

## Vzorové zadání první zápočtové písemky z SA1 (2019/20)

Okruhy otázek:

- Výroková logika (logické spojky a negace, výrokové formule, tautologie, kontradikce, výrokové formy, kvantifikované výroky);
- Důkazové techniky (důkaz přímý, nepřímý, sporem, matematická indukce);
- Množiny a operace s množinami;
- Relace (speciální relace na množině, skládání relací, inverzní relace);
- Zobrazení (definiční obor a obor hodnot, zobrazení prosté, surjektivní a bijektivní);
- Posloupnosti (limita, hromadný bod,  $\limsup$ ,  $\liminf$ );
- Reálné funkce (definiční obor a obor hodnot, ohraničenost, sudost a lichost, periodičnost, monotonie, složená a inverzní funkce, elementární funkce).

Jedna otázka bude ryze teoretická – je potřeba znát:

- Definice relace mezi množinami a na množině (definice reflexivnosti, symetrie, antisymetrie, asymetrie, tranzitivity, ekvivalence, uspořádání, ostrého uspořádání), definice rozkladu množiny;
- Definice zobrazení (definiční obor a obor hodnot, zobrazení injektivní, surjektivní a bijektivní);
- Definice inverzního zobrazení a věta o jeho existenci;
- Definice limity posloupnosti a hromadného bodu a cauchyovské posloupnosti;
- Věta o jednoznačnosti limity, Bolzanova–Weierstrassova věta, Cauchyovo–Bolzanovo kritérium konvergence;
- Definice funkce a inverzní funkce, definice sudé, liché, periodické, monotónní, konvexní a konkávní funkce.

1. a) Rozhodněte, zda výrokové formule

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \quad \text{a} \quad \neg C \Rightarrow (\neg B \vee \neg A)$$

jsou logicky ekvivalentní.

b) Výrok „Dorazí Pavel, právě když dorazí Lenka“ lze znegovat třemi způsoby (bez použití obratu „není pravda, že...“). Napište všechny tři možnosti.

2. Matematickou indukcí dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a každé  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$  platí

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

3. Je dána množina  $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ . Uvažujte na  $A$  relaci

$$R = \{[\gamma, \beta], [\alpha, \alpha], [\beta, \gamma]\}.$$

a) K prvkům relace doplňte minimální počet prvků  $A \times A$  tak, aby nově vzniklá relace byla reflexivní a symetrická zároveň.

b) Je nově vzniklá relace z bodu a) také tranzitivní? Pokud ano, napište příslušný rozklad množiny  $A$ , pokud ne, doplňte další dvojice tak, aby byla tranzitivní a napište rozklad  $A$ .

4. Určete limitu posloupnosti

$$\left\{ \frac{3^n n + 1}{n! + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

5. a) Rozhodněte, zda relace  $f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x-1| + |y| = 0\}$  je zobrazením.

b) Uvažujte funkci  $f(x) = 1 + \arccos(2x-1)$ . Určete definiční obor funkce, a zjistěte, zda je zde funkce prostá. Pokud ano, určete funkci inverzní a načrtněte graf původní a inverzní funkce do jednoho obrázku.

6. Jedna teoretická otázka (viz výše).