

# ZÁPOČTOVÁ PRÁCE Z MATEMATIKY 1M-K

K udělení zápočtu postačuje správné vyřešení poloviny příkladů.

Termín odevzdání od 29. 9. 2023, 20.00 do 4. 1. 2024, 12.00.

(Příklady slouží rovněž jako příprava ke zkoušce.)

Zkoušející: J. Klaška

**TÉMA 1.** (lineární algebra, determinanty)

Určete všechna  $x \in \mathbb{R}$ , pro která je matice  $M$  singulární.

$$(a) \quad M = \begin{bmatrix} x & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad (b) \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**TÉMA 2.** (lineární algebra, maticové rovnice, soustavy rovnic)

(a) Řešte maticovou rovnici  $XA = B$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 4 \\ 4x - y + 3z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= 2 \\ 7x + 8y - 3z &= 7 \end{aligned}.$$

(c) Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -3 \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}.$$

**TÉMA 3.** (analytická geometrie)

Jsou dány body  $A = [2, 1, 3]$ ,  $B = [3, 4, 1]$  a  $C = [7, 2, 4]$ . Řešte následující úlohy:

- (a) Určete obecnou rovnici roviny  $\alpha$  definovanou body  $A, B, C$ .
- (b) Nalezněte průnik roviny  $\alpha$  s přímkou  $p$  určenou body  $R = [3, 6, 2]$ ,  $S = [5, 2, 9]$ .
- (c) Vypočtete obsah trojúhelníku  $A, B, C$ .
- (d) Vypočtete objem čtyřstěnu  $ABCQ$ , kde  $Q = [8, 3, 2]$ .

**TÉMA 4.** (diferenciální počet, definiční obor)

Vyšetřete definiční obory funkcí

$$(a) f(x) = \frac{\ln(x+5)}{\sqrt{x^2-5x+6}}, \quad (b) f(x) = \sqrt{2-\ln(3x+4)}, \quad (c) f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\log^2(x)-\log(x)-6}.$$

**TÉMA 5.** (diferenciální počet, derivace)

Vypočtěte a upravte na co nejjednodušší tvar první a druhou derivaci funkce  $f(x)$ .

$$(a) f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right), \quad (b) f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \quad (c) f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right).$$

**TÉMA 6.** (diferenciální počet, Taylorův polynom)

Vypočtěte Taylorův polynom  $T_n(x)$  stupně  $n$  funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$ .

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, \quad n=1, \quad x_0=4, \quad (b) f(x) = \frac{1-x}{e^x+1}, \quad n=2, \quad x_0=0.$$

**TÉMA 7.** (diferenciální počet, limita)

Vypočtěte limity

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x - \operatorname{tg}(x)}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos(x)}}{\sqrt{x+1}}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg}(x)}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

**TÉMA 8.** (diferenciální počet, průběh funkce)

Vyšetřete průběhy funkcí

$$(a) f(x) = x(x+1)^2(x-2), \quad (b) f(x) = \ln(x^3+1), \quad (c) f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

**TÉMA 9.** (neurčitý integrál)

Vypočtěte integrály

$$(a) \int \frac{x+2}{x^3-3x^2+2x} dx, \quad (b) \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx, \quad (c) \int \sin \sqrt{x} dx.$$

**TÉMA 10.** (určitý integrál – aplikace)

(a) Vypočtěte obsah části roviny  $M$  ohraničené křivkami  $y = \sqrt{x-2}$  a  $2y = x-2$ . Nakreslete obrázek  $M$ .

(b) Vypočtěte objem rotačního tělesa  $T$ , které vznikne rotací grafu funkce

$$f(x) = \sqrt{\cos(x) \cdot e^{\sin(x)}} \quad \text{na intervalu } <0, \pi/2> \quad \text{kolem osy } x.$$