g_1\left(\frac{h}{8}\right) \quad g_2\left(\frac{h}{4}\right) \quad g_3\left(\frac{h}{4}\right) \quad g_4(h)$

$$g_1(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \approx 0{,}177\ 850\ 965$$

0,177 850 965

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x) = \sqrt{3x}\sin\sqrt{5x}; \quad x_0 = 5; \quad h = 0{,}05$$

$$f'(5) = \frac{3\sin\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{3\cdot 5}} + \frac{5\sqrt{3\cdot 5}\cos\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{5\cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference

$$g_{k+1}(h)=\frac{1}{4^k-1}\cdot\left[4^k\cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right)-g_k(h)\right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)\quad g_2(h)$

$g_1\left(\frac{h}{4}\right)\quad g_2\left(\frac{h}{2}\right)\quad g_3(h)$

$g_1\left(\frac{h}{8}\right)\quad g_2\left(\frac{h}{4}\right)\quad g_3\left(\frac{h}{4}\right)\quad g_4(h)$

$$g_1(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\approx 0{,}177\ 850\ 965$$

0,177 850 965

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x)=\sqrt{3x}\sin\sqrt{5x};\quad x_0=5;\quad h=0{,}05$$

$$f'(5)=\frac{3\sin\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{5\sqrt{3\cdot 5}\cos\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{5\cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k - 1} \cdot \left[4^k \cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h) \right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)$ $g_2(h)$

$g_1\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_2\left(\frac{h}{2}\right)$ $g_3(h)$

$g_1\left(\frac{h}{8}\right)$ $g_2\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_3\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_4(h)$

$$g_1\left(\tfrac{h}{2}\right) = \frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{2\frac{h}{2}} \approx 0{,}177\ 902\ 504$$

0,177 850 965
0,177 902 504

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x) = \sqrt{3x}\sin\sqrt{5x}; \quad x_0 = 5; \quad h = 0{,}05$$

$$f'(5) = \frac{3\sin\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{3\cdot 5}} + \frac{5\sqrt{3\cdot 5}\cos\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{5\cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k - 1} \cdot \left[4^k \cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h) \right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1\left(\frac{h}{2}\right)$ $g_2(h)$

$g_1\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_2\left(\frac{h}{2}\right)$ $g_3(h)$

$g_1\left(\frac{h}{8}\right)$ $g_2\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_3\left(\frac{h}{4}\right)$ $g_4(h)$

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x) = \sqrt{3x}\sin\sqrt{5x};\quad x_0 = 5;\quad h = 0{,}05$$

$$f'(5) = \frac{3\sin\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{3\cdot 5}} + \frac{5\sqrt{3\cdot 5}\cos\sqrt{5\cdot 5}}{2\sqrt{5\cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$

$$g_2(h) = \frac{1}{3}\cdot\left[4\cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right) - g_1(h)\right] = \frac{1}{3}\cdot[4\cdot 0{,}177\ 902\ 504 - 0{,}177\ 850\ 965] = 0{,}177\ 919\ 684$$

0,177 850 965

0,177 902 504 0,177 919 684

ad 3) Derivaci počítáme přibližně pomocí diferencí.

Richardsonova extrapolace:

Centrální diference

$$g_{k+1}(h) = \frac{1}{4^k - 1} \cdot \left[4^k \cdot g_k\left(\frac{h}{2}\right) - g_k(h) \right]$$

Schématický zápis:

$g_1(h)$

$g_1(\tfrac{h}{2})$ $g_2(h)$

$g_1(\tfrac{h}{4})$ $g_2(\tfrac{h}{2})$ $g_3(h)$

$g_1(\tfrac{h}{8})$ $g_2(\tfrac{h}{4})$ $g_3(\tfrac{h}{4})$ $g_4(h)$

$$g_2(h) = \frac{1}{3} \cdot \left[4 \cdot g_1\left(\frac{h}{2}\right) - g_1(h) \right] = \frac{1}{3} \cdot [4 \cdot 0{,}177\ 902\ 504 - 0{,}177\ 850\ 965] = 0{,}177\ 919\ 684$$

0,177 850 965

0,177 902 504 0,177 919 684

atd.

Příklad (přesná hodnota):

$$f(x) = \sqrt{3x} \sin\sqrt{5x}; \quad x_0 = 5; \quad h = 0{,}05$$

$$f'(5) = \frac{3 \sin\sqrt{5 \cdot 5}}{2\sqrt{3 \cdot 5}} + \frac{5\sqrt{3 \cdot 5} \cos\sqrt{5 \cdot 5}}{2\sqrt{5 \cdot 5}}$$

$$\approx 0.177\ 919\ 686$$